МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Методичні рекомендації
до виконання контрольних робіт
з навчальної дисципліни

"МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ"

для студентів напряму підготовки
6.050101 "Комп'ютерні науки"
заочної форми навчання

Харків. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016

Затверджено на засіданні кафедри економічної кібернетики.
Протокол № 7 від 14.01.2016 р.

Укладачі: Н. Л. Чернова
Л. О. Чаговець

М 54 Методичні рекомендації до виконання контрольних робіт з навчальної дисципліни "Математичні методи дослідження операцій" для студентів напряму підготовки 6.050101 "Комп'ютерні науки" заочної форми навчання / уклад. Н. Л. Чернова, Л. О. Чаговець. – Х. : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 48 с. (Укр. мов.)

Викладено методичні рекомендації, індивідуальні варіанти завдань до самостійного виконання контрольних робіт, метою яких є закріплення теоретичних знань та набуття навичок побудови математичних моделей дослідження операцій.

Рекомендовано для студентів напряму підготовки 6.050101 "Комп'ютерні науки" заочної форми навчання.

Вступ

На сучасному етапі розвитку національної економіки в умовах нестабільного зовнішнього середовища особливої уваги набувають питання підвищення ефективності управління та організації господарюючих суб'єктів. Збільшення масштабів та вартості здійснюваних для цього заходів, ускладнення цілеспрямованих процесів, розширення потоків інформації зумовлює необхідність кількісного обґрунтування управлінських рішень.

Розробка та ухвалення науково обґрунтованих рішень значною мірою пов'язані з проблемою пошуку оптимального варіанта. Це складає повсякчасну практику господарюючих суб'єктів під час вибору виробничої програми, маршрутизації, прикріплення до постачальників, складання графіків планів виконання взаємопов'язаних робіт та ін. Умови гнучкості, альтернативності виробничо-господарських ситуацій постають необхідними умовами виконання принципу оптимальності під час вироблення управлінських рішень, а основою отримання оптимальних рішень є результати всебічного вивчення та зіставлення всіх можливих варіантів рішень, аналізу їх переваг та недоліків. Це потребує застосування особливих методів пошуку оптимальних рішень.

Мета методичної розробки – формування практичних навичок формалізації завдань управління з використанням спеціалізованих оптимізаційних методів побудови схеми міжгалузевого балансу у вартісному вигляді в поточному та прогнозному періодах; побудови системи коефіцієнтів та модифікації основної схеми балансу.

До виконання робіт з навчальної дисципліни "Математичні методи дослідження операцій" студент приступає після вивчення питань загальної постановки задачі дослідження операцій у детермінованому та недетермінованому випадках, визначення показників ефективності операції, побудови структурної схеми операції, вивчення основних етапів операційного дослідження.

Дана робота містить методичні рекомендації, приклади розв'язання завдань та варіанти для індивідуального виконання за темами "Побудова математичних моделей проблемних ситуацій", "Транспортна задача", "Динамічне програмування" з навчальної дисципліни.

Практичні завдання за темою "Побудова математичних моделей проблемних ситуацій"

Варіанти до самостійного виконання завдання 1

Умови до варіантів 1 – 10. Для тригалузевої економічної системи у плановому періоді задано: матриця прямих матеріальних витрат (А) і вектор обсягів валової продукції (Х). Необхідно розрахувати параметри міжгалузевого балансу, скласти планову схему міжгалузевого балансу.

Варіант 1

$$A = \begin{pmatrix} 0,07 & 0,03 & 0,11 \\ 0,06 & 0,04 & 0,07 \\ 0,11 & 0,06 & 0,09 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 57 \\ 35 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Варіант 2

$$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,17 & 0,14 \\ 0,11 & 0,05 & 0,30 \\ 0,11 & 0,09 & 0,14 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 58 \\ 60 \\ 37 \end{pmatrix}$$

Варіант 3

$$A= \begin{pmatrix} 0,16 & 0,15 & 0,15 \\ 0,14 & 0,12 & 0,10 \\ 0,10 & 0,08 & 0,11 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 65 \\ 90 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Варіант 4

$$A = \begin{pmatrix} 0,24 & 0,14 & 0,15 \\ 0,12 & 0,08 & 0,26 \\ 0,15 & 0,08 & 0,15 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 93 \\ 102 \\ 62 \end{pmatrix}$$

Варіант 5

$$A = \begin{pmatrix} 0,40 & 0,26 & 0,20 \\ 0,20 & 0,15 & 0,40 \\ 0,27 & 0,15 & 0,30 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 102 \\ 114 \\ 65 \end{pmatrix}$$

Варіант 6

$$A = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,15 & 0,12 \\ 0,17 & 0,10 & 0,2 \\ 0,15 & 0,12 & 0,16 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 60 \\ 65 \\ 41 \end{pmatrix}$$

Варіант 7

$$A = \begin{pmatrix} 0,165 & 0,11 & 0,11 \\ 0,083 & 0,055 & 0,165 \\ 0,11 & 0,055 & 0,11 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 47 \\ 53 \\ 33 \end{pmatrix}$$

Варіант 8

$$A = \begin{pmatrix} 0,14 & 0,10 & 0,10 \\ 0,09 & 0,05 & 0,20 \\ 0,04 & 0,06 & 0,09 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 45 \\ 51 \\ 32 \end{pmatrix}$$

Варіант 9

$$A = \begin{pmatrix} 0,30 & 0,23 & 0,22 \\ 0,17 & 0,10 & 0,30 \\ 0,22 & 0,10 & 0,20 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 104 \\ 112 \\ 70 \end{pmatrix}$$

Варіант 10

$$A = \begin{pmatrix} 0,38 & 0,30 & 0,20 \\ 0,19 & 0,12 & 0,30 \\ 0,20 & 0,12 & 0,25 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} 78 \\ 84 \\ 52 \end{pmatrix}$$

Варіанти до самостійного виконання завдання 2

Умови до варіантів 1 – 10. Для тригалузевої економічної системи (промисловість, сільське господарство, перевезення) у звітному періоді задано: матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат (B), вектор кінцевої продукції $Y_о$, вектор витрат фондів $Ф_о$. У плановому періоді значення кінцевої продукції $Y_{пл}$ на 30 % більше, ніж значення $Y_о$. Необхідно розрахувати обсяги валової продукції галузі, коефіцієнти прямих і повних витрат фондів.

Варіант 1

				Yo	Фо
	1,20	0,25	0,20	40	900
B =	0,20	1,20	0,16	80	750
	0,20	0,13	1,10	35	510

Варіант 2

				Yo	Фо
	1,12	0,23	0,18	34	830
B =	0,18	1,07	0,14	67	636
	0,13	0,14	1,02	29	420

Варіант 3

				Yo	Фо
	1,63	0,34	0,29	30	872
B =	0,25	1,54	0,19	70	650
	0,18	0,17	1,50	30	450

Варіант 4

				Yo	Фо
	1,38	0,28	0,24	35	656
B =	0,21	1,30	0,17	55	565
	0,15	0,14	1,24	30	350

Варіант 5

				Yo	Фо
	1,75	0,35	0,31	35	880
B =	0,27	1,66	0,21	75	670
	0,20	0,18	1,58	32	450

Варіант 6

				Yo	Фо
	1,63	0,33	0,27	44	1080
B =	0,25	1,54	0,20	88	830
	0,18	0,17	1,47	38	560

Варіант 7

				Yo	Фо
	1,5	0,3	0,26	48	1180
B =	0,23	1,42	0,18	96	900
	0,17	0,15	1,36	42	620

Варіант 8

				Yo	Фо
	1,63	0,35	0,27	52	1250
B =	0,25	1,54	0,19	100	980
	0,18	0,16	1,47	45	660

Варіант 9

				Yo	Фо
	1,50	0,30	0,26	40	970
B =	0,24	1,43	0,18	80	745
	0,17	0,15	1,37	35	490

Варіант 10

				Yo	Фо
	1,63	0,33	0,29	55	1350
B =	0,25	1,53	0,25	115	1050
	0,18	0,17	1,47	49	750

Варіант 11

Для умовної економічної системи, що складається з трьох галузей (машинобудування, вугільна промисловість, хімічна промисловість), у звітному періоді задані: матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A і повних матеріальних витрат B:

A =

0,01	0,24	0,16
0,2	0,14	0,25
0,1	0,3	0,05

, B =

1,12	0,42	0,30
0,33	1,40	0,42
0,22	0,49	1,22

.

Заданий вектор кінцевої продукції Y = (100, 200,300), вектор витрат праці L = (1 000, 1 100, 1 200). У плановому періоді заданий вектор валової продукції X = (327,98; 379,4; 522,76). Необхідно розрахувати показники звітного та планового балансів і відповісти на наступні запитання:

1. Як зміняться витрати праці вугільної галузі і чому?

2. Як зміняться виробничі витрати машинобудування і за рахунок чого?

3. Чому дорівнюють витрати праці на виробництво одиниці кінцевої продукції хімічної галузі?

4. На скільки і чому зміниться вартість продукції машинобудування, що направляється у сферу виробництва?

5. Як і чому зміняться витрати вугільної галузі на придбання продукції хімічної галузі?

6. Як і чому зміниться вартість продукції вугільної галузі, що направляється у сферу кінцевого споживання?

Варіант 12

Для умовної економічної системи, що складається з трьох галузей (машинобудування, сільське господарство, хімічна промисловість), у звітному періоді задані: матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A і повних матеріальних витрат B:

A =

0,03	0,16	0,32
0,2	0,04	0,3
0,1	0,3	0,01

, B =

1,15	0,34	0,47
0,30	1,24	0,47
0,21	0,41	1,20

.

Вектор валової продукції X = (206,21; 344,04; 296,80), вектор витрат фондів F = (510; 400; 120). У плановому періоді заданий вектор кінцевої продукції Y = (60; 180; 150). Необхідно розрахувати показники звітного і планового балансів і відповісти на запитання:

1. Як зміняться витрати фондів машинобудування і чому?

2. Як зміняться виробничі витрати сільськогосподарської галузі і за рахунок чого?

3. Чому дорівнюють витрати фондів на виробництво одиниці кінцевої продукції сільського господарства?

4. На скільки і чому зміниться вартість продукції хімічної галузі, що спрямовується у сферу виробництва?

5. Як і чому зміняться витрати хімічної галузі на придбання продукції машинобудування?

6. Як і чому зміниться вартість чистої продукції машинобудування?

Варіант 13

Для умовної економічної системи, що складається з трьох галузей (машинобудування, приладобудування, хімічна промисловість), у звітному періоді задані: матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат A і повних матеріальних витрат B:

A =

0,1	0,12	0,26
0,16	0,04	0,3
0,1	0,07	0,03

, B =

1,18	0,18	0,37
0,24	1,10	0,41
0,14	0,10	1,10

.

Вектор кінцевої продукції Y = (110; 200; 180), вектор витрат праці L = (1 000; 1 100; 1 200). У плановому періоді заданий вектор валової продукції X = (258,41; 351,96; 155,13). Необхідно розрахувати показники звітного і планового балансів і відповісти на запитання:

1. Як зміняться витрати праці хімічної галузі і чому?

2. Як зміняться виробничі витрати машинобудування і за рахунок чого?

3. Чому дорівнюють витрати праці на виробництво одиниці кінцевої продукції приладобудування?

4. На скільки і чому зміниться вартість продукції хімічної галузі, що спрямовується у сферу виробництва?

5. Як і чому зміняться витрати машинобудування на придбання продукції приладобудування?

6. Як і чому зміниться вартість продукції хімічної галузі, що спрямовується у сферу кінцевого споживання?

Варіант 14

Для умовної економічної системи, що складається з трьох галузей (машинобудування, сільське господарство, хімічна промисловість), у звітному періоді задані: матриці коефіцієнтів прямих матеріальних витрат А і повних матеріальних витрат В:

A =

0,02	0,08	0,26
0,2	0,04	0,3
0,1	0,09	0,02

, B =

1,08	0,12	0,32
0,27	1,10	0,41
0,13	0,11	1,09

.

Вектор валової продукції X = (164,55; 337,48; 170,23), вектор витрат фондів F = (900; 800; 700). У плановому періоді заданий вектор кінцевої продукції Y = (150; 220; 120). Необхідно розрахувати показники звітного і планового балансів і відповісти на запитання:

1. Як зміняться витрати фондів сільського господарства і чому?

2. Як зміняться виробничі витрати хімічної галузі і за рахунок чого?

3. Чому дорівнюють витрати фондів на виробництво одиниці кінцевої продукції машинобудування?

4. На скільки і чому зміниться вартість продукції машинобудування, що направляється у сферу виробництва?

5. Як і чому зміняться витрати хімічної галузі на придбання продукції сільського господарства?

6. Як і чому зміниться вартість чистої продукції машинобудування?

Методичні рекомендації до виконання завдань

Міжгалузевий баланс у грошовому вираженні відображає виробництво і розподіл валового суспільного продукту в галузевому розрізі, міжгалузеві виробничі зв'язки, використання матеріальних і трудових ресурсів, створення і розподіл національного доходу (НД). Міжгалузевий баланс у грошовому вираженні складається з чотирьох квадрантів (рис. 1).

		Галузі-споживачі					y_i	x_i
		1	2	3	…	n		
Галузі-виробники	1	X_{11}	X_{12}	X_{13}		X_{1n}	y_1	X_1
	2	X_{21}	X_{22}	X_{23}		X_{2n}	y_2	X_2
	3	X_{31}	X_{32}	X_{33}		X_{3n}	y_3	X_3
	…	І квадрант						
	i						II квадрант	
	…							
	n	X_{n1}	X_{n2}	X_{n3}		X_{nn}	y_n	X_n
Оплата праці		V_1	V_2	V_3		V_n		
		III квадрант						
Чистий дохід		m_1	m_2	m_3		m_n	IV квадрант	
Валова продукція		X_1	X_2	X_3		X_n		X

Рис. 1. **Структура міжгалузевого балансу в грошовому поданні**

Перший квадрант схеми відбиває розподіл і споживання продукції галузей у сфері матеріального виробництва. Нехай i – номер галузі-виробника, j – номер галузі-споживача. Тоді x_{ij} – елементи матриці міжгалузевих потоків, показують скільки продукції i-ї галузі необхідно j-й галузі для споживання. Дані першого квадранта відіграють вирішальну роль в аналізі структури матеріальних затрат галузей, міжгалузевих пропорцій і зв'язків. Другий квадрант містить вектор кінцевої та валової продукції. Вектор кінцевої продукції $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ ... \\ y_n \end{pmatrix}$ показує затрати продукції галузі поза сферою матеріального виробництва, тобто для потреб кінцевого споживання (особистого і суспільного).

Вектор валової продукції $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ ... \\ x_n \end{pmatrix}$ показує вартість загального об'єму виробництва для галузей.

Дані цього квадранта характеризують галузеву матеріальну структуру національного доходу, його розподіл, структуру споживання і нагромадження за галузями.

