УДК 517.968.23

Общее финитное решение одного интегрального уравнения типа свертки

Гунько О. В., Сулима В. В.

Установлен общий вид решений интегрального уравнения типа свертки $\int k(t-s)u_1(s)ds = u_2(t)$ относительно пары неизвестных функций u_1, u_2 в классе финитных непрерывно дифференцируемых функций при условии, что ядро $k(t)$ имеет преобразование Фурье $K(x) = \tilde{P}_2 / \tilde{P}_1$, где $\tilde{P}_1$ и $\tilde{P}_2$ – полиномы от экспоненты $e^{i\tau x}, \tau > 0$, с полиномиальными (от x) коэффициентами. Если функции $P_l(x) = \tilde{P}_l(e^{i\tau x}),\ l = 1;2$ не имеют общих нулей, то общее решение в преобразованиях Фурье имеет вид $U_l(x) = P_l(x)R(x),\ l = 1;2$, где $R(x)$ – преобразование Фурье произвольной финитной непрерывно дифференцируемой функции $r(t)$.

Рассматривается интегральное уравнение типа свертки:

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(t-s)\,u_1(s)\,ds = u_2(t) \tag{1}$$

относительно пары неизвестных финитных непрерывных функций u_1, u_2 [1, с. 288, 6] при условии, что преобразование Фурье $K(x)$ ядра $k(t)$ имеет вид отношения двух полиномов $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ от экспоненты $e^{i\tau x}$ с полиномиальными (от x) коэффициентами:

$$K(x) = \frac{P_2(x)}{P_1(x)} = \frac{\tilde{P}_2\left(e^{i\tau x}\right)}{\tilde{P}_1\left(e^{i\tau x}\right)} \quad . \tag{2}$$

Требуется описать все финитные непрерывные решения $u_1(t), u_2(t)$ при заданных полиномах $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$.

Т е о р е м а. *Если полиномы $\tilde{P}_1, \tilde{P}_2$ от экспоненты $e^{i\tau x}, \tau > 0$, с полиномиальными* (*от* x) *коэффициентами не имеют общих нулей в комплексной плоскости x, то в преобразованиях Фурье общее решение задачи* (1), (2) *имеет вид:*

$$U_l(x) = P_l(x)R(x), \qquad l = 1;2, \tag{3}$$

где $R(x)$ – преобразование Фурье произвольной финитной непрерывно дифференцируемой функции $r(t)$. *Порядок непрерывной дифференцируемости функции $r(t)$ определяется максимальной степенью указанных полиномиальных коэффициентов.*

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $U_1(x), U_2(x)$ – произвольное решение задачи (1), (2), т.е. $U_1(x), U_2(x)$ – преобразования Фурье (пр. Ф.) финитных функций $u_1(t),\ u_2(t)$, которые удовлетворяют интегральному уравнению (1) и, значит, выполняется равенство:

$$K(x)U_1(x) = U_2(x). \tag{4}$$

Из (2) и (4) получаем уравнение для U_1, U_2:

$$\frac{U_2(x)}{U_1(x)} = \frac{P_2(x)}{P_1(x)}. \tag{5}$$

Согласно теореме Винера-Пэли [2, с. 87], для финитных функций $u_1(t), u_2(t)$ пр. Ф. $U_1(x), U_2(x)$ являются целыми функциями экспоненциального типа (ЦФЭТ) такими, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| U_l(x) \right|^2 dx < \infty, \quad l = 1;2 .$$

