МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

**Методичні рекомендації
і завдання для самостійної роботи
з розділу "Векторна алгебра"
навчальної дисципліни**

"МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТА ЛІНІЙНА АЛГЕБРА"

**для студентів напряму підготовки
6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа"
денної форми навчання**

**Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2016**

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.

Протокол № 5 від 23.12.2015 р.

Укладачі: А. П. Рибалко
К. В. Стєпанова

М 54 Методичні рекомендації і завдання для самостійної роботи з розділу "Векторна алгебра" навчальної дисципліни "Математичний аналіз та лінійна алгебра" для студентів напряму підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа" денної форми навчання / уклад. А. П. Рибалко, К. В. Стєпанова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 52 с.

Подано основні положення щодо організації та виконання самостійної роботи з розділу "Векторна алгебра" навчальної дисципліни, план-графік та програму виконання роботи. Наведено детальний опис та методичні рекомендації щодо виконання завдань для самостійної роботи, перелік літературних джерел і запитання для самодіагностики. Визначено професійні компетентності, яких набувають студенти в результаті вивчення теоретичного матеріалу та виконання практичних завдань до цього розділу.

Рекомендовано для студентів напряму підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа" денної форми навчання.

© Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, 2016

Вступ

"Математичний аналіз та лінійна алгебра" є нормативною навчальною дисципліною, що вивчають, згідно з навчальним планом підготовки фахівців освітнього ступеня "бакалавр" напряму підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа" всіх форм навчання. Вивчення цієї дисципліни надає студентам систематизованих знань із фундаментальних методів математичного моделювання та дослідження різних процесів, формує в майбутнього фахівця аналітично-дослідницькі компетентності, що є необхідними в сучасних умовах.

У наш час загальною тенденцією вищої освіти є переорієнтація із процесу навчання на результат: набуття студентами професійних умінь, навичок та компетентностей. Для сучасного фахівця недостатньо формального володіння певною сумою знань. Під професіоналізмом розуміють ініціативність, творчий підхід до вирішення виробничих завдань, здатність до самовдосконалення та неперервного підвищення кваліфікації. Тому сучасна вища школа робить акцент на самостійній, а значить, більш осмисленій, відповідальній та творчій роботі студентів. Так, за навчальним планом дисципліни "Математичний аналіз та лінійна алгебра" співвідношення кількості годин аудиторних занять до самостійної роботи для денної форми навчання становить 74 %.

Цю методичну розробку присвячено організації самостійної роботи студентів денної форми навчання у процесі вивчення розділу "Векторна алгебра", що є складовою частиною навчальної дисципліни "Математичний аналіз та лінійна алгебра". Структуру та зміст методичних рекомендацій повністю погоджено з навчальним планом і робочою програмою навчальної дисципліни. Навчальний час, відведений для самостійної роботи студентів денної форми навчання за розділом "Векторна алгебра" становить 13 годин (52 % від загального обсягу навчального часу на вивчення цієї теми).

Метою методичних рекомендацій є планування самостійної роботи студентів загалом; допомога в засвоєнні теоретичних знань і методів, що дозволяють моделювати, аналізувати та вирішувати економічні й технічні завдання; формування вмінь та навичок у застосуванні математичного апарату векторної алгебри до розв'язання практичних задач.

Для досягнення визначеної мети поставлено такі основні **завдання**:

здобуття систематизованих знань із векторної алгебри, необхідних для аналітичного опису й дослідження соціально-економічних і природних процесів та явищ;

оволодіння прикладними розрахунковими прийомами щодо застосування інструментарію векторної алгебри до розв'язання математичних задач;

вироблення навичок у самостійному вивченні довідкової та спеціальної літератури.

У результаті вивчення розділу "Векторна алгебра" дисципліни "Математичний аналіз та лінійна алгебра" студент має:

знати:

теоретичні основи векторної алгебри: базис простору, лінійну залежність та незалежність векторів; поняття про матрицю лінійних перетворень, власні вектори та власні значення цієї матриці; лінійні та нелінійні дії над векторами;

засоби та методи векторного числення, їхні властивості та особливості використання;

основні застосування апарату векторної алгебри до моделювання, аналізу та дослідження економічних і технічних процесів та явищ;

уміти:

знаходити відстань між точками, довжину вектора, проекцію вектора на вісь, кут між двома довільними векторами та напрямні косинуси вектора;

виконувати лінійні операції над векторами, ділити відрізок у заданому відношенні;

доводити колінеарність і компланарність векторів;

оперувати поняттям лінійної незалежності векторів і розкладати за базисом вектор;

обчислювати скалярний, векторний та мішаний добутки векторів;

застосовувати інструмент векторної алгебри для геометричного зображення й аналізу об'єктів задач математики та інших галузей знань (у тому числі й до різноманітних економічних процесів);

самостійно використовувати під час розв'язання задач додаткову літературу;

відповідати на контрольні запитання, наведені в кінці кожного розділу;

виконувати завдання для самостійного вирішення;

застосовувати здобуті знання в подальшому навчанні та розв'язанні практичних задач;

У процесі вивчення розділу "Векторна алгебра" студенти набувають таких **професійних компетентностей**:

здатність до інтерпретації розв'язків економічних задач за допомогою векторної алгебри;

здійснення основних операцій із векторами;

визначення базису лінійного простору й розкладання вектора за базисом;

здійснення переходу до нового базису простору;

визначення власних векторів та власних чисел матриці лінійних перетворень;

зведення квадратичної форми до канонічного вигляду;

здатність рекомендувати методи геометричного розв'язання економічних задач.

Структура наданих методичних рекомендацій така. По-перше, ураховуючи характер та специфіку позааудиторної самостійної роботи, спрямованої на формування у студентів навичок у самостійному здобутті певного обсягу нових знань і засвоєння їх під час розв'язання задач, наведено план-графік та програму самостійної роботи за цією темою, які дозволяють студенту дістати узагальнене уявлення про зміст самостійної роботи та запланувати її виконання, відповідно до методичних вимог. Крім того, ці методичні рекомендації містять основні поняття та формули за темою, вправи для самостійної роботи з відповідями, приклади розв'язання задач самостійної контрольної роботи, запитання для самодіагностики. Наприкінці розробки наведено варіанти індивідуальних практичних завдань для самостійної контрольної роботи.

Загальні положення щодо виконання та оцінювання самостійної роботи студентів

Самостійну роботу студентів спрямовано на набуття студентами професійних умінь, навичок та компетентностей. Вона сприяє інтенсифікації пізнавальної діяльності загалом, значно підвищує мотивацію, рівень самоорганізації та відповідальність студентів.

Завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни "Математичний аналіз та лінійна алгебра" мають як теоретичний, так і практичний характер. До теоретичних завдань належать вивчення лекційного матеріалу та самостійне оволодіння певним теоретичним матеріалом за допомогою рекомендованої літератури. Практичні завдання розподіляють на поточні домашні завдання (вправи для самостійної роботи) та контрольні самостійні роботи. Завдання для контрольних робіт мають індивідуальний характер, тобто студенти виконують їх за варіантом, оформляють у вигляді письмового звіту, вони обов'язково містять відповіді на контрольні запитання для самодіагностики та подають їх викладачеві у встановлений термін.

Виконання завдань для самостійної роботи передбачає:

вивчення та нотування основних питань теоретичного матеріалу з рекомендованих джерел;

оформлення звіту з виконання завдання для самостійної роботи, відповідей на контрольні запитання;

здавання викладачеві виконаного завдання для самостійної роботи та відповідей на контрольні запитання.

Виконання завдань для самостійної роботи будуть оцінювати, зважаючи на:

розуміння, ступінь засвоєння теорії та методології проблем, що розглядають;

ступінь ознайомлення з рекомендованою літературою й засвоєння фактичного матеріалу навчальної дисципліни;

уміння поєднувати теорію із практикою під час розгляду практичних ситуацій, розв'язання задач, здійснення розрахунків, виконання завдань, винесених для самостійного опрацювання;

повноту урахування вимог до виконання завдання;

логічність викладеного матеріалу та відповідність його структури передбаченим у завданні змістовим елементам;

наявність та повноту розгляду ключових понять (визначень, термінів, різновидів і т. ін.) предметної області завдання;

наявність та обґрунтованість підсумкових висновків студента;

ілюстрування опрацьованого матеріалу наведенням власних прикладів та графічного матеріалу.

План-графік виконання самостійної роботи студентів

Тематику завдань, терміни їхнього виконання, здавання та перевірки наведено в табл. 1.

Таблиця 1

План-графік виконання самостійної роботи

№ завдання	Тематика завдань	Тривалість виконання (години)	Порядковий номер навчального тижня, відведеного для:		
			виконання	звіту	оцінювання*
1	Основні поняття векторної алгебри, лінійні та нелінійні операції над векторами, їхні властивості. Геометричні застосування векторного числення	5	14	15	16
2	Поняття власних векторів і власних значень, методи їхнього відшукання. Економічні приклади використання методів векторної алгебри	5	15	15	16
3	Квадратичні форми та їхнє застосування до дослідження кривих другого порядку	3	16	16	16

*Після закінчення цього терміну студент отримує відповідну оцінку або йому визначають час на доопрацювання завдання.

Програма самостійної роботи студентів

Зміст основних завдань для самостійної роботи студентів із розділу "Векторна алгебра", а також форми роботи, звітності й контролю наведено в табл. 2. Слід зауважити, що, окрім наведених основних видів робіт, самостійна робота студентів передбачає поточну підготовку до практичних та лабораторних занять, підготовку до написання письмової практичної контрольної роботи й колоквіуму тощо.

