

УДК 539.2

А. М. РОЩУПКИН, В. Я. ПЛАТКОВ

**ФОРМИРОВАНИЕ ВЯЗКОСТЬЮ ДИСЛОКАЦИОННОГО АМПЛИТУДНО ЗАВИСИМОГО ГИСТЕРЕЗИСА**

Развита динамическая теория дислокационного амплитудно зависимо гистерезиса, выявляющая принципиально важную роль взаимодействия квазичастиц с дислокациями в формировании нелинейного отклика реального кристалла на распространяющуюся в нем ультразвуковую волну высокой частоты. Предсказана сильная частотная зависимость декремента затухания, обнаруживающая характерный максимум при переходе от динамического к статическому гистерезису. Для последнего случая установлен предельный переход к теориям Гранато—Люкке и Роджерса, описывающим амплитудно зависимые потери при слабой задемпфированности дислокационных петель. В рамках динамической теории дислокационного гистерезиса объяснена аномалия высокочастотного амплитудно зависимо внутреннего трения металлов, наблюдаемая при сверхпроводящем переходе и, как показывает анализ, непосредственно связанная с уменьшением в  $s$ -состоянии электронного торможения дислокаций.

Физические свойства реального кристалла существенно зависят от наличия в нем дислокаций и точечных дефектов и от их взаимодействия друг с другом. Это взаимодействие, в частности, обуславливает гистерезисный характер зависимости дислокационной деформации от приложенного внешнего напряжения, что является причиной нелинейного поглощения энергии звуковых волн. Гранато и Люкке [1] предложили количественную теорию этого явления, основанную на модели, согласно которой кристалл содержит трехмерную сетку дислокаций, закрепленных случайно расположенными вдоль них точечными дефектами одного типа. Роджерс [2] обобщил указанную теорию на случай больших амплитуд внешнего напряжения и рассмотрел амплитудную зависимость динамических потерь. В дальнейшем неоднократно предпринимались попытки включить в описание термоактивируемое преодоление дислокациями центров закрепления [3-8].

Однако следует обратить внимание еще на один аспект теории дислокационного амплитудно зависимо внутреннего трения. Дело в том, что рассмотрение энергетических потерь в амплитудно зависимо области, проведенное в [1-8], относится, по существу, к случаю незадемпфированного движения дислокационных петель. В противоположном случае физическая картина явления оказывается значительно более сложной, а часто имеет качественно иной характер. В частности, начинает зависеть от вязкости условие отрыва пары дислокационных сегментов от их общего центра закрепления. Это обстоятельство приводит к перенормировке вязкостью напряжения отрыва [9, 10], а также сказывается на количестве петель, отрывающихся при данном уровне внешнего напряжения. В связи с этим мгновенная функция распределения петель по длинам оказывается чувствительной к имеющемуся уровню демпфирования. Кроме того, из-за указанного влияния вязкости возможна ситуация, когда процесс отрыва дислокаций от центров закрепления не носит полностью катастрофического характера. В этом случае отрыв дислокации от одного из центров не обязательно влечет за собой распространение отрыва на всю длину петли  $L_N$ , определяемую расстоянием между узлами дислокационной сетки.



Самым главным проявлением роли вязкости в амплитудно зависимой области наряду с тем, что она ответственна за динамические потери [2], зависящие от амплитуды, является непосредственное влияние на так называемые гистерезисные потери, которые в конечном счете также обусловлены взаимодействием упругих полей движущихся дислокаций с квазичастицами различного рода в кристалле. До настоящего времени при рассмотрении этих потерь не учитывалось то обстоятельство, что квазичастицы, взаимодействуя с дислокациями и обуславливая тем самым существование силы динамического торможения [10-12], в свою очередь, влияют на дислокационный гистерезис. Это влияние при переходе к ультразвуку высокой частоты возрастает настолько, что приводит к изменению самого характера гистерезиса, который с увеличением частоты постепенно теряет статические и приобретает динамические черты. В задемпфированном случае, довольно часто реализуемом на практике, амплитудно зависимые потери обусловлены в основном диссипацией энергии при вязком движении дислокационных петель  $L_N$  и оказываются обратно пропорциональными частоте вынужденных колебаний  $\omega$  и коэффициенту демпфирования дислокаций  $B$ .

Последнее обстоятельство позволяет, в частности, связать наблюдаемое при сверхпроводящем переходе увеличение дислокационного амплитудно зависимого внутреннего трения металлов [13, 14] с уменьшением электронной вязкости [10]. Наряду с этим открывается возможность для объяснения целого ряда других эффектов, проявляющихся в амплитудно зависимой области при высоких частотах из-за сильного влияния вязкости на динамику дислокаций, участвующих в формировании нелинейного отклика кристалла на распространяющуюся в нем ультразвуковую волну.

### 1. Влияние вязкости на вынужденные колебания закрепленной дислокации

Анализ вынужденных колебаний закрепленной дислокации при наличии вязкости является одним из необходимых элементов построения последовательной динамической теории дислокационного амплитудно зависимого гистерезиса. Данная задача наиболее просто решается в рамках струнной модели, согласно которой уравнение движения дислокации под действием переменного внешнего напряжения  $\sigma_0 \sin \omega t$  имеет вид

$$M \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x, t) + B \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) - C \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) = b \sigma_0 \sin \omega t. \quad (1)$$

Здесь  $M$  и  $C$  — линейная плотность эффективной массы и коэффициент линейного натяжения дислокации соответственно;  $u(x, t)$  — ее смещение относительно равновесного положения;  $b$  — вектор Бюргерса. Решение уравнения (1), описывающее вынужденные колебания дислокационного сегмента длиной  $L$ , закрепленного на концах  $x_1 = -L/2$  и  $x_2 = L/2$  точечными дефектами, можно представить в замкнутой форме

$$u(x, t) = \frac{b \sigma_0}{C} \operatorname{Im} \left[ e^{i \omega t} \frac{\cos \kappa x - \cos(\kappa L/2)}{\kappa^2 \cos(\kappa L/2)} \right], \quad (2)$$

