

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ**

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи з теми
"Елементи матричного аналізу"
навчальної дисципліни
"МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ"
для студентів галузі знань 0305
"Економіка та підприємництво"
всіх форм навчання**

Харків. Вид. ХНЕУ, 2012

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.

Протокол № 9 від 04.04.2012 р.

Укладач Титарев В. Г.

М54 Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Елементи матричного аналізу" навчальної дисципліни "Математика для економістів" для студентів галузі знань 0305 "Економіка та підприємництво" всіх форм навчання / укл. Титарев В. Г. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 60 с. (Укр. мов.)

Подано методичні рекомендації та завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни, де розглянуто основні поняття лінійного простору, структури лінійного перетворення, проблеми діагоналізації, основні поняття теорії квадратичних форм, а також наведено розв'язання типових прикладів, які можуть застосовуватися на практичних заняттях.

Рекомендовано для студентів галузі знань 0305 "Економіка та підприємництво".

Вступ

Розвиток наукових досліджень та широке впровадження їх у виробництво, насичення виробництва високими технологіями, впровадження інформаційних технологій, інформатизація майже всіх видів людської діяльності, її використання в поєднанні з ґрунтовним економічним аналізом відкриває нові можливості для економічної науки і практики. У зв'язку з цим зростає роль математичної підготовки економістів, їх уміння застосовувати математичне моделювання в економічних дослідженнях.

Усе це зумовлює важливість і необхідність вивчення навчальної дисципліни "Математика для економістів" – вивчення в систематизованій формі та активне застосування її основних методів у економічних дослідженнях. Математичні методи стали складовою частиною методів будь-якої економічної науки. Їх використання в поєднанні з ґрунтовним економічним аналізом відкриває нові можливості для економічної науки і практики.

Основна мета викладання дисципліни складається з формування у майбутніх економістів знань та навичок розробки математичних моделей, вивчення в систематизованій формі та активне застосування основних методів у економічних дослідженнях.

Основними завданнями навчальної дисципліни щодо теми "Елементи матричного аналізу" є оволодіння студентами апаратом матричної та векторної алгебри, який є найбільш прийнятний у математичному моделюванні, усвідомити основні поняття, пов'язані з лінійним (векторним) простором, лінійним оператором у цьому просторі, його структурою та вміти використовувати їх у прикладних дослідженнях економічного характеру. Тема № 3 "Елементи матричного аналізу" входить до змістовного модуля № 1 "Лінійна алгебра. Аналітична геометрія".

Отримані студентами знання з теми "Елементи матричного аналізу" утворюють фундамент для вивчення методів багатовимірного статистичного аналізу, є основою для подальшого вивчення таких навчальних дисциплін, як "Теорія ймовірності та математична статистика", "Дискретний аналіз", "Економіко-математичне моделювання" та ряду спеціальних дисциплін, пов'язаних з дослідженням операцій.

Під час укладання рекомендацій було враховано принципи підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з підсиленням її прикладної економічної спрямованості. Тому наданий матеріал проілюстровано багатьма прикладами, які допоможуть у засвоєнні навчальної дисципліни і сприятимуть набуттю вмінь і навичок у самостійному розв'язанні конкретних задач.

Методичні рекомендації допоможуть студентам оволодіти методикою розв'язання практичних задач, допоможуть також набути певних компетенцій, активізують їх самостійну роботу та сприятимуть підвищенню фундаментальної підготовки з даного курсу.

Методичні рекомендації укладено відповідно до вимог державних стандартів Міністерства освіти і науки, молоді та спорту України в галузі математики та згідно з робочою програмою навчальної дисципліни.

Тема 3. Елементи матричного аналізу

3.1. Лінійний (векторний) простір

Означення. Множина елементів R довільної природи називається лінійним (векторним) простором, якщо $\forall \mathbf{x} \in R, \forall \mathbf{y} \in R \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{y} \in R, \forall \lambda \in R^1$ (R^1 – множина дійсних чисел) $\Rightarrow \lambda \mathbf{x} \in R$, тобто множина R замкнена відносно операцій додавання векторів та множення вектора на число.