Таблиця 2

Програма самостійної роботи

№ завдання	Зміст завдання	Форма (вигляд)			Література
		самостійної роботи	звітності	контролю	
1	2	4	5	6	7
1.1	Вивчення лекційного матеріалу. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питань застосування апарату векторної алгебри до задач геометричного змісту	Вивчення й конспектування теоретичного матеріалу, розв'язання задач для самостійної роботи	Конспект або доповідь-презентація	Поточне усне мікроопитування	Основна: [1 – 5]. Додаткова: [6 – 16]
1.2	Оволодіння основними методами векторного числення, застосування векторної алгебри до розв'язання задач геометричного змісту	Розв'язання індивідуальних практичних задач 1.1 – 1.3. Підготовка відповідей на контрольні запитання для самодіагностики 1 – 18	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1 – 5]. Додаткова: [6 – 16]
2.1	Вивчення лекційного матеріалу. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з розділу: "Власні значення та власні вектори матриці"	Вивчення й конспектування теоретичного матеріалу, розв'язання завдань для самостійної роботи	Конспект або доповідь-презентація	Поточне усне мікроопитування	Основна: [1; 2; 3]. Додаткова: [6; 8 – 10; 13; 14; 16]
2.2	Оволодіння методами знаходження власних значень та власних векторів на прикладі матриць 2-го та 3-го порядків	Розв'язання індивідуального практичного завдання 2.1	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1; 2; 3]. Додаткова: [6; 8 – 10; 13; 14; 16]
2.3	Самостійне вивчення економічних прикладів застосування векторного аналізу	Вивчення й конспектування теоретичного матеріалу, розв'язання вправ для самостійної роботи	Доповідь-презентація	Поточне усне мікроопитування	Основна: [1; 2]. Додаткова: [6 – 8; 11; 14 –16]

Закінчення табл. 2

1	2	3	4	5	6
2.4	Опрацювання методів дослідження лінійної моделі обміну	Вирішення індивідуального практичного завдання 2.2. Підготовка відповідей на контрольні запитання для самодіагностики 19 – 33	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1; 2]. Додаткова: [6 – 8; 11; 14 –16]
3.1	Вивчення лекційного матеріалу. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з розділу: "Квадратичні форми та їхнє застосування"	Вивчення й конспектування теоретичного матеріалу, розв'язання вправ для самостійної роботи	Конспект	Поточне усне мікроопитування	Основна: [1 – 3; 5]. Додаткова: [6 – 16]
3.2	Оволодіння методами класифікації кривих другого порядку, зведенням кривої 2-го порядку до канонічного вигляду за допомогою методу ортогонального перетворення	Розв'язання індивідуальних практичних задач 3.1 – 3.2. Підготовка відповідей на контрольні запитання для самодіагностики 34 – 38	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1 – 3; 5]. Додаткова: [6 – 16]

Основні поняття та формули векторної алгебри

Необхідно навести основні поняття та формули за розділом "Векторна алгебра", що мають бути вивчені студентами самостійно. Цей матеріал рекомендують використовувати як довідковий під час виконання вправ та завдань для самостійної контрольної роботи, а також він може бути основою для конспекту теоретичного матеріалу, винесеного на самостійне опрацювання.

Скалярною величиною або **скаляром** називають величину, яка характеризується за вибраної одиниці вимірювання лише числом.

Векторною величиною називають таку величину, яка, крім числа, характеризується ще й напрямком у просторі. Кожну векторну величину можна зобразити напрямленим відрізком, який і називають **вектором**.

Вектор, початком якого є точка A (точка прикладання), а кінцем – точка B, позначають символом $\overline{AB}$. Часто вживають позначення вектора однією малою буквою латинського алфавіту з рискою (або стрілочкою): $\overline{a}$ (або $\vec{a}$).

Модулем (довжиною) вектора $\overrightarrow{AB}$ називають число $|\overline{AB}|$, що дорівнює довжині відрізка AB (відстані від початку до кінця вектора).

Вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих, називають **колінеарними**.

Вектори вважають **рівними**, якщо вони колінеарні, мають однакові напрямки й довжини.

Два колінеарних вектори, які мають однакові довжини та протилежні напрямки, називаються **взаємно протилежними**. Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначають $-\overline{a}$.

Три вектори називають **компланарними**, якщо вони паралельні одній площині або лежать в одній площині

Лінійними операціями над векторами є *додавання* векторів і *множення вектора на число*. Вони мають такі властивості:

1) комутативність додавання: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2) асоціативність додавання: $(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})$;

3) комутативність множення на число: $\lambda\overline{a}=\overline{a}\lambda$;

4) асоціативність щодо множення на число: $\lambda(\mu\overline{a})=(\lambda\mu)\overline{a}$;

5) дистрибутивність множення на число щодо додавання векторів: $\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}$;

6) дистрибутивність множення на число щодо суми чисел: $(\lambda+\mu)\overline{a}=$ $=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}$;

7) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$;

8) $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$;

9) $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$;

10) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$.

Необхідною й достатньою умовою колінеарності двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ є їхня пропорційність, тобто $\overline{a}=k\overline{b}$, де $k-$число.

Необхідною й достатньою умовою компланарності трьох векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ і $\overline{c}$ є їхня лінійна залежність (тобто хоча б один із векторів цієї системи є лінійною комбінацією інших).

Базисом простору називають будь-яку впорядковану трійку некомпланарних векторів. Якщо $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}-$ базис, то будь-який вектор можна однозначно подати як лінійну комбінацію базисних векторів, тобто у вигляді: $\bar{a}=\alpha_1\bar{e}_1+\alpha_2\bar{e}_2+\alpha_3\bar{e}_3, \quad \alpha_i \in R$. До того ж числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ називають координатами вектора $\bar{a}$ щодо базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ і записують $\bar{a}=(\alpha_1; \alpha_2; \alpha_3)$.

Стандартним базисом простору є *орти* (одиничні вектори) осей декартової системи координат Ox, Oy, Oz, які позначають, відповідно, $\vec{i}=(1; 0; 0)$, $\vec{j}=(0; 1; 0)$, $\vec{k}=(0; 0; 1)$.

Проекцією $\text{Пр}_l\vec{a}$ **вектора** $\bar{a}$ **на вісь** l називають довжину відрізка, який з'єднує проекції на цю вісь початку й кінця цього вектора, узяту зі знаком "+", якщо кут між вектором і віссю гострий, і знаком "–", якщо цей кут тупий. Проекцію вектора $\bar{a}$ на вісь l визначають за формулою:

$$\text{Пр}_\ell\vec{a}=|\,\vec{a}\,|\cdot\cos\varphi, \text{ де } \varphi=(\vec{a}\wedge l). \tag{1}$$

Проекція задовольняє умови лінійності:

$$\text{Пр}_l(\vec{a}+\vec{c})=\text{Пр}_l\vec{a}+\text{Пр}_l\vec{c};$$
$$\text{Пр}_l(\lambda\vec{a})=\lambda\cdot\text{Пр}_l(\vec{a}), \quad \lambda\in R.$$

Координати вектора в базисі $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ дорівнюють проекціям цього вектора на осі Ox, Oy, Oz, відповідно:

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}=(a_x,\ a_y,\ a_z),$$
$$a_x=\text{Пр}_{Ox}\vec{a}, \quad a_y=\text{Пр}_{Oy}\vec{a}, \quad a_z=\text{Пр}_{Oz}\vec{a}.$$

Координати вектора $\overrightarrow{AB}$ із початком у точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем у $B(x_2; y_2; z_2)$ знаходять за формулою:

$$\overrightarrow{AB}=(x_2-x_1; y_2-y_1;\ z_2-z_1). \tag{2}$$

Модуль (довжину) вектора $\vec{a}=(a_x; a_y; a_z)$ обчислюють за формулою:

$$|\,\vec{a}\,|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}. \tag{3}$$

Лінійні операції над векторами, задані своїми координатами, виконують за правилами: *якщо вектор множать на число* λ*, його координати* *множать на це число; якщо вектори додають, то додають і їхні відповідні координати.*

Тобто для $\vec{a} = \; a_x; a_y; a_z$ і $\vec{b} = \; b_x; b_y; b_z$ справедливо:

$$\lambda\vec{a} = \; \lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z \; ; \tag{4}$$

$$\vec{a} + \vec{b} = \; a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z \; . \tag{5}$$

Умова колінеарності для векторів, заданих своїми координатами, має такий вигляд:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k \neq 0, \tag{6}$$

тобто обидві відповідні координати векторів дорівнюють нулю.

Напрямними косинусами вектора називають косинуси кутів $\alpha = (\vec{a}\,\hat{}\,Ox)$, $\beta = (\vec{a}\,\hat{}\,Oy)$, $\gamma = (\vec{a}\,\hat{}\,Oz)$ між вектором $\vec{a}$ й координатними осями. Якщо $\vec{a} = \; a_x; a_y; a_z$, то

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|};\ \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|};\ \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \tag{7}$$

причому виконується рівність: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$

До **нелінійних операцій** над векторами належать скалярний, векторний та мішаний добутки.

Скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ **двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *число (скаляр)*, яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi, \quad \varphi = (\vec{a}\,\hat{}\,\vec{b})$.

Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ заданих координатами скалярний добуток обчислюють за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \tag{8}$$

Із визначення проекції легко знайти формули:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\,\vec{a}\,|\cdot \text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \left|\,\vec{b}\,\right|\cdot \text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Як наслідок, геометричними застосуваннями скалярного добутку є його використання для знаходження проекції вектора на задану вісь та кута між векторами:

$$\text{Пр}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,|}; \tag{9}$$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\,\vec{a}\,|\cdot\left|\,\vec{b}\,\right|}. \tag{10}$$

Скалярний добуток має такі *властивості*:

1) комутативність множення: $\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{a}$;

2) асоціативність щодо множення на число: $\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b}) = (\lambda\vec{a})\cdot\vec{b} = \vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})$;

3) дистрибутивність щодо додавання векторів: $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{c} + \vec{b}\cdot\vec{c}$;

4) скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори ортогональні (перпендикулярні), тобто:

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}\perp\vec{b}. \tag{11}$$

Крім того, $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi = (\vec{a}\,^\wedge\vec{b}) < \dfrac{\pi}{2}$;

$$\vec{a}\cdot\vec{b} < 0 \;\Leftrightarrow\; \varphi = (\vec{a}\,^\wedge\vec{b}) > \frac{\pi}{2}$$

5) $\vec{a}\cdot\vec{a} = |\,\vec{a}\,|^2$, звідки $|\,\vec{a}\,| = \sqrt{\vec{a}\cdot\vec{a}}$.

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *вектор* $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$, що задовольняє умови:

1) модуль векторного добутку визначають за формулою:

$$|\,\vec{c}\,| = |\,\vec{a}\times\vec{b}\,| = |\,\vec{a}\,|\cdot|\,\vec{b}\,|\cdot\sin\varphi, \text{ де } \varphi = (\vec{a}\,^\wedge\vec{b}); \tag{12}$$

2) $\vec{c}\perp\vec{a}$, $\vec{c}\perp\vec{b}$;

3) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворюють праву трійку векторів (тобто з кінця вектора $\vec{c}$ найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ на найменший кут здійснюють проти руху стрілки годинника).

У декартовій системі координат векторний добуток заданих векторів $\vec{a} = \ a_x; a_y; a_z$ і $\vec{b} = \ b_x; b_y; b_z$ обчислюють за формулою:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}. \quad (13)$$

Геометричний зміст векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ полягає в тому, що його модуль дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{пар.} = \left| \ \vec{a} \times \vec{b} \ \right| \text{ (кв. од.)}, \quad (14)$$

очевидно, що площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \ \vec{a} \times \vec{b} \ \right| \text{ (кв. од.)}. \quad (15)$$

Основними *властивостями* векторного добутку є такі:

1) антикомутативність: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$;

2) асоціативність щодо множення на число: $\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b})$;

3) дистрибутивність щодо додавання векторів: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$;

4) векторний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори ортогональні (перпендикулярні), тобто: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \, || \, \vec{b}$;

5) $\vec{a} \times \vec{a} = 0$.

