УДК 519.863

ВИЗНАЧЕННЯ ОПТИМАЛЬНОГО ПОРТФЕЛЯ ЦІННИХ ПАПЕРІВ З ВИКОРИСТАННЯМ ФУНКЦІЇ QUADPROG В СЕРЕДОВИЩІ MATLAB

Ковальова Катерина Олександрівна, к.т.н., ХНЕУ ім. Семена Кузнеця, м. Харків, Україна

Анотація — **На прикладі моделі Марковіца оптимізації портфеля цінних паперів розглянуто особливості використання функції quadprog квадратичного програмування середовища Matlab.**

Ключові слова — **Квадратичне програмування, модель Марковіца, середовище Matlab, функція quadprog.**

Гаррі Марковіц сформулював задачу оптимізації портфеля цінних паперів як задачу квадратичного програмування [1]:

$$F = x^T \sum x \to \min, \quad (1)$$

$$\overline{p}^T x \ge r_{\min}, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \le B, \quad (3)$$

$$x_i \ge 0, i = \overline{1,n} \quad (4)$$

У задачі мінімізується ризик портфеля, який визначається рівним варіації портфеля (1), при гарантованому середньому поверненні $r_{\min}$ (2) і виконанні бюджетного обмеження (3). У базовій моделі короткі позиції не допускаються (4).

У середовищі Matlab задачі квадратичного програмування вирішуються за допомогою функції quadprog [2]. Функція quadprog вирішує задачу квадратичного програмування у вигляді

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}x^T \cdot H \cdot x + F^T \cdot x \to \min \\ &A \cdot x \le b, \\ &Aeq \cdot x = beq, \\ &lb \le x \le ub \end{aligned} \quad (5)$$

Основними вхідними параметрами quadprog є: матриця H і вектор f з цільової функції, матриця обмежень-нерівностей A, вектор правих частин обмежень-нерівностей b, матриця обмежень-рівностей Aeq, вектор правих частин обмежень-рівностей beq, вектор lb, що обмежує план x знизу, вектор ub, що обмежує план x зверху.

На виході функція quadprog видає оптимальний план x задачі (5) і екстремальне значення цільової функції *fval*. Якщо матриця H несиметрична, то Matlab замінює її на $\left(H + H^T\right)/2$ (при цьому значення цільової функції не змінюється).

Як приклад використання функції quadprog розглянемо портфель з трьох активів, який був сформований за вихідними даними Ждановим І. Ю. [3]. Складемо задачу квадратичного програмування:

$$\begin{aligned} &F = 0.04x_1^2 + 0.01x_2^2 + 0.0025x_3^2 + \\ &+ 0.0012x_1x_2 - 0.0008x_1x_3 \to \min \\ &1.12x_1 + 1.1x_2 + 1.07x_3 \ge r_{\min}, \\ &x_1 + x_2 + x_3 = B, \\ &x_i \ge 0, i = \overline{1,3} \end{aligned} \quad (6)$$

Спочатку необхідно перетворити вихідні дані задачі до виду (5). Вектор-стовпець плану x має вигляд $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$, тоді матрицю H знаходимо з рівняння:

$$H = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{pmatrix} h_{11}x_1^2 + h_{21}x_1x_2 + h_{31}x_1x_3 + \\ h_{12}x_1x_2 + h_{22}x_2^2 + h_{32}x_2x_3 + \\ h_{13}x_1x_3 + h_{23}x_2x_3 + h_{33}x_3^2 \end{pmatrix} = F^T \cdot x.$$

Отже, матриця H дорівнює

$$H = \begin{bmatrix} 0.08 & 0.0012 & -0.0008 \\ 0.0012 & 0.02 & 0 \\ -0.0008 & 0 & 0.005 \end{bmatrix}.$$

Коефіцієнти лінійної частини цільової функції заповнять вектор-строку масиву $f = [0 \quad 0 \quad 0]$.

Зауважимо, що вважаючи в (6) $B = 1$, ми обчислимо частку x_i активів, вкладених у i-ий актив ($i = \overline{1,3}$).

Вирішимо в Matlab задачу квадратичного програмування. Відповідна програма (m-файл) виглядає так:

```
clc
clear all
H=[0.08 0.0012 -0.0008;0.0012 0.02 0;-
0.0008 0 0.005];
f = [0 0 0];
A = [-1.12 -1.1 -1.07];
b = [-0.05];
Aeq = [1 1 1];
beq = [1];
lb = zeros(3,1);
[x,fval,exitflag,output]=quadprog(H,f,A
,b,Aeq,beq,lb);
x
fval
exitflag
output.iterations
output.algorithm
```

Необхідно звернути увагу, що в програмі елементи матриць A і b взяті з протилежними знаками. Знаки «-» з'являються, так як обмеження-нерівності $A \cdot x \geq b$ приводяться до вигляду $-A \cdot x \leq -b$.