Третій квадрант також характеризує національний дохід, але з боку його вартісного складу – як суму оплати праці і чистого доходу всіх галузей матеріального виробництва.

Четвертий квадрант відображає кінцевий розподіл і використання національного доходу у результаті перерозподілу.

Розрізняють два види міжгалузевих балансів: звітні і планові. Звітні баланси будуються на основі узагальнення результатів діяльності окремих підприємств. Планові баланси є основою для розробки збалансованих планів розвитку. Для розрахунків показників міжгалузевого балансу використовуються такі основні рівняння.

Рівняння розподілу міжгалузевого балансу виражають таким чином:

$$x_i = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} + y_i, i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

де x_i – величина валової продукції i-ї галузі;

y_i – величина кінцевої продукції i-ї галузі;

x_{ij} – величина міжгалузевого потоку;

n – кількість галузей.

Рівняння споживання міжгалузевого балансу записують так:

$$x_i = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} + (v_j + m_j), j = \overline{1,n}, \tag{2}$$

де $v_j + m_j$ – величина чистої продукції j-ї галузі;

v_j – витрати на оплату праці в j-й галузі;

m_j – чистий дохід j-ї галузі.

Для побудови моделі міжгалузевого балансу необхідно розрахувати коефіцієнти прямих матеріальних витрат (a_{ij}), за допомогою яких вимірюються технологічні зв'язки між галузями. Коефіцієнт a_{ij} показує, скільки одиниць продукції i-ї галузі безпосередньо витрачається на випуск одиниці продукції j-ї галузі і розраховується за формулою:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{X_j}, i, j = \overline{1,n}. \tag{3}$$

Усі коефіцієнти прямих матеріальних затрат складають квадратну матрицю A_{nxn}. Матриця має задовольняти таким властивостям:

- продуктивність – матриця А продуктивна, якщо для будь-якого невід'ємного вектора У вектор Х є невід'ємним. Виконання цієї умови гарантує побудову міжгалузевого балансу. Умова продуктивності:

1. Діагональні елементи матриці А набагато менше 1.
2. Сума елементів матриці А як по рядку, так і за стовпцем має становити менше 1.
3. У матриці (Е – А) всі головні мінори мають бути додатними;

- нерозкладеність – матрицю неможливо привести до такого виду, де в першому рядку практично всі 0, шляхом простої перестановки рядків і стовпців;
- неізольованість – кожна галузь потребує продукції хоча б однієї іншої галузі.

Підставивши в рівняння розподілу значення міжгалузевих потоків, виражене через коефіцієнти прямих матеріальних затрат $x_{ij} = a_{ij} \cdot X_j$, отримується таке рівняння для розрахунку об'єму валової продукції:

$$X_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot X_j + y_i, i = \overline{1,n}, \qquad (4)$$

або у матричному вигляді:

$$X = A \cdot X + Y \qquad (5)$$

де А – матриця коефіцієнтів прямих матеріальних витрат;
Х – вектор валової продукції;
Y – вектор кінцевої продукції.

Розв'язавши це рівняння відносно невідомого X, отримується основне рівняння міжгалузевого балансу для розрахунку планового об'єму валової продукції

$$X = (E - A)^{-1} Y. \qquad (6)$$

Слід позначити матрицю $(E-A)^{-1}$ через B, тобто:

$$B=(E-A)^{-1}. \tag{7}$$

Коефіцієнти матриці B називаються коефіцієнтами повних матеріальних витрат, які показують, скільки продукції і-ї галузі необхідно для виробництва 1 одиниці кінцевої продукції j-ї галузі.

Відповідно, рішенням моделі міжгалузевого балансу буде:

$$X_{pl}=B\cdot Y_{pl}. \tag{8}$$

У моделі міжгалузевого балансу також додатково можна розрахувати баланси трудових ресурсів і фондів.

Потрібно розглянути модифікацію моделі міжгалузевого балансу з урахуванням витрат з праці. Позначимо через L_j – витрати живої праці для виробництва продукції в j-й галузі. Для обчислення на одиницю продукції витрат живої праці розраховують прямі трудовитрати (трудомісткість продукції без урахування придбань інших галузей):

$$t_j=\frac{L_j}{X_j}. \tag{9}$$

Щоб обчислити матрицю повних трудовитрат, необхідно врахувати вплив матриці повних матеріальних витрат. Тоді повні трудовитрати становитимуть:

$$T=t\cdot(E-A)^{-1}. \tag{10}$$

Плановий об'єм необхідних витрат праці:

$$L_{jpl}=t_j\cdot X_{jpl}. \tag{11}$$

Слід розглянути модифікацію моделі міжгалузевого балансу з урахуванням витрат фондів. Розширення основної схеми міжгалузевого балансу з урахуванням затрат фондів проводиться аналогічно до трудовитрат.

Для цього розраховується пряма фондомісткість продукції за галузями у звітному періоді:

$$f_j = \frac{F_j}{X_j}, \tag{12}$$

де F_j – витрати фондів у галузі.

Повна фондомісткість за галузями складатиме:

$$f_{jpol} = f_j \cdot B. \tag{13}$$

Плановий об'єм необхідних витрат праці:

$$F_{jpl} = f_j \cdot X_{jpl}. \tag{14}$$

Приклад вирішення завдання 1

Умови завдання. Для умовної тригалузевої економічної системи у плановому періоді задано: матриця прямих матеріальних витрат (А) і вектор обсягів валової продукції (Х) (рис. 2). Розрахувати параметри міжгалузевого балансу, скласти планову схему міжгалузевого балансу.

$$A = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0{,}3 & 0{,}2 & 0{,}2 \\ \hline 0{,}15 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ \hline 0{,}2 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ \hline \end{array} \quad X = \begin{array}{|c|} \hline 86{,}324 \\ \hline 93{,}824 \\ \hline 58{,}309 \\ \hline \end{array}$$

Рис. 2. **Вихідні значення**

Вирішення завдання

1. Потрібно перевірити виконання умови продуктивності матриці прямих матеріальних витрат. Загальна сума елементів першого рядка матриці дорівнює 0,7, другого – 0,55; третього – 0,5. Загальна сума першого стовпця матриці дорівнює 0,65, другого – 0,4, третього – 0,7. Значення елементів головної діагоналі також є значно меншими за 1. Обчислені значення є меншими за 1, тому перша умова продуктивності виконується. Слід перевірити другу умову продуктивності та обчислити головні мінори матриці (Е – А):

$$E=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix};\ E-A=\begin{pmatrix}0,7 & -0,2 & -0,2\\ -0,15 & 0,9 & -0,3\\ -0,2 & -0,1 & 0,8\end{pmatrix};$$

$$M_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\det\begin{pmatrix}0,9 & -0,3\\ -0,1 & 0,8\end{pmatrix}=0,9\cdot 0,8-0,3\cdot 0,1=0,69;$$

$$M_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\det\begin{pmatrix}0,7 & -0,2\\ -0,2 & 0,8\end{pmatrix}=0,7\cdot 0,8-0,2\cdot 0,2=0,52;$$

$$M_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\det\begin{pmatrix}0,7 & -0,2\\ -0,15 & 0,9\end{pmatrix}=0,7\cdot 0,9-0,2\cdot 0,15=0,6.$$

Оскільки головні мінори матриці є додатніми, друга умова продуктивності матриці прямих матеріальних витрат виконується. Також стає очевидним, що елементи головної діагоналі матриці прямих матеріальних витрат є меншими за 1. Крім того, матрицю також неможливо привести до такого вигляду, де в кожному рядку можна записати практично всі нулі, шляхом простої перестановки рядків і стовпців. Тобто умова нерозкладеності матриці зберігається. Поряд з цим виконується умова неізольованості, оскільки кожна з галузей має потребу в продукції хоча б однієї іншої галузі. Таким чином, матриця прямих матеріальних витрат є продуктивною, нерозкладеною та неізольованою, і можна виконувати подальші операції.

2. Для побудови схеми міжгалузевого балансу в плановому періоді необхідно визначити елементи матриці міжгалузевих потоків першого квадранту за такою формулою:

$$x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j.$$

Використовуючи співвідношення (14), потрібно обчислити значення елементів матриці міжгалузевих потоків:

$$x_{ij}=a_{ij}\cdot x_j=\begin{pmatrix}0,3\cdot 86,324 & 0,2\cdot 93,824 & 0,2\cdot 58,309\\ 0,15\cdot 86,324 & 0,1\cdot 93,824 & 0,3\cdot 58,309\\ 0,2\cdot 86,324 & 0,1\cdot 93,824 & 0,2\cdot 58,309\end{pmatrix},$$

$$x_{ij} = \begin{pmatrix} 25{,}897 & 18{,}765 & 11{,}662 \\ 12{,}949 & 9{,}382 & 17{,}493 \\ 17{,}265 & 9{,}382 & 11{,}662 \end{pmatrix}.$$

3. Необхідно обчислити значення вектора кінцевої продукції звітного періоду:

$$y_i = x_i - \sum_{j=1}^{n} x_{ij} = \begin{pmatrix} 86{,}324 \\ 93{,}824 \\ 58{,}309 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25{,}897 + 18{,}765 + 11{,}662 \\ 12{,}949 + 9{,}382 + 17{,}493 \\ 17{,}265 + 9{,}382 + 11{,}662 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 54 \\ 20 \end{pmatrix}.$$

4. Потрібно обчислити значення елементів вектора оплати праці та чистої продукції за галузями:

$$m_j + v_j = z_j, \tag{16}$$

$$z_j = x_j - \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \begin{pmatrix} 86{,}324 \\ 93{,}824 \\ 58{,}309 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 25{,}897 + 12{,}949 + 17{,}265 \\ 18{,}765 + 9{,}382 + 9{,}382 \\ 11{,}662 + 17{,}493 + 11{,}662 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30{,}213 \\ 56{,}294 \\ 17{,}493 \end{pmatrix}.$$

5. Необхідно записати розраховані значення міжгалузевих потоків, кінцевої продукції та оплати праці у схему міжгалузевого балансу (рис. 3).

		Галузі-споживачі			Y_i	X_i
		1	2	3		
Галузі-виробники	1	25,897	18,765	11,662	30	86,324
	2	12,949	9,382	17,493	54	93,824
	3	17,265	9,382	11,662	20	58,309
Оплата праці, чиста продукція		30,213	56,294	17,493		
Валова продукція		86,324	93,824	58,309		238,46

Рис. 3. **Схема міжгалузевого балансу**

Приклад вирішення завдання 2

Умови завдання. Для економічної системи, яка містить три галузі (промисловість, будівництво та інші галузі), у звітному періоді задано: матриця коефіцієнтів повних матеріальних витрат (В), вектор кінцевої продукції Y^{o}, вектор витрат праці Φ^{o}. Розрахувати: обсяги валової продукції галузі, коефіцієнти прямих і повних витрат фондів.

$$B = \begin{pmatrix} 1{,}691 & 0{,}441 & 0{,}59 \\ 0{,}44 & 1{,}275 & 0{,}59 \\ 0{,}478 & 0{,}27 & 1{,}471 \end{pmatrix} \quad Y0 = \begin{pmatrix} 40 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} \quad Y\text{пл} = \begin{pmatrix} 30 \\ 54 \\ 20 \end{pmatrix} \quad \Phi 0 = \begin{pmatrix} 1800 \\ 1200 \\ 900 \end{pmatrix}$$

Рис. 4. **Вихідні дані**

Вирішення завдання. 1. Потрібно розрахувати значення елементів вектора валової продукції у звітному періоді:

$$X_o = B \cdot Y_o = \begin{pmatrix} 1{,}691 & 0{,}441 & 0{,}59 \\ 0{,}44 & 1{,}275 & 0{,}59 \\ 0{,}478 & 0{,}27 & 1{,}471 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 40 \\ 24 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 80 \\ 50 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

2. Елементи матриці повних матеріальних витрат В показують скільки продукції i-ї галузі необхідно для виробництва одиниці кінцевої продукції j-ї галузі. Слід обчислити значення елементів вектора валової продукції у плановому періоді:

$$X_{pl} = B \cdot Y_{pl} = \begin{pmatrix} 1{,}691 & 0{,}441 & 0{,}59 \\ 0{,}44 & 1{,}275 & 0{,}59 \\ 0{,}478 & 0{,}27 & 1{,}471 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 30 \\ 54 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 86{,}324 \\ 93{,}824 \\ 58{,}309 \end{pmatrix}.$$

3. Значення елементів вектора прямої фондомісткості обчислюють таким чином:

$$f_{prj} = \frac{\Phi_{jo}}{x_{jo}} = \begin{pmatrix} 1800/80 \\ 1200/50 \\ 900/30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22{,}5 \\ 24 \\ 30 \end{pmatrix}.$$

Обчислюються значення елементів повних витрат фондів:

$$f_{pol} = f^T B = (22{,}5 \quad 24 \quad 30) \cdot \begin{pmatrix} 1{,}691 & 0{,}441 & 0{,}59 \\ 0{,}44 & 1{,}275 & 0{,}59 \\ 0{,}478 & 0{,}27 & 1{,}471 \end{pmatrix} = (62{,}978 \quad 48{,}603 \quad 71{,}471).$$

5. Розраховуються значення вектора витрат фондів у плановому періоді таким чином:

$$\Phi_{plj} = x_{plj} \cdot f_{prj} = \begin{pmatrix} 86{,}324 \cdot 22{,}5 \\ 93{,}824 \cdot 24 \\ 58{,}309 \cdot 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1942 \\ 2\,252 \\ 1749 \end{pmatrix}.$$

Практичні завдання за темою "Транспортна задача"

Варіанти до самостійного виконання завдання

Варіант 1

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 5). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

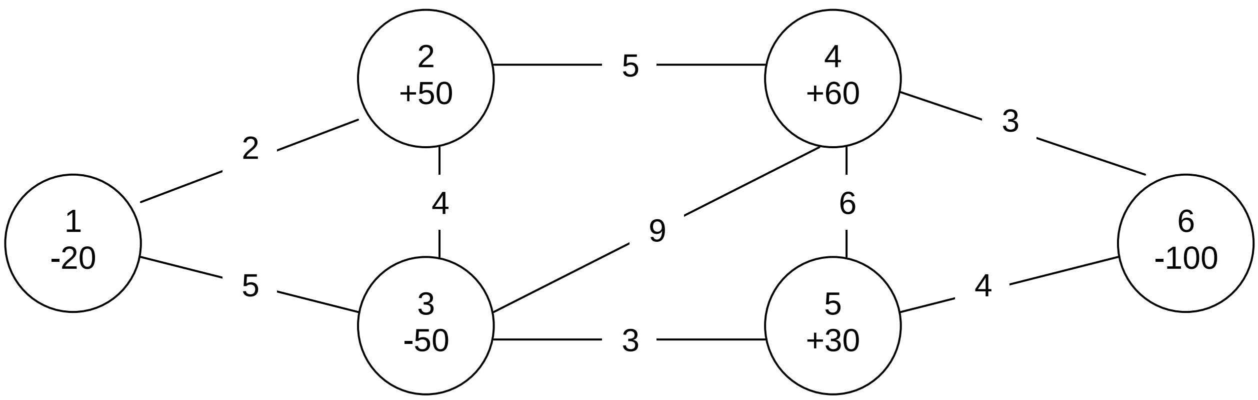

Рис. 5. **Вихідні дані**

Варіант 2

Існує чотири постачальника та два споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 6). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