Вказані операції задовольняють таким властивостям:

- 1) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$ – комутативність, $\forall \mathbf{x} \in R, \forall \mathbf{y} \in R$;
- 2) $(\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = \mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z}$ – асоціативність, $\forall \mathbf{x} \in R, \forall \mathbf{y} \in R, \forall \mathbf{z} \in R$;
- 3) $\exists \mathbf{0} \Rightarrow \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in R$ – елемент $\mathbf{0}$ називається нуль-вектором;
- 4) $\forall \mathbf{x} \in R, \exists (-\mathbf{x}) \in R \Rightarrow \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ – елемент $(-\mathbf{x})$ називається протилежним відносно елемента $\mathbf{x}$;
- 5) $1\mathbf{x} = \mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in R$;
- 6) $\lambda(\mu\mathbf{x}) = (\lambda\mu)\mathbf{x} = \mu(\lambda\mathbf{x}), \forall \mathbf{x} \in R, \forall \lambda, \mu \in R^1$ – комутативність відносно добутку дійсних чисел;
- 7) $(\lambda + \mu)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{x}, \forall \mathbf{x} \in R, \forall \lambda, \mu \in R^1$ – дистрибутивність відносно суми двох дійсних чисел;
- 8) $\lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y}, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in R, \forall \lambda \in R^1$ – дистрибутивність відносно суми двох елементів лінійного простору.

Означення. Елементи лінійного (векторного) простору R називаються векторами.

Означення. Вектори $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \dots, \mathbf{a}_n$ лінійного простору R називаються лінійно незалежними векторами, якщо лінійна комбінація цих векторів

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_{n-1} \mathbf{a}_{n-1} + \lambda_n \mathbf{a}_n = \mathbf{0},$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ – дійсні числа, виконується тоді і тільки тоді, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_{n-1} = \lambda_n = 0$.

Означення. Лінійний простір R називається n -вимірним, якщо в ньому можна вказати n лінійно незалежних векторів, а будь-які $n+1$ вектори лінійно залежні. Позначається n -вимірний лінійний простір R^n , а вимір R^n d , або $\dim(R^n)$. Отже, $d = \dim(R^n)$.

Означення. Сукупність n лінійно незалежних векторів n вимірного простору R^n називається його базисом.

Теорема. Кожний вектор x лінійного n -вимірного простору R^n можна представити, і притому єдиним чином, у вигляді лінійної комбінації векторів базиса.

Доведення. Нехай $\{e_i\}$, $i = 1 \div n$ – довільний базис лінійного n -вимірного простору R^n і $\forall x \in R^n$. Оскільки кожні $n+1$ векторів (n -вимірного) простору R^n лінійно залежні, то залежними частково є вектори $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n, x$, тобто існують такі нерівні одночасно нулю числа $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n, \alpha$, що $\alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \dots + \alpha_n e_n + \alpha x = 0$. При цьому $\alpha \neq 0$, оскільки в іншому випадку одне з чисел $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_n$ було б відмінне від нуля, а це означає, що вектори $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ були б лінійно залежними. Таким чином, $x = -\alpha_1/\alpha e_1 - \alpha_2/\alpha e_2 - \dots - \alpha_n/\alpha e_n$.

Поклавши $x_i = -\alpha_i/\alpha$, будемо мати $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$.

Цей розклад єдиний. Доведемо це. Припустимо, що існує інший розклад вектора x по векторам базиса $x = y_1 e_1 + y_2 e_2 + \dots + y_n e_n$. Віднявши від лівої і правої частини першого розкладу ліву і праву частини другого розкладу отримаємо:

$$x - x = (x_1 - y_1)e_1 + (x_2 - y_2)e_2 + \dots + (x_n - y_n)e_n = 0.$$

Оскільки вектори $e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ є лінійно незалежними, то $x_i - y_i = 0$, або $x_i = y_i$, $i = 1 \div n$.

Нехай $\{e_i\}$, $i=1 \div n$ деякий базис лінійного простору R^n . Довільний вектор $x \in R^n$ можна розкласти єдиним чином по векторам базиса $\{e_i\}$:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i \quad (3.1)$$

Коефіцієнти розкладу $x_1, x_2, \dots, x_n$ називаються координатами вектора x у базисі $\{e_i\}$, $i=1 \div n$. Вектор x можна записати у вигляді $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$. Кожному вектору $x \in R^n$ також можна також поставити у відповідність мат-рицю-стовпець n -го порядку:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

Множина всіх матриць стовпців n -го порядку також утворює

риці-стовпця на дійсне число. Причому існує взаємно однозначна відпо-відність між елементами цих лінійних просторів $x \Leftrightarrow X$. Такі лінійні прос-тори в сенсі відповідних операцій лінійної алгебри однакові і мають назву ізоморфних лінійних просторів. Вони мають однаковий устрій в сенсі вве-дених операцій над елементами. Отже вектори лінійного простору і мат-риці-стовпці, утворені з координат цих векторів далі будемо ототожню-вати.

У нульового вектора всі координати рівні нулю, тобто $\mathbf{0} = (0, 0, \dots, 0)$, а у протилежного вектора координати є $-\mathbf{x} = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$.

Припустимо, що в лінійному просторі R^n є два базиси $\{\mathbf{e}_i\}$ та $\{\mathbf{e}_j'\}$, $i, j = 1 \div n$. Перший базис назвемо початковим (старим) базисом, другий — новим базисом. Кожний вектор $\mathbf{e}_j' \in R^n$ нового базису можна розкласти єдиним чином по векторам старого базису $\{\mathbf{e}_i\}$:

7

Матрицею переходу від базиса $\{e_i\}$ до базиса $\{e'_j\}$, $i, j = 1 \div n$ є матриця

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \dots & t_{1k} & \dots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \dots & t_{2k} & \dots & t_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & t_{n2} & \dots & t_{nk} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, \quad (3.4)$$

к стовпець якої є стовпцем координат вектора e'_k в старому базисі:

$$E_k = \begin{pmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \dots \\ t_{nk} \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці T , тобто $|T| \neq 0$, оскільки в інакшому випадку її стовпці, а отже, і вектори $\{e'_j\}$, $j = 1 \div n$ були б лінійно залежні.

Правильне й зворотне твердження, якщо $|T| \neq 0$, то стовпці матриці T лінійно незалежні, отже вектори $\{e'_j\}$, $j = 1 \div n$, отримані з векторів $\{e_i\}$, $i = 1 \div n$ за допомогою матриці T – лінійно незалежні, тобто утворюють базис. Отже, матрицею переходу може бути довільна квадратна не вироджена матриця n -го порядку, тобто матриця з відмінним від нуля визначником.

Визначимо, як пов'язані між собою координати одного і того ж само-го вектора $x \in R^n$ у старому і новому базисах. Для цього запишемо розклад вектора x в старому та новому базисах:

$$x = \sum_{i=1}^n x_i e_i = \sum_{j=1}^n x'_j e'_j, \text{ оскільки } e'_j = \sum_{i=1}^n t_{ij} e_i. \quad (3.5)$$

Підставивши розклад векторів нового базиса через вектори старого базиса, та в силу єдності розкладу вектора, прирівнявши коефіцієнти при векторах e_i , $i=1 \div n$ отримаємо $x_i = \sum t_{ij} x'_j$, та в матричній формі $X = TX'$ або $X' = T^{-1}X$, де T^{-1} – зворотна відносно T матриця.

Ми бачимо, що формули перетворення координат вектора при переході до нового базиса здійснюються з допомогою тієї ж самої матриці T , тільки коефіцієнти відповідних розкладів утворюють рядки цієї матриці.

Припустимо, що в лінійному просторі $\mathbf{x} \in R^n$ зафіксовано деякий базис $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div n$. Кожний розв'язок системи (3.6) можна розглядати, як вектор простору $\mathbf{x} \in R^n$. У даному базисі $\{\mathbf{e}_i\}$ вектор $\mathbf{x}$ має вигляд матриці-стовпця:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Оскільки, не кожний $\mathbf{x} \in R^n$ є розв'язком системи (3.6), усі розв'язки системи утворюють деякий лінійний напівпростір лінійного простору R^n .

Систему (3.6) можна записати у матричному вигляді $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, де A є прямокутною матрицею розміру $m \times n$ (m – кількість рівнянь системи, n – кількість невідомих):

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Із властивостей розв'язку системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь випливає, що якщо $A\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}$ та $A\mathbf{x}_2 = \mathbf{0}$ то $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in R^1 \Rightarrow A(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \mathbf{0}$.

Тривіальний розв'язок завжди є розв'язком системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь. Отже, множина розв'язків системи (3.6) утворює лінійний напівпростір простору R^n . Фактично, це є вимір **ФСР** (фундаментальної системи розв'язків) системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь. **ФСР** фактично утворює базис у напівпросторі розв'язків системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь. Вимір цього напівпростору, як було з'ясовано при побудові **ФСР**, є $k = n - r$, де $r = \text{rang}(A)$. Отже, простір розв'язків $R^k \subseteq R^n$ є лінійним напівпростом простору R^n в якому розглядається ця система лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь. Базисом у R^k є будь-яка **ФСР** системи (3.6).

Приклад 3 Розглянемо систему лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

або в матричній формі $Ax = 0$, де $x \in R^3$, A – квадратна матриця третього порядку. Розглянемо різні випадки напівпростору розв'язків:

1) нехай $r = \text{rang}(A) = 3$, тоді $k = n - r = 3 - 3 = 0$. Вимір **ФСР** дорівнює нулю. Розв'язок системи (3.7) єдиний, тривіальний. Але 0 -вектор є лінійний напівпростір у R^3 . Три площини перетