УДК 313.42

Последействие в паутинообразной модели

Воронин А.В., Гунько О.В.

Экономическая наука оперирует такими понятиями как количество товаров и их цена. На каждом рынке существуют группы продавцов и покупателей. В модели одного рынка переменными, т.е. зависящими от времени, являются объёмы покупаемых и продаваемых товаров, а также их цены. Базовым принципом моделирования рыночного взаимодействия служит формирование балансовых соотношений между объемами спроса и предложения товара. П. Самуэльсон [1] утверждал, что задачей сравнительной статики является исследование процесса детерминирования равновесных значений некоторых неизвестных переменных при постулируемых условиях (функциональных соотношениях) и различных данных (параметрах). То есть, в самом простом случае однотоварного рынка два независимых аналитических выражения для спроса и предложения своим пересечением определяют равновесные цены и объемы.

Проблема совместного действия спроса и предложения как индикаторов, определяющих количественные взаимосвязи между объемом товара и ценой на данном рынке, очень точно охарактеризована А. Маршаллом [2]: «Мы могли бы с равным основанием спорить о том, что регулируется ли стоимость полезностью или издержками производства, как и о том, разрезает ли кусок бумаги верхнее или нижнее лезвие ножниц. Действительно, когда лезвие удерживается в неподвижном состоянии, а резание осуществляется движением другого лезвия, мы можем, как следует не подумав, утверждать, что резание производит второе, однако такое утверждение не является совершенно точным и оправдать его можно лишь претензией на простую популярность, а не строго научным описанием совершаемого процесса».

В настоящей работе будут рассматриваться динамические модели взаимодействия спроса и предложения как функции цены в дискретном времени. Иначе говоря, время принимает только целочисленные значения $t = 0,1,2,\ldots,n$, а соответственно цена определяется как $p(0), p(1), p(2),..., p(n)$. При этом предполагается заданный явный вид функции спроса $D(p)$ и функции предложения $S(p)$. Одной из самых простых моделей принято считать так называемую «паутинообразную» модель ценообразования. Хорошо известно, следуя Р. Аллену, что динамическая модель получается при условии реагирования предложения на возникающий спрос только после определенного временного лага. Это может случиться, если для производства и доставки на рынок рассматриваемого товара требуется определенный интервал времени. Не конкретизируя вид функций спроса и предложения, функциональное взаимодействие имеет представление

$$D(p_{n+1}) = S(p_n), \tag{1}$$

с известным начальным значением цены p_0. Если ввести понятие конечной разности для величины спроса в виде

$$\Delta D(p_n) = D(p_{n+1}) - D(p_n),$$

то по формуле (1) получим иное представление

$$\Delta D(p_n) = S(p_n) - D(p_n) \tag{2}$$

Модель (2) имеет простой экономический смысл: движущей силой процесса и предложения есть наличие избыточного спроса $\Delta D(p)$. При $\Delta D(p) = 0$ реализуется статический равновесный режим. Формулы (1) и (2) являются базовыми для построения различных моделей ценообразования при одношаговом запаздывании.

Рассмотрим несколько иное динамическое взаимодействие спроса и предложения, при котором спрос в настоящий момент времени равен суммарному предложению от всех прошлых временных шагов. Наиболее простой моделью распределенного запаздывания считается убывающая геометрическая прогрессия, имеющая смысл «динамической памяти» о предыдущих состояниях исследуемой системы.

Данную модель предъявим в форме соотношения:

$$D(p_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (1-b) b^{n-i} S(p_i) \tag{3}$$

где $0 < b < 1$ - знаменатель убывающей геометрической прогрессии. В результате преобразований (3) нетрудно получить

$$D(p_{n+1}) = b\sum_{i=0}^{n-1}(1-b)b^{n-i-1}S(p_i) + (1-b)S(p_n)$$

или

$$D(p_{n+1}) = b\sum_{i=0}^{n-1}(1-b)b^{n-i-1}S(p_i) + (1-b)S(p_n) \qquad (4)$$

Вычитая из левой и правой частей (4) величину $D(p_n)$, имеем

$$\Delta D(p_n) = (1-b)\big(S(p_n) - D(p_n)\big) \qquad (5)$$

Аналогично с формулой (2), можно утверждать, что в случае геометрически распределенного запаздывания приращение спроса пропорционально фактической разнице между спросом и предложением.

Предположим, что имеет место ситуация на рынке, когда допустимо считать зависимости спроса и предложения от цены линейными функциями:

$$D(p) = d_0 - d_1 p, \qquad S(p) = S_1 p - S_0 \qquad (6)$$

где d_0, d_1, S_0, S_1 - положительные постоянные параметры. Из равенства $D(p) = S(p)$ легко определить единственное положение равновесия:

$$p^* = \frac{S_0 + d_0}{S_1 + d_1} \qquad (7)$$

В условиях действия модели (1) имеет место

$$d_0 - d_1 p_{n+1} = S_1 p_n - S_0.$$

С учетом (7) последнее выражение трансформируется к виду

$$\tilde{p}_{n+1} = -\frac{S_1}{d_1}\tilde{p}_n \qquad (8)$$

где $\tilde{p}_n = p_n - p^*$ – отклонение от равновесной цены. Решение (8) имеет явное представление:

$$\tilde{p}_n = \left(\frac{-S_1}{d_1}\right)^n \left(p_0 - p^*\right) \quad \text{или} \quad \tilde{p}_n = \left(\frac{-S_1}{d_1}\right)^n \left(p_0 - p^*\right) \qquad (9)$$

Очевидно [3], что при $S_1 > d_1$ имеют место взрывные колебания, а при $S_1 < d_1$ затухающие колебания. В случае $S_1 = d_1$ будут чередоваться значения p_0 и $-p_0$, т.е. будут происходить регулярные колебания с постоянной амплитудой.

В случае экономического механизма формирования рыночной цены с учетом эффекта последействия, описываемого при помощи уравнений (5)-(7), получим разностное соотношение:

$$-d_1\left(p_{n+1} - p_n\right) = (1-b)\left((S_1 + d_1)p_n - S_0 - d_0\right)$$

После замены $\tilde{p}_n = p_n - p^*$ следует:

$$\tilde{p}_{n+1} = \left(b - (1-b)\frac{S_1}{d_1}\right)\tilde{p}_n. \tag{10}$$

Для уравнения (10) нетрудно предъявить явное решение

$$\tilde{p}_n = \left(b - (1-b)\frac{S_1}{d_1}\right)^n \left(p_0 - p^*\right),$$

а возвращаясь к исходной переменной p_n, будем иметь

$$p_n = p^* + \left(b - (1-b)\frac{S_1}{d_1}\right)^n \left(p_0 - p^*\right) \tag{11}$$

Для получения устойчивых решений (11) необходимо и достаточно выполнения условия

$$\left|b - (1-b)\frac{S_1}{d_1}\right| < 1,$$

что в свою очередь, равносильно следующему неравенству:

$$\frac{S_1}{d_1} < \frac{1+b}{1-b} \tag{12}$$

Следует обратить внимание на то обстоятельство, что всегда справедливо

$$\frac{1+b}{1-b} > 1$$

при любых b $(0 < b < 1)$. Например, неравенство (12) при $b = \frac{1}{2}$ примет вид

$$\frac{S_1}{d_1} < 3.$$

Также отметим, что при выполнении условия устойчивости (12) цена p_n будет совершать колебания вокруг равновесия p^* с затухающей амплитудой.

В самом общем случае распределенного запаздывания используется балансовое выражение

$$D(p_n) = \sum_{i=0}^{n-1} K(n-1,i) S(p_i) \tag{13}$$

где $K(n-1,i)$ – весовые коэффициенты предшествующих временных шагов на стороне предложения. Если в (13) подставить формулы (6), то получим

$$d_0 - d_1 p_n = \sum_{i=0}^{n-1} K(n-1,i)(S_1 p_i - S_0)$$

или

$$p_n + \lambda \sum_{i=0}^{n-1} K(n-1,i) p_i = r_n \tag{14}$$

где $\lambda = \frac{S_1}{d_1}$, $\qquad r_n = \frac{d_0 + S_0 \sum_{i=0}^{n-1} K(n-1,i)}{d_1}$.