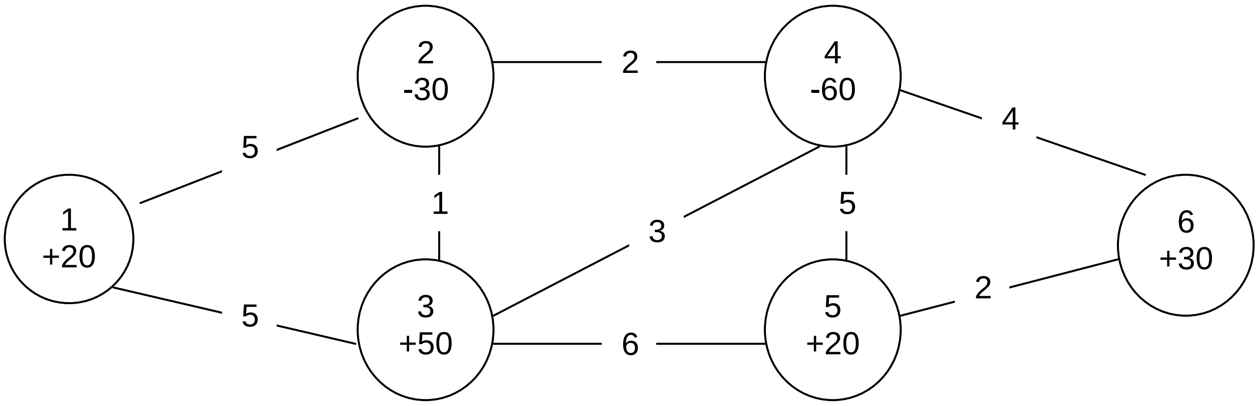

Рис. 6. **Вихідні дані**

Варіант 3

Існує чотири постачальника та два споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 7). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

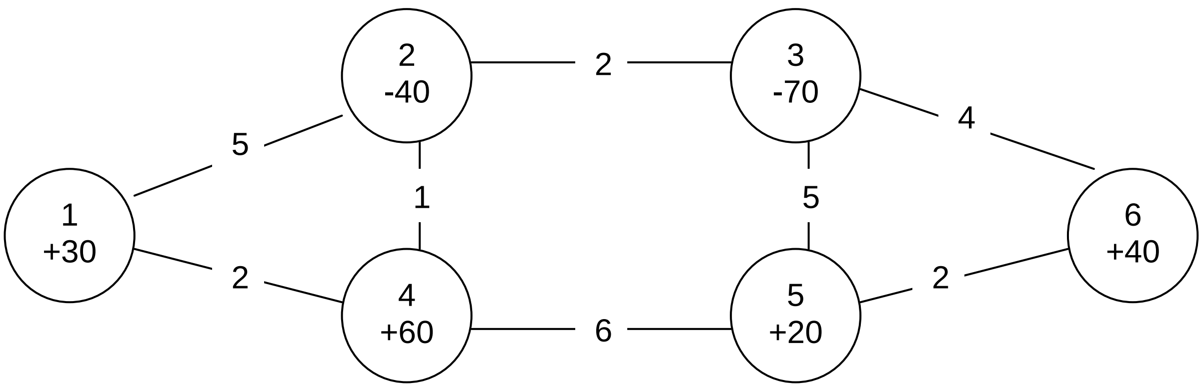

Рис. 7. **Вихідні дані**

Варіант 4

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 8). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

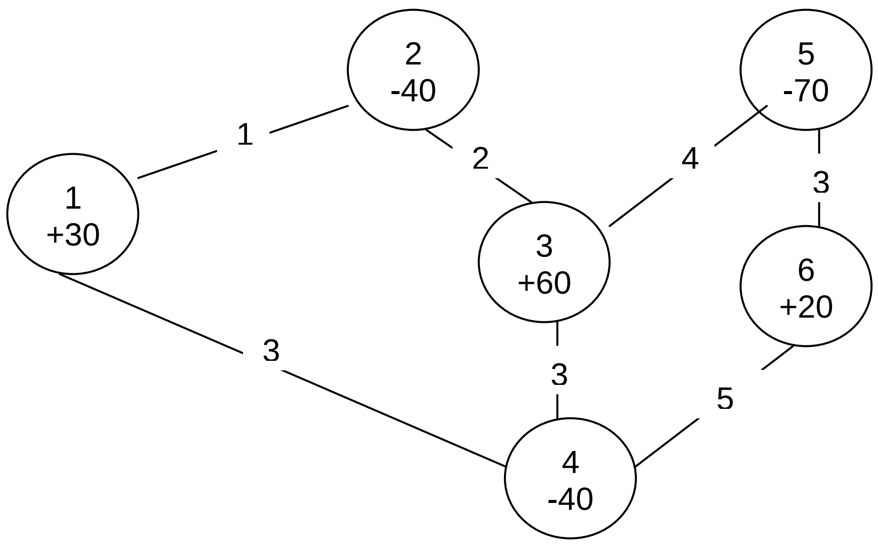

Рис. 8. **Вихідні дані**

Варіант 5

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 9). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

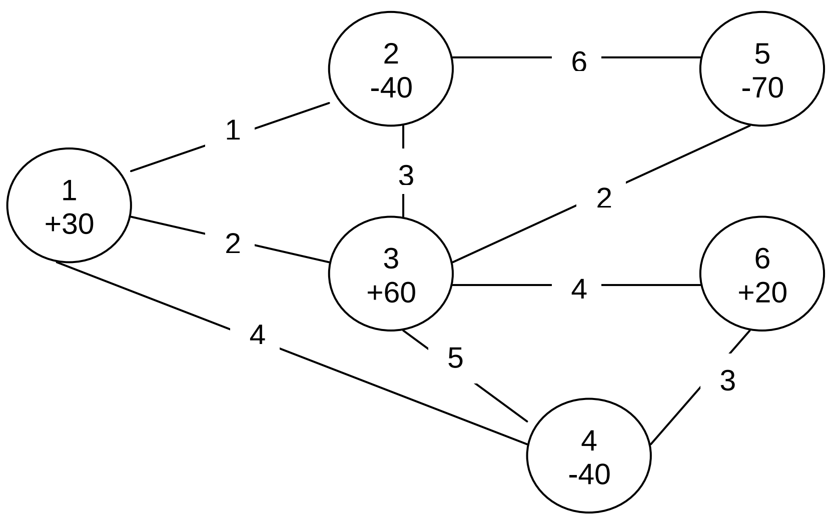

Рис. 9. **Вихідні дані**

Варіант 6

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 10). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

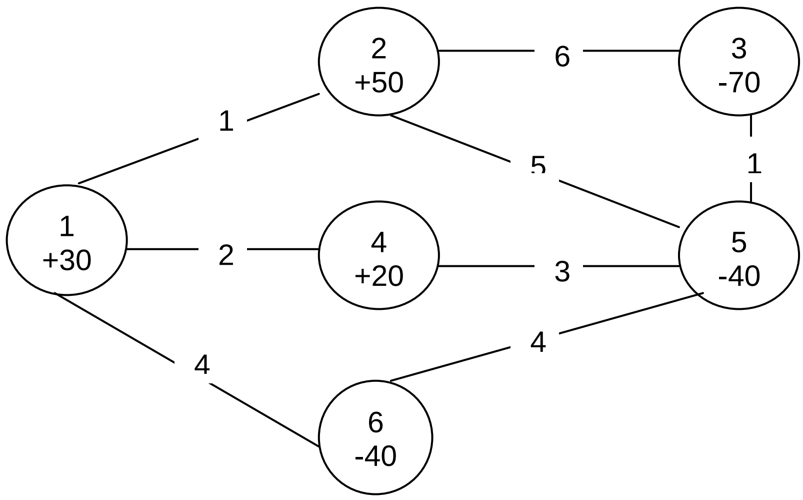

Рис. 10. **Вихідні дані**

Варіант 7

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 11). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

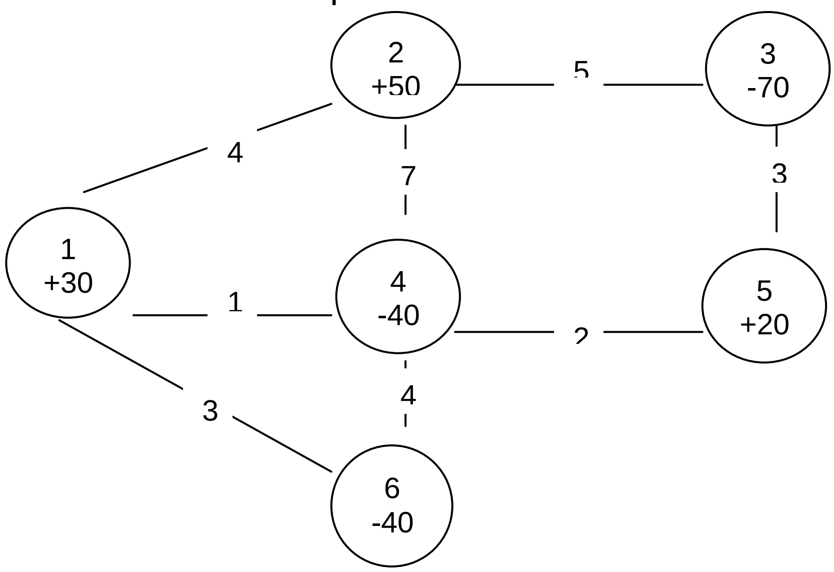

Рис. 11. **Вихідні дані**

Варіант 8

Існує чотири постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 12). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

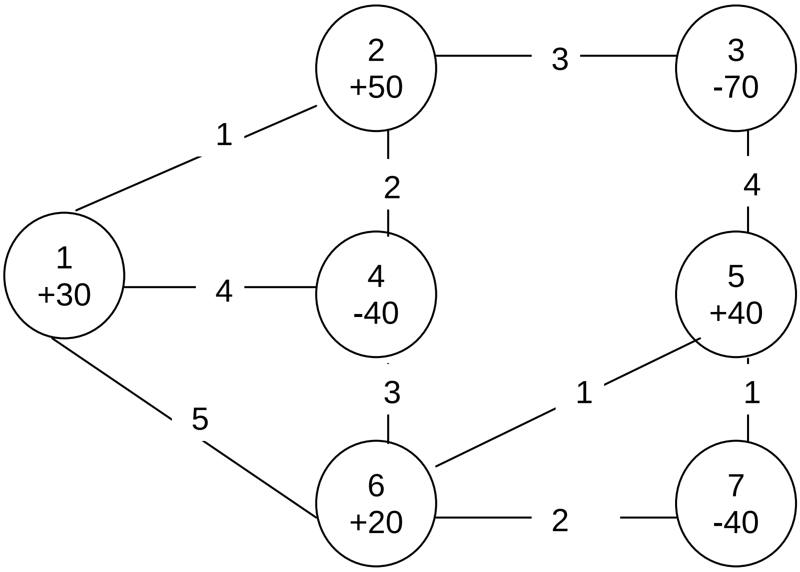

Рис. 12. **Вихідні дані**

Варіант 9

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 13). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

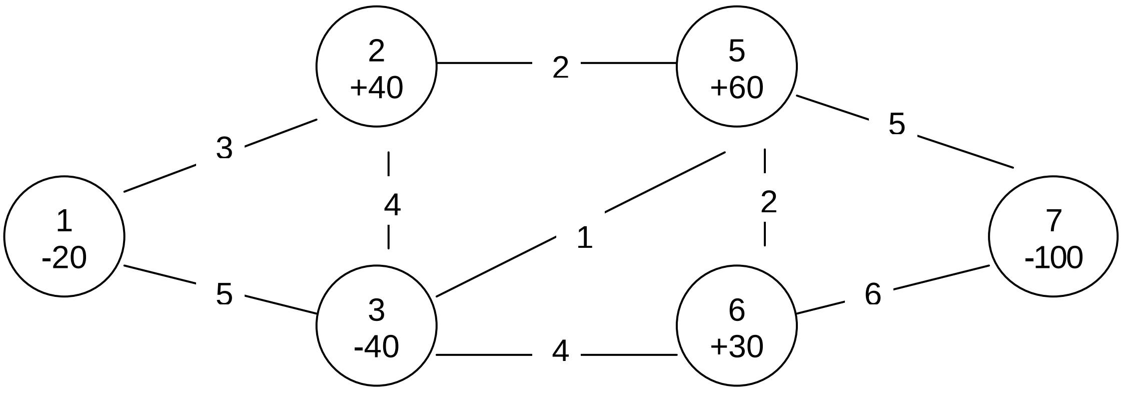

Рис. 13. **Вихідні дані**

Варіант 10

Існує чотири постачальника та два споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 14). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

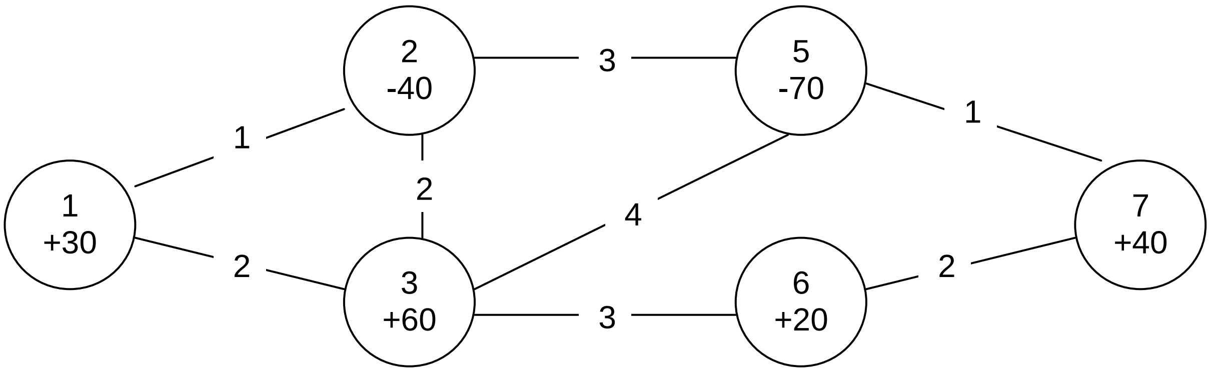

Рис. 14. **Вихідні дані**

Варіант 11

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 15). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