где  $\kappa^2 = (M/C)\omega(\omega - i\gamma)$ ,  $\gamma = B/M$ . Исходя из приведенного выражения для  $u(x, t)$ , проанализируем влияние вязкости на величину угла  $\varphi(t)$ , образуемого касательной к линии дислокации в одной из точек закрепления и прямой, соединяющей эти точки. Вычисляя значение производной функции  $u(x, t)$  по  $x$  при  $x = -L/2$ , находим

$$\operatorname{tg} \varphi(t) = \frac{b \sigma_0}{C} \operatorname{Im} \left[ e^{i \omega t} \frac{1}{\kappa} \operatorname{tg} \frac{\kappa L}{2} \right]. \quad (3)$$



Несмотря на кажущуюся простоту, эта формула в общем случае приводит к довольно громоздкому выражению для тангенса «угла атаки»  $\varphi(t)$  (см. [15]). В связи с этим представляется целесообразным с самого начала воспользоваться условием малости частоты  $\omega$  по сравнению с  $\gamma$ , выполняющимся в большинстве экспериментальных ситуаций. Отметим, что только благодаря электронной вязкости в нормальных металлах величина  $\gamma$  ( $= \gamma_n$ ) достигает значений порядка  $10^{10} - 10^{11} \text{ сек}^{-1}$  [9]. В сверхпроводящем же состоянии с понижением температуры  $\gamma$  ( $= \gamma_s$ ) резко убывает в соответствии с формулой [10]

$$\gamma_s = \gamma_n \frac{2}{1 + \exp(\Delta(T)/T)}, \quad (4)$$

где  $\Delta(T)$  — энергетическая щель сверхпроводника при температуре  $T$ . Тем не менее даже при такой относительно низкой температуре, как, например,  $T = 0,25T_c$  ( $T_c$  — критическая температура сверхпроводника) значения величины  $\gamma_s$  все еще достаточно велики ( $\sim 10^7 - 10^8 \text{ сек}^{-1}$ ) по сравнению с обычно используемыми частотами. Кроме того, необходимо учитывать, что формула (4) имеет место лишь при малых скоростях движения элементов дислокации  $V \ll T/\hbar q_m$ ,  $\Delta(T)/\hbar q_m$  ( $q_m$  — характерный размер ячейки Бриллюэна) [10]. Однако в общем случае не исключено, что их скорость на протяжении какой-то части периода колебаний может превышать критическое значение  $V_c = 2\Delta(T)/\hbar q_m$ , начиная с которого происходит разрыв куперовских пар. Поскольку это приводит к довольно существенному возрастанию силы торможения, ситуация является удовлетворительной с точки зрения выполнения неравенства  $\omega \ll \gamma^*$ . Наряду с этим будем рассматривать лишь малые значения  $\varphi$ , иначе при типичной величине силы связи дислокации с точечными дефектами условие ее закрепления теряет смысл. Тогда, согласно (3), можно записать

$$\varphi(t) = \varphi_0 \sin(\omega t - \Phi), \quad (5)$$

где амплитуда «угла атаки» и сдвиг его фазы по отношению к внешнему напряжению определяются выражениями

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_d \left[ \frac{\text{ch}(\sqrt{2}L/L_d) - \cos(\sqrt{2}L/L_d)}{\text{ch}(\sqrt{2}L/L_d) + \cos(\sqrt{2}L/L_d)} \right]^{1/2}; \\ \Phi &= \arctg \frac{\text{sh}(\sqrt{2}L/L_d) - \sin(\sqrt{2}L/L_d)}{\text{sh}(\sqrt{2}L/L_d) + \sin(\sqrt{2}L/L_d)}, \quad 0 \leq \Phi \leq \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Здесь  $\varphi_d = b\sigma_0/\sqrt{CB\omega}$  — значение амплитуды  $\varphi_0$ , соответствующее случаю полной задемпфированности вынужденных колебаний дислокационного сегмента;  $L_d = 2\sqrt{C/B\omega}$  — характеристическая длина демпфирования, играющая важную роль в излагаемой теории. В дальнейшем весьма плодотворным оказывается введение эффективной длины дислокационного сегмента  $\mathcal{L}$ , связанной с  $\varphi_0 = b\sigma_0\mathcal{L}/2C$  тем же соотношением, что и в отсутствие вязкости. На рис. 1, а и б приведены графики зависимости  $\varphi_0/\varphi_d$  от  $L/L_d$  и  $\Phi$  от  $L^2/L_d^2$ . Поскольку, по определению,  $\mathcal{L}/L_d = \varphi_0/\varphi_d$ , зави-

\*. Отметим, что в области действия механизма разрыва куперовских пар константа  $\gamma$  может быть определена только в некотором эффективном смысле, поскольку зависимость силы торможения от скорости носит здесь нелинейный характер [10].



симось  $\mathcal{L}(L)$ , как видно на рис. 1, а, хорошо аппроксимируется простой функцией

$$\mathcal{L}(L) = \begin{cases} L & \text{при } L < L_d; \\ L_d & \text{при } L \geq L_d. \end{cases} \quad (7)$$

Данное обстоятельство, в частности, существенно облегчает учет влияния вязкости на отрыв дислокаций от центров закрепления.

Другой важной характеристикой динамики дислокационного сегмента, совершающего вынужденные колебания, является его среднее смещение относительно положения равновесия

$$\bar{u}(t) = \frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} u(x, t) dx.$$

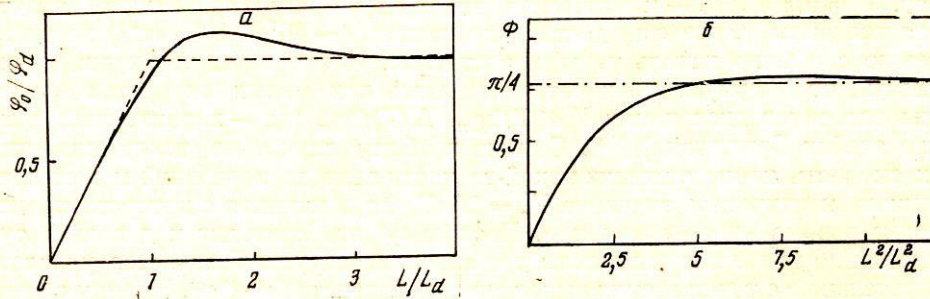


Рис. 1. Влияние уровня задемпфированности колеблющегося дислокационного сегмента на нормированную амплитуду «угла атаки» (а) и на сдвиг фазы этого угла по отношению к фазе внешнего напряжения (б).