Мішаним добутком трьох впорядкованих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають число, яке визначають за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Якщо вектори задано своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (16)$$

Із геометричної точки зору, мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ із точністю до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда, побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$V_{пар.} = \pm\vec{a}\vec{b}\vec{c} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \text{ (куб. од.).} \quad (17)$$

Також за допомогою мішаного добутку знаходять об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$V_{пір.} = \pm\frac{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}{6} = \frac{1}{6}|\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \text{ (куб. од.).} \quad (18)$$

Наслідками властивостей скалярного та мішаного добутків є такі *властивості мішаного добутку:*

1) порядок векторного та скалярного добутків можна змінювати

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \left[\vec{a}\times\vec{b}\right]\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\left[\vec{b}\times\vec{c}\right];$$

2) мішаний добуток не змінюється в разі циклічної перестановки множників та змінює знак у всіх інших випадках:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a};$$
$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{b}\vec{a}\vec{c};\quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b},\quad \vec{a}\vec{b}\vec{c} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a};$$

3) мішаний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори компланарні:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \Leftrightarrow \vec{a},\vec{b},\vec{c} - \text{ компланарні.} \quad (19)$$

Якщо для ненульового вектора $\overline{x}$ та числа λ має місце рівність:

$$A\overline{x} = \lambda\overline{x}, \quad (20)$$

то λ називають **власним** або **характеристичним значенням** матриці A, а вектор $\bar{x}$ – **власним** або **характеристичним вектором** матриці A, що відповідає власному числу λ.

Матричне рівняння (20) можна записати у такому вигляді:

$$(A-\lambda E)\bar{x}=0, \quad \bar{x}\neq 0, \tag{21}$$

звідки випливає, що число λ є власним значенням матриці A тоді й тільки тоді, коли

$$\det(A-\lambda E)=0. \tag{22}$$

Таким чином, власне число λ є коренем рівняння (22), яке називають **характеристичним рівнянням** (або коренем **характеристичного полінома** $P(\lambda)=\det(A-\lambda E)$).

Будь-який нетривіальний стовпець $\bar{x}\neq\bar{0}$, що є розв'язком однорідної системи (21), є власним вектором, що відповідає власному числу λ. Очевидно, кожному власному значенню відповідає нескінченна сукупність власних векторів.

Множину всіх власних чисел матриці називають **спектром матриці.**

Власні вектори, що належать різним власним числам, є лінійно незалежними, тому їх можна використовувати як базис.

Квадратичною формою в n-вимірному лінійному просторі R^n називають вираз:

$$A(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j\,. \tag{23}$$

Якщо в деякому базисі квадратична форма (23) не містить добутків $x_i x_j, i\neq j$, тобто

$$A(x,x)=\sum_{i=1}^{n} a_{ij}x_i^2\,, \tag{24}$$

тоді вираз (24) називають **канонічним виглядом** цієї квадратичної форми.

Для будь-якої квадратичної форми існує базис, у якому вона має канонічний вигляд.

Матриця $A = (a_{ij})$ квадратичної форми (23) є симетричною, тому може бути поданою у вигляді:

$$A = UDU^T,$$

де $D-$ діагональна матриця, на діагоналі якої знаходяться власні числа матриці A;

$U-$ ортогональна матриця, стовпці якої є векторами деякого ортонормованого базису $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$, у якому матриця A має діагональний вигляд D (а значить, квадратична форма має канонічний вигляд).

Відповідні перетворення координат визначають за формулою:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = U \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix}. \tag{25}$$

У частинному випадку $n = 2$ квадратична форма має вигляд:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2,$$

а її матриця:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}. \tag{26}$$

Рівняння алгебраїчної кривої другого порядку має такий вигляд:

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (A^2 + B^2 + C^2 \neq 0). \tag{27}$$

Для невиродженої кривої другого порядку знайдено таку декартову прямокутну систему координат, у якій рівняння (27) набуває **канонічного** вигляду одного із трьох видів:

1) $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – еліпс; $a > 0$ і $b > 0$ – півосі еліпса;

2) $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ – гіпербола; $a > 0$ і $b > 0$ – дійсна та уявна півосі, відповідно;

3) $y^2 = 2px$ – парабола; $p > 0$.

Рівняння еліпса та гіперболи із центром у точці (x_0, y_0) та параболи з вершиною в точці (x_0, y_0) мають, відповідно, такий вигляд:

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1;$$

$$(y-y_0)^2=2p(x-x_0).$$

Частинним випадком еліпса за $a=b=r>0$ є коло радіуса r із центром у точці (x_0, y_0): $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$.

Визначення типу кривої другого порядку зведено до набуття канонічного вигляду квадратичної форми, що відповідає старшим степеням. Одним із найпоширеніших способів є викладений метод ортогонального перетворення, що ґрунтується на відшуканні власних значень та векторів матриці квадратичної форми.

Вправи для самостійної роботи

1. Чи можуть утворювати базис такі вектори: $\vec{a}_1=(2;-3;1)$, $\vec{a}_2=(3;-1;5)$, $\vec{a}_3=(1;-4;3)$?

Відповідь: так.

2. Задані координати векторів $\vec{a}=(3;1;0)$, $\vec{b}=(-1;0;6)$, $\vec{c}=(-1;2;0)$, $\vec{d}=(-4;4;4)$, . Написати розклад $\vec{d}$ за векторами $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Відповідь: $\vec{d}=-\frac{8}{21}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}+\frac{46}{21}\vec{c}$.

3. Знайти координати вектора $\vec{c}=2\vec{a}_1+3\vec{a}_2$, якщо $\vec{a}_1=(1;2;3)$, і $\vec{a}_1=(-1;2;-5)$.

Відповідь: $\vec{c}=(-1;10;-9)$.

4. Знайти x, y, z, якщо відомо, що виконано умову $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$, де $A(-1;3;4)$, $B(0;5;-1)$, $C(x;2;z)$ та $D(1;y;-2)$.

Відповідь: $x=0, y=4, z=3$.

5. Знайти координати точки $\mathrm{A}(x;\, y;\, z)$, якщо відомо, що вона є початком вектора $\vec{a}=(2;\,3;\,-1)$, кінець якого збігається з точкою $B(10;\,20;\,-10)$.

Відповідь: $A(8;\,17;\,-9)$.

6. Знайти координати точки M, що лежить на осі Ox та є рівновіддаленою від точок $\mathrm{A}(1;\,-2;\,3)$ та $M(-3;\,2;\,7)$.

Відповідь: $M(-6;\,0;\,0)$

7. Знайти $\text{Пр}_l\,(\vec{a}+\vec{b})$, якщо $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=4,\ \cos(\vec{a}\wedge l)=30^\circ$ та $\cos(\vec{b}\wedge l)=30^\circ$.

Відповідь: $3\sqrt{3}$.

8. Знайти скалярний добуток векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо відомі їхні довжини $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=4,$ та косинус кута між ними становить $\cos(\vec{a}\wedge\vec{b})=120^\circ$.

Відповідь: -4.

9. Знайти косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $(\vec{a},\vec{b})=10,$ $|\vec{a}|=7,\ |\vec{b}|=\sqrt{5}.$

Відповідь: $\cos\varphi=\dfrac{10}{7\sqrt{5}}$.

10. Відомо, що скалярний добуток двох векторів $(\vec{a},\vec{b})=2,$ а їхні довжини $|\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=2.$ Знайти кут між $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Відповідь: $(\vec{a}\wedge\vec{b})=60^\circ$.

11. Знайти скалярний добуток двох векторів $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $|\vec{b}|=4,$ $\text{Пр}_{\vec{b}}\vec{a}=2.$

Відповідь: 8.

12. Обчислити $(\vec{a}+\vec{b})^2$, якщо відомі довжини векторів $|\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4$ та косинус кута між векторами $\vec{a}$ та $\vec{b}$ становить 60°.

Відповідь: 37.

13. Знайти скалярний добуток двох векторів $\vec{a}=(1;\,5;\,-3),$ і $\vec{b}=(4;\,8;\,0).$

Відповідь: 44.

14. Визначити, за якого значення b_y вектори $\vec{a} = (-1; 2; 3)$, і $\vec{b} = (4; b_y; 1)$ будуть перпендикулярними.

Відповідь: $b_y = \dfrac{1}{2}$.

15. Знайти кут, який утворюють одиничні вектори $\vec{a}$ і $\vec{b}$, якщо відомо, що вектори $\vec{c} = 5\vec{a} - 4\vec{b}$ та $\vec{d} = \vec{a} + 2\vec{b}$ ортогональні.

Відповідь: 60°.

16. Визначити, за яких значень α і β вектори $\vec{a} = -2\vec{i} + 3\vec{j} + \beta\vec{k}$ та $\vec{b} = \alpha\vec{i} - 6\vec{j} + 2\vec{k}$ будуть колінеарними.

Відповідь: $\alpha = 4,\ \beta = -1$.

17. Визначити, за якого значення параметра p два задані вектори $\vec{a} = (p; 1; 2)$ і $\vec{b} = (5; p; 12)$ будуть перпендикулярними один одному.

Відповідь: $p = -4$.

18. Знайти напрямні косинуси вектора $\overrightarrow{AB}$, якщо задані точки $A(1; 2; 0), B(3; 1; -2)$.

Відповідь: $\dfrac{2}{3}; -\dfrac{1}{3}; -\dfrac{2}{3}$.

19. Чи може вектор $\vec{a}$ утворювати з координатними осями кути $\alpha = 60^\circ, \beta = 45^\circ, \gamma = 135^\circ$?

Відповідь: ні.

20. Знайти координати вектора $\vec{a}$, якщо відомо, що $|\vec{a}| = 3$ і шуканий вектор $\vec{a}$ утворює з осями координат однакові гострі кути.

Відповідь: $\vec{a} = \sqrt{3}; \sqrt{3}; \sqrt{3}$.

21. Знайти векторний добуток $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо відомі їхні довжини $|\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,$ та синус кута між ними дорівнює $\sin\ \vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

Відповідь: 4.

22. Векторний добуток двох векторів $\vec{a} \times \vec{b} = 8$, а їхні довжини $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 2$. Знайти кут між $\vec{a}$ та $\vec{b}$.

Відповідь: $\vec{a} \wedge \vec{b} = 90^\circ$.

23. Знайти кут між $\vec{a}$ та $\vec{b}$, якщо $\vec{a}\times\vec{b}=10$, $|\vec{a}|=2\sqrt{5}$, $|\vec{b}|=5$.

Відповідь: $\varphi=\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

24. Обчислити $\left[2\vec{a}+\vec{b},\ \vec{a}+2\vec{b}\right]$, якщо відомі довжини векторів $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ та кут між ними становить 45°.

Відповідь: $9\sqrt{2}$.

25. Знайти векторний добуток $\overrightarrow{AB}$ та $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-4;\,4;\,4)$, $B(3;1;\,0)$, $C(-1;\,0;\,6)$.

Відповідь: $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left[\overrightarrow{AB},\,\overrightarrow{AC}\right]=(-22;\,-26;\,-19)$.

26. Вектор $\vec{p}$, перпендикулярний векторам $\vec{a}=(1;\,-3;\,4)$ і $\vec{b}=(3;\,-4;\,2)$, утворює з віссю Ox тупий кут. Знайти його координати, якщо $|\vec{p}|=45$.

Відповідь: $\vec{p}=(-30;\,-30;\,-15)$.