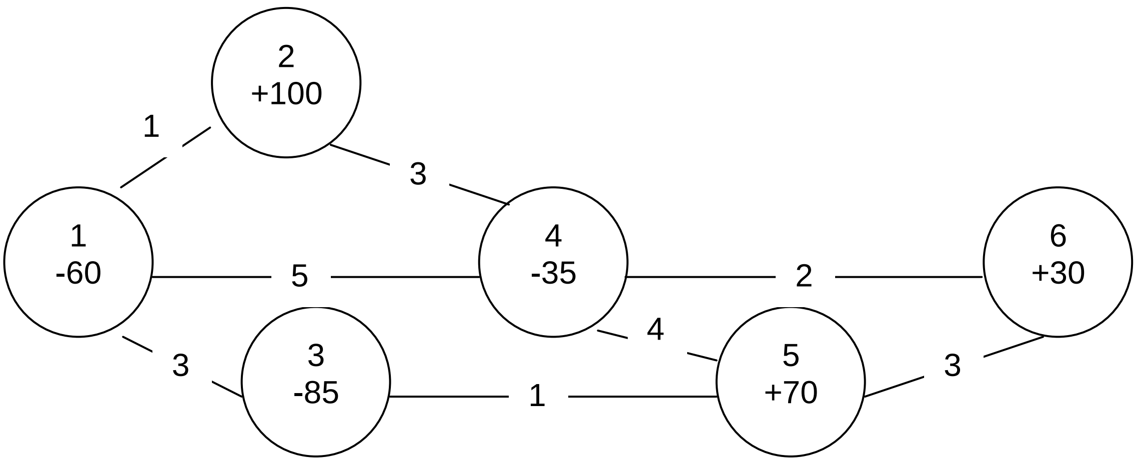

Рис. 15. **Вихідні дані**

Варіант 12

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 16). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

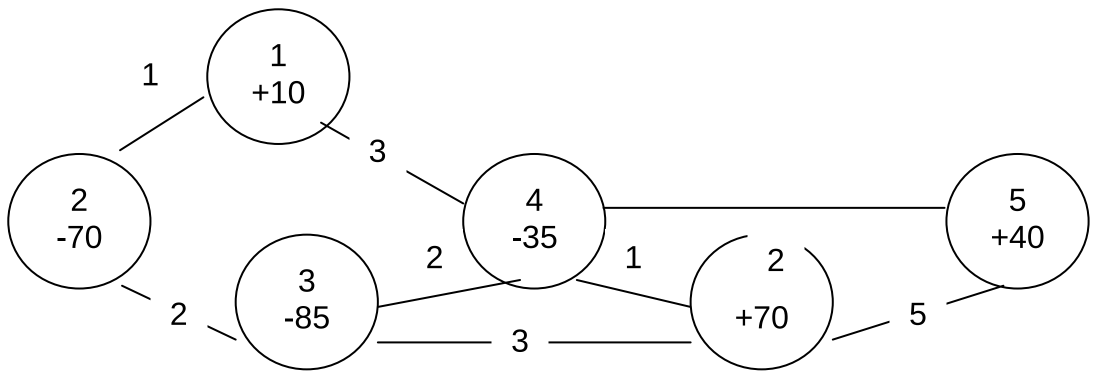

Рис. 16. **Вихідні дані**

Варіант 13

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 17). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

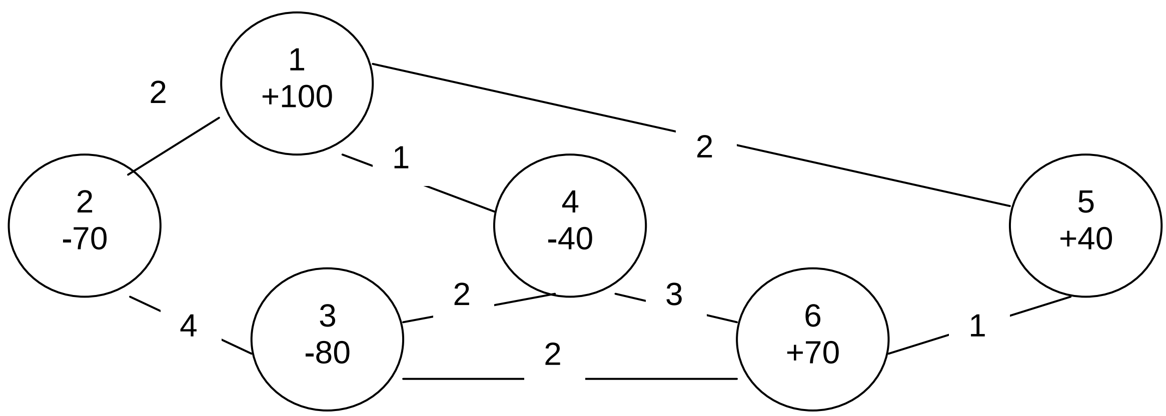

Рис. 17. **Вихідні дані**

Варіант 14

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 18). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

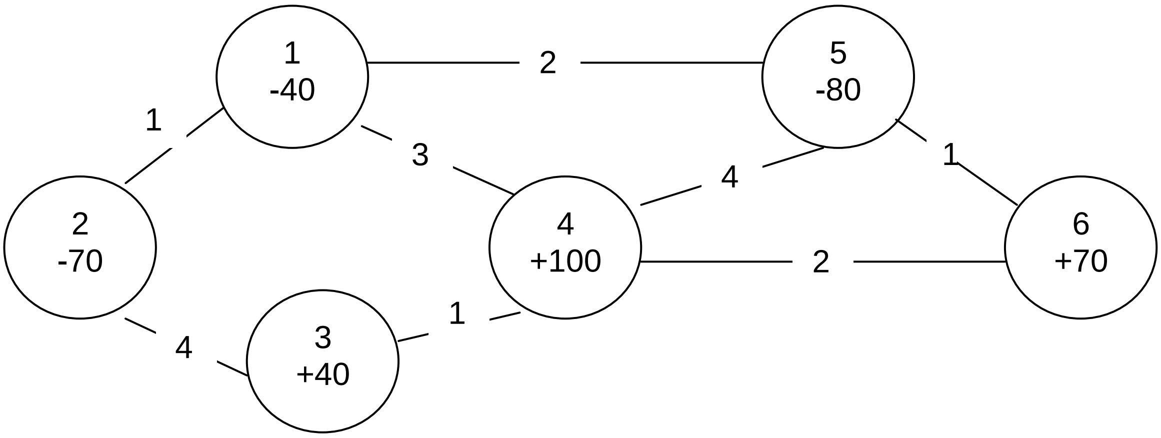

Рис. 18. **Вихідні дані**

Варіант 15

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 19). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

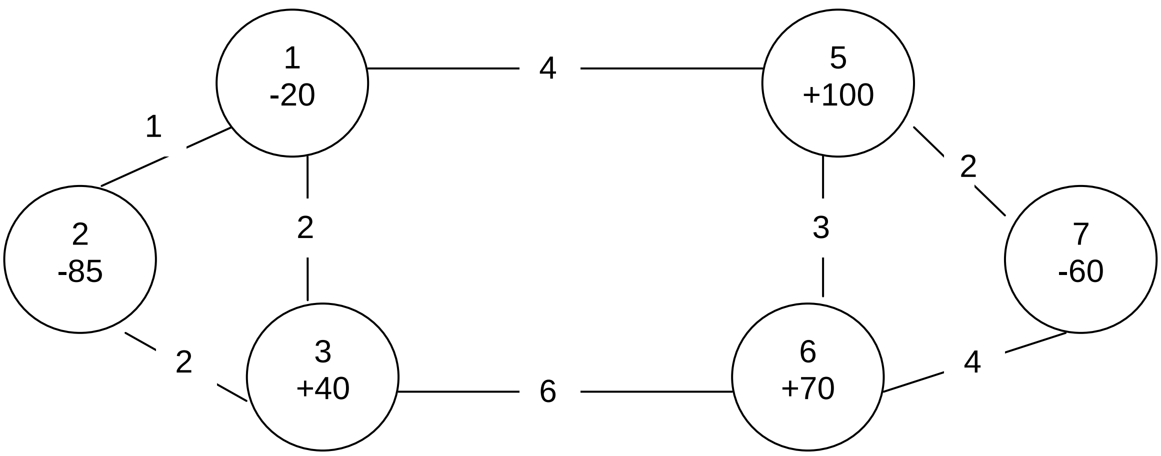

Рис. 19. **Вихідні дані**

Варіант 16

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 20). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

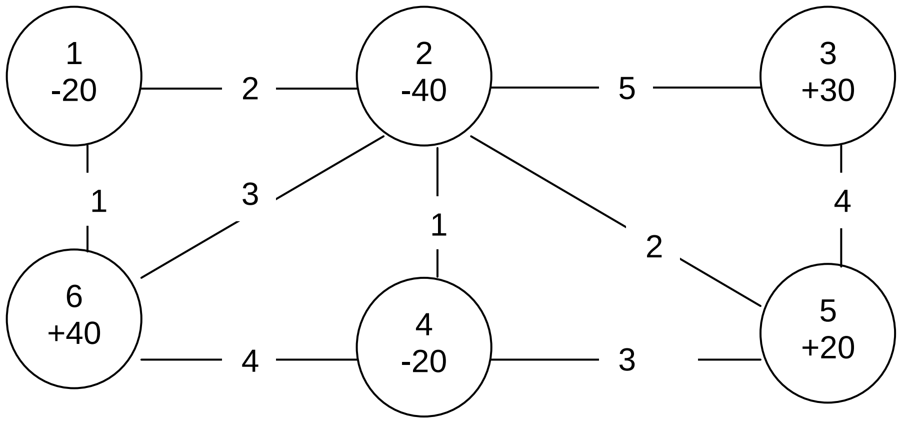

Рис. 20. **Вихідні дані**

Варіант 17

Існує три постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 21). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

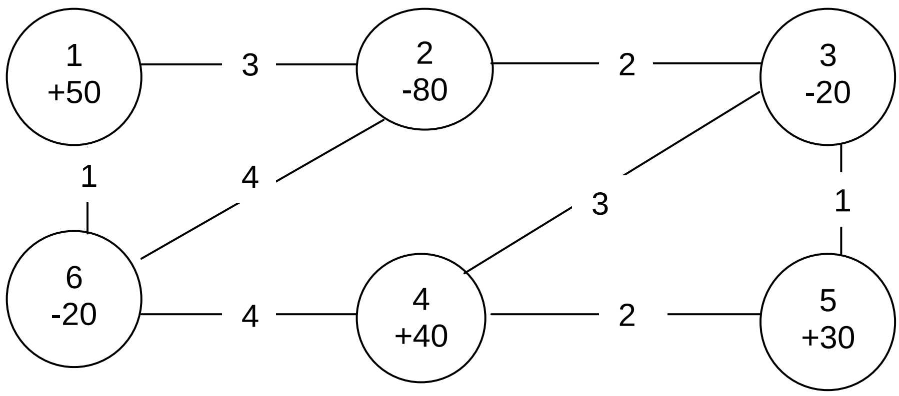

Рис. 21. **Вихідні дані**

Варіант 18

Існує три постачальника та чотири споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 22). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

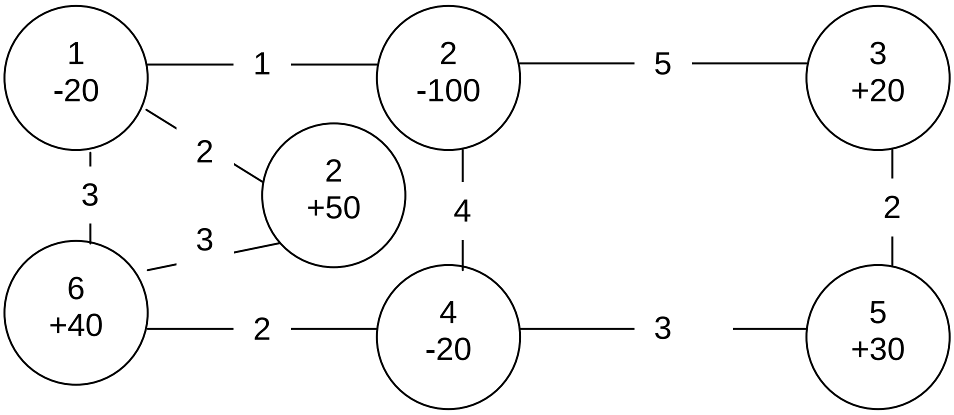

Рис. 22. **Вихідні дані**

Варіант 19

Існує три постачальника та чотири споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 23). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

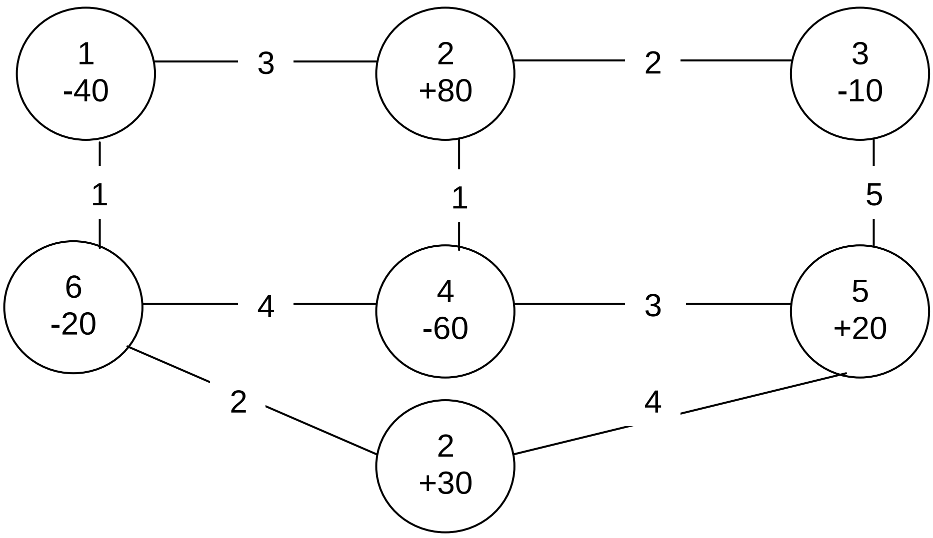

Рис. 23. **Вихідні дані**

Варіант 20

Існує чотири постачальника та три споживачі продукції. У вершинах транспортної сітки наведено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів (рис. 24). На ребрах наведено вартість перевезень. Необхідно знайти оптимальний план перевезень.

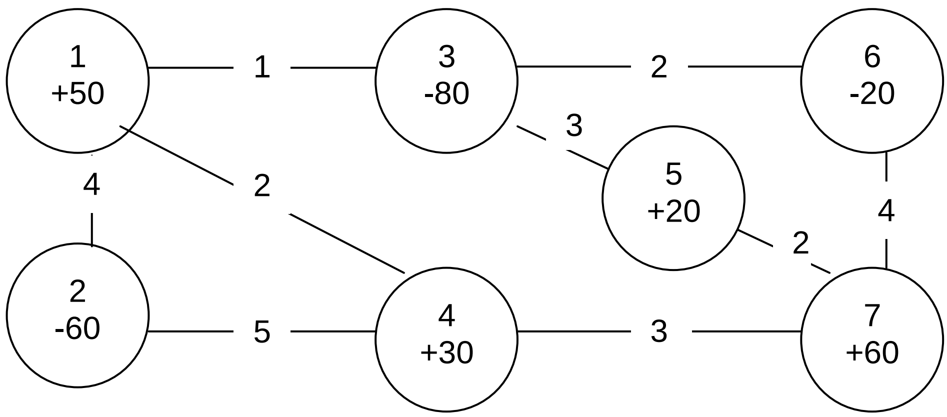

Рис. 24. **Вихідні дані**

Методичні рекомендації до виконання завдання

Серед низки методів, за якими можливо здійснювати пошук оптимального плану перевезень, існує особливий метод, який бере за основу застосування елементів планування на мережах. Перевагою цього методу є наочність, відносна простота, що є особливо важливим за наявності великої кількості учасників, проміжних пунктів, перевезень у зворотному напрямку.