Подставляя сюда вместо  $u(x, t)$  выражение (2) и производя интегрирование, получаем

$$\bar{u}(t) = \frac{b\sigma_0}{C} \operatorname{Im} \left[ e^{it\omega} \frac{1}{\kappa^2} \left( \frac{2}{\kappa L} \operatorname{tg} \frac{\kappa L}{2} - 1 \right) \right].$$

Приводя затем эту формулу к виду

$$\bar{u}(t) = \bar{u}_0 \sin(\omega t - \psi), \quad (8)$$

находим амплитуду среднего смещения сегмента и его отставание по фазе от внешнего напряжения. В интересующем нас случае  $\omega \ll \gamma$  эти величины определяются соответственно выражениями

$$\begin{aligned} \bar{u}_0 &= \bar{u}_d [1 - 2(\mathcal{L}/L) \cos \Phi + \mathcal{L}^2/L^2]^{1/2}, \\ \psi &= \operatorname{arctg} \frac{L - \mathcal{L} \cos \Phi}{\mathcal{L} \sin \Phi}, \quad 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}, \end{aligned} \quad (9)$$

где  $\bar{u}_d = b\sigma_0/B\omega$  — амплитуда смещения полностью задемпфированного сегмента;  $\mathcal{L}$  и  $\Phi$  предполагаются выраженными через  $L$  посредством формул (6) с учетом связи между  $\mathcal{L}$  и  $\varphi_0$ . На рис. 2, а и б представлены графики зависимостей  $\bar{u}_0/\bar{u}_d$  и  $\psi$  от  $L^2/L_d^2$ . Как и на рис. 1, при длинах дислокационного сегмента, в несколько раз превышающих  $L_d$ , кривые практически выходят на свою асимптотику.

Таким образом, на основании этих результатов можно сделать вывод, что при  $L \geq L_d$  имеет место полная задемпфированность колеблющегося дис-



локационного сегмента. В этом случае характер его движения практически ничем не отличается (за исключением участков, непосредственно примыкающих к центрам закрепления) от характера движения незакрепленной дислокации, колеблющейся под действием синусоидального напряжения как единое целое. Кроме того, имеется также достаточно широкая область длин  $L \leq L_d$ , где вязкость еще существенно влияет на динамику сегмента. Только при  $L \ll L_d$  влиянием вязкости можно полностью пренебречь.

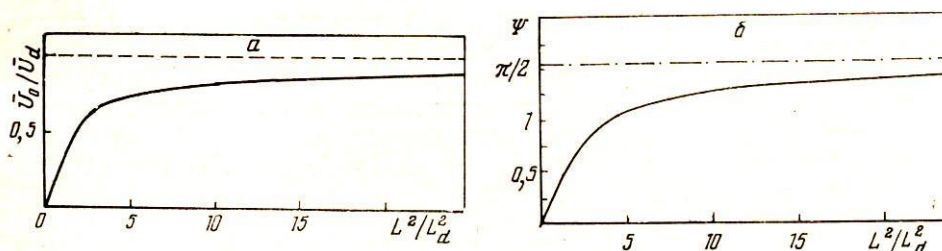


Рис. 2. Влияние уровня задемпфированности колеблющегося дислокационного сегмента на нормированную амплитуду его среднего смещения (а) и на сдвиг фазы этого смещения по отношению к фазе внешнего напряжения (б).

## 2. Влияние вязкости на отрыв дислокаций от центров закрепления

Формируя динамику колеблющихся дислокационных сегментов, вязкость непосредственно влияет на отрыв дислокаций от центров закрепления под действием переменного внешнего напряжения. С целью анализа этого влияния рассмотрим вначале силу, действующую на произвольный центр закрепления со стороны примыкающих к нему дислокационных сегментов длиной  $L_1$  и  $L_2$ . Согласно формуле (5) и определению длины  $\mathcal{L}$ , величина этой силы в приближении линейного натяжения дислокации может быть записана в виде

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t - \Theta),$$

где амплитудное значение силы и сдвиг ее фазы по отношению к внешнему напряжению определяются соответственно выражениями

$$f_0 = \frac{b\sigma_0}{2} [\mathcal{L}_1^2 + 2\mathcal{L}_1\mathcal{L}_2 \cos(\Phi_1 - \Phi_2) + \mathcal{L}_2^2]^{1/2} \cong \frac{b\sigma_0}{2} (\mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2); \quad (10)$$

$$\Theta = \arctg \frac{\mathcal{L}_1 \sin \Phi_1 + \mathcal{L}_2 \sin \Phi_2}{\mathcal{L}_1 \cos \Phi_1 + \mathcal{L}_2 \cos \Phi_2}, \quad 0 \leq \Theta \leq \frac{\pi}{4}.$$

Отметим, что наибольшая погрешность при переходе в (10) к приближенному выражению для  $f_0$  имеет место при  $L_1 \leq L_d$  и  $L_2 \geq L_d$  или  $L_1 \geq L_d$  и  $L_2 \leq L_d$ . В этом случае, как нетрудно убедиться из графиков, представленных на рис. 1, а и б, она менее 10%. Если же  $L_1, L_2 \ll L_d$  или  $L_1, L_2 \gg L_d$ , то эта погрешность весьма незначительна. Следовательно, эффективные длины сегментов складываются практически аддитивно.

Примем теперь во внимание, что отрыв сегментов от их общего центра закрепления может произойти лишь в том случае, когда  $f_0$  больше максимальной силы связи  $f_{\max}$  дислокации с этим центром. Это будет выполняться при условии

$$\mathcal{L}(L_1) + \mathcal{L}(L_2) > 2f_{\max}/b\sigma_0 = \mathcal{L}_{\sigma_0}. \quad (11)$$

В отличие от условия отрыва, используемого в теории Гранато — Люкке [1], данное условие содержит эффективные длины сегментов и, следовательно,