27. Обчислити площу трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}=(1;\,0;\,-1/4)$, $\vec{b}=(4;\,-12;\,-5)$.

Відповідь: $6{,}5$ кв. од.

28. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $\overrightarrow{AB}$ і $\overrightarrow{AC}$, якщо $A(-4;\,4;\,4)$, $B(3;1;\,0)$, $C(-1;\,0;\,6)$.

Відповідь: 39 кв. од.

29. Обчислити мішаний добуток векторів $\vec{a}=(3;\,3;\,4)$, $\vec{b}=(2;1;1)$ і $\vec{c}=(2;\,3;\,2)$.

Відповідь: 7.

30. Чи компланарні вектори $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$, якщо $\vec{a}=(-3;\,2;1)$, $\vec{b}=(3;1;\,2)$, $\vec{c}=(3;\,-1;\,4)$?

Відповідь: ні.

31. З'ясувати, чи компланарні вектори $\vec{a}=(2;\,3;\,-1)$, $\vec{b}=(1;\,-1;\,3)$ і $\vec{c}=(1;\,9;\,-11)$.

Відповідь: компланарні.

32. Довести, що точки $A(1;\,2;\,-1)$, $B(0;1;\,5)$, $C(-1;\,2;1)$, $D(2;1;\,3)$ лежать в одній площині.

33. Задано вершини піраміди: $A(2;3;1)$, $B(4;1;-2)$, $C(6;3;7)$, $D(5;4;2)$. Знайти її об'єм і довжину висоти, опущеної з вершини D.

Відповідь: $\frac{130}{3}$ куб. од.; $\frac{65}{7}$ од.

34. Знайти координати центра та радіус кола:

$2x^2+2y^2-8x+5y-4=0$.

Відповідь: центр $(2;-1{,}25)$, радіус $2{,}75$.

35. Складти канонічне рівняння еліпса, що проходить через точки $A\left(\frac{5}{2};\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ та $B\left(-2;\frac{\sqrt{15}}{5}\right)$.

Відповідь: $\frac{x^2}{10}+y^2=1$.

36. Як розташовано відносно еліпса $\frac{x^2}{50}+\frac{y^2}{32}=1$ точки $A\ \ 7;1$, $B\ \ -5;-4$ та $C\ \ 4;5$?

Відповідь: A знаходиться зовні еліпса, B належить еліпсу, C – усередині еліпса.

37. Довести, що рівняння $x^2-y^2+4x-10y-25=0$ є рівнянням гіперболи.

38. Знайти рівняння гіперболи, якщо її вершини знаходяться в точках $-3;\ 0$ і $3;\ 0$, а фокуси – у точках $-3\sqrt{5};\ 0$ і $3\sqrt{5};\ 0$.

Відповідь: $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{36}=1$.

39. Скласти рівняння гіперболи, якщо вона проходить через точку $M\ \ 10;\ -3\sqrt{3}$ і має асимптоти $y=\pm\frac{3}{5}x$.

Відповідь: $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{9}=1$.

40. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, якщо вона є симетричною відносно осі Ox і проходить через точку $M\ \ 4;\ 2$.

Відповідь: $y^2=x$.

41. Написати рівняння параболи, що проходить через точки перетину прямої $x + y = 0$ і кола $x^2 + y^2 + 4y = 0$, а її фокус знаходиться на осі ординат.

Відповідь: $x^2 = -2y$.

Приклади виконання завдань для самостійної контрольної роботи

Приклад 1.1. Задано координати точок: $A(-1; 3; 2)$, $B(3; 5; 2)$, $C(1;3;1)$, $D(2;2;4)$.

Необхідно:

а) довести, що точки A, B, C утворюють трикутник, а на A, B, C і D можна побудувати піраміду;

б) знайти кути та довжини сторін трикутника ABC;

в) знайти проекцію $\text{Пр}_{\overline{BC}}\,(2\overline{CA} - \overline{AD})$;

г) обчислити площу трикутника ABC;

д) знайти об'єм піраміди $ABCD$ та висоту, опущену з вершини на D на основу ABC.

Розв'язання:

а) перш за все слід знайти координати векторів за формулою (2):

$$\overline{AB} = 3-(-1); 5-3; 2-2 = 4; 2; 0 ;$$

$$\overline{AC} = 1-(-1); 3-3; 1-2 = 2; 0; -1 ;$$

$$\overline{AD} = 2-(-1); 2-3; 4-2 = 3; -1; 2 .$$

Для того щоб точки A, B, C утворювали трикутник, необхідно, щоб вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ не були колінеарними. Умовою колінеарності векторів є пропорційність їхніх координат (6). Легко побачити, що це не так:

$$\frac{4}{2} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{0}{-1}.$$

Для того щоб на точках A, B, C і D можна було побудувати піраміду, необхідно, щоб вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$ не належали одній площині. Слід перевірити умову компланарності (19):

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (0 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = -18 \neq 0.$$

Оскільки вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ не є колінеарними, точки A, B, C утворюють трикутник. Оскільки вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$ не є компланарними, точки A, B, C і D утворюють піраміду у просторі.

б) знайти довжини сторін трикутника ABC як модулі векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{BC}$ за формулою (3):

$$AB = \left|\overline{AB}\right| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ (од.)};$$

$$AC = \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \text{ (од.)};$$

$$BC = \left|\overline{BC}\right| = \sqrt{(1-3)^2 + (3-5)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ (од.)}.$$

Для того щоб знайти кути трикутника $ABC,$ слід скористатися формулою (10). По-перше, обчислити скалярні добутки векторів, що утворюють $\angle A, \angle B$ та $\angle C,$ відповідно. Ураховуючи, що

$$\overline{BA} = -\overline{AB} = (-4; -2; 0),$$

$$\overline{CA} = -\overline{AC} = (-2; 0; 1),$$

$$\overline{CB} = -\overline{BC} = (2; 2; 1),$$

за формулою (8) знайти:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 8;$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (-4) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) = 12;$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -3.$$

Слід зауважити, що використання властивості асоціативності скалярного добутку щодо множення на число дозволяє уникнути відшукання координат протилежних векторів під час знаходження скалярних добутків:

$$\overline{BA}\cdot\overline{BC} = -\overline{AB}\cdot\overline{BC}; \quad \overline{CA}\cdot\overline{CB} = \left(-\overline{AC}\right)\cdot\left(-\overline{BC}\right) = \overline{AC}\cdot\overline{BC}.$$

Ураховуючи, що $\left|\overline{BA}\right| = \left|\overline{AB}\right| = 2\sqrt{5}$, $\left|\overline{CA}\right| = \left|\overline{AC}\right| = \sqrt{5}$, $\left|\overline{CB}\right| = \left|\overline{BC}\right| = 3$, обчислити косинуси кутів трикутника ABC за формулою (10):

$$\cos A = \cos\left(\overline{AB}\wedge\overline{AC}\right) = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left|\overline{AB}\right|\cdot\left|\overline{AC}\right|} = \frac{8}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5};$$

$$\cos B = \cos\left(\overline{BA}\wedge\overline{BC}\right) = \frac{\overline{BA}\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BA}\right|\cdot\left|\overline{BC}\right|} = \frac{12}{2\sqrt{5}\cdot 3} = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\cos C = \cos\left(\overline{CA}\wedge\overline{CB}\right) = \frac{\overline{CA}\cdot\overline{CB}}{\left|\overline{CA}\right|\cdot\left|\overline{CB}\right|} = \frac{-3}{\sqrt{5}\cdot 3} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Звідси

$$\angle A = \arccos\frac{4}{5} \approx 36^\circ 52', \quad \angle B = \arccos\frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 26^\circ 34',$$

$$\angle C = \pi - \arccos\frac{\sqrt{5}}{5} \approx 116^\circ 34'.$$

Кути $\angle A, \angle B$ є гострими, а $\angle C$ є тупим;

в) для відшукання заданої проекції слід використовувати формулу (9). По-перше, знайти координати вектора $2\overline{CA} - \overline{AD}$, згідно з властивостями (4), (5) лінійних операцій над векторами:

$$2\overline{CA} - \overline{AD} = 2\cdot(-2; 0; 1) - (3; -1; 2) = (-4-3; 0+1; 2-2) = (-7; 1; 0).$$

Далі обчислити скалярний добуток за формулою (8):

$$(2\overline{CA} - \overline{AD})\cdot\overline{BC} = (-7)\cdot(-2) + 1\cdot(-2) + 0\cdot(-1) = 12.$$

Тоді

$$\text{Пр}_{\overline{BC}}\,(2\overline{CA} - \overline{AD}) = \frac{(2\overline{CA} - \overline{AD})\cdot\overline{BC}}{\left|\overline{BC}\right|} = \frac{12}{3} = 4 \text{ (од.)}.$$

г) для знаходження площі трикутника ABC слід скористатися геометричним змістом векторного добутку. Спочатку за формулою (13) обчислити векторний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, що утворюють цей трикутник:

$$\overline{AB}\times\overline{AC}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 4 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\cdot\begin{vmatrix}4 & 0\\ 2 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\cdot\begin{vmatrix}4 & 2\\ 2 & 0\end{vmatrix}=$$

$$=-2\vec{i}+4\vec{j}-4\vec{k}=\{-2;4;-4\}.$$

За формулою (15):

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\left|\,\overline{AB}\times\overline{AC}\,\right|}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{(-2)^2+4^2+(-4)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{36}=3 \text{ (кв. од.);}$$

д) об'єм піраміди $ABCD$ знайти за допомогою мішаного добутку векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$, що її утворюють. За формулою (16):

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}=\overline{AB}\cdot\left(\overline{AC}\times\overline{AD}\right)=\begin{vmatrix}4 & 2 & 0\\ 2 & 0 & -1\\ 3 & -1 & 2\end{vmatrix}=-18,$$

звідки, згідно з формулою (18):

$$V_{\text{пір.}}=\frac{\left|\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right|}{6}=\frac{1}{6}\cdot\left|-18\right|=3 \text{ (куб. од.).}$$

Оскільки об'єм піраміди також виражають через площу основи та висоту формулою:

$$V_{\text{пір.}}=\frac{1}{3}S_{ABC}\cdot h,$$

ураховуючи знайдені площу ABC та об'єм $ABCD$, можна знайти висоту h, опущену з вершини на D на основу ABC:

$$h=\frac{3V_{\text{пір.}}}{S_{ABC}}=\frac{3\cdot 3}{3}=3 \text{ (од.).}$$

Приклад 1.2. Задано координати векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, модуль $|\vec{d}|$ та кут $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{d})$: $\vec{a}(1;-2;4)$, $\vec{b}(5;0;-1)$, $\vec{c}(2;3;1)$, $(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{d}) = \dfrac{\pi}{6}$.