Запустивши програму, отримаємо

```
Optimization terminated.
  x =
      0.0520
      0.1854
      0.7626
  fval =
      0.0019
  exitflag = 1
  ans = 1
  ans =
  medium-scale: active-set
```

Отже, при гарантованому середньому поверненні $r_{\min} = 5\%$ частка першого активу становить 0,052, частка другого дорівнює 0,185 і частка третього активу становить 0,763. Загальний ризик склав 19 %.

Додатково можна задати початкове наближення x_0:

```
  [x,fval] = quadprog (H, f, A, b,
Aeq, beq, lb, ub, x0);
```

Якщо якийсь із вхідних параметрів відсутній, на його місце слід поставити квадратні дужки [], за винятком випадку, коли це останній параметр у списку. Наприклад, якщо потрібно вирішити задачу без обмежень-рівностей, в яких не задано початкове наближення, то оператор виклику функції quadprog буде виглядати так:

```
  [x, fval] = quadprog (H, f, A, b,
[], [], lb, ub);
```

Квадратні дужки в кінці списку, що відповідають початковому наближенню, не ставляться.

За допомогою вхідного параметра options встановлюються деякі додаткові параметри, зокрема, вибирається алгоритм рішення. Matlab розв'язує задачі квадратичного програмування двома способами: алгоритмом внутрішньої точки (Large-Scale Algorithm) і методом перебору граней (Medium-Scale Algorithm). За замовчуванням використовується алгоритм внутрішньої точки. Щоб вибрати метод перебору граней, потрібно написати

```
options=optimset('LargeScale','off');
[x,fval,exitflag,output]=quadprog(H,f,A
,b,Aeq,beq,lb,[],[],options);
```

Matlab використовує алгоритм внутрішньої точки для задач двох типів: якщо є тільки обмеження-рівності і матриця обмежень рівностей має повний ранг або якщо є тільки нижні lb і верхні ub межі. Задачу, яка не відноситься до цих двох типів, Matlab вирішує методом перебору граней.

З роботи програми видно, що Matlab дозволяє виводити інформацію про те, як завершилося рішення задачі. За це відповідає параметр exitflag. Якщо значення exitflag дорівнює 1, то знайдене рішення задачі, якщо дорівнює 0, то перевищено допустимий число ітерацій. Інтерпретація інших значень параметра exitflag приведена в роботі [2].

Крім того, параметр output містить інформацію про процес оптимізації, зокрема, число ітерацій (iterations) і використовуваний алгоритм (algorithm). У даному прикладі метод перебору граней успішно завершив роботу (exitflag=1). Для знаходження рішення знадобилася одна ітерація.

Ще одним необов'язковим вихідним параметром функції qudprog є lamda – структура, яка містить множники Лагранжа при рішенні по *x* (розділеному за типами умов). Поле структури:

- Lower – нижні межі *lb*;
- Upper – верхні межі *lb*;
- Ineqlin – лінійні нерівності;
- Eqlin – лінійні рівності.

Для того, щоб структура lamda виводилася при роботі програми, необхідно викликати функцію quadprog наступним чином:

```
[x,fval,exitflag,output,lamda]=quadprog
(H, f, A, b, Aeq, beq, lb);
lamda
```

Запустивши програму, отримаємо

```
lamda =

      lower: [3x1 double]
      upper: [3x1 double]
      eqlin: -0.0038
    ineqlin: 0
```

Ненульові елементи вектора в полях lamda вказують на активні обмеження в даній задачі. В даному випадку, перше обмеження у вигляді нерівностей (lamda.eqlin) є активними обмеженнями. Для даної задачі усі верхні межі є неактивними.

Взагалі quadprog визначає локальне рішення, хоча задача є строго опуклою. Ймовірно, більш кращі чисельні результати будуть, якщо за допомогою *Aeq* і *beq* явно специфікувати дані рівності замість неявного використання *lb* і *ub*. Якщо компоненти *x* не мають верхніх (або нижніх меж), то quadprog буде вважати, що відповідні компоненти *ub* (або *lb*) встановлені як Inf (нескінченність) (або -Inf для *lb*) на відміну від довільного, але дуже великого додатного (або від'ємного у разі нижніх меж) числа.

Список використаної літератури

1. Севумян Э. Развитие классической теории портфельных инвестиций / Э. Севумян // Новые технологии. – 2010. – № 4. – С. 8–14.

2. Иглин С. П. Математические расчёты на базе MATLAB [Текст] / С.П. Иглин. - СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 640 с.

3. Жданов І.Ю. Формирование инвестиционного портфеля марковица в Excel [Электронный ресурс] // Эл. данные (13.05.2015). – http://finzz.ru/formirovanie-investicionnogo-portfelya-markovica-v-excel.html (дата обращения: 60.01.2016).

Автори

Ковальова Катерина Олександрівна, викладач кафедри вищої математики та економіко-математичних методів, ХНЕУ ім. С. Кузнеця (Kateryna.Kovalova@m.hneu.edu.ua).

Тези доповіді надійшли 18 січня 2016 року.

Опубліковано в авторській редакці