включает в себя вязкость\*. Это должно приводить в общем случае к зависимости от вязкости критической амплитуды напряжений  $\sigma_c$ , начиная с которой становится возможным отрыв дислокаций от центров закрепления. Поскольку в первую очередь отрываются самые длинные из имеющихся в кристалле сегментов, на основании приведенного выше критерия отрыва можем записать

$$\sigma_c = f_{\max}/b\mathcal{L}(L_{\max}).$$

Здесь  $L_{\max}$  — верхняя граница длин дислокационных сегментов, которую в силу беспорядочного расположения дефектов вдоль дислокации можно в дальнейшем приближенно считать равной  $L_N$ . Подчеркнем, что существование критической амплитуды непосредственно связано с наличием верхней границы  $\mathcal{L}(L_{\max})$  эффективных длин сегментов, достигающей, согласно (7), своего предельного значения  $L_d$  при  $L_{\max} \cong L_N > L_d$ . В этом случае величина  $\sigma_c$  определяется выражением

$$\sigma_c = \frac{f_{\max}}{bL_d} = \frac{f_{\max}}{2b} \sqrt{\frac{\omega B}{C}}, \quad (12)$$

которое отличается от результата Мэзона [9] наличием радикала. Это объясняется пренебрежением в [9] влиянием вязкости на форму колеблющейся дислокации. Зависимость критической амплитуды от вязкости рассматривалась также в работе [10]. Однако приведенное в [10] приближенное выражение для  $\sigma_c$  представлено в неоправданно сложном виде и поэтому позволяет судить скорее о качественной, чем о количественной стороне этой зависимости.

Другой стороной рассматриваемого здесь вопроса о влиянии вязкости на отрыв дислокаций является ее роль в формировании вероятности отрыва дислокационных петель  $L_N$  от закрепляющих их точечных дефектов. Вычислим в этой связи вероятность  $P(\sigma_0)$  того, что при  $\sigma_0 > \sigma_c$  два соседних дислокационных сегмента не оторвутся от общего центра закрепления в течение всего периода колебаний. Ясно, что эта вероятность совпадает с вероятностью обнаружения длин сегментов в области  $S_{\sigma_0}$ , в которой не выполняется неравенство (11), т. е. для  $L_1$  и  $L_2$ , принадлежащих  $S_{\sigma_0}$ , должно быть\*\*

$$\mathcal{L}(L_1) + \mathcal{L}(L_2) < \mathcal{L}_{\sigma_0} < 2\mathcal{L}(L_N). \quad (13)$$

Заметим, что при  $L_N < L_d$  выполняется неравенство  $L_1, L_2 < L_d$ . Последнее неравенство должно также иметь место и при  $L_N > L_d$ , если при этом  $\mathcal{L}_{\sigma_0} < L_d$  (иначе не будет выполняться неравенство (13)). Следовательно, в указанных случаях  $\mathcal{L}(L_1) = L_1$  и  $\mathcal{L}(L_2) = L_2$ . Учитывая это в (13), можно сделать вывод, что при  $L_N < L_d$  или  $L_N > L_d$  и  $\mathcal{L}_{\sigma_0} < L_d$  область  $S_{\sigma_0}$ , а значит, и вероятность  $P(\sigma_0)$ , описываются теми же формулами, что и в отсутствие вязкости\*\*\*. Следовательно, здесь имеет место выражение для  $P(\sigma_0)$ , полученное Гранато и Люкке [1]:

$$P(\sigma_0) = 1 - \left(\frac{\Gamma}{\sigma_0} + 1\right) \exp\left(-\frac{\Gamma}{\sigma_0}\right),$$

где  $\Gamma = 2f_{\max}/bL_c$  — характеристический уровень напряжений ( $L_c$  — сред-

\* Во избежание недоразумений подчеркнем, что область применимости условия (11) ограничена случаем вынужденных колебаний дислокационных сегментов.

\*\* Неравенство  $\mathcal{L}_{\sigma_0} < 2\mathcal{L}(L_N)$  или, точнее,  $\mathcal{L}_{\sigma_0} < 2\mathcal{L}(L_{\max})$  означает в другой записи, что  $\sigma_0 > \sigma_c$ .

\*\*\* Отметим, что сделанное в отношении  $P(\sigma_0)$  утверждение верно лишь в пренебрежении влиянием вязкости на келеровскую функцию распределения длин дислокационных сегментов.



няя длина дислокационных сегментов). Выясним теперь ситуацию в оставшемся случае, когда  $L_N > L_d$  и  $L_d < \mathcal{L}_{\sigma_0} < 2L_d$ . Пользуясь приведенной выше аппроксимирующей функцией для зависимости  $\mathcal{L}(L)$ , нетрудно убедиться, что область  $S_{\sigma_0}$  имеет вид, изображенный на рис. 3. Учитывая, что искомая вероятность определяется интегралом

$$P(\sigma_0) = \iint_{S_{\sigma_0}} \exp\left(-\frac{L_1 + L_2}{L_c}\right) \frac{dL_1 dL_2}{L_c^2},$$

будем иметь

$$P(\sigma_0) = 1 - \left(\frac{\Gamma}{\sigma_c} - \frac{\Gamma}{\sigma_0} + 1\right) \exp\left(-\frac{\Gamma}{\sigma_0}\right).$$

Поскольку здесь  $\sigma_c$  выражается формулой (12),  $P(\sigma_0)$  зависит от вязкости. Кроме того, ее роль в рассматриваемой области амплитуд напряжения  $\sigma_c < \sigma_0 < 2\sigma_c$  сводится к тому, что процесс отрыва дислокаций от центров закрепления носит полукатастрофический характер. Это непосредственно вытекает из того обстоятельства, что при выполнении условия отрыва (11) не обязательно должно выполняться условие его распространения  $\mathcal{L}(L_1 + L_2) + \mathcal{L}(L_1) > \mathcal{L}_{\sigma_0}$ . Подчеркнем, что сказанное относится лишь к случаю  $L_N > L_d$  и  $L_d < \mathcal{L}_{\sigma_0} < 2L_d$ . Если же  $L_N < L_d$  или  $L_N > L_d$  и  $\mathcal{L}_{\sigma_0} < L_d$ , то процесс отрыва сегментов от центров закрепления происходит катастрофически, т. е. их отрыв обязательно влечет за собой отрыв примыкающих к ним сегментов.

Вероятность того, что в течение всего периода колебаний не произойдет отрыв ни одной пары сегментов, расположенных на отрезке дислокации длиной  $L_N$ , приблизительно равна  $P^n(\sigma_0)$ , где  $n = L_N/L_c - 1$  — среднее число пар. Следовательно, вероятность отрыва хотя бы одной из таких пар будет  $1 - P^n(\sigma_0)$ . Если процесс отрыва носит катастрофический характер, то  $1 - P^n(\sigma_0)$  совпадает с вероятностью  $P_N(\sigma_0)$  отрыва петли  $L_N$  от всех закрепляющих ее точек\*. В этом случае общая длина оторвавшихся петель в единице объема кристалла равна

$$L_N \frac{\Lambda}{L_N} \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\Gamma}{\sigma_0} + 1 \right) \exp\left(-\frac{\Gamma}{\sigma_0}\right) \right]^n \right\}, \quad (14a)$$

где  $\Lambda$  — плотность дислокаций. В другой ситуации, когда отрыв не распространяется на всю длину  $L_N$ , общая длина оторвавшихся сегментов в единице объема определяется формулой

$$L_{\sigma_0} \frac{\Lambda}{L_N} \left\{ 1 - \left[ 1 - \left( \frac{\Gamma}{\sigma_c} - \frac{\Gamma}{\sigma_0} + 1 \right) \exp\left(-\frac{\Gamma}{\sigma_0}\right) \right]^n \right\}, \quad (14б)$$

где  $L_{\sigma_0}$  — среднее значение общей длины оторвавшихся сегментов на длине петли  $L_N$ . Для вычисления  $L_{\sigma_0}$  прежде всего заметим, что в данном случае эффективная длина сегментов, образовавшихся в результате отрывов, одна и та же и равна  $L_d$ . Это уже имеет место после отрыва от одного центра

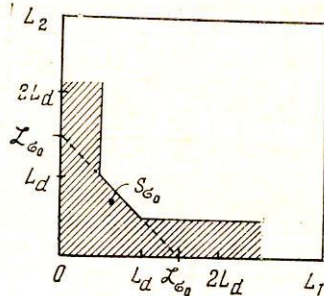


Рис. 3. Область длин дислокационных сегментов, в которой не выполняется условие их отрыва от общего центра закрепления под действием синусоидального внешнего напряжения.

\* Эта величина отличается от величины  $M$ , введенной в работе [1], тем, что она представляет собой максимальную вероятность отрыва, реализующуюся за полупериод колебаний, а не в данный момент времени. Необходимость такого рассмотрения продиктована ходом дальнейших рассуждений.



закрепления, поскольку, как видно из рис. 3, вне области  $S_{\sigma_0}$  выполняется неравенство  $L_1 + L_2 > L_d$  и, значит,  $\mathcal{L}(L_1 + L_2) = L_d$ . Следовательно, не оторвутся те сегменты, длина  $L$  которых удовлетворяет условию  $\mathcal{L}(L) < L_d$ . Его можно упростить, заменяя  $\mathcal{L}(L) \rightarrow L$ , так как в силу имеющегося ограничения  $L_d < \mathcal{L}_{\sigma_0} < 2L_d$  правая часть оказывается меньше  $L_d$ .

Тогда величина  $L_{\sigma_0}$  будет, очевидно, равна

$$\begin{aligned} L_{\sigma_0} &= L_N - \frac{L_N}{L_c} \int_0^{\mathcal{L}_{\sigma_0} - L_d} L \exp\left(-\frac{L}{L_c}\right) \frac{dL}{L_c} = \\ &= L_N \left( \frac{\Gamma}{\sigma_0} - \frac{\Gamma}{2\sigma_c} + 1 \right) \exp\left(\frac{\Gamma}{2\sigma_c} - \frac{\Gamma}{\sigma_0}\right). \end{aligned}$$

С учетом полученного результата и формул (14а), (14б) суммарную длину оторвавшихся петель в единице объема кристалла в общем случае можно записать как  $\wedge P_N(\sigma_0)$ , где величина  $P_N(\sigma_0)$  для ранних стадий процесса отрыва, т. е. когда  $\sigma_0$  мало по сравнению с  $\Gamma$ , определяется выражениями

$$P_N(\sigma_0) = \begin{cases} \frac{L_N}{L_c} \left( \frac{\Gamma}{\sigma_0} + 1 \right) \exp\left(-\frac{\Gamma}{\sigma_0}\right) & \text{при } L_N < L_d \text{ или при } L_N > L_d \text{ и } \sigma_0 > 2\sigma_c; \\ \frac{L_N}{L_c} \left( \frac{\Gamma}{\sigma_0} - \frac{\Gamma}{2\sigma_c} + 1 \right) \exp\left(\frac{\Gamma}{2\sigma_c} - \frac{\Gamma}{\sigma_0}\right) & \text{при } L_N > L_d \text{ и } \sigma_c < \sigma_0 < 2\sigma_c. \end{cases} \quad (15)$$

Последнее выражение, в отличие от первого, не является вероятностью отрыва петли  $L_N$  от всех закрепляющих ее точек, поскольку такой ситуации при полукатастрофическом отрыве просто не существует. Однако если условиться, что величина (14б) обусловлена полным отрывом некоторого числа фиктивных петель  $L_N$ , то соответствующее выражение для  $P_N(\sigma_0)$  можно рассматривать в прежнем смысле. Тогда на основании формулы (15) следует сделать вывод, что перенормировка вязкостью вероятности отрыва дислокационной петли  $L_N$  от всех закрепляющих ее дефектов имеет место лишь в задемпфированном случае в ограниченном интервале амплитуд внешнего напряжения.

### 3. Влияние вязкости на дислокационный гистерезис

Рассмотренный Гранато и Люкке [1] квазистатический гистерезис полностью обусловлен наличием силы торможения дислокаций точечными дефектами, имеющей характер силы сухого трения. Вместе с тем дислокации, взаимодействуя с различного рода квазичастицами в кристалле, испытывают при своем движении силу вязкого трения, роль которой возрастает с увеличением частоты вынужденных колебаний и в области высоких частот становится определяющей в формировании петли дислокационного гистерезиса. При этом влияние вязкости оказывается существенно нелинейным эффектом, что выражается в отсутствии простой суперпозиции между энергетическими потерями, обусловленными, с одной стороны, отрывом дислокаций от точечных дефектов и, с другой, — их движением в вязкой среде. Такая суперпозиция, как показывает анализ, имеет место лишь при низких частотах  $\omega \ll 4C/BL_N^2$ , когда динамические эффекты еще весьма незначительны, чтобы в какой-то мере влиять на квазистатический гистерезис. Однако с увеличением частоты это влияние становится все более заметным, а при  $\omega \gg 4C/BL_N^2$  приводит к тому, что квазистатический гистерезис полностью исчезает, уступая место чисто динамическому гистерезису. Каким образом происходит этот процесс, хорошо видно из рис. 4,а