Необхідно:

а) визначити, чи є серед векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ колінеарні або ортогональні;

б) знайти значення параметра m, за якого вектори $\vec{a} + m\vec{k}$ і $\vec{b}$ ортогональні;

в) знайти значення параметрів α і β, за яких вектори $\vec{a} - \alpha\vec{i}$ та $\vec{b} + 2\beta\vec{j}$ колінеарні;

г) знайти напрямні косинуси вектора $\vec{e} = (3; -4; 12)$;

д) дослідити, чи утворюють вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис; знайти координати вектора $\vec{e} = (3; -4; 12)$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$;

е) обчислити добутки: $\vec{a} \cdot (\vec{b} - 2\vec{c})$, $(\vec{b} - 2\vec{c}) \times \vec{a}$;

є) знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $3\vec{a} + \vec{d}$ та $2\vec{d} - \vec{a}$.

Розв'язання:

а) ортогональні вектори задовольняють умову (11), тобто мають нульовий скалярний добуток. Оскільки за формулою (8)

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 1 \cdot 5 + (-2) \cdot 0 + 4 \cdot (-1) = 1 \neq 0,$$
$$\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 + 4 \cdot 1 = 0,$$
$$\vec{c} \cdot \vec{b} = 2 \cdot 5 + 3 \cdot 0 + 1 \cdot (-1) = 9 \neq 0,$$

то ортогональними є лише вектори $\vec{a}$ і $\vec{c}$.

Колінеарність векторів визначають за пропорційністю відповідних координат (6). Оскільки

$$\frac{1}{5} \neq \frac{-2}{0} \neq \frac{4}{-1} \text{ для векторів } \vec{a} \text{ і } \vec{b},$$
$$\frac{1}{2} \neq \frac{-2}{3} \neq \frac{4}{1} \text{ для векторів } \vec{a} \text{ і } \vec{c},$$
$$\frac{5}{2} \neq \frac{0}{3} \neq \frac{-1}{1} \text{ для векторів } \vec{b} \text{ і } \vec{c},$$

то серед $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ немає пар колінеарних векторів;

б) знайти координати вектора $\vec{a}+m\vec{k}$, де $\vec{k}-$ орт осі аплікат:

$$\vec{a}+m\vec{k}=(1;-2;4)+m\cdot(0;0;1)=(1;-2;4+m),$$

а потім обчислити скалярний добуток за формулою (8):

$$(\vec{a}+m\vec{k})\cdot\vec{b}=(1;-2;4+m)\cdot(5;0;-1)=1\cdot5+(-2)\cdot0+(4+m)\cdot(-1)=1-m.$$

Звідси випливає, що задані вектори ортогональні, якщо параметр m дорівнює одиниці:

$$(\vec{a}+m\vec{k})\cdot\vec{b}=0 \quad\Leftrightarrow\quad 1-m=0 \quad\Leftrightarrow\quad m=1;$$

в) знайти координати векторів $\vec{a}-\alpha\vec{i}$ та $\vec{b}+2\beta\vec{j}$, де $\vec{i}$, $\vec{j}-$ орти осей абсцис і ординат, відповідно:

$$\vec{a}-\alpha\vec{i}=(1;-2;4)-\alpha\cdot(1;0;0)=(1-\alpha;-2;4);$$

$$\vec{b}+2\beta\vec{j}=(5;0;-1)+2\beta\cdot(0;1;0)=(5;2\beta;-1).$$

Для колінеарності цих векторів необхідно, щоб їхні координати задовольняли умову (6), тобто:

$$\frac{1-\alpha}{5}=\frac{-2}{2\beta}=\frac{4}{-1}.$$

Звідси скласти два рівняння та знайти шукані значення параметрів α і β:

$$\frac{1-\alpha}{5}=\frac{4}{-1} \quad\Leftrightarrow\quad \alpha-1=20 \quad\Leftrightarrow\quad \alpha=21;$$

$$\frac{-2}{2\beta}=\frac{4}{-1} \Leftrightarrow \quad 2=8\beta \quad\Leftrightarrow\quad \beta=\frac{1}{4};$$

г) напрямні косинуси вектора $\vec{e}=(3;-4;12)$ знайти за формулою (7):

$$\cos\alpha=\frac{3}{13};\ \cos\beta=-\frac{4}{13};\ \cos\gamma=\frac{12}{13},$$

де $|\vec{e}|=\sqrt{3^2+(-4)^2+12^2}=\sqrt{169}=13$;

д) вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ можуть бути базисом, якщо є лінійно незалежними, а значить, не є компланарними. Слід перевірити умову (19) компланарності векторів:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 77 \neq 0.$$

Тим самим доведено, що трійка векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ утворює базис простору.

Розкладом вектора $\vec{e} = (3; -4; 12)$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ є подання його у вигляді лінійної комбінації цих векторів:

$$\vec{e} = x_1\vec{a} + x_2\vec{b} + x_3\vec{c},$$

де числа x_1, x_2, x_3 є координатами вектора $\vec{e}$ в базисі $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$.

Щоб їх знайти, слід скласти систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яка є визначеною, тобто має єдиний розв'язок:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 12 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3, \\ -2x_1 + 3x_3 = -4, \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 12. \end{cases}$$

Далі розв'язати цю систему за формулами Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 77;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ -4 & 0 & 3 \\ 12 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 217;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 3 \\ 4 & 12 & 1 \end{vmatrix} = -14;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -2 & 0 & -4 \\ 4 & -1 & 12 \end{vmatrix} = 42;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{31}{11}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{2}{11}, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{6}{11}.$$

(Перевірку правильності розрахунків легко виконати підстановкою знайдених значень у рівняння системи).

Отже, розклад вектора $\vec{e} = (3; -4; 12)$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ має такий вигляд:

$$\vec{e} = \frac{1}{11}\left(31\vec{a} - 2\vec{b} + 6\vec{c}\right),$$

а координати $\vec{e}$ в цьому базисі $\vec{e} = \left(\frac{31}{11}; -\frac{2}{11}; \frac{6}{11}\right);$

е) обчислити координати вектора:

$$\vec{b} - 2\vec{c} = (5; 0; -1) - 2 \cdot (2; 3; 1) = (5-4; 0-6; -1-2) = (1; -6; -3),$$

тоді шукані добутки дорівнюють:

$$\vec{a} \cdot \left(\vec{b} - 2\vec{c}\right) = (1; -2; 4) \cdot (1; -6; -3) = 1 \cdot 1 + (-2) \cdot (-6) + 4 \cdot (-3) = 1;$$

$$\left(\vec{b} - 2\vec{c}\right) \times \vec{a} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -6 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -30\vec{i} - 7\vec{j} + 4\vec{k} = (-30; -7; 4).$$

є) щоб обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах $3\vec{a}+\vec{d}$ та $2\vec{d}-\vec{a}$, необхідно знайти модуль векторного добутку цих векторів. По-перше, необхідно скористатися властивостями векторного добутку, а саме: антикомутативністю, асоціативністю щодо множення на число та дистрибутивністю щодо додавання. Також слід ураховувати, що векторний добуток вектора на себе дорівнює нулю.

Тоді

$$(3\vec{a}+\vec{d})\times(2\vec{d}-\vec{a}) = 6\vec{a}\times\vec{d} - 3\vec{a}\times\vec{a} + 2\vec{d}\times\vec{d} - \vec{d}\times\vec{a} =$$
$$= 6\vec{a}\times\vec{d} - 0 + 0 + \vec{a}\times\vec{d} = 7\vec{a}\times\vec{d}.$$

Щоб обчислити модуль векторного добутка $\vec{a}\times\vec{d}$, слід скористатися формулою (3). Оскільки $|\vec{a}| = \sqrt{1^2+(-2)^2+4^2} = \sqrt{21}$, то

$$|\vec{a}\times\vec{d}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{d}|\cdot\sin(\vec{a}\,\hat{}\,\vec{d}) = \sqrt{21}\cdot 2\cdot\sin\frac{\pi}{6} = \sqrt{21}\cdot 2\cdot\frac{1}{2} = \sqrt{21}.$$

Звідси знайти площу паралелограма, побудованого на на векторах $3\vec{a}+\vec{d}$ та $2\vec{d}-\vec{a}$:

$$S_{пар.} = |(3\vec{a}+\vec{d})\times(2\vec{d}-\vec{a})| = 7\cdot|\vec{a}\times\vec{d}| = 7\sqrt{21} \text{ (кв. од.)}.$$

Приклад 2.1. Знайти власні значення та власні вектори матриці:

$$\text{а) } A = \begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}; \quad \text{б) } A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

а) скласти характеристичне рівняння $|A-\lambda E| = 0$, розв'язками якого є власні (характеристичні) значення матриці A:

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 \\ 8 & 9-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(5-\lambda)(9-\lambda) - 4\cdot 8 = 0;$$

$$\lambda^2 - 14\lambda + 13 = 0;$$
$$\lambda_1 = 1,\ \ \lambda_2 = 13.$$

Щоб визначити координати власних векторів, треба скласти дві системи лінійних рівнянь:

$$(A - \lambda_i E)\,\overline{x} = \overline{0}, \quad i = 1{,}2,$$

відповідно до знайдених власних чисел $\lambda_i\ (i = 1{,}2)$.

За $\lambda_1 = 1$ скласти систему:

$$\begin{cases} (5-\lambda_1)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 8x_1 + (9-\lambda_1)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 0 \\ 8x_1 + 8x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_2 = -x_1.$$

Тобто, розв'язком системи є множина векторів:

$$\overline{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} C_1 \\ -C_1 \end{pmatrix}, \quad C_1 \in R \setminus \{0\}.$$

Аналогічно, за $\lambda_2 = 13$ система така:

$$\begin{cases} (5-\lambda_2)x_1 + 4x_2 = 0 \\ 8x_1 + (9-\lambda_2)x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -8x_1 + 4x_2 = 0 \\ \ \ 8x_1 - 4x_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \quad x_2 = 2x_1,$$

а, значить, сукупність власних векторів, що відповідають характеристичному значенню $\lambda_2 = 13$ визначають за формулою:

$$\overline{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} C_2 \\ 2C_2 \end{pmatrix}, \quad C_2 \in R \setminus \{0\};$$

б) скласти характеристичне рівняння $|A - \lambda E| = 0$ та розв'язати його:

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 & 0 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 0 & 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0;$$

$$(3-\lambda)(2-\lambda)(1-\lambda) - 4(3-\lambda) - 4(1-\lambda) = 0;$$

$$(2-\lambda)(\lambda^2-4\lambda-5)=0;$$

$$\lambda_1=2,\ \lambda_2=-1,\ \lambda_3=5.$$

Слід визначити власні вектори, що відповідають знайденим власним значенням. За $\lambda_1=2$ система $(A-\lambda_1 E)\,\overline{x}=\overline{0}$ має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1+2x_2=0 \\ 2x_1+2x_3=0, \\ 2x_2-x_3=0 \end{cases}$$

звідки сукупність власних векторів, що відповідають цьому характеристичному числу, задають формулою:

$$\overline{x}^{(1)}=\begin{pmatrix} 2C_1 \\ -C_1 \\ -2C_1 \end{pmatrix}, \qquad C_1\in R\setminus\{0\}.$$

Аналогічно знайти однопараметричні множини власних векторів, що відповідають двом іншим власним числам:

$$\lambda_2=-1:\quad \begin{cases} 4x_1+2x_2 \qquad\quad =0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3=0 \\ \qquad\ \ 2x_2+2x_3=0 \end{cases} \Rightarrow\ \overline{x}^{(2)}=\begin{pmatrix} C_2 \\ -2C_2 \\ 2C_2 \end{pmatrix},\ C_2\in R\setminus\{0\};$$

$$\lambda_3=5:\quad \begin{cases} -2x_1+2x_2 \qquad\quad =0 \\ \ \ 2x_1-3x_2+2x_3=0 \\ \qquad\ \ 2x_2-4x_3=0 \end{cases} \Rightarrow\ \overline{x}^{(3)}=\begin{pmatrix} 2C_3 \\ 2C_3 \\ C_3 \end{pmatrix},\ C_3\in R\setminus\{0\}.$$

Зауваження. У разі, коли власне число має кратність два, відповідна сукупність власних векторів залежить від двох параметрів, які можна підібрати таким чином, щоб обрати ортогональну пару векторів.