Загалом побудову транспортної мережі ґрунтують на теорії графів. Учасникам мережі відповідають вершини графа, а дугами, які з'єднують ці вершини, позначають перевезення вантажу між учасниками у напрямах, заданих стрілками. З кожною дугою графа, що з'єднує і-у та j-у вершини, пов'язано параметр l_{ij}. У транспортних мережах таким параметром може виступати:

- час, який витрачають на перевезення вантажу від і-го пункту відправлення до j-го пункту призначення;
- витрати на перевезення вантажу від і-го до j-го пунктів.

Можливі різні маршрути, що з'єднують пари вершин, тому сумарні величини всіх значень параметрів при цьому різні [10].

Транспортну задачу на мережах у загальній постановці можна подати таким чином. Існує n постачальників $A_1 ... A_n$ однорідної продукції і m споживачів цієї продукції, а також шляхи, що зв'язують постачальників і споживачів із зазначенням вартості перевезення вантажу c_{ij}. У постачальників знаходиться вантаж у кількості $a_1 ... a_n$, який задовольняє попит $b_1 ... b_m$ споживачів. У вершинах транспортної мережі зазначено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів. На ребрах поставлено вартість перевезення. Потрібно знайти план постачань, який мінімізує вантажообіг.

Змінні (кількість відвантаженої продукції) $x_{ij} \geq 0$ мають відповідати таким вимогам:

1. Сумарна кількість вантажу, яку направлено від кожного постачальника до всіх споживачів має дорівнювати кількості вантажу постачальника:

$$\sum_i x_{ij} = a_i, i = \overline{1,n}. \tag{17}$$

2. Сумарна кількість вантажу, який доставлено кожному споживачу від усіх постачальників має дорівнювати потребі цього споживача:

$$\sum_j x_{ij} = b_j, j = \overline{1,m}. \tag{18}$$

3. Сумарна вартість усіх перевезень має бути мінімальною:

$$z = \sum_i^m \sum_j^n x_{ij} c_{ij} \to \min. \tag{19}$$

4. Сумарна кількість попиту споживачів має дорівнювати сумарній кількості запасів постачальників:

$$\sum_{i=1}^n a_i = \sum_{j=1}^m b_j. \tag{20}$$

Модель, у якій дотримано співвідношення (20), є закритою моделлю транспортної задачі. Якщо умову рівності запасів і попитів не виконано, тоді така модель є відкритою. Якщо запаси перевищують потреби, то додають фіктивного споживача з попитом небалансу $\sum_{i=1}^{n} a_i - \sum_{j=1}^{m} b_j$. Фіктивний споживач має бути з'єднаний ребрами однакової довжини з усіма постачальниками. Аналогічно додають фіктивного постачальника, якщо потреби перевищують запаси. Показники ребер, які з'єднують фіктивного постачальника (споживача) з усіма споживачами (постачальниками), мають дорівнювати достатньо великому числу, за допомогою якого є невигідним використання фіктивного споживача (постачальника).

Рішення задачі відбувається за двома етапами: побудова базисного плану та перевірка плану на оптимальність.

Під час розв'язання задачі на транспортній мережі базисний план може бути складено двома методами: базисний розподіл з урахуванням критерію вартості та базисний розподіл без урахування критерію вартості.

Побудову базисного розподілу постачань з урахуванням критерію вартості починають з довільно вибраної вершини. У першу чергу, аналізують ребра, які з'єднують вибрану вершину з вершинами-споживачами. Вибирають ребро з найменшим показником c_{ij} і на цьому ребрі ставлять стрілку з величиною вантажу, який постачають. Потім вибирають наступне ребро за розглянутим з мінімальною вартістю постачання. Якщо в пункти споживання перевезено не весь вантаж, який має постачальник, то відшукують ребра та пункти споживання (транзити), через які можна перевезти вантаж до інших споживачів. Транзитним пунктом може бути й пункт постачальника. Процес повторюють, доки не буде розподілено весь вантаж.

До отриманого базисного плану висувають низку вимог:

1. Усі запаси повністю розподіляють, а весь попит має бути задоволено.

2. До кожної вершини має підходити або виходити хоча б одна стрілка.

3. Умова невиродженості – загальна кількість стрілок має дорівнювати кількості вершин-1. Вироджений план – план, у якому за повним задоволенням попиту та розподілом потужностей кількість стрілок є меншою ніж кількість вершин-1. Для того щоб усунути виродження, необхідно

додати потрібну кількість стрілок до необхідної. Ці стрілки містять нульову кількістю вантажу. У цьому плані також не має бути ланцюга.

4. Стрілки не мають утворювати замкнутого циклу (напрям стрілок не враховується).

Отриманий базисний план перевірити на оптимальність можна за допомогою методу потенціалів. Його головні етапи полягають у такому:

1. Обчислення потенціалів вершин транспортної задачі. Довільно вибирають вершину та привласнюють їй потенціал (досить великий). Далі, рухаючись за стрілками, обчислюють потенціали інших вершин. Якщо стрілка виходить з вершини, то до значення потенціалу додають значення c_{ij}, якщо входить, то віднімають.

2. Обчислення значень характеристик $E_{ij} = c_{ij} - (u_{ij} - v_{ij})$ на ребрах без стрілок. На стрілках характеристики завжди дорівнюють нулю.

Ознакою оптимальності плану є наявність додатних значень характеристик.

За наявності декількох від'ємних характеристик вибирають найбільшу за абсолютним значенням та здійснюють перерозподіл потоків вантажу. Для цього будують для вибраного ребра з від'ємною характеристикою нову стрілку, спрямовану від вершини з меншим потенціалом до вершини з більшим потенціалом. В отриманому контурі вибирають стрілку з найменшою кількістю вантажу. Це значення додають до всіх інших значень вантажу в контурі зі стрілками, співнаправленими новій стрілці, і віднімають зі стрілками із протилежним напрямом. Постачання поза контуром не змінюють. У результаті одержують новий план, який знову перевіряють на оптимальність.

Приклад вирішення завдання

Умови завдання. Маємо транспортну мережу перевезень автомобілів між трьома заводами і чотирма дилерами (рис. 25). У вершинах транспортної мережі зазначено обсяги вантажу постачальників і попит споживачів. На ребрах зображено шляхи перевезень та записано вартість перевезень між пунктами призначення. Необхідно знайти оптимальний план перевезень, за яким вартість перевезень буде найменшою.

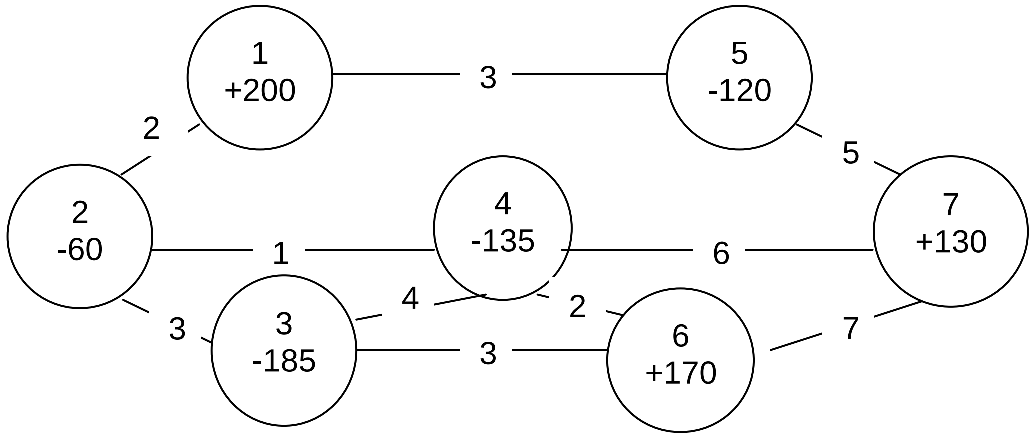

Рис. 25. **Транспортна мережа перевезень автомобілів**

Вирішення завдання. Вирішення необхідно починати з перевірки моделі на закритість. Загальна сума пропозиції постачальників дорівнює 500 одиниць вантажу та збігається із загальною сумою попиту споживачів, тобто можна зробити висновок, що модель є закритою. Далі виконаємо розподілення вантажу. Вивеземо з першої вершини відповідно до попиту у другий пункт 60 одиниць вантажу, до п'ятої – 120. Оскільки необхідно розподілити всі запаси першого постачальника, то залишок 20 одиниць транзитом відправляємо до четвертого пункту споживання, враховуючи, що вартість перевезення до нього є меншою, ніж до третього споживача. Аналогічно розподілимо запаси інших постачальників та отримаємо базисний план (рис. 26). Кількість стрілок плану відповідає умові невиродженості, тому можна здійснити подальшу перевірку плану.

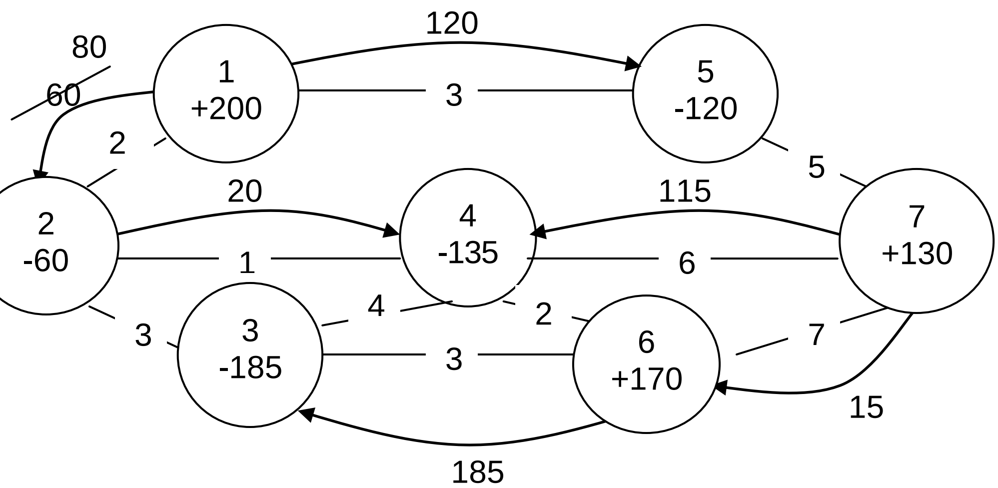

Рис. 26. **Базисний план транспортної задачі**

Перевірку базисного плану на оптимальність виконаємо на підставі методу потенціалів. Розрахуємо значення потенціалів для кожної вершини мережі та характеристики ребер.

Найменше від'ємне значення $E_{23} = -2$ серед інших розрахованих характеристик свідчить, що план не є оптимальним (рис. 27), і його можна оптимізувати, розподіливши вантаж через ребро 23 (рис. 28).

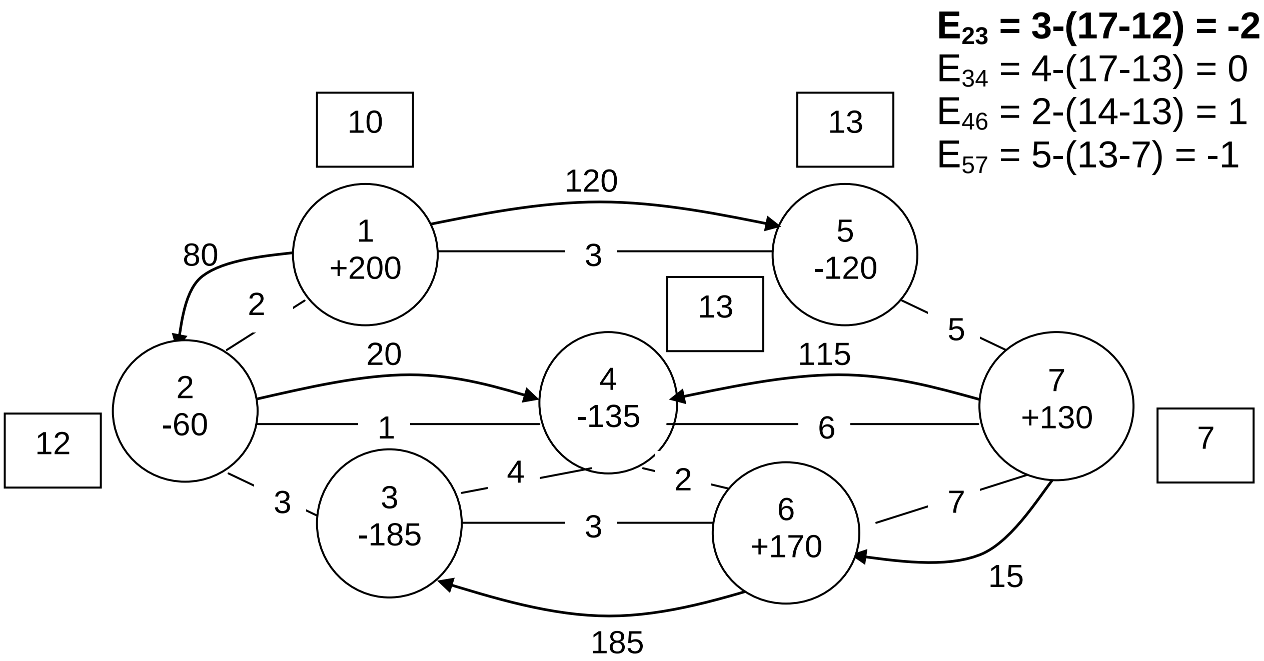

Рис. 27. **Перевірка базисного плану на оптимальність**

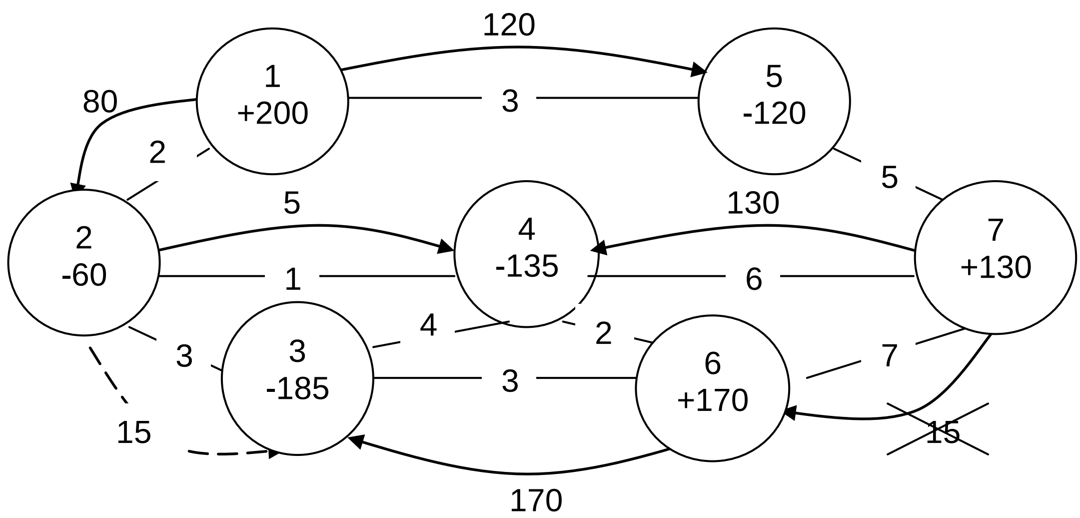

Рис. 28. **Перерозподіл потоків вантажу**

Після складання нового опорного плану, виконаємо його перевірку на оптимальність. Наявність від'ємного значення за характеристикою E_{57} говорить про можливість поліпшення плану перевезень (рис. 29).