и б, на которых в приведенных координатах изображена зависимость от напряжения среднего смещения дислокационной петли  $L_N$  в незадемпфированном и задемпфированном случаях. На этих рисунках точки  $B, B'$  соответствуют моментам столкновения петли с точечными дефектами. Закрепляясь ими, петля под действием возрастающего внешнего напряжения прогибается на участках между дефектами до тех пор, пока не наступает отрыв (точки  $C$  и  $C'$ ). Далее следует ее резко нестационарное движение с выходом в точках  $D$  и  $D'$  на режим вынужденных колебаний. В соответствии с формулой (8) столкновение петли  $L_N$  с точечными дефектами происходит при значениях внешнего напряжения, равных по модулю  $\sigma_0 \sin \psi_N$ . Если это напряжение превосходит напряжение отрыва рассматриваемой петли от всех закрепляющих ее дефектов, то их ограничивающее влияние почти не чувствуется, тем более что отрыву коротких сегментов ( $L \ll \ll (2\pi/B)\sqrt{MC}$ ) в значительной мере способствует инерционный эффект [16]. Можно сказать, что в этом случае дислокация проходит дефекты, как бы не замечая их.

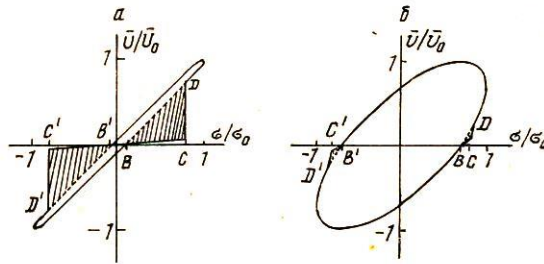


Рис. 4. Дислокационный гистерезис в незадемпфированном (а) и задемпфированном (б) случаях.

Данная ситуация отвечает расположению точек  $C, C'$  внутри петли динамического гистерезиса, вследствие чего статический гистерезис здесь полностью отсутствует. В общем же случае дислокационный гистерезис имеет как статические, так и динамические черты.

Переходя к рассмотрению дислокационного амплитудно зависимо гистерезиса внутреннего трения при наличии вязкости, обратим внимание на то, что основная доля петель  $L_N$ , отрывающихся за один период изменения внешнего напряжения, из-за экспоненциального характера распределения длин сегментов приходится на значения  $\sigma$ , близкие по модулю к  $\sigma_0^*$ . Это обстоятельство позволяет с хорошей степенью точности записать для потерь энергии в единице объема кристалла за период  $T = 2\pi/\omega$  выражение

$$\Delta W = \Delta \omega_N(\sigma_0) \frac{\Lambda}{L_N} P_N(\sigma_0), \tag{16}$$

где  $\Delta \omega_N(\sigma_0)$  — энергетические потери одиночной петли  $L_N$ , отрывающейся от точечных дефектов при амплитудном значении внешнего напряжения, за один период  $T$  ее движения;  $(\Lambda/L_N) P_N(\sigma_0)$  — общее число петель, отрывающихся в единичном объеме за полный цикл изменения  $\sigma(t)$ . Поскольку вероятность  $P_N(\sigma_0)$  известна (см. (15)), задача сводится к вычислению величины  $\Delta \omega_N(\sigma_0)$ , определяемой интегралом

$$\Delta \omega_N(\sigma_0) = L_N b \oint \bar{U}_N(\sigma) d\sigma. \tag{17}$$

Здесь подразумевается интегрирование по полному периоду изменения внешнего напряжения, а  $\bar{U}_N(\sigma)$  обозначает среднее смещение петли  $L_N$ , рассматриваемое в данном случае как функция мгновенного значения  $\sigma(t)$ .

Установление функциональной зависимости  $\bar{U}_N(\sigma)$ , вообще говоря, представляет собой далеко не тривиальную задачу из-за сложного характе-

\* Подчеркнем, что речь идет о ранних стадиях процесса отрыва.



ра движения петли  $L_N$  во время отрыва от центров закрепления и в последующий период ее вхождения в режим вынужденных колебаний, задаваемый внешним напряжением. В квазистатическом случае, рассмотренном Гранато и Люкке, эта задача решается весьма просто, поскольку при низких частотах можно считать, что отрыв происходит практически мгновенно по отношению к четверти периода колебаний, а оторвавшаяся петля очень быстро «подстраивается» под внешнее напряжение (см. [1]). С другой стороны, ситуация существенно упрощается и тем, что во время разгрузочной части цикла напряжений петля  $L_N$ , упруго стягиваясь, сталкивается с точечными дефектами почти при нулевом значении  $\sigma$ . Вследствие этого сразу отпадает необходимость учитывать инерционный эффект [16], так как, согласно [17], он может проявиться лишь при условии, что  $\sigma_0 \sin \Psi_N$  больше половины напряжения отрыва дислокации от препятствия статической силой. Для петли  $L_N$ , отрывающейся при амплитудном значении  $\sigma$ , это условие выполняется при  $\Psi_N > \pi/6$ , что, как нетрудно убедиться из рис. 2, б, равносильно требованию задемпфированности рассматриваемой петли. Поэтому при  $\omega > \omega_d$  (где  $\omega_d = 4C/BL_N^2$  — характеристическая частота демпфирования) анализ зависимости  $\bar{U}_N(\sigma)$ , вообще говоря, должен проводиться с учетом указанного эффекта. В связи с этим обратим внимание на следующее весьма важное обстоятельство, обычно упускаемое из виду. Модель инерционного преодоления дислокациями точечных дефектов [16] существенно использует предположение о  $\delta$ -образном характере распределения длин дислокационных сегментов, на которые дислокации разбиваются стопорящими их дефектами. В этом случае вследствие дополнительного прогиба сегментов дислокации, сразу отрываясь от всех центров закрепления, могут преодолеть их при напряжении, в два раза меньшем напряжения отрыва. Однако при достаточно размытом распределении (например, келеровском) реализация такой ситуации маловероятна, поскольку в данном случае отрыв, начавшись инерционным путем лишь в одном или нескольких благоприятных местах, из-за быстрого затухания собственных колебаний отрывающихся сегментов не успевает распространиться на всю длину петли  $L_N$ . Следовательно, инерционный эффект приводит здесь к существенно меньшему снижению напряжения отрыва всей дислокационной петли  $L_N$ , чем в случае  $\delta$ -образного распределения.

По мере увеличения напряжения  $\sigma_0 \sin \Psi_N$ , при котором рассматриваемая дислокация сталкивается с точечными дефектами, на ней возрастает число мест, где инерционным путем зарождаются отрывы. Вследствие этого роль инерционного эффекта возрастает с увеличением уровня задемпфированности петли  $L_N$  \*. Однако поскольку при этом одновременно происходит резкое сокращение площади петли статического гистерезиса (ср. рис. 4, а и б), ролью инерционного эффекта в формировании полных гистерезисных потерь можно пренебречь. Тогда петля гистерезиса для рассматриваемой дислокации, отрывающейся от дефектов при напряжении  $\sigma_0$ , будем представлять собой эллипс с прямоугольными выступами, у которых точки  $C'$  и  $C$  на рис. 4 имеют соответственно координаты  $(-1,0)$  и  $(1,0)$ . При этом, согласно (8), эллипс описывается уравнением

$$\left(\frac{\bar{U}_N}{\bar{U}_{0N}}\right)^2 - 2 \cos \Psi_N \frac{\bar{U}_N}{\bar{U}_{0N}} \frac{\sigma}{\sigma_0} + \left(\frac{\sigma}{\sigma_0}\right)^2 = \sin^2 \Psi_N.$$

Вычисляя в (17) площадь, ограниченную указанной кривой, и подставляя

\* Подразумеваем, что  $B$  при этом остается постоянным, а изменяются  $\omega$  и  $L_N$ .



полученный результат в (16), нетрудно найти декремент затухания ультразвука

$$\delta_H = \frac{\Delta W}{\sigma_0^2 G} = \frac{Gb^2}{4C} \Lambda L_d^2 \frac{\bar{U}_{0N}}{\bar{U}_{dN}} \left[ \cos \Psi_N + \left( \frac{\pi}{2} + \Psi_N \right) \sin \Psi_N \right] P_N(\sigma_0), \quad (18)$$

где  $G$  — модуль сдвига. Отсюда в случае  $L_N \ll L_d$  с учетом формул (6) (9) и (15) получаем результат теории Гранато — Люкке [1] и Роджерса [2]:

$$\delta_H = \frac{Gb^2 \Lambda}{12C} \frac{L_N^3}{l_c} \left( 1 + \frac{\pi B \omega L_N^2}{20C} \right) \left( \frac{\Gamma}{\sigma_0} + 1 \right) \exp \left( - \frac{\Gamma}{\sigma_0} \right).$$

Если же  $L_N \gg L_d$ , то

$$\delta_H = \frac{\pi G b^2 \Lambda}{B \omega} P_N(\sigma_0).$$

где вероятность отрыва  $P_N(\sigma_0)$  определяется выражением (15). Таким образом в задемпфированном случае амплитудно зависимые потери оказываются обратно пропорциональными частоте вынужденных колебаний  $\omega$  и коэффициенту торможения дислокаций  $B$ . На рис. 5 представлена зависимость (18) декремента затухания ультразвука от уровня задемпфированности дислокационных петель при  $\sigma_0 > 2\sigma_c$ . Как видно из этого рисунка, теория предсказывает наличие максимума затухания при  $\omega \approx \omega_d$ . Это подтверждается экспериментальным исследованием температурной зависимости  $\delta_H$  в сверхпроводящем индии [14]. Поскольку в  $s$ -состоянии с понижением температуры электронная вязкость убывает в соответствии с формулой (4), наибольшая величина поглощения энергии звуковых волн в сверхпроводнике с дислокациями должна реализоваться при температуре  $T_m$ , удовлетворяющей соотношению

$$\omega = \frac{2C}{B_N L_N^2} \left[ \exp \frac{\Delta(T_m)}{T_m} + 1 \right].$$

Отсюда при известных остальных величинах можно определить  $L_N$ . Согласно экспериментальным данным [14], длина петель  $L_N$  оказывается порядка  $10^{-3}$  см. В то же время при использовавшейся в [14] частоте  $\omega/2\pi = 7,5$  МГц величина  $L_d$  для нормального индия составляет  $\sim 10^{-4}$  см. Таким образом, в данном случае действительно имеет место полная задемпфированность петель  $L_N$ , в связи с чем и наблюдается возрастание гистерезисных потерь при сверхпроводящем переходе. При этом может иметь место изменение их амплитудной зависимости (см. [18]). Данный эффект должен проявляться как вследствие более сложной зависимости  $P_N$  от  $\sigma_0$  в задемпфированном случае (см. (15)), так и из-за разрывов куперовских пар при больших скоростях движения дислокаций [10].

Вязкость влияет не только на затухание ультразвуковых волн, но и на скорость их распространения в кристалле. При этом поправка к дефекту модуля при слабой задемпфированности дислокационных петель  $L_N$  оказывается пропорциональной  $\omega/\omega_d$ . Если же петли задемпфированы сильно,

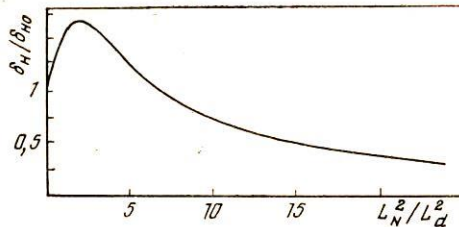


Рис. 5. Влияние уровня задемпфированности дислокационных петель на амплитудно зависимое поглощение ультразвуковых волн в кристалле, содержащем трехмерную сетку дислокаций.



то отношение декремента затухания к дефекту модуля должно быть таким же, как и в случае амплитудно независимых потерь [1]. Этот вывод подтверждается экспериментальными данными, которые будут представлены в отдельной работе.

В заключение выражаем благодарность В. И. Старцеву за проявленный интерес к работе и ценные советы. Считаем также своим приятным долгом поблагодарить Б. М. Даринского и В. Д. Нацика за обсуждение результатов работы, способствовавшее ее улучшению.