Записывая (5) в виде:

$$U_2(x) = \frac{P_2(x)}{P_1(x)} U_1(x)$$

и учитывая, что $P_1(x), P_2(x)$ не имеют общих нулей, приходим к выводу о том, что каждый нуль $x = \xi_k$ функции $P_2(x)$ является нулем ЦФЭТ $U_2(x)$. При этом кратность нуля ξ_k функции $U_2(x)$ не ниже кратности нуля ξ_k функции $P_2(x)$. Поэтому в силу теоремы о разложении целой функции в бесконечное произведение, соответствующее её нулям [3,с.258], ЦФЭТ $U_2(x)$ можно представить в виде:

$$U_2(x) = P_2(x) R_2(x), \tag{6}$$

где мероморфная функция $R_2(x) = \dfrac{U_2(x)}{P_2(x)}$ [3,с.261] не имеет полюсов и, следовательно, является целой функцией. При этом она является ЦФЭТ в силу того, что определяется отношением двух ЦФЭТ, или потому, что показатель сходимости последовательности нулей целой функции $R(x)$ [4, с. 16], определяющий порядок и тип целой функции [4, с. 19], не может превышать показателя сходимости последовательности нулей ЦФЭТ $U_2(x)$, ибо первая последовательность получается из второй удалением части нулей.

Приведенные соображения применимы и к ЦФЭТ $U_1(x)$, поэтому её также можно представить в виде:

$$U_1(x) = P_1(x) R_1(x), \tag{7}$$

где $R_1(x)$ − ЦФЭТ. Подставляя (6) и (7) в (5), получим $R_2 = R_1 = R$, так что имеем:

$$U_l(x) = P_l(x) R(x), \qquad l = 1;2, \tag{8}$$

где $R(x)$ − ЦФЭТ.

Теперь нужно показать, что на вещественной оси выполняется неравенство:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |R(x)|^2 dx < \infty. \tag{9}$$

Из этого, согласно теореме Винера-Пэли, будет следовать финитность оригинала $r(t)$ для пр. Ф. $R(x)$. С целью проверки неравенства (9) достаточно использовать одно (любое) из равенств (8). Выберем одно из них и запишем его в виде:

$$U(x) = P(x) R(x). \tag{10}$$

Учитывая обозначения, использованные в определении (2), представим функцию $P(x)$ в следующей развернутой форме:

$$P(x) = \tilde{P}\left(e^{i\tau x}\right) = \sum_{\alpha=0}^{n} x^{\alpha} p_{\alpha}\left(e^{i\tau x}\right), \tag{11}$$

где p_{α} – полиномы от $e^{i\tau x}$ с постоянными коэффициентами. Поэтому они на вещественной оси представляют собой периодические функции с периодом $T = 2\pi/\tau$. При $x \to \infty$ в сумме (11) определяющим является член

$$x^n p_n\left(e^{i\tau x}\right) = x^n \prod_s \left(e^{i\tau x} - \lambda_s\right), \tag{12}$$

где λ_s – корни алгебраического уравнения

$$p_n(\lambda) = 0. \tag{13}$$

Если среди этих корней имеются корни с $|\lambda_\nu| = 1$, то выражение (12) на вещественной оси принимает нулевые значения. Причем каждому такому корню соответствует одна периодическая (с периодом T) последовательность нулей $\{x_k\}$ выражения (12).

Таким образом, на каждом периоде T вещественной оси выражение (12) имеет столько нулей, сколько имеется корней с $|\lambda_\nu| = 1$. Не ограничивая общности рассуждений будем рассматривать случай одной последовательности $\{x_k\}$ с однократными нулями, т.е. на каждом периоде T_k имеется один однократный нуль x_k.

Выберем некоторый период T_k при достаточно больших значениях x. Так как при $x \to \infty$ функция $P(x)$ приближается к $x^n p_n(x)$, то в малой окрестности точки x_k, лежащей на вещественной оси, имеется в общем случае комплексный нуль ξ_k функции $P(x)$, причем $\left|\xi_k - x_k\right| \to 0$ при увеличении x. Поэтому, если выбрать малое число $\rho << T$ и построить кружки радиуса ρ с центрами в точках ξ_k, то найдется такое достаточно большое число x_a, что на любом периоде T_k с $x_k > x_a$ все указанные кружки будут пересекаться с вещественной осью и содержать соответствую точку x_k.

Переходим к оценкам функций в построенных кружках для $x_k > x_a$ С целью упрощения построений будем предполагать, что нуль ξ_k - однократный, и для $P(x)$, и для $U(x)$. Так как $U(x)$ и $P(x)$ – ЦФЭТ, то в любой точке комплексной плоскости они могут быть разложены в сходящийся ряд Тейлора. Выполним это разложение для функции $U(x)$ в точке ξ_k:

$$U(x) = U'(\xi_k)\Delta x + U''(\xi_k)\frac{\Delta x^2}{2!} + \ldots = U'(\xi_k)\Delta x + \Delta x V(x),$$

где

$$\Delta x = x - \xi_k, \quad U'(\xi_k) \neq 0, \quad V(x) = U''(\xi_k)\frac{\Delta x}{2!} + U'''(\xi_k)\frac{\Delta x^2}{3!} + \ldots . \qquad (14)$$

С его помощью получаем следующие оценки:

$$|U(x)| = \left|U'(\xi_k)\Delta x + \Delta x V(x)\right| \le \left|U'(\xi_k)\right||\Delta x| + |\Delta x||V(x)| =$$

$$= \left|U'(\xi_k)\right||\Delta x|\left\{1 + \frac{|V(x)|}{\left|U'(\xi_k)\right|}\right\} \le \left|U'(\xi_k)\right||\Delta x| 2; \qquad (15)$$

$$|U(x)| = \left|U'(\xi_k)\Delta x + \Delta x V(x)\right| \ge \left|U'(\xi_k)\right||\Delta x| - |\Delta x||V(x)| =$$

$$= \left|U'(\xi_k)\right||\Delta x|\left\{1 - \frac{|V(x)|}{\left|U'(\xi_k)\right|}\right\} \ge \left|U'(\xi_k)\right||\Delta x|\frac{1}{2}. \qquad (16)$$

при достаточно малом $|\Delta x|$. Аналогично поступаем с ЦФЭТ $P(x)$ и получаем оценки:

$$\left|P'(\xi_k)\right||\Delta x|\frac{1}{2} \le |P(x)| \le \left|P'(\xi_k)\right||\Delta x| 2. \qquad (17)$$

Так как производная от ЦФЭТ – также ЦФЭТ, то для производной $U'(x)$ (которая в точке ξ_k не равна нулю, см. (14)) имеем

$$U'(x)=U'(\xi_k)+U''(\xi_k)\Delta x+U'''(\xi_k)\frac{\Delta x^2}{2!}+\ldots=U'(\xi_k)+\Delta xW(x),$$

где
$$W(x)=U''(\xi_k)+U'''(\xi_k)\frac{\Delta x}{2!}+\ldots,$$

поэтому

$$|U'(x)|=|U'(\xi_k)+\Delta xW(x)|\geq|U'(\xi_k)|-|\Delta x||W(x)|=$$

$$=|U'(\xi_k)|\left\{1-|\Delta x|\frac{|W(x)|}{|U'(\xi_k)|}\right\}\geq|U'(\xi_k)|\frac{1}{2} \tag{18}$$

при достаточно малом $|\Delta x|$.

Аналогично поступаем с $P'(x)$ и получаем оценку: $|P'(x)|\leq|P'(\xi_k)|2$ в круге $|\Delta x|=|x-\xi_k|<\rho$ при достаточно малом ρ. Так как точка x_k принадлежит этому кругу, то справедлива оценка:

$$|P'(\xi_k)|\geq\frac{1}{2}\cdot|P'(x_k)| \tag{19}$$

при достаточно малом ρ.

Пусть число ρ выбрано так, что в каждом круге $|\Delta x|=|x-\xi_k|<\rho$ при $\operatorname{Re}x>x_a$ выполняются оценки (15) – (17), (18), (19). Тогда с учетом (10) будем иметь:

$$|U'(\xi_k)||\Delta x|2\geq|U(x)|=|P(x)||R(x)|\geq|P'(\xi_k)||\Delta x|\frac{1}{2}|R(x)|,$$

или

$$|R(x)|\leq\frac{4}{|P'(\xi_k)|}|U'(\xi_k)|\leq\frac{8}{|P'(\xi_k)|}|U'(x)|\leq\frac{16}{|P'(x_k)|}|U'(x)| \tag{20}$$

для любых точек из круга $|x-\xi_k|<\rho$, в частности, для точек пересечения этого круга с вещественной осью.