Приклад 2.2. *Лінійна модель обміну (модель міжнародної торгівлі).* Товарообмін між трьома країнами $K_1,\ K_2,\ K_3$ задано структурною матрицею:

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix}.$$

Знайти вектор коштів, компонентами якого є частки від загального обсягу торгівлі, які має вкладати кожна із країн у зовнішній товарообіг для того, щоб торгівля була збалансованою. Знайти бюджети першої та другої країни, що відповідають збалансованій бездефіцитній торгівлі, якщо бюджет третьої країни становить 8 000 грош. од.

Розв'язання. Шуканий вектор коштів є власним вектором структурної матриці, що належить власному значенню $\lambda=1$. Його компоненти утворюють ненульовий розв'язок однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$(A-E)\,\bar{x}=\bar{0} \quad\Rightarrow\quad \begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки система є однорідною, то розширена матриця є еквівалентною основній матриці системи. Слід здійснити елементарні перетворення основної матриці цієї системи рівнянь:

$$(A-E)=\begin{pmatrix} -2/3 & 1/4 & 1/2 \\ 1/3 & -1/2 & 1/2 \\ 1/3 & 1/4 & -1 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -8 & 3 & 6 \\ 4 & -6 & 6 \\ 4 & 3 & -12 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} S_1-S_3\to S_1 \\ S_2+2S_1\to S_2 \\ S_3-S_2\to S_3 \end{bmatrix}\sim\begin{pmatrix} -12 & 0 & 18 \\ -12 & 0 & 18 \\ 0 & 9 & -18 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3/2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases} x_1 \quad -\frac{3}{2}x_3=0, \\ \quad x_2-2x_3=0. \end{cases}$$

Далі знайти загальний розв'язок системи, у якому x_1, x_2 – базисні змінні, x_3 – вільна змінна:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{3}{2}C \\ x_2 = 2C \\ x_3 = C \end{cases} \Rightarrow \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}C \\ 2C \\ C \end{pmatrix}, \quad C \in R \setminus \{0\}.$$

Звідси випливає, що для збалансованості торгівлі необхідно, щоб кошти, які вкладає в зовнішній товарообіг кожна країна, співвідносилися як $x_1 : x_2 : x_3 = 3 : 4 : 2$.

Якщо бюджет третьої країни становить $x_3 = 8\,000$ грош. од., то бюджети першої та другої країни, що відповідають збалансованій бездефіцитній торгівлі, дорівнюють:

$$x_1 = \frac{3}{2}x_3 = \frac{3}{2} \cdot 8\,000 = 12\,000 \text{ грош. од.}$$

та

$$x_2 = 2x_3 = 2 \cdot 8\,000 = 16\,000 \text{ грош. од.}$$

Приклад 3.1. Установити тип кривої 2-го порядку та звести її рівняння до канонічного вигляду:

$$4x^2 - 3y^2 + 8x + 12y - 56 = 0.$$

Розв'язання. Оскільки квадратична форма має канонічний вигляд (23) (не містить добутку xy), то для того, щоб визначити тип кривої, достатньо виділити повні квадрати в лівій частині рівняння:

$$4(x^2 + 2x) - 3(y^2 - 4y) - 32 = 4(x^2 + 2x + 1) - 3(y^2 - 4y + 4) - 4 + 12 - 56 =$$
$$= 4(x+1)^2 - 3(y-2)^2 - 48.$$

Тоді вихідне рівняння набуває такого вигляду:

$$4(x+1)^2 - 3(y-2)^2 - 48 = 0;$$
$$4(x+1)^2 - 3(y-2)^2 = 48;$$

$$\frac{(x+1)^2}{12}-\frac{(y-2)^2}{16}=1;$$

$$\frac{(x+1)^2}{(2\sqrt{3})^2}-\frac{(y-2)^2}{4^2}=1.$$

За знайденим канонічним рівнянням можна зробити висновок: задана крива 2-го порядку є гіперболою із центром у точці $(x_0, y_0)=(-1,2)$, дійсною піввіссю $a=2\sqrt{3}$ та уявною піввіссю $b=4$.

Приклад 3.2. За допомогою ортогонального перетворення звести до канонічного вигляду рівняння кривої та визначити її тип:

$$17x^2+12xy+8y^2-80=0.$$

Розв'язання. За коефіцієнтами при старших членах скласти матрицю квадратичної форми $17x^2+12xy+8y^2$ (див. (26)):

$$A=\begin{pmatrix} 17 & 6 \\ 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Відповідне характеристичне рівняння має такий вигляд:

$$|A-\lambda E|=0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{vmatrix} 17-\lambda & 6 \\ 6 & 8-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda^2-25\lambda+100=0.$$

Корені цього квадратного рівняння $\lambda_1=5,\ \lambda_2=20$ є характеристичними числами матриці A. Звідси квадратичну форму $17x^2+12xy+8y^2$ перетворення зводять до канонічного вигляду $5x'^2+20y'^2$, а рівняння заданої кривої 2-го порядку в нових координатах (x', y') набуває такого вигляду:

$$5x'^2+20y'^2-80=0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{x'^2}{4^2}+\frac{y'^2}{2^2}=1.$$

Таким чином, знайдено канонічне рівняння еліпсу з півосями $a=4$, $b=2$.

Далі знайти базис, у якому еліпс набуває канонічного вигляду. Для цього відшукати власні вектори, що відповідають власним значенням $\lambda_1,\ \lambda_2$. За $\lambda_1 = 5$ система рівнянь така:

$$(A-5E)\,\bar{x}=\bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 12x_1+6x_2=0 \\ 6x_1+3x_2=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}^{(1)}=\begin{pmatrix} C_1 \\ -2C_1 \end{pmatrix}.$$

За $\lambda_2 = 20$ система рівнянь така:

$$(A-20E)\,\bar{x}=\bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} -3x_1+\ 6x_2=0 \\ 6x_1-12x_2=0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{x}^{(2)}=\begin{pmatrix} 2C_2 \\ C_2 \end{pmatrix}.$$

Для нормування власних векторів, слід підібрати константи таким чином, щоб вектори мали одиничну довжину:

$$\sqrt{C_1^2+(-2C_1)^2}=1 \quad \Rightarrow \quad C_1=\frac{1}{\sqrt{5}};$$

$$\sqrt{(2C_2)^2+C_2^2}=1 \quad \Rightarrow \quad C_2=\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Таким чином, за $C_1 = C_2 = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ знайдено пару ортонормованих власних векторів:

$$\bar{e}_1=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}, \qquad \bar{e}_2=\begin{pmatrix} \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

За ними можна сформувати матрицю ортогонального перетворення:

$$U=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{\sqrt{5}} & \dfrac{2}{\sqrt{5}} \\ \dfrac{-2}{\sqrt{5}} & \dfrac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Тоді формули (25) перетворення координат мають такий вигляд:

$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{2}{\sqrt{5}}y' \\ y = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}x' + \dfrac{1}{\sqrt{5}}y' \end{cases},$$

як наслідок, вихідна квадратична форма в новому базисі $\overline{e}_1; \overline{e}_2$ набуває такого вигляду:

$$17x^2 + 12xy + 8y^2 =$$

$$= \frac{17}{5}(x' + 2y')^2 + \frac{12}{5}(x' + 2y')(-2x' + y') + \frac{8}{5}(-2x' + y')^2 =$$

$$= 5x'^2 + 20y'^2,$$

а задане рівняння кривої другого порядку $17x^2 + 12xy + 8y^2 - 80 = 0$ у нових (канонічних) координатах перетворюють на канонічне рівняння еліпса:

$$\frac{x'^2}{16} + \frac{y'^2}{4} = 1.$$

Зауваження. Після переходу до канонічної системи координат може виникнути також необхідність у виділенні повного квадрата (див. попередній приклад).

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Розкрийте зміст понять "скаляр" та "вектор".

2. Охарактеризуйте основні дії над векторами.

3. Розкрийте зміст скалярного добутку векторів та наведіть його властивості.

4. У чому полягає умова ортогональності двох векторів?

5. Визначте та охарактеризуйте векторний добуток. Розкрийте зміст його геометричного тлумачення.

6. Розкрийте сутність мішаного добутку трьох векторів. У чому полягає умова компланарності векторів?

7. Визначте лінійний (векторний) простір.

8. Що таке "лінійна залежність" та "незалежність векторів"?

9. Сформулюйте теорему про лінійну залежність векторів і наслідок із неї.

10. Що розуміють під завданням дослідження системи векторів на лінійну незалежність? Опишіть порядок дій під час її вирішення.

11. Яку найбільшу кількість лінійно незалежних векторів може містити система векторів?

12. Розкрийте зміст поняття "базис системи векторів".

13. Який базис називають ортогональним?

14. Що таке "ортонормований базис"?

15. Наведіть і доведіть теорему про розклад вектора за базисом.

16. Опишіть процес розкладу вектора за заданим базисом.

17. Як відшукати базис серед заданої системи векторів?

18. Як здійснити перехід від одного базису до іншого?

19. На якому співвідношенні ґрунтуються означення власних векторів і власних чисел матриці?

20. Чому до множини власних векторів заданої матриці не належить нуль-вектор?

21. Чи може власному вектору матриці відповідати кілька власних чисел?

22. Чи може власному числу матриці відповідати кілька власних векторів?

23. До аналізу чого зведено задачу знаходження власних чисел та власних векторів матриці та в чому полягає цей аналіз?

24. Із якою числовою характеристикою матриці збігається кількість її власних чисел?

25. У якій послідовності шукають власні вектори та власні числа матриці: спочатку власні вектори, а потім власні числа чи навпаки?

26. Яку підмножину n-вимірного простору утворюють власні вектори матриці 1-го порядку і яке власне число їм відповідає?

27. У чому полягають необхідна й достатня умови існування власного вектора, що належить певному власному числу, і чим вони відрізняються одна від одної?

28. Чому n власних векторів, що належать різним власним числам, можна взяти як базис n-вимірного простору?

29. Які власні числа має симетрична матриця?

30. Що можна сказати про власні вектори симетричної матриці?

31. Які економічні приклади застосування векторного аналізу вам відомі?