A. M. ROSHCHUPKIN and V. Ya. PLATKOV

## VISCOUS FORMATION OF DISLOCATION AMPLITUDE-DEPENDENT HYSTERESIS

A dynamic theory of the dislocation amplitude-dependent hysteresis is developed, which reveals a principally important role of the quasi-particle-dislocation interaction in the formation of the nonlinear response of a real crystal to the propagating high-frequency ultrasound wave. A strong frequency dependence of damping is predicted, which displays a characteristic maximum when changing over from dynamic to statistic hysteresis. In the latter case, the limiting transition to the Granato-Lücke and Rogers theories describing the amplitude-dependent losses of underdamped dislocation loops is found. In terms of the dynamic theory of dislocation hysteresis we explain the anomaly in the high-frequency amplitude-dependent internal friction in metals which is observed at the superconducting transition and, according to the analysis, directly connected with a decrease in the s-state electron drag by dislocations.

### LIST OF SYMBOLS

$B$ , dislocation damping;  $M$ , linear density of effective dislocation mass;  $C$ , dislocation linear tension;  $U$ , dislocation displacement;  $L$ , dislocation segment length;  $L_N$ , dislocation loop length;  $L_d$ , characteristic length;  $a$ , effective damping length;  $\mathcal{L}$ : characteristic stress level;  $b$ , Burgers vector;  $\varphi$ , «angle of attack»;  $V$ , dislocation velocity;  $\omega$ , external stress frequency;  $\varphi_0$ , «angle of attack» amplitude;  $\Phi$ , phase shift of the «angle of attack» with respect to external stress;  $\psi$ , phase shift retardation of the segment with respect to external stress;  $\Theta$ , phase shift between the force acting upon the pinning center and the external stress;  $f_{\max}$ , maximum force of coupling between the dislocation and the pinning center;  $P$ , probability for a dislocation to remain pinned at a given obstacle during the oscillation period;  $q_m$ , characteristic size of the Brillouin cell.

### FIGURE CAPTIONS

*Fig. 1.* Effect of the damping level of oscillating dislocation segment on the normalized amplitude of the «angle of attack» ( $a$ ) and on the phase shift for this angle with respect to the external phase shift ( $b$ ).

*Fig. 2.* Effect of the damping level of oscillating dislocation segment on the normalized amplitude of its mean displacement ( $a$ ) and on the phase shift of this displacement with respect to the external stress phase ( $b$ ).

*Fig. 3.* Region of lengths of dislocation segment remaining pinned under sinusoidal external stress.

*Fig. 4.* Dislocation hysteresis in the under damped ( $a$ ) and over damped ( $b$ ) cases.

*Fig. 5.* Effect of the damping level of dislocation loops on the amplitude-dependent ultrasound attenuation in the crystal containing dislocation network.



## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Granato A. V., Lücke K.* Theory of mechanical damping due to dislocations.— *J. Appl. Phys.*, 1956, **27**, N 6, p. 583—593.
2. *Rogers D. H.* An extension of a theory of mechanical damping due to dislocations.— *J. Appl. Phys.*, 1962, **33**, N 3, p. 781—792.
3. *Teutonico L. J., Granato A. V., Lücke K.* Theory of the thermal breakaway of a pinned dislocation line with application to damping phenomena.— *J. Appl. Phys.*, 1964, **35**, N 1, p. 220—234.
4. *Peguin P., Birnbaum H. K.* A theory of the hysteresis contribution to internal friction; thermomechanical unpinning of dislocations.— *J. Appl. Phys.*, 1968, **19**, N 9, p. 4428—4437.
5. *Lücke K., Granato A. V., Teutonico L. J.* Thermally assisted unpinning of a dislocation double loop.— *J. Appl. Phys.*, 1968, **39**, N 11, p. 5181—5191.
6. *Blair D. G., Hutchison T. S., Rogers D. H.* Theory of damping due to thermally assisted unpinning of dislocation.— *Canad. J. Phys.*, 1971, **49**, N 6, p. 633—662.
7. *Indenbom V. L., Chernov V. M.* Determination of characteristics for interaction between point defects and dislocations from internal friction experiments.— *Phys. Status solidi* 1972, **14**, N 1, p. 347—354.
8. *Trott B. D., Birnbaum H. K.* Extension of a theory of damping due to dislocation.— *J. Appl. Phys.*, 1970, **41**, N 11, p. 4418—4433.
9. Мэзон У. Акустические волны и дислокационное поглощение в нормальных и сверхпроводящих металлах и легированных полупроводниках. — В кн.: Физическая акустика. М.: Мир, 1969, т. 4А, с. 345—402.
10. Каганов М. И., Кравченко В. Я., Нацик В. Д. Электронное торможение дислокаций в металлах.— *УФН*, 1973, **11**, № 4, с. 655—683.
11. Альшиц В. И., Инденбом В. Л. Динамическое торможение дислокаций.— *УФН*, 1975, **115**, № 1, с. 3—39.
12. Барьяхтар В. Г., Друинский Е. И. Динамическое торможение дислокаций в ферромагнетиках.— *ЖЭТФ*, 1977, **72**, вып. 1, с. 218—224.
13. Платков В. Я., Полунина Л. Н., Старцев В. И. Взаимодействие дислокаций с центрами закрепления в нормальном и сверхпроводящем свинце.— *ФТТ*, 1971, **13**, № 7, с. 1881—1887.
14. Платков В. Я., Полунина Л. Н., Старцев В. И. Амплитудно зависимое внутреннее трение в сверхпроводящем и нормальном свинце.— *ФТТ*, 1972, **14**, № 9, с. 2772—2774.
15. *Azhazha Zh. S., Landau A. J.* Effects of inertia of dislocations on the probability of unpinning by ultrasound.— *Kristall und Technik*, 1975, **10**, N 6, p. 663—671.
16. *Granato A. V.* Dislocation inertial model for the increased plasticity of the superconducting state.— *Phys. Rev. Lett.*, 1971, **27**, N 10, p. 660—664.
17. *Natsik V. D.* On the strain delay time at the superconducting transition.— *Phys. status solidi (a)*, 1972, **14**, N 1, p. 271—275.
18. Паль-Валь Л. Н., Платков В. Я., Роцункин А. М. Взаимодействие дислокаций с примесными атомами различной валентности и высокочастотное внутреннее трение в сверхпроводящем и нормальном свинце.— *ФНТ*, 1980, **6**, № 11, с. 1466—1483.

Воронежский политехнический институт

Физико-технический институт  
низких температур АН УССР,  
г. Харьков

Поступила в редакцию  
16 февраля 1981 г.