В оценке (20) коэффициент перед $|U'(x)|$ зависит от x_k. Этот недостаток можно устранить, оценив снизу $|P'(x_k)|$ через модуль полинома от экспоненты $p_n'(e^{i\tau x_k})$, значение которого одно и тоже в любой вещественной точке x_k благодаря периодичности функции $p_n(e^{i\tau x})$ на вещественной оси. Кроме того, нужно учесть, что $p_n'\left(e^{i\tau x_k}\right) \neq 0$ в силу предположения об однократности корней x_k уравнения $p_n\left(e^{i\tau x}\right) = 0$, см. (12),(13).

Итак, представим сумму (11) в виде:

$$P(x) = \sum_{\alpha=0}^{n} x^\alpha p_\alpha\left(e^{i\tau x}\right) = x^n p_n\left(e^{i\tau x}\right) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} x^\alpha p_\alpha\left(e^{i\tau x}\right). \tag{21}$$

Дифференцируя по x и подставляя $x = x_k$ получим:

$$P'\left(x_k\right) = n x_k^{\ n-1} p_n\left(e^{i\tau x_k}\right) + x_k^{\ n} p_n'\left(e^{i\tau x_k}\right) i\tau + \sum_{\alpha=0}^{n-1}\left[\alpha x_k^{\ \alpha-1} p_\alpha\left(e^{i\tau x_k}\right) + x_k^{\ \alpha} p_\alpha'\left(e^{i\tau x_k}\right) i\tau\right] =$$

$$= x_k^{\ n}\left\{ p_n'\left(e^{i\tau x_k}\right) i\tau + \frac{1}{x_k}\left[n p_n\left(e^{i\tau x_k}\right) + \sum_{\alpha=0}^{n-1}\left(x_k^{\ \alpha-(n-1)} p_\alpha'\left(e^{i\tau x_k}\right) i\tau + \alpha x_k^{\ \alpha-n} p_\alpha\left(e^{i\tau x_k}\right)\right)\right]\right\}.$$

Все входящие в это выражение полиномы p_α, p_α' являются непрерывными периодическими функциями, поэтому они ограничены по модулю. Но тогда ограничено по модулю и все выражение в квадратных скобках, благодаря чему для достаточно больших x_k получаем оценку снизу:

$$\left|P'\left(x_k\right)\right| \geq x_k^n \left|p_n'\left(e^{i\tau x_k}\right)\right| \tau \frac{1}{2}.$$

Используя это неравенство в (20), приходим к следующей оценке для $R(x)$:

$$\left|R(x)\right| \leq \frac{32\left|U'(x)\right|}{\left|p_n'\left(e^{i\tau x_k}\right)\right| \tau x_k^n} \leq \left|U'(x)\right| \tag{22}$$

при достаточно малых ρ больших x_a.

Переходим к оценке интеграла от $\left|R(x)\right|^2$ на полуоси $\left(x_a, \infty\right)$, где x_a удовлетворяет всем перечисленным выше требованиям по увеличению используемых значений x_k. Для каждого $k = 1,2,\ldots$ период T_k разбиваем на две части: $T_k = \Delta_k \bigcup \Delta_k'$, где Δ_k – открытая окрестность точки x_k, образованная пересечением с вещественной осью кружка $\left|x - \xi_k\right| < \rho$, а замкнутый отрезок Δ_k' состоит из всех точек периода T_k, не вошедших в Δ_k. Строим функцию $f(x)$, определенную на полуоси $\left(x_a, \infty\right)$ следующим образом: $f(x) = \begin{cases} \left|R(x)\right|^2, & x \in \Delta_k, \\ 0, & x \in \Delta_k', \end{cases} \quad k = 1,2,\ldots.$

Тогда, в силу (22), будем иметь:

$$\int\limits_{x_a}^{\infty} f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta_k}|R(x)|^2 dx \le \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta_k}|U'(x)|^2 dx \le \sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{\Delta_k}|U'(x)|^2 dx + \int\limits_{\Delta'_k}|U'(x)|^2 dx\right\} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{T_k}|U'(x)|^2 dx = \int\limits_{x_a}^{\infty}|U'(x)|^2 dx. \qquad (23)$$

Теперь учтем известное свойство преобразования Фурье [5,с. 16.]: если $F(x)$ – пр. Ф. функции $f(t)$, то $F'(x)$ есть умноженное на i пр.Ф. функции $tf(t)$. Поэтому в оценке (23) производная $U'(x)$ является умноженным на i пр.Ф. финитной функции $tu(t)$ и, значит, согласно теореме Винера-Пэли интеграл от $|U'(x)|^2$ на вещественной оси сходится. Следовательно, сходится и интеграл на полуоси (x_a,∞), поэтому

$$\int\limits_{x_a}^{\infty} f(x)dx \le \int\limits_{x_a}^{\infty}|U'(x)|^2 dx = c_f < \infty. \qquad (24)$$

Введём функцию $\quad g(x) = \begin{cases} 0, & x \in \Delta_k, \\ |R(x)|^2, & x \in \Delta'_k, \end{cases} \qquad k = 1,2...$

которая в сумме с $f(x)$ дает $|R(x)|^2$ на полуоси (x_a,∞). С целью получения оценки интеграла от $g(x)$ на этой полуоси используем для функции $P(x)$следующее представление, см. (21):

$$P(x) = x^n p_n\left(e^{i\tau x}\right) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} x^{\alpha} p_{\alpha}\left(e^{i\tau x}\right) = x^n\left\{p_n\left(e^{i\tau x}\right) + \frac{1}{x}\sum_{\alpha=0}^{n-1} x^{\alpha-(n-1)} p_{\alpha}\left(e^{i\tau x}\right)\right\},$$

согласно которому

$$|P(x)| \ge x^n\left|p_n\left(e^{i\tau x}\right)\right|\frac{1}{2}$$

при достаточно больших x, поэтому

$$|U(x)| = |P(x)||R(x)| \ge x^n\left|p_n\left(e^{i\tau x}\right)\right|\frac{1}{2}|R(x)|, \qquad (25)$$

где $\left|p_n\left(e^{i\tau x}\right)\right|$ – периодическая непрерывная функция, которая не обращается в нуль на замкнутых отрезках Δ'_k. Следовательно, на каждом отрезке Δ'_k существует положительный минимум этой функции. В силу периодичности функции

$\left|p_n\left(e^{i\tau x}\right)\right|$ и благодаря тому, что длины отрезков Δ'_k при $k\to\infty$ стремятся к пределу $T-2\rho$, существует конечная нижняя грань $B>0$ для последовательности минимумов этой функции на отрезках Δ'_k. Поэтому имеем оценку:

$$\left|p_n\left(e^{i\tau x}\right)\right|\geq B$$

на каждом отрезке Δ'_k и согласно (25) получаем:

$$|R(x)|\leq\frac{2}{x^n\left|p_n\left(e^{i\tau x}\right)\right|}|U(x)|\leq\frac{2}{x^n B}|U(x)|\leq|U(x)|$$

при достаточно большом x_a. Используя эту оценку, приходим к следующему результату:

$$\int\limits_{x_a}^{\infty}g(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta'_k}|R(x)|^2dx\leq\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{\Delta'_k}|U(x)|^2dx\leq\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\int\limits_{\Delta'_k}|U(x)|^2dx+\int\limits_{\Delta'_k}|U(x)|^2dx\right\}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{T_r}|U(x)|^2dx=\int\limits_{x_a}^{\infty}|U(x)|^2dx=c_g<\infty \qquad (26)$$

в силу финитности оригинала $u(t)$ для пр. Ф. $U(x)$.