Уравнение (14) есть ни что иное как разностное линейное уравнение вольтерровского типа для нахождения цены p_n.

По поводу решения уравнения (14) в самом общем случае можно сказать, что оно имеет представление в форме

$$p_n = r_n + \sum_{i=0}^{n-1} R(n-1,i) \cdot r_i \tag{15}$$

где $R(n-1,i)$ - резольвента уравнения (14). Важным здесь является тот факт, что резольвента $R(n-1,i)$ зависит только лишь от вида ядра $K(n-1,i)$ и не зависит от правой части r_n.

В значимом частном случае, когда ядро $K(n-1,i)$ является разностным, т.е. $K(n-1,i) = K(n-1-i)$ представляется удобным применять Z - преобразование,

$$p(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{z^k}$$

Используя данное преобразование по отношению к уравнению (14) , получим алгебраическое уравнение для $p(z)$:

$$\frac{d_0 z}{z-1}-d_1 p(z)=\frac{K(z)}{z}\left(S_1 p(z)-\frac{S_0 z}{z-1}\right)$$

или

$$p(z)=\frac{z}{z-1}\frac{d_0+\frac{K(z)}{z}S_0}{d_1+\frac{K(z)}{z}S_1} \tag{16}$$

$\frac{K(z)}{z}$ – преобразование ядра $K(n-1-i)$. Зная явный вид $K(z)$ при помощи таблиц обратного преобразования $[4]$ может быть найдено p_n без необходимости явного вычисления резольвенты $R(n-1-i)$.

Рассмотрим еще один важный частный случай, когда ядро $K(n-1-i)$ является вырожденным, т.е. допускает разделение переменных, например, $K(n-1,i)=\frac{n(i)}{\varphi(n)}$. В таком случае будем иметь

$$D(p_n)=\frac{1}{\varphi(n)}\sum_{i=0}^{n-1}\eta(i)S(p_i).$$

Формальный переход на $n+1$ - й шаг даёт

$$D(p_{n+1})=\frac{1}{\varphi(n+1)}\sum_{i=0}^{n-1}\eta(i)S(p_i)$$

и далее

$$D(p_{n+1})=\frac{1}{\varphi(n+1)}(\varphi(n)D(p_n)+\eta(n)S(p_n))$$

Если выбрать $\eta(n)=\varphi(n+1)-\varphi(n)=\Delta\varphi(n)$, то

$$\Delta D(p_n)=\frac{\Delta\varphi(n)}{\varphi(n+1)}(S(p_n)-D(p_n)) \tag{17}$$

Формула (17) демонстрирует нам нестационарную зависимость приращения спроса от избыточного спроса, кроме случая $\Delta\varphi(n)=c\varphi(n+1)$, где C − константа (очевидно, что это прямо соответствует геометрической прогрессии). С учётом линейных связей (6) уравнение (17) примет форму

$$-d_1(p_{n+1}-p_n)=\left(1-\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}\right)((S_1+d_1)p_n-(S_0+d_0))$$

Пусть $x_n=p_n-\dfrac{S_0+d_0}{S_1+d_1}=p_n-p^*$ и тогда

$$\frac{-(x_{n+1}-x_n)}{1+\dfrac{S_1}{d_1}}=\left(1-\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}\right)x_n$$

или

$$x_{n+1}=\left((1+\lambda)\frac{\varphi(n)}{\varphi(n+1)}-\lambda\right)x_n\ ,\quad \lambda=\frac{S_1}{d_1}, \tag{18}$$

Очевидно, что (18) имеет простое решение

$$x(n)=\prod_{i=1}^{n-1}\left[(1+\lambda)\frac{\varphi(i)}{\varphi(i+1)}-\lambda\right]x_0, \qquad x_0=p_0-p^* \tag{19}$$

Исследуем один важный частный случай, при котором спрос в настоящий момент определяется средним арифметическим предложения во все предыдущие временные шаги , т.е.

$$D(p_n)=\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1}S(p_i)$$

Нетрудно показать, что уравнение (18) преобразуется к виду

$$x_{n+1}=\left((1+\lambda)\frac{n}{n+1}-\lambda\right)x_n$$

и допускает упрощение

$$x_{n+1}=\frac{n-\lambda}{n+1}x_n \tag{20}$$

Решение (19), соответственно, получается в форме

$$x_{n+1} = \prod_{i=1}^{n-1} \frac{i-\lambda}{i+1} x_0 = \frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(n+1)} x_0 \qquad (21)$$

где $\Gamma(n)$- гамма-функция, причем $\Gamma(n+1) = n!$. Возвращаясь к исходной переменной p_n, имеем

$$p_n = \frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(n+1)} p_0 + \left(1 - \frac{\Gamma(n-\lambda)}{\Gamma(n+1)}\right) p^* \qquad (22)$$

Также следует отметить, что решения (21) и (22) равномерно устойчивы, т.к. отношение гамма-функций, присутствующих в решениях, ограничено [5]. На рис.1 представлены зависимость (21) от числа шагов при различных значениях λ. Данную величину следует понимать как отношение эластичности предложения к эластичности спроса.

$$n := 2, 3 .. 8 \qquad \lambda := 0.25 \qquad \lambda1 := 0.4 \qquad \lambda2 := 0.6$$

$$x(n) := \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(i-\lambda)}{i+1} \qquad x1(n) := \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(i-\lambda1)}{i+1} \qquad x2(n) := \prod_{i=1}^{n-1} \frac{(i-\lambda2)}{i+1}$$

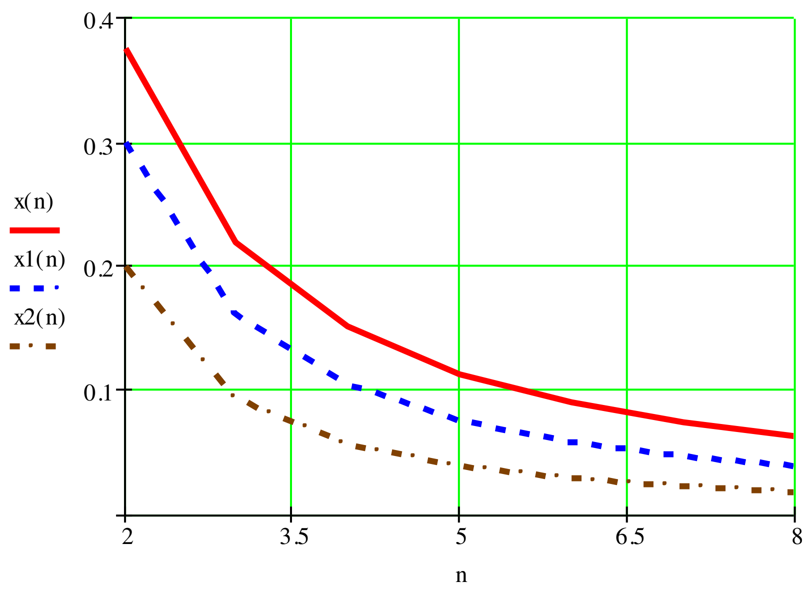

Рис. 1. **Дискретная зависимость решения x_n, вычисленная по формуле (21) при различных $\lambda = 0.25; 0.4; 0.6$.**

Предположим, что в уравнении (14) имеется вырожденное ядро общего вида:

$$K(n-1, i) = -\frac{1}{\lambda} \sum_{j=1}^{m} \xi_j(n) \eta_j(i)$$

В таком случае из (14) получим соотношение:

$$p_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} \xi_j(n) \eta_j(i) p_i + r_n \tag{23}$$

Домножим обе части (23) на $\eta_j(n), \quad j = \overline{1,m}$ и введем новую переменную $y_j(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \eta_j(i) p_i$. При этом очевидно, что $\eta_j(n) p_n = y_j(n+1) - y_j(n)$. В результате преобразований получим:

$$y_j(n+1) = y_j(n) + \eta_j(n) \sum_{l=1}^{m} \xi_l(i) y_l(n) + \eta_j(n) r_n \quad j = \overline{1,m}, \tag{24}$$

$$p_n = \sum_{l=1}^{m} \xi_j(n) y_j(n) + r_n \tag{25}$$

Система уравнений (24),(25) является замкнутой и вполне удобна для численного определения искомой цены p_n. Представим (24) в векторно-матричной форме

$$Y(n+1) = A(n) Y(n) + Q(n) \tag{26}$$

где $Y(n)$ - m- мерный вектор с компонентами $y_j(n), \quad j = \overline{1,m}$;

$Q(n)$ - m- мерный вектор с компонентами $\eta_j(n) r_n, \quad j = \overline{1,m}$;

$A(n)$ - $m \times m$- матрица с элементами $a_{ij}(n) = \delta_{ij} + \xi_i(n) \eta_j(n), \quad i, j = \overline{1,m}$;

$\delta_{ij} = \begin{Bmatrix} 0, i \neq j \\ 1, i = j \end{Bmatrix}$ символ Кронрекера.

Из (26) следует, что

$$Y(n) = \sum_{i=0}^{n-1} \Phi(n-1, i) Q(i)$$

где $\Phi(n-1, i) = \prod_{l=i+1}^{n-1} A(l)$.

Отсюда можно получить выражение

$$p_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \xi_j(n)\varphi_{jl}(n-1,i)\eta_l(i)r_i + r_n \quad (28)$$

Таким образом, очевидна формула для резольвенты:

$$R(n-1,i) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} \xi_j(n)\varphi_{jl}(n-1,i)\eta_l(i) \quad (29)$$

В заключение хотелось бы подчеркнуть, что потенциал на первый взгляд «простых» моделей «спрос-предложение» далеко не исчерпан. Мы убедились какое богатое динамическое поведение может демонстрировать ценовая зависимость на рынке одного товара при попытке учитывать эффект последействия, где запаздывание играет роль возвращающей силы, генерирующей колебательные процессы. Кроме того, следует отметить линейность рассмотренных моделей, что допускает применение традиционного аппарата эконометрического анализа дискретных динамических систем.

Аннотация

Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию традиционной паутинообразной модели «спрос-предложение» в рамках методологии, созданной Л. Вальрасом и П. Самуэльсоном. В основу построения модели положен принцип учета эффекта последействия на стороне предложения по принципу убывающей «динамической памяти» . Математическая модель исследуемого процесса представлена в виде линейных разностных уравнений вольтерровского типа для динамики цены на рынке одного товара. Рассмотрен ряд моделей с вырожденными вольтерровскими ядрами специальных типов, имеющих прикладное значение в экономической динамике. Выполнен параметрический анализ устойчивости положений равновесия всех вышеуказанных моделей с числовыми расчетами. Сделан вывод о возможности применения эконометрического анализа вследствии линейности рассмотренных математических моделей.

Анотація

Представлена робота присвячена подальшому розвитку традиційної павутиноподібної моделі «попит-пропозиція» в рамках методології, створеної Л. Вальрасом і П. Самуельсоном. В основу побудови моделі покладено принцип урахування ефекту післядії на стороні пропозиції за принципом спадної «динамічної пам'яті». Математична модель досліджуваного процесу представлена у вигляді лінійних різницевих рівнянь вольтерровского типу для динаміки ціни на ринку одного товару. Розглянуто ряд моделей з виродженими вольтерівськими ядрами спеціальних типів, що мають прикладне значення в економічній динаміці. Виконано параметричний аналіз стійкості положень рівноваги всіх вищевка-заних моделей з числовими розрахунками. Зроблено висновок про можливість застосування економетричного аналізу внаслідок лінійності розглянутих математичних моделей.

Литература

1. Самуэльсон П.А. Основания экономического анализа / Пер. с англ. СПб: Экономическая школа, 2002.- 604 с.
2. Маршалл А. Принципы политической экономии.- М.: Экономика, 1984.- Т.2.- с.31-32.
3. Аллен Р. Математическая экономия.- М.: Издательство иностранной литературы, 1963- 668 с.
4. Макаров И.М. Менский Б.М. Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных Z-преобразований: дробно-рациональные выражения: Учеб. пособие для ВТУЗов.-М.: Высшая школа, 1978.-247 с.
5. Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. – М.- Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика, Институт компьютерных исследований, 2006.-360с.