32. Що називають лінійною моделлю обміну? Наведіть постановку відповідної задачі.

33. Який інструментарій векторної алгебри використовують для розв'язання задачі збалансованої міжнародної торгівлі. Наведіть схему розв'язання цієї задачі.

34. Що називають кривою 2-го порядку і який вигляд має її загальне рівняння?

35. Наведіть означення квадратичної форми.

36. Охарактеризуйте модель квадратичної форми та її матрицю.

37. У чому полягає перетворення загального рівняння кривої 2-го порядку до канонічного виду?

38. Визначте методи зведення матриці квадратичної форми до канонічного вигляду.

Варіанти завдань для самостійної контрольної роботи

Завдання 1.1. Задано координати точок A, B, C і D.

Необхідно:

а) довести, що точки A, B, C утворюють трикутник, а на A, B, C і D можна побудувати піраміду;

б) знайти кути та довжини сторін трикутника ABC;

в) знайти проекції $\overline{AD}$ на осі сторін трикутника ABC;

г) знайти проекцію $\text{ПР}_{\overline{AC}}\,(\overline{AB} - \text{n}\,\overline{CD})$, де n – номер варіанта;

д) обчислити площу трикутника ABC;

е) знайти об'єм піраміди $ABCD$ та висоту, опущену з вершини D на основу ABC.

Варіант 1. $A(1; 2; 0), B(3; 0; -3), C(5; 2; 6), D(-1; 4; 1)$.

Варіант 2. $A(2; -1; 2), B(1; 2; -1), C(3; 2; 1), D(-4; 2; 5)$.

Варіант 3. $A(1; 1; 2), B(-1; 1; 3), C(2; -2; 4), D(1; 0; -2)$.

Варіант 4. $A(2; 3; 1), B(4; 1; -2), C(6; 3; 7), D(-7; 5; -3)$.

Варіант 5. $A(-1; 1; -1), B(2; 3; 1), C(3; 2; 1), D(5; 9; -8)$.

Варіант 6. $A(1; 5; -7), B(-3; 6; 3), C(-2; 7; 3), D(-4; 8; -12)$.

Варіант 7. $A(-3;4;-7), B(1;5;-4), C(-5;-2;0), D(2;5;4)$.

Варіант 8. $A(-1;2;-3), B(4;-1;0), C(2;1;-2), D(3;4;5)$.

Варіант 9. $A(4;-1;3), B(-2;1;0), C(0;-5;1), D(3;2;-6)$.

Варіант 10. $A(1;-1;1), B(-2;0;3), C(2;1;-1), D(2;-2;-4)$.

Варіант 11. $A(1;3;0), B(1;-1;2), C(0;1;-1), D(-3;0;1)$.

Варіант 12. $A(1;0;2), B(1;2;-1), C(2;-2;1), D(2;1;0)$.

Варіант 13. $A(1;2;-3), B(1;0;1), C(-2;-1;6), D(0;-5;-4)$.

Варіант 14. $A(3;10;-1), B(-2;3;-5), C(-6;0;-3), D(1;-1;2)$.

Варіант 15. $A(-1;2;4), B(-1;-2;-4), C(3;0;-1), D(7;-3;1)$.

Варіант 16. $A(0;-3;1), B(-4;1;2), C(2;-1;5), D(3;1;-4)$.

Варіант 17. $A(1;3;0), B(4;-1;2), C(3;0;1), D(-4;3;5)$.

Варіант 18. $A(-2;-1;-1), B(0;3;2), C(3;1;-4), D(-4;7;3)$.

Варіант 19. $A(2;-4;-3), B(5;-6;0), C(-1;3;-3), D(-5;2;8)$.

Варіант 20. $A(5;2;0), B(2;5;0), C(1;2;4), D(-1;1;1)$.

Завдання 1.2. Задано координати векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, модуль $|\vec{d}|$ та кут $(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{d})$.

Необхідно:

а) визначити, чи є серед векторів $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ортогональні або колінеарні;

б) знайти значення параметра m, за яких вектори $2\vec{a} - m\vec{k}$ і $\vec{b}$ ортогональні;

в) знайти значення параметрів α і β, за яких вектори $\vec{a} + \alpha\vec{i}$ та $\vec{b} - \beta\vec{j}$ колінеарні;

г) знайти напрямні косинуси вектора $\vec{c} + n\vec{i} - \vec{k}$;

д) дослідити, чи утворюють вектори $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ базис; знайти координати вектора $\vec{c} + n\vec{i} - \vec{k}$ за базисом $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ (n – номер варіанта);

е) обчислити добутки $\vec{a} \times (m\vec{b} - \vec{c})$ і $(n\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c}$;

є) знайти площу паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a} + \vec{d}$ та $m\vec{d} - n\vec{a}$.

Варіант 1. $\vec{a} = (1;3;0), \vec{b} = (1;-1;2), \vec{c} = (-3;1;5)$, $|\vec{d}| = 3$, $(\vec{i}\,\hat{}\,\vec{d}) = \dfrac{\pi}{4}$.

Варіант 2. $\vec{a}=(1;\,0;\,2),\vec{b}=(1;\,2;\,-1),\vec{c}=(2;\,-2;\,1),\ \left|\vec{d}\right|=5,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{3}.$

Варіант 3. $\vec{a}=(1;\,2;\,-1),\vec{b}=(1;\,0;\,1),\vec{c}=(2;\,1;\,4),\ \left|\vec{d}\right|=1,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{2}.$

Варіант 4. $\vec{a}=(3;\,1;\,1),\vec{b}=(-2;\,3;\,5),\vec{c}=(-3;\,0;\,9),\ \left|\vec{d}\right|=2,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{6}.$

Варіант 5. $\vec{a}=(-1;\,2;\,3),\vec{b}=(1;\,2;\,4),\vec{c}=(3;\,0;\,-1),\ \left|\vec{d}\right|=4,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{4}.$

Варіант 6. $\vec{a}=(0;\,3;\,1),\vec{b}=(4;\,1;\,2),\vec{c}=(2;\,-1;\,3),\ \left|\vec{d}\right|=3,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{2\pi}{3}.$

Варіант 7. $\vec{a}=(1;\,3;\,1),\vec{b}=(4;\,-1;\,2),\vec{c}=(3;\,-2;\,3),\ \left|\vec{d}\right|=6,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{2}.$

Варіант 8. $\vec{a}=(-2;\,1;\,1),\vec{b}=(0;\,3;\,2),\vec{c}=(3;\,1;\,7),\ \left|\vec{d}\right|=7,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{3\pi}{4}.$

Варіант 9. $\vec{a}=(2;\,-4;\,-1),\vec{b}=(5;\,-6;\,0),\vec{c}=(-1;\,2;\,-10),\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{6}.$

Варіант 10. $\vec{a}=(5;\,2;\,0),\vec{b}=(2;3;\,1),\vec{c}=(2;5;\,4),\ \left|\vec{d}\right|=4,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{4}.$

Варіант 11. $\vec{a}=(1;\,2;\,1),\vec{b}=(3;\,0;\,3),\vec{c}=(5;\,2;\,1),\ \left|\vec{d}\right|=5,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{5\pi}{6}.$

Варіант 12. $\vec{a}=(2;\,-1;\,2),\vec{b}=(1;\,2;\,1),\vec{c}=(3;\,2;\,2),\ \left|\vec{d}\right|=6,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{3}.$

Варіант 13. $\vec{a}=(1;\,1;\,2),\vec{b}=(-1;\,1;\,3),\vec{c}=(2;\,2;\,0),\ \left|\vec{d}\right|=7,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{2}.$

Варіант 14. $\vec{a}=(2;3;\,1),\vec{b}=(4;\,1;\,2),\vec{c}=(6;\,3;\,3),\ \left|\vec{d}\right|=1,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{3\pi}{4}.$

Варіант 15. $\vec{a}=(-1;\,1;\,1),\vec{b}=(2;\,3;\,1),\vec{c}=(3;\,2;\,1),\ \left|\vec{d}\right|=3,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{5\pi}{6}.$

Варіант 16. $\vec{a}=(1;\,5;\,7),\vec{b}=(-3;\,6;\,3),\vec{c}=(4;\,2;\,2),\left|\vec{d}\right|=4,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{3}.$

Варіант 17. $\vec{a}=(3;\,4;\,7),\vec{b}=(1;\,5;\,4),\vec{c}=(-5;\,2;\,1),\ \left|\vec{d}\right|=1,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{6}.$

Варіант 18. $\vec{a}=(-1;\,2;\,3),\vec{b}=(4;\,1;\,7),\vec{c}=(2;\,1;\,0),\ \left|\vec{d}\right|=2,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\frac{\pi}{2}.$

Варіант 19. $\vec{a}=(4;1;5),\vec{b}=(2;1;0),\vec{c}=(0;5;1),\ \left|\vec{d}\right|=10,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\dfrac{2\pi}{3}$.

Варіант 20. $\vec{a}=(1;1;1),\vec{b}=(-2;0;3),\vec{c}=(2;1;1),\ \left|\vec{d}\right|=5,\ \left(\vec{c}\,{}^\wedge\vec{d}\right)=\dfrac{3\pi}{4}$.

Завдання 2.1. Знайти власні значення та власні вектори заданих матриць A і B.

Варіант 1. $A=\begin{pmatrix}5 & -3\\ 4 & -3\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

Варіант 2. $A=\begin{pmatrix}2 & 7\\ 1 & -4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}2 & -2 & 2\\ 0 & -1 & 3\\ 0 & -4 & 6\end{pmatrix}$.

Варіант 3. $A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}6 & 2 & 3\\ -1 & 1 & -1\\ -7 & -3 & -3\end{pmatrix}$.

Варіант 4. $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 10 & -2\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}4 & 0 & 1\\ 3 & 3 & 2\\ -5 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

Варіант 5. $A=\begin{pmatrix}6 & 6\\ -2 & -1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-7 & -5 & -6\\ 10 & 8 & 11\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$.

Варіант 6. $A=\begin{pmatrix}-2 & 16\\ -1 & 6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}-3 & -2 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{pmatrix}$.

Варіант 7. $A=\begin{pmatrix}3 & 6\\ -3 & -6\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}3 & 3 & -2\\ -1 & -4 & 5\\ -1 & -3 & 4\end{pmatrix}$

Варіант 8. $A=\begin{pmatrix}-5 & 9\\ -1 & 1\end{pmatrix};\ B=\begin{pmatrix}6 & 5 & -5\\ -11 & -4 & 11\\ -1 & 5 & 2\end{pmatrix}$.

Варіант 9. $A=\begin{pmatrix} 10 & -10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.

Варіант 10. $A=\begin{pmatrix} 1 & 16 \\ -1 & 9 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ -1 & -1 & -3 \\ 1 & 4 & 6 \end{pmatrix}$.

Варіант 11. $A=\begin{pmatrix} 6 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 12. $A=\begin{pmatrix} -5 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -4 & -6 & 5 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Варіант 13. $A=\begin{pmatrix} 6 & -4 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 14. $A=\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Варіант 15. $A=\begin{pmatrix} 0 & 4 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ 2 & -4 & 3 \end{pmatrix}$.

Варіант 16. $A=\begin{pmatrix} -4 & -6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Варіант 17. $A=\begin{pmatrix} 7 & 12 \\ -6 & -11 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$.

Варіант 18. $A=\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$; $B=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 2 & -6 & 7 \\ 2 & -8 & 9 \end{pmatrix}$.

Варіант 19. $A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Варіант 20. $A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} -5 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.

Завдання 2.2. Задано структурну матрицю торгівлі трьох країн A. Знайти бюджети першої та другої країни, що відповідають збалансованій бездефіцитній торгівлі, якщо бюджет третьої країни становить t (грош. од.).

Варіант 1. $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ 0.3 & 0 & 0.3 \\ 0.5 & 0.5 & 0.4 \end{pmatrix}$, $t = 1\,000$.

Варіант 2. $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 & 0.1 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.3 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$, $t = 2\,300$.

Варіант 3. $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.2 & 0.4 \\ 0.2 & 0.2 & 0.6 \\ 0.5 & 0.6 & 0 \end{pmatrix}$, $t = 3100$.

Варіант 4. $A = \begin{pmatrix} 0.7 & 0 & 0.6 \\ 0.3 & 0.5 & 0.1 \\ 0 & 0.5 & 0.3 \end{pmatrix}$, $t = 2\,500$.

Варіант 5. $A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.1 & 0.3 \\ 0.1 & 0 & 0.3 \\ 0.6 & 0.9 & 0.4 \end{pmatrix}$, $t = 3\,200$.

Варіант 6. $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0 & 0.7 \\ 0.2 & 0.8 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.3 \end{pmatrix}$, $t = 1\,700$.

Варіант 7. $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0.4 \\ 0.5 & 0.9 & 0.3 \\ 0 & 0.1 & 0.3 \end{pmatrix}$, $t = 2\,100$.

Варіант 8. $A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0.4 & 0.2 & 0.2 \\ 0.1 & 0.3 & 0.8 \end{pmatrix}$, $t=3\,400$.

Варіант 9. $A=\begin{pmatrix} 0.4 & 0.7 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.9 \\ 0.4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $t=5\,000$.

Варіант 10. $A=\begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.4 \\ 0 & 0.2 & 0.2 \\ 0.7 & 0.3 & 0.4 \end{pmatrix}$, $t=2\,200$.

Варіант 11. $A=\begin{pmatrix} 0.8 & 0.5 & 0.2 \\ 0 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$, $t=1\,700$.

Варіант 12. $A=\begin{pmatrix} 0.2 & 0.15 & 0.1 \\ 0.4 & 0.7 & 0.9 \\ 0.4 & 0.15 & 0 \end{pmatrix}$, $t=3\,600$.

Варіант 13. $A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0 & 0.8 & 0.4 \\ 0.5 & 0 & 0.3 \end{pmatrix}$, $t=2\,000$.

Варіант 14. $A=\begin{pmatrix} 0.6 & 0.8 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.9 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$, $t=1\,000$.

Варіант 15. $A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.6 \\ 0 & 0.2 & 0.4 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}$, $t=2\,500$.

Варіант 16. $A=\begin{pmatrix} 0.5 & 0.3 & 0.4 \\ 0.2 & 0 & 0.4 \\ 0.3 & 0.7 & 0.2 \end{pmatrix}$, $t=3\,800$.

Варіант 17. $A=\begin{pmatrix} 0.4 & 0.9 & 0.2 \\ 0.15 & 0.1 & 0 \\ 0.45 & 0 & 0.8 \end{pmatrix}$, $t=4\,000$.

Варіант 18. $A = \begin{pmatrix} 0.6 & 0.1 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 & 0.5 \\ 0.1 & 0.2 & 0 \end{pmatrix}$, $t = 3\,000$.

Варіант 19. $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.25 & 0.1 \\ 0.3 & 0 & 0.9 \\ 0.3 & 0.75 & 0 \end{pmatrix}$, $t = 2\,000$.

Варіант 20. $A = \begin{pmatrix} 0.2 & 0.5 & 0.15 \\ 0 & 0.5 & 0.35 \\ 0.8 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$, $t = 1\,000$.

Завдання 3.1. Установити тип кривої другого порядку та звести її рівняння до канонічного вигляду.

Варіант 1. $25x^2 + 16y^2 - 100x + 32y - 284 = 0$.

Варіант 2. $-16x^2 + 9y^2 - 32x + 90y - 367 = 0$.

Варіант 3. $2x^2 - 3y^2 - 6x + 9y - 2 = 0$.

Варіант 4. $3x^2 + 4y^2 + 12x - 8y - 32 = 0$.

Варіант 5. $x^2 + y^2 - 3x - 5y + 1{,}25 = 0$.

Варіант 6. $2x^2 + 6y^2 - 3y + 6 = 0$.

Варіант 7. $-4x^2 + y^2 + 8x - 6y - 8 = 0$.

Варіант 8. $9x^2 - 4y^2 + 6x + 4y - 2 = 0$.

Варіант 9. $y^2 + 2x - 3y + 4 = 0$.

Варіант 10. $x^2 - 4y^2 + 8y - 5 = 0$.

Варіант 11. $9x^2 + 4y^2 + 6x - 4y - 2 = 0$.

Варіант 12. $9x^2 - 16y^2 - 6x + 8y - 144 = 0$.

Варіант 13. $16x^2 + 25y^2 + 32x - 100y - 284 = 0$.

Варіант 14. $9x^2 - 16y^2 + 90x - 32y - 367 = 0$.

Варіант 15. $4x^2 + 3y^2 - 8x + 12y - 32 = 0$.

Варіант 16. $16x^2 - 9y^2 - 64x - 18y + 199 = 0$.

Варіант 17. $4x^2 + 9y^2 - 4x + 6y - 2 = 0$.

Варіант 18. $-16x^2 + 9y^2 + 8x - 6y - 144 = 0$.

Варіант 19. $4x^2 + 4x + 2y - 1 = 0$.

Варіант 20. $2x^2 - 126x - y + 14 = 0$.

Завдання 3.2. За допомогою ортогонального перетворення звести до канонічного вигляду рівняння кривої, визначити її тип та знайти канонічну систему координат.

Варіант 1. $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 16x - 16y - 16 = 0$.

Варіант 2. $7x^2 + 16xy - 23y^2 - 14x - 16y - 218 = 0$.

Варіант 3. $27x^2 - 10xy + 3y^2 - 56 = 0$.

Варіант 4. $9x^2 - 4xy + 6y^2 + 16x - 8y - 2 = 0$.

Варіант 5. $x^2 - 2xy + y^2 - 10x - 6y + 25 = 0$.

Варіант 6. $5x^2 + 12xy - 22x - 12y - 19 = 0$.

Варіант 7. $4x^2 - 4xy + y^2 - 6x + y - 4 = 0$.

Варіант 8. $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 6x - 8y - 1 = 0$.

Варіант 9. $x^2 - 4xy + 4y^2 - 4x - 3y - 7 = 0$.

Варіант 10. $3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$.

Варіант 11. $6x^2 - 4xy + 9y^2 + 8x - 16y - 2 = 0$.

Варіант 12. $7x^2 + 4\sqrt{6}\,xy + 5y^2 - 44 = 0$.

Варіант 13. $4xy + 3y^2 + 16 = 0$.

Варіант 14. $5x^2 + 4xy + 2y^2 - 8x - 6y - 1 = 0$.

Варіант 15. $-22x^2 + 12xy + 5x - 12x - 19 = 0$.

Варіант 16. $4x^2 - 4xy + y^2 - 3x - 4y - 7 = 0$.

Варіант 17. $x^2 - 4xy + 4y^2 + x - 6y - 4 = 0$.

Варіант 18. $-23x^2 + 16xy + 7y^2 - 16x - 14y - 218 = 0$.

Варіант 19. $6x^2 + 2\sqrt{5}\,xy + 2y^2 - 21 = 0$.

Варіант 20. $5x^2 + 4\sqrt{6}\,xy + 7y^2 - 44 = 0$.

Рекомендована література

Основна

1. Вища математика : базовий підручник для вузів / під ред. В. С. Пономаренка. – Х. : Фоліо, 2014. – 669 с.

2. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. / під ред. Л. М. Малярець. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 568 с.

3. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. У 2-х ч. Ч. 1. / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 393 с.

4. Математика для економістів: практ. посіб. до розв'язання задач економічних досліджень в MatLab / Л. М. Малярець, Є. В. Резнік, О. Г. Тижненко. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 212 с.

5. Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посіб. до розв'язання задач / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 476 с.

Додаткова

6. Барковський В. В. Математика для економістів : навч. посіб. / В. В. Барковський, Н. В. Барковська. – К. : НАУ, 1999. – 448 с.

7. Вища математика для економістів : підручник / під ред. О. І. Ляшенка, О. І. Черняка. – К. : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 497 с.

8. Высшая математика для экономистов / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : ЮНИТИ, 2002. – 440 с.

9. Высшая математика : сборник задач / под ред. П. Ф. Овчинникова. – К. : Вища школа, 1999. – 350 с.

10. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. У 2-х ч. Ч. 1. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – М. : Высшая школа, 2003. – 304 с.

11. Ермаков В. И. Общий курс высшей математики для экономистов / В. И. Ермаков, Б. М. Рудык, Р. К. Гринцевичюс. – М. : ИНФРА-М, 2007. – 657 с.

12. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – М. : Наука, 2002. – 352 с.

13. Травкін Ю. І. Математика для економістів : підручник / Ю. І. Травкін, Л. М. Малярець. – Х. : ВД "ІНЖЕК", 2005. – 816 с.

Інформаційні ресурси

14. Ковальова К. О. Математичний аналіз та лінійна алгебра : опорний конспект [Електронний ресурс] / К. О. Ковальова. – Режим доступу : Режим доступу : http://www.ikt.hneu.edu.ua/course/view.php?id=929.

15. Рибалко А. П. Математичний аналіз та лінійна алгебра : опорний конспект [Електронний ресурс] / А. П. Рибалко. – Режим доступу : Режим доступу : http://www.ikt.hneu.edu.ua/course/view.php?id=929.

16. Рибалко А. П. Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "Математичний аналіз та лінійна алгебра" [Електронний ресурс] / А. П. Рибалко – Режим доступу : http://www.ikt.hneu.edu.ua/course/view.php?id=929.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації і завдання для самостійної роботи з розділу "Векторна алгебра" навчальної дисципліни "МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТА ЛІНІЙНА АЛГЕБРА"

для студентів напряму підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа" денної форми навчання

Укладачі: **Рибалко** Антоніна Павлівна

Стєпанова Катерина Вадимівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. Г. Доценко*

Коректор *О. Г. Доценко*

План 2016 р. Поз. № 32.

Підп. до друку. 26.09.2016 р. Формат 60 × 90 1/16. Папір офсетний. Друк цифровий.

Ум. друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк. 4,06. Тираж 40 пр. Зам. № 166.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру

ДК № 4853 від 20.02.2015 р.