Теперь из оценок (24), (26), с учетом равенства

$$f(x)+g(x)=|R(x)|^2,$$

справедливого на всей полуоси (x_a,∞), получаем

$$\int\limits_{x_a}^{\infty}|R(x)|^2dx=\int\limits_{x_a}^{\infty}[f(x)+g(x)]dx\leq\int\limits_{x_a}^{\infty}f(x)dx+\int\limits_{x_a}^{\infty}g(x)dx=c_f+c_g<\infty.$$

Приведенные построения остаются в силе и для отрицательной полуоси $(-\infty,-x_a)$, поэтому имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}|R(x)|^2dx=\int\limits_{-\infty}^{-x_a}|R(x)|^2dx+\int\limits_{-x_a}^{x_a}|R(x)|^2dx+\int\limits_{x_a}^{\infty}|R(x)|^2dx<\infty.$$

Следовательно, функция $r(t)$ - оригинал для пр. Ф. $R(x)$– финитная. Терема доказана.

Замечание. В приведенной выше теореме требование отсутствия общих нулей у полиномов $\tilde{P}_1\left(e^{i\tau x}\right),\tilde{P}_2\left(e^{i\tau x}\right)$ является существенным. Если имеются общие нули, то формулы (3) могут описывать не все решения задачи (1),(2).

Например [6], если

$$P_1(x)=(-ix)(e^{ix}+1), \qquad P_2(x)=e^{ix}-1,$$

то имеется один общий нуль $x=0$. Составляем уравнение:

$$\frac{U_2}{U_1}=\frac{P_2}{P_1}=\frac{e^{ix}-1}{(-ix)(e^{ix}+1)}$$

и строим формально общее решение согласно (3):

$$U_1=P_1R, \qquad\qquad U_2=P_2R, \tag{27}$$

где $R=R(x)$ – пр.Ф. произвольной финитной непрерывно дифференцируемой функции $r(t)$. Вводим новые неизвестные функции:

$$\tilde{U}_1=U_1 \quad \tilde{U}_2=-ix\cdot U_2, \tag{28}$$

которые удовлетворяют уравнению:

$$\frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}_1}=\frac{e^{ix}-1}{e^{ix}+1}=\frac{P_2^*}{P_1^*} \tag{29}$$

с полиномами от экспоненты e^{ix}:

$$P_1^*=e^{ix}+1=\frac{P_1(x)}{-ix}, \qquad\qquad P_2^*=e^{ix}-1=P_2(x), \tag{30}$$

не имеющими общих нулей. Согласно приведенной теореме общее решение уравнения (29) описывается формулами:

$$\tilde{U}_1=P_1^*(x)\tilde{R}(x), \qquad \tilde{U}_2=P_2^*(x)\tilde{R}(x), \tag{31}$$

где $\tilde{R}(x)$ – пр.Ф. произвольной финитной непрерывной функции $\tilde{r}(t)$. Зафиксируем, выбранную произвольно, непрерывную финитную функцию $\tilde{r}(t)$ и вычислим пр. Ф. от неё. Получим ЦФЭТ $\tilde{R}(x)$ с интегрируемым квадратом модуля. Подставив $\tilde{R}(x)$ в (31), получим решение $\tilde{U}_1,\tilde{U}_2$ уравнения (29). Теперь попытаемся построить решение U_1,U_2, соответствующее решению $\tilde{U}_1,\tilde{U}_2$. Для этого нужно найти соответствующую функцию $R(x)$ согласно формулам (27). Эта функция должна быть ЦФЭТ и иметь интегрируемый квадрат модуля. Подставляя (27), (31) в ()28 и учитывая (30), получим выражение $R(x)=\dfrac{\tilde{R}(x)}{-ix}$, из которого следует, что целой функции $\tilde{R}(x)$ можно сопоставить целую функцию $R(x)$ лишь в том случае, когда $\tilde{R}(0)=0$. Но ЦФЭТ $\tilde{R}(x)$ могут не обладать таким свойством, следовательно, формулы (27) описывают лишь небольшую часть множества всех решений, представляемых формулами (31).

Отметим, что когда $\tilde{R}(0) \neq 0$, функция $u_2(t)$ согласно (28) вычисляются интегрированием функции $\tilde{u}_2(t)$.