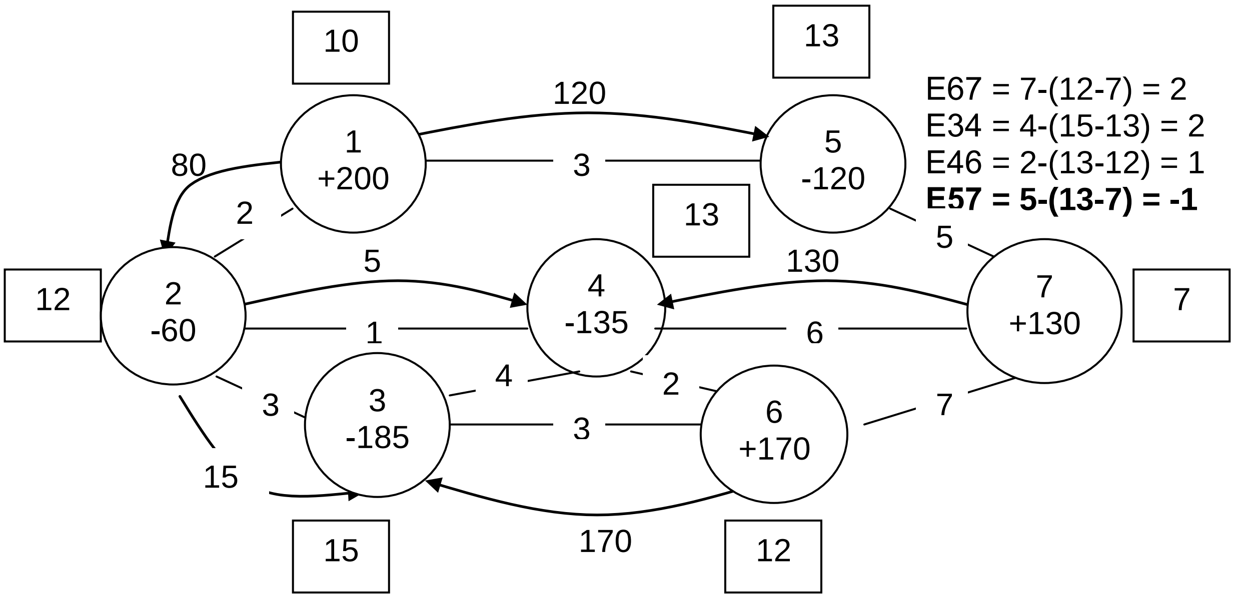

Рис. 29. **Перевірка нового базисного плану на оптимальність**

Виконаємо новий перерозподіл потоків вантажу з урахуванням того, що до п'ятого пункту від сьомого постачальника пройде вантаж у кількості 120 од. При цьому постачання вантажу від першого до п'ятого пункту припиниться. Також зміниться кількість вантажу на ділянках 1 – 2, 2 – 4 та 4 – 7 (рис. 30).

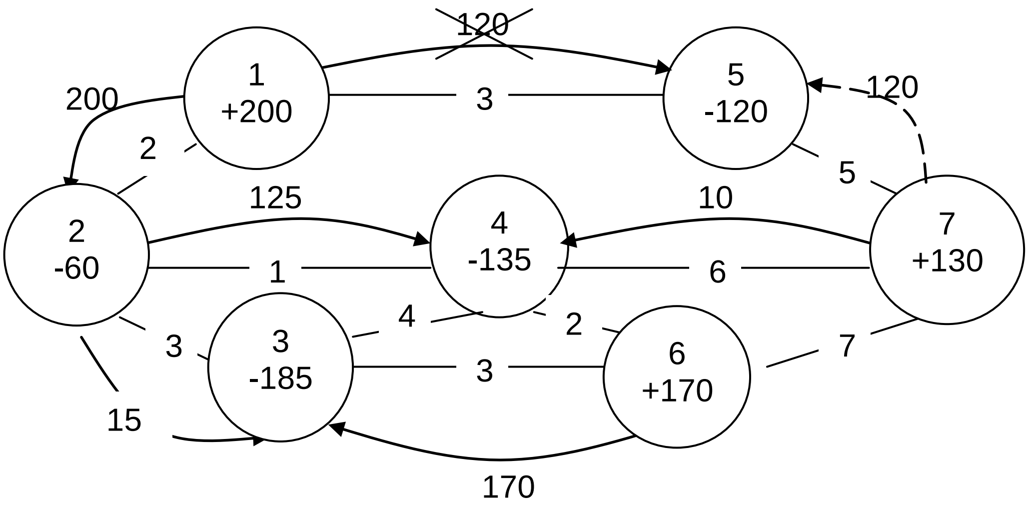

Рис. 30. **Новий перерозподіл вантажопотоків**

Для отриманого плану знову розрахуємо за методом потенціалів значення потенціалів та характеристики ребер, через які вантаж не передається (рис. 31).

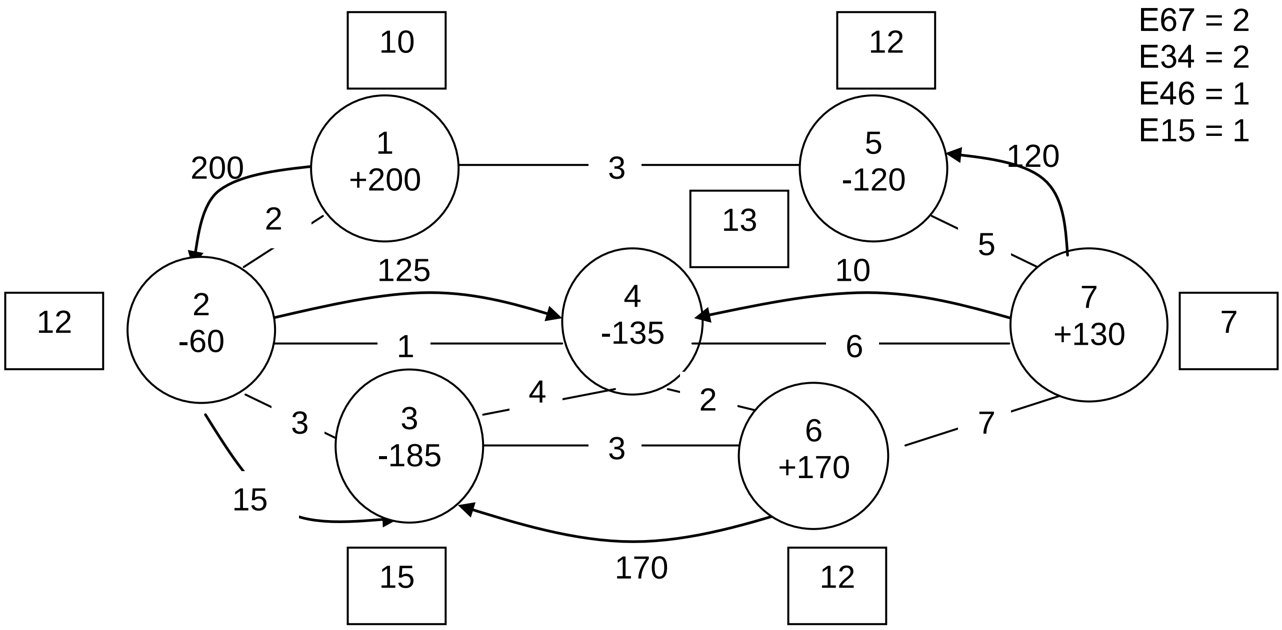

Рис. 31. **Перевірка плану на оптимальність**

Оскільки всі характеристики за останнім планом є додатними, то план є оптимальним. Обчислимо загальну вартість перевезень:

$$Z = 200\cdot2+125\cdot1+3\cdot15+10\cdot6+170\cdot3+120\cdot5 = 1\ 740 \text{ у.о.}$$

Практичні завдання за темою "Динамічне програмування"

Варіанти до самостійного виконання завдання

Умови завдання. Підприємство випускає чотири види продукції. Протягом деякого часу цех, що випускає продукцію, потрібно реконструювати і асортимент повністю замінити. Реконструкції піддаються три цехи, її слід провести без зупинки виробництва. Одночасно проводити реконструкцію і замінювати продукцію не можна. Усі заплановані зміни виконати без погіршення показників виробничо-господарської діяльності заводу. В якості критерію оптимальності розглянути максимум приросту товарної продукції (варіанти – парні рядки) та мінімум витрат (варіанти – непарні рядки) за весь плановий період. Обидва критерії виражаються в деяких умовних одиницях вартості, які наведено в табл. 1, 2, рис. 32.

Таблиця 1

Вихідні дані приросту товарної продукції

№ варіанта	Приріст товарної продукції															
	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	a_{11}	a_{12}	a_{13}	a_{14}	a_{15}	a_{16}
1	9	10	10	11	12	11	10	13	12	16	10	11	10	12	12	9
2	13	15	16	17	18	14	13	15	20	18	16	16	12	14	14	14
3	10	10	11	12	11	10	13	12	16	10	11	10	12	12	9	14
4	15	16	17	18	14	13	15	20	18	16	16	12	14	15	14	18
5	10	11	12	11	10	13	12	16	10	11	10	12	12	9	14	12
6	16	17	18	14	13	15	20	18	16	16	12	14	15	14	18	14
7	11	12	11	10	13	12	16	10	11	10	12	12	9	14	12	10
8	17	18	14	13	15	20	18	16	16	12	14	15	14	18	14	12
9	12	11	10	13	12	16	10	11	10	12	12	9	14	12	10	13
10	18	14	13	15	20	18	16	16	12	14	15	14	18	14	12	19
11	11	10	13	12	16	10	11	10	12	12	9	14	12	10	13	10
12	14	13	15	20	18	16	16	12	14	15	14	18	14	12	19	16
13	10	13	12	16	10	11	10	12	12	9	14	12	10	13	10	12
14	13	15	20	18	16	16	12	14	15	14	18	14	12	19	16	13
15	12	16	10	11	10	12	12	9	14	12	10	13	10	12	13	14
16	15	20	18	16	16	12	14	15	14	18	14	12	19	.16	13	18
17	16	10	11	10	12	12	9	14	12	10	13	10	12	13	14	12
18	20	18	16	16	12	14	15	14	18	14	12	19	16	13	18	18
19	10	11	10	12	12	9	14	12	10	13	10	12	13	14	12	15
20	18	16	16	12.	14	15	14	18	14	12	19	16	13	18	18	15
21	11	10	12	12	9	14	12	10	13	10	12	13	14	12	15	10
22	16	16	12	14	15	14	18	14	12	19	16	13	18	18	15	20
23	10	Р	12	9	14	12	10	13	10	12	13	14	12	15	10	7
24	16	12	14	15	14	18	14	12	19	16	13	18	18	15	20	17
25	12	12	9	14	12	10	П	10	12	13	14	12	15	10	7	14

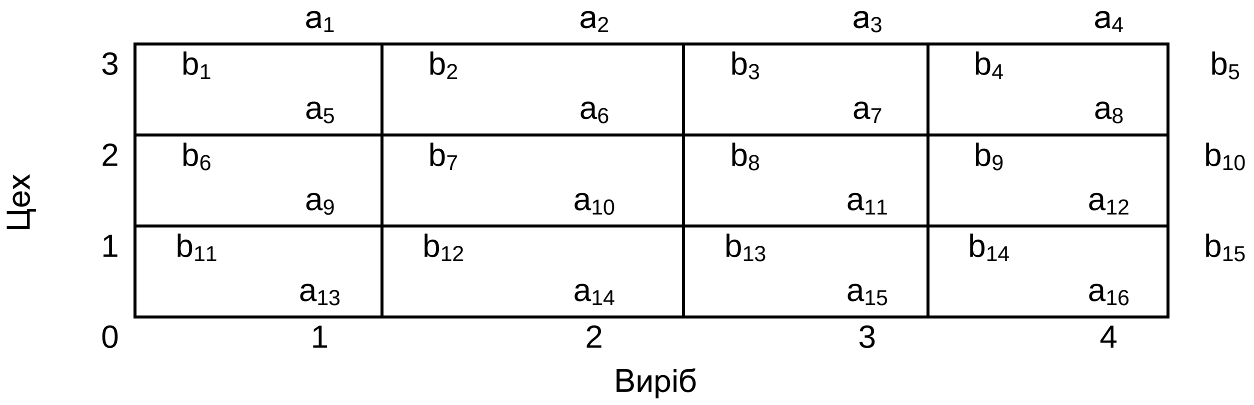

Рис. 32. **Вихідні дані**

Таблиця 2

Значення вартості

№ варіанта	Вартість															
	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}	b_{12}	b_{13}	b_{14}	b_{15}	b_{16}
1	14	12	10	13	10	12	14	13	12	15	10	7	14	11	12	0
2	18	14	12	17	16	14	13	15	20	17	16	19	12	14	15	0
3	12	10	13	10	12	10	13	12	14	10	11	10	14	12	9	0
4	14	12	19	16	14	13	15	20	18	15	16	12	14	15	12	0
5	10	13	12	11	10	13	12	15	10	11	10	12	12	9	14	0
6	12	19	16	14	13	18	20	18	17	16	12	9	15	14	13	0
7	13	10	12	10	14	12	15	10	7	14	11	12	9	10	12	0
8	19	16	14	13	15	20	18	16	18	12	13	15	14	9	14	0
9	10	12	13	14	12	15	10	7	10	11	12	9	10	12	10	0
10	16	18	13	15	20	17	16	19	12	14	15	9	13	14	12	0
11	12	13	14	12	15	10	7	14	11	12	9	10	12	10	11	0
12	13	18	15	20	17	16	19	15	9	13	15	18	14	12	18	0
13	10	14	12	15	10	7	14	11	12	9	10	12	10	11	12	0
14	18	16	20	17	16	19	12	13	15	12	16	15	12	17	14	0
15	12	15	10	7	14	11	12	9	10	12	11	10	10	12	11	0
16	18	20	15	17	16	19	16	15	9	13	15	12	17	16	14	0
17	15	10	7	14	11	12	9	10	12	10	11	13	12	11	13	0
18	18	15	19	16	15	14	13	9	13	15	12	17	16	13	15	0
19	10	7	10	8	12	9	11	12	10	9	10	11	12	14	12	0
20	20	17	16	19	13	15	9	13	16	12	17	16	13	18	14	0
21	7	10	11	12	9	8	12	10	11	10	12	11	10	12	11	0
22	8	14	12	11	13	12	16	9	12	17	14	10	14	16	15	0
23	10	12	10	8	12	12	10	14	10	9	11	11	12	13	7	0
24	13	9	12	13	7	12	14	12	17	14	12	9	16	12	14	0
25	8	12	9	11	12	10	15	10	14	13	14	12	13	9	8	0

Методичні рекомендації до виконання завдання

Динамічне програмування (ДП) – метод оптимізації, пристосований до операцій, в яких процес прийняття рішення може бути розбитий на етапи (кроки). Такі операції називаються багатокроковими. Початок розвитку ДП відноситься до 50-х р. XX ст. У теорії динамічного програмування досліджується широке і важливе коло управлінських завдань. Особливістю їх є те, що процес прийняття рішень в них розпадається на ряд послідовних етапів. Природно, що багатоетапність асоціюється, насамперед, з розвитком процесу (системи) у часі. Тому динамічне програмування доцільно застосовувати до динамічних завдань, в яких має бути ухвалено не одноразове оптимальне рішення, а низка послідовних у часі рішень, які забезпечують оптимальність у цілому. Типові особливості багатоетапних задач, які розв'язують методом динамічного програмування, полягають у такому:

- процес переходу виробничо-економічної системи з одного стану в інший повинен бути процесом з відсутністю післядії (марківським). Це означає, що, якщо система знаходиться в деякому стані $S^n \in S_n$, то подальший розвиток процесу залежить тільки від даного стану і не залежить від того, яким шляхом система приведена в цей стан;
- процес триває певне число кроків N. На кожному кроці здійснюється вибір одного управління u^n, під впливом якого система переходить з одного стану S^n в інший S^{n+1}: $S^n \to u^n \to S^{n+1}$. Оскільки процес марківський, то $u^n = u^n(S^n)$ залежить тільки від поточного стану;
- кожен крок (вибір чергового рішення) пов'язаний з певним ефектом, який залежить від поточного стану і прийнятого рішення: $\varphi_n (S^n , u^n)$;
- загальний ефект (дохід) за N кроків складається з доходів на окремих кроках, тобто критерій оптимальності повинен бути адитивним (або приводиться до нього).

В основі загальної концепції методу динамічного програмування лежить принцип Беллмана: оптимальна стратегія володіє такою властивістю, що незалежно від того, яким чином система опинилася в розглянутому конкретному стані, наступні рішення повинні складати оптимальну стратегію, яка приводить до цього стану.

Під час числового пошуку оптимальних рівнянь часто виявляється, що процес має дуже багато етапів і безпосереднє обчислення функцій Беллмана в задачах неможливо. У деяких випадках вдається організувати обчислювальний процес таким чином, щоб зберегти лише агреговану інформацію, за якою можна відтворити потрібні значення функцій $F_n(.x)$. Такі підходи передбачені методом послідовного аналізу варіантів і методом переробки списку станів.

Більш загальні моделі динамічного програмування з випадковими переходами відомі як марківські і напівмарківські процеси вирішення. Вивчення асимптотичних властивостей процесів динамічного програмування призвело до певних стаціонарних режимів, до яких значною мірою наближається будь-яка оптимальна траєкторія. Ці стаціонарні режими відшукують у ході рішення спеціальної задачі лінійного програмування. Динамічне програмування для процесів з безперервним часом розглядається як граничний варіант дискретної схеми і дає результати, наближені до тих, які можуть бути отримані виходячи з теорії оптимальних процесів.

Якщо моделі лінійного програмування можна використовувати в економіці для прийняття великомасштабних планових рішень у складних ситуаціях, то моделі ДП застосовуються у ході вирішення завдань значно меншого масштабу. Методом динамічного програмування можуть бути вирішені такі завдання:

- задачі календарного виробничого планування виробництва і вирівнювання зайнятості в умовах мінливого попиту на продукцію;
- у ході розробки правил управління запасами, які встановлюють момент поповнення запасів і розмір поповнювати замовлення;
- завдання встановлення найкоротших шляхів між пунктами на транспортній сітці і под;
- планування виробничої програми за періодами року за мінімальних витратах на виробництво й утримання запасів;
- оптимальний розподіл коштів і ресурсів на розширення виробництва за умови максимального приросту випуску продукції;
- оптимальне планування заміни застарілого обладнання новим за умови отримання максимального прибутку, розробки довгострокових правил заміни вибуття з експлуатації основних фондів;
- календарне планування ремонту або заміни застарілого обладнання при мінімумі експлуатаційних витрат;
- оптимальне резервування складних технічних систем з мінімальними витратами на резервування, якщо забезпечена надійність системи.

У реально функціонуючих великих економічних системах щотижня потрібно приймати мікроекономічні рішення. У цілому динамічне програмування має свої переваги і недоліки. Метод дає можливість розширити клас задач за рахунок вирішення задач із нелінійними функціями й обмеженнями, які враховують різні логічні умови цілочислових задач. Значення динамічного програмування полягає в можливості поетапного аналізу структури системи. Можливість застосування динамічного програмування обмежується низкою недоліків цього методу. Перша складність виникає у ході формування в його термінах задачі оптимізації досліджуваного процесу. Друга полягає в тому, що на відміну від лінійного програмування, де є універсальний алгоритм вирішення задач – симплекс-метод, у динамічному програмуванні відсутній загальний алгоритм. Динамічне програмування дає тільки загальний напрям вирішення конкретного завдання, тому в кожному окремому випадку необхідно знаходити найбільш прийнятний метод оптимізації. Дослідження динамічного програмування має деякі складності у ході вирішення завдань високої розмірності, яка визначається не тільки кількістю змінних станів і рівнянь, але і частотою їх варіювання. Крім того, задачі динамічного програмування найчастіше вирішують за допомогою числових, а не аналітичних методів.

Моделі ДП цінні тим, що дозволяють на основі стандартного підходу з мінімальним залученням людини приймати такі рішення. І якщо кожне окреме таке рішення малоістотне, то в сукупності ці рішення можуть мати великий вплив на прибуток.

У загальному випадку задача динамічного програмування може бути сформульована таким чином: певна фізична або економічна система в початковий момент часу T_0 знаходиться в стані S_0. Цей стан визначається n-мірним вектором параметрів системи. За період часу $T_k - T_0$ система має бути переведена в деякий кінцевий стан S_k, обумовлений відповідними значеннями вектора станів. Перехід здійснюється за кінцеве число кроків, на кожному з яких система переводиться в деякий проміжний стан S_i. При цьому необхідно забезпечити оптимальне значення критерію, яке оцінює якість управління, або процес переходу від S_0 до S_n. Перехід системи зі стану в стан характеризується набором послідовних станів S_0, S_1, $\ldots S_i, \ldots S_n$ і називається траєкторією руху системи. Перехід системи забезпечується за допомогою ряду послідовних управляючих впливів або управлінь u_i. Сукупність управлінь x_i позначимо через x. Тоді задача динамічного програмування полягає у виборі оптимального управління x, яке послідовно переводить систему зі стану в стан від S_0 до S_n за умови, що критерій F(x) набуває екстремального значення.

Реалізація моделей динамічного програмування має особливість: з усіх можливих станів системи фактично точно відомі два – S_0 та S_n, а приймати рішення необхідно для кожного кроку. При цьому потрібно враховувати розвиток процесу до цього кроку і після нього, що породжує основні труднощі у процесі вибору оптимального управління; невідомо, як реально буде розвиватися процес, відома тільки очікувана кінцева множина можливих поєднань характеристик системи, що відповідає кожному зі станів. Для останнього кроку точно відомо, до якого результату він повинен привести – перевести систему з одного з можливих станів в єдиний необхідний S_n. Тому на останньому кроці управління залежить тільки від стану системи після реалізації передостаннього k - 1 кроку, що дозволяє знайти варіант, який забезпечує максимальний ефект управління на останньому кроці, в якому б зі станів не перебувала система перед останнім кроком.

Змінні $x_к$ задовольняють певним обмеженням і в цьому сенсі є *допустимими (*$x_к$ може бути числом, точкою в n-мірному просторі, якісною ознакою).

Нехай x (x_1, $x_{2,...}$ x_n) – управління, що переводить систему S зі стану S_0 у стан S_n. Позначимо через S_K стан системи після k-го кроку управління. Отримуємо послідовність станів S_0, S_1, $\dots S_n$, яку зобразимо колами (рис. 33).

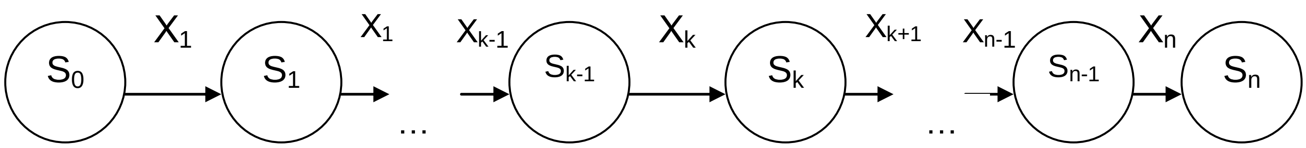

Рис. 33. **Послідовність станів**

Рішення задачі динамічного програмування починається з умовного планування останнього кроку. Оскільки стан системи перед останнім кроком невідомо, то для кожного з можливих станів знаходять відповідне управління, яке називається умовно оптимальним. Після визначення стану системи перед останнім кроком з умовно оптимальних управлінь обирається одне безумовно оптимальне.

Показник ефективності розглянутої керованої операції – цільова функція – залежить від початкового стану й управління:

$$Z = F(S_{0,} X). \tag{21}$$

Зробимо кілька припущень.

1. Стан S_k системи в кінці k-го кроку залежить тільки від попереднього стану S_{k-1} і управління на k кроці X_k (і не залежить від попередніх станів і управлінь). Ця вимога називається "відсутністю післядії". Сформульоване положення записується у вигляді рівнянь:

$$s_k = \quad _k(s_{k-1}, x_k), k = 1,2,\ldots n, \tag{22}$$

які називаються рівняннями станів.

2. Цільова функція (21) є адитивною від показника ефективності кожного кроку. Позначимо показник ефективності k-го кроку через:

$$Z_k = f_k(s_{k-1}, x_k), k = 1,2,\ldots n, \tag{23}$$

тоді

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1}, x_k). \tag{24}$$

Завдання покрокової оптимізації (задача ДП) формулюється так: визначити таке допустиме управління X, яке переводить систему S зі стану s_0 в стан s\`, при якому цільова функція (24) набуває найбільше (найменше) значення.

Виділимо особливості моделі ДП:

1. Задача оптимізації інтерпретується як n-кроковий процес управління.

2. Цільова функція дорівнює сумі цільових функцій кожного кроку.

3. Вибір управління на k-му кроці залежить тільки від стану системи до цього кроку, не впливає на попередні кроки (немає зворотного зв'язку).

4. Стан s_k після k-го кроку управління залежить тільки від попереднього стану управління (відсутність післядії).

5. На кожному кроці управління залежить від кінцевого числа керуючих змінних, а стан s_k – від кінцевої кількості параметрів (сенс зауваження 5 стане зрозумілим з розглянутих нижче прикладів).

Слід згадати, що існують різні способи розв'язання подібних завдань, які застосовуються залежно від виду функцій, обмежень, розмірності та ін.

Розглянемо обчислювальну схему ДП, яка виявиться байдужою до способів задавання функцій і обмежень. Обчислювальна схема пов'язана з принципом оптимальності і використовує рекурентні співвідношення.

Принцип оптимальності і рівняння Беллмана. Принцип оптимальності вперше був сформульований Р. Беллманом у 1953 р. Який би не був стан з системи в результаті якого-небудь числа кроків, на найближчому кроці потрібно вибирати керування так, щоб воно в сукупності з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках призводило до оптимального виграшу на всіх кроках, що залишилися, включаючи даний.

Беллманом чітко були сформульовані також умови, за яких принцип є правильним. Основна вимога – процес управління має бути без зворотного зв'язку, тобто управління на даному кроці не має здійснювати впливу на попередні кроки. Принцип оптимальності стверджує, що для будь-якого процесу без зворотного зв'язку оптимальне управління таке, що воно є оптимальним для будь-якого підпроцесу стосовно вхідних станів цього підпроцесу. Тому рішення на кожному кроці виявляється найкращим з точки зору управління в цілому. Якщо зобразити геометрично оптимальну траєкторію у вигляді ламаної лінії, то будь-яка частина цієї ламаної буде оптимальною траєкторією щодо початку і кінця.

Таким чином, будь-яке багатоетапне завдання можна вирішувати двома способами: шукати оптимальне рішення відразу або будувати його крок за кроком. Другий спосіб простіший. Його суть полягає в поступовій, поетапній оптимізації, що особливо важливо в задачах, де ситуація змінюється в часі.

Таким чином, принципи підходу до вирішення завдань ДП містять два припущення:

1. Оптимальне управління процесом на кожному кроці визначають на основі того стану, якого система досягла до початку цього кроку (принцип оптимальності Р. Беллмана).

2. Критерій, за допомогою якого визначається оптимальне управління на кожному кроці і для всього процесу в цілому, має властивість адитивності, тобто виграш або втрати на кожному кроці накопичуються на серії кроків підсумовуванням.

Незважаючи на достатню простоту ідей ДП, практична реалізація математичних моделей стикається зі значними труднощами. По-перше, не існує єдиного алгоритму реалізації різноманітних моделей. Способи вирішення завдань з різним вмістом різні, і практично завжди нові змістовні постановки задач вимагають розробки нових методів. По-друге, саме вирішення завдань ДП, як правило, досить громіздке. Обсяг і трудомісткість роботи різко зростають із збільшенням кількості кроків і можливих станів системи на кожному з них.

Приклад вирішення завдання

Умови завдання. Підприємство випускає п'ять видів продукції. З часом цех, що випускає продукцію, потрібно реконструювати й асортимент замінити. Реконструкції цеху слід провести без зупинки, а одночасно проводити реконструкцію і замінювати продукцію не можна. Всі заплановані зміни має бути виконано без погіршення показників виробничо-господарської діяльності підприємства. Більше того, бажано ці показники максимально поліпшити. В якості критерію оптимальності розглянути максимум приросту товарної продукції і мінімум витрат на весь плановий період.

Вирішення завдання.

1. Побудова математичної моделі задачі. Весь процес переведення підприємства до нових умов роботи можна розглядати як багатокроковий. Кожен крок становить собою або реконструкцію одного з цехів, або заміну одного виду продукції. Оскільки видів продукції п'ять і три цехи, тобто вісім кроків (етапів), то завдання полягає в ухваленні рішення на кожному кроці: проводити реконструкцію відповідного цеху або заміщати продукцію.

Рішення на кожному кроці становить управління U_i = (і = 1, 2, … 8), сукупність яких забезпечує максимум приросту товарної продукції або мінімум витрат. Стан системи характеризується двома параметрами: реконструкція одного з цехів, заміна одного виду продукції. Процес є двовимірним і легко зображується на площині. Весь період розбиваємо на кроки: 5 кроків по осі абсцис – заміна продукції, 3 кроки по осі ординат – реконструкція цеху. Перетину осей на кожному з кроків відповідає один з можливих станів системи. На рис. 34 у колах зазначено можливі стани перед останнім (восьмим) кроком. Стан S_7^1 – усі вироби замінені новими та реконструйовано тільки два цехи, стан S_7^2 – усі цехи реконструйовані і замінено чотири вироби з п'яти.

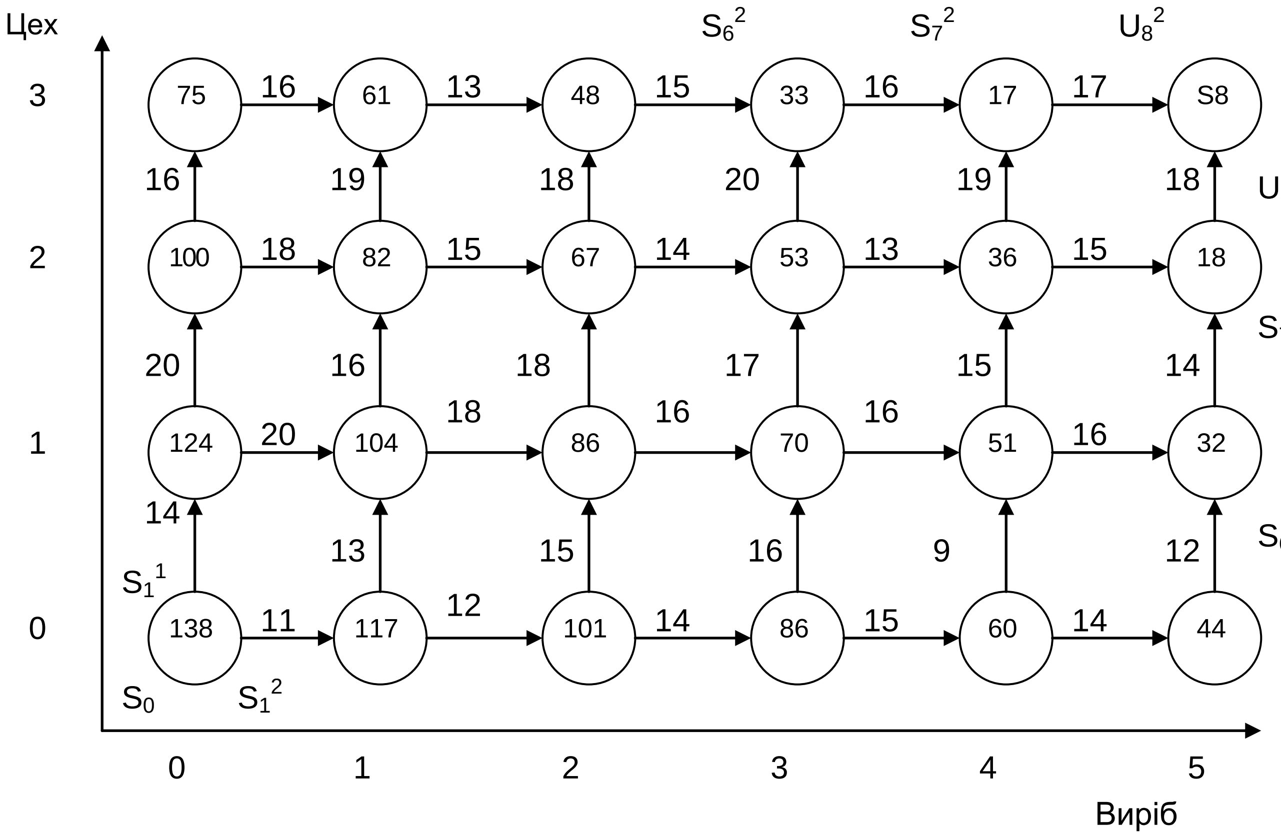

Рис. 34. **Вихідні дані, якщо критерій – максимум приріст товарної продукції**

Відповідно на прямих, що з'єднують ці два можливих стани зі станом S_8, вказано напрям: U_8^1 – реконструкція цеху № 3 і U_8^2 – заміна виробу № 5. Кожне з цих управлінь умовно оптимальне, оскільки інших варіантів переведення системи в стан S_8 не існує. Отже, останній крок умовно спланований. Дійсно, в якому би з двох можливих станів перед цим кроком не виявилася система, відомо, яке управління потрібно застосувати.

У колах на моделях вказується значення критерію оптимальності з наростаючим підсумком, причому у випадку декількох можливих шляхів у колі наводиться мінімальне значення для задач на мінімум і максимальне значення для задач на максимум. На останньому кроці від S_7 до S_8 можливо два управління – U_8^1 і U_8^2. У першому випадку приріст товарної продукції складає F_8^1 = 18 ум. од., у другому F_8^2 = 17. Оскільки невідомо, в якому зі станів буде система перед останнім кроком і обидва вони можливі, обидва управління є умовно оптимальними. Перед передостаннім – (сьомим) кроком система може знаходитися в одному з трьох станів – S_6^1, S_6^2 і S_6^3 Систему зі стану S_6^1 шляхом управління U_7^1 можна перевести в стан S_7^1, і приріст товарної продукції на цьому етапі складе 14 одиниць, а всього за обидва кроку – 32 одиниці, що зазначено у відповідному колі. Якщо система перебуває в стані S_6^2, то сумарне значення критерію – 33 одиниці. Якщо система опиниться в стані S_6^3, то її можна перевести в один із двох станів: S_7^1 і S_7^2. Для вибору можливого шляху необхідно визначити сумарне значення критерію за цими напрямками і позначити стрілкою той шлях, який дає максимальне значення сумарного критерію. Управління, відповідні кожному з можливих шляхів переходу системи є умовно оптимальними. Продовжуючи розрахунки таким чином, знайдемо всі умовні але оптимальні управління від останнього до першого кроку. Перед першим кроком сумарні значення критерію виявилися рівними 124 і 117 колом. тобто перехід зі станів S_1^1, S_1^2 можливий тільки з єдиного стану S_0. Тому управління, що забезпечує максимальний приріст продукції, буде безумовно оптимальним. Приріст товарної продукції при управліннях U_1^1 і U_1^2 відповідно складає 14 і 11 одиниць.

Отже, безумовно оптимальним буде управління U_1^1, за яким загальне значення критерію F = 138 у.о. Переміщаючись в зворотному напрямку від стану 50 до стану 58 через умовно оптимальні управління, отримуємо оптимальну траєкторію, позначену додатковою стрілкою, і оптимальні управління.

2. Аналіз оптимальної траєкторії. Для отримання максимального приросту товарної продукції за плановий період необхідно:

на першому кроці реконструювати цех № 1;

на наступних трьох кроках послідовно замінити у виробництві продукцію № 1, 2, 3;

на п'ятому і шостому кроках виконати реконструкцію цехів № 2 і 3;

на останніх двох кроках замінити останні два види продукції.

Рішення задачі за критерієм мінімуму витрат наведено на рис. 35. У цьому випадку в колах подано значення мінімальних накопичених витрат. Як видно, оптимальні траєкторії при критеріях різні. Мінімальні витрати дорівнюють 84 у. о. Тобто, для прийняття остаточного рішення можна зробити таке: за шляхом оптимальної траєкторії, отриманої за максимумом приросту товарної продукції, обчислити витрати, використовуючи вихідні дані рис. 35, і знайти відношення ефект/витрати (фондовіддача).

Аналогічно для оптимальної траєкторії, отриманої за критерієм мінімуму витрат, використовуючи вихідні дані рис. 34, визначити приріст товарної продукції і знов знайти відносини ефект/витрати.

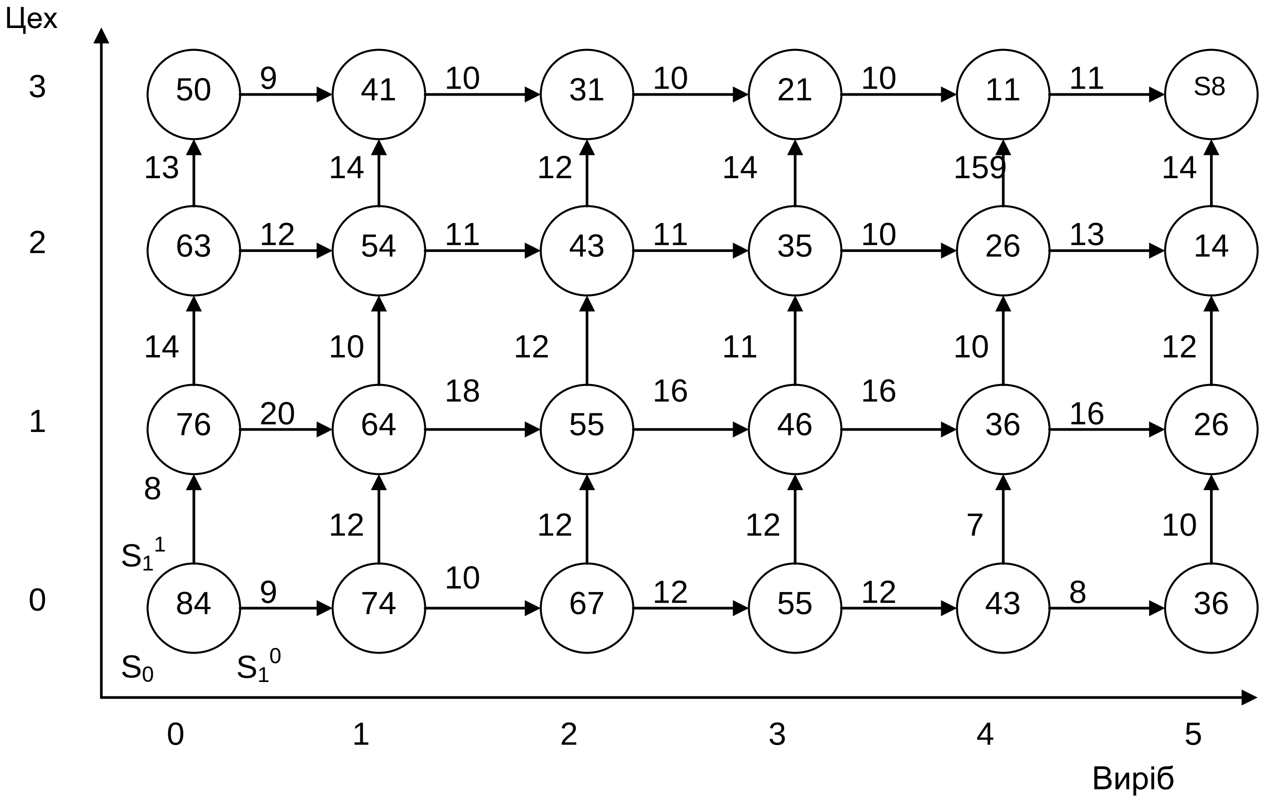

Рис. 35. **Вихідні дані, якщо критерій – мінімум витрат**

Більш ефективним виявиться той варіант, у якого це відношення більше. Для розглянутого прикладу маємо:

максимальний приріст товарної продукції дорівнює 138 у. о.,

витрати при цьому – 93 у. о. і фондовіддача – 1 484 у. о.;

мінімальні витрати становлять 84 у. о., приріст товарної продукції при таких витратах дорівнює 131 у. о. тобто і фондовіддача – 1 559 у. о.

Отже, другий варіант переважає, але остаточне рішення залишається за керівником підприємства.

Рекомендована література

1. Боровик О. Л. Дослідження операцій в економіці : навч. посіб. / О. Л. Боровик, Л. В. Боровик. – К. : Центр учбової літератури, 2007. – 424 с.

2. Забродский В. А. Конспект лекций по курсу "Экономическая кибернетика" / В. А. Забродский, Т. С. Клебанова, А. В. Милов. – Х. : ХГЭУ, 2000. – 84 с.

3. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – К. : ВІП, 2000. – 550 с.

4. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Прутко, И. М. Тришин и др.; под. ред. проф. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и баржи, ЮНИТИ, 1999. – 407 с.

5. Лебедєва І. Л. Економіко-математичні моделі на базі транспортної задачі : навч. посіб. / І. Л. Лебедєва, Г. К. Снурнікова, Л. О. Норік. – Х. : Вид-во ХНЕУ, 2007. – 160 с.

6. Методы исследования операцій : учеб. пособ. / Т. С. Клебанова, В. А. Забродский, Е. В. Раевнева и др. – Х. : ХГЭУ, 1999. – 160 с.

7. Моделирование экономики : учеб. пособ. / Т. С. Клебанова, В. А. Забродский, О. Ю. Полякова и др. – Х. : ХГЭУ, 2001. – 140 с.

8. Нелінійні моделі та аналіз складних систем : навч. посіб. у 2-х ч. Ч.1. / М. Є. Рогоза, С. К. Рамазанов, Е. К. Мусаєва. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – 300 с.

9. Охріменко М. Г. Дослідження операцій : навч. посіб. / М. Г. Охріменко, І. Ю. Дзюбан. – К. : Центр навчальної літератури, 2006. – 184 с.

10. Таха Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха ; пер. с англ. – 7-е издание. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.

11. Шикин Е. В. Исследование операций / Е. В. Шикин, Г. Е. Шикина. – М. : ТК "Велби", Изд-во "Проспект", 2006. – 280 с.

12. Штойер Р. Многокритериальная оптимизация / Р. Штойер. – М. : Радио и связь, 1992. – 124 с.

13. Экономико-математические методы и прикладные модели : учеб. пособ. для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др.; под. ред. В. В. Федосеева. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 391 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації до виконання контрольних робіт з навчальної дисципліни "МАТЕМАТИЧНІ МЕТОДИ ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ" для студентів напряму підготовки 6.050101 "Комп'ютерні науки" заочної форми навчання

Укладачі: **Чернова** Наталя Леонідівна
Чаговець Любов Олексіївна

Відповідальний за випуск *Т. С. Клебанова*

Редактор *О. Г. Лященко*

Коректор *В. В. Міхно*

План 2016 р. Поз. № 92.
Підп. до друку 06.06.2016 р. Формат 60×90 1/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 3,0. Обл.-вид. арк. 3,75. Тираж 50 пр. Зам. № 78.

Видавець і виготівник – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.