Список литературы

1. Хургин Я. И., Яковлев В.П. Финитные функции в физике и технике. М., 1971.
2. Ахиезер Н.И., Лекции об интегральных преобразованиях. Харьков, 1984.
3. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. М., 1976.
4. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. М., 1983.
5. Гахов Ф. Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. М., 1978.
6. Гунько О.В., Сулима В.В. Об одном способе решения уравнения типа свертки с помощью разностных уравнений // Дифференц. уравнения. 2011. Т.47. №6. С.885-888.

Главному редактору журнала
«Дифференциальные уравнения»
В.А.Ильину
Республика Беларусь, 220072, г. Минск,
Ул. Сурганова, 11.

Направляю Вам рукопись статьи доцента кафедры высшей математики Харьковского национального университета О.В.Гунько для возможного опубликования в журнале «Дифференциальные уравнения».

Приложения:

1. Рукопись статьи на 11 листах – 2 экз.
2. Экспертное заключение на 1 листе.
3. Выписка из заседания кафедры на 1 листе.
4. Карточка автора – 1 экз.

Заведующий кафедрой
высшей математики
и экономико-математических методов
доктор экономических наук,
профессор Л.М. Малярец

Выписка

из протокола № 12 заседания кафедры высшей математики
и экономико-математических методов
Харьковского национального экономического университета
имени Семёна Кузнеца
от 01.07.2014

С Л У Ш А Л И:

О рекомендации к печати статьи Гунько О.В., Сулимы В.В. «Общее финитное решение одного интегрального уравнения типа свертки» в журнале «Дифференциальные уравнения».

П О С Т А Н О В И Л И:

Рекомендовать опубликовать статью Гунько О.В., Сулимы В.В. «Общее финитное решение одного интегрального уравнения типа свертки» в журнале «Дифференциальные уравнения».

Заведующий кафедрой
высшей математики
и экономико-математических методов
доктор экономических наук,
профессор Л.М. Малярец

Утверждаю
Ректор Харьковского национального
экономического университета
имени Семёна Кузнеца
Пономаренко В.С.

«-----------»-----------------------2014г.

ЭКСПЕРТНОЕ ЗАКЛЮЧЕНИЕ
О ВОЗМОЖНОСТИ ОПУБЛИКОВАНИЯ

Экспертная комиссия Харьковского национального экономического университета имени Семёна Кузнеца Министерства образования и науки Украины, рассмотрев статью Гунько О.В., Сулимы В.В. «Общее финитное решение одного интегрального уравнения типа свертки» подтверждает, что в материале общим объемом 11 страниц, не содержатся сведения, предусмотренные разделом 3 Положения – 88.

На публикацию материала не следует получать разрешения Министерства образования и науки Украины.

Заключение: рассмотренные материалы могут быть опубликованы в открытой печати, поскольку имеют научное и практическое значение и не содержат сведений, противоречащих вышеуказанному положению.

Председатель комиссии,
декан факультета учета и аудита,
кандидат экономических наук,
доцент Азаренков Г.Ф.

Карточка автора

Фамилия, имя, отчество	Гунько Ольга Владимировна
Дата рождения	23 ноября 1961 г.
Место работы	ХНЭУ
Занимаемая должность	доцент
Ученое звание и степень	Канд. Ф.-м. наук, доцент
Служебный адрес	Г. Харьков, пр. Ленина, 9-а
Служебный телефон	702-04-05
Домашний адрес	61023,Харьков, ул.Сумская,77/79, кв. 154
Электронный адрес	GUNKO-OLGA@lenta.ru
факс	
Основные направления научной деятельности	Математические модели физических процессов

Фамилия, имя, отчество	Сулима Владислав Витальевич
Дата рождения	15 марта 1965 г.
Место работы	Радмир ДП АО НИИРИ
Занимаемая должность	Ведущий инженер-электрик
Ученое звание и степень	
Служебный адрес	Г. Харьков, ул. Ак. Павлова, 271
Служебный телефон	(057)717-28-79
Домашний адрес	Харьков, ул.Тобольская,50, кв. 12
Электронный адрес	VERGUBRET@yandex.ru
факс	
Основные направления научной деятельности	Математические модели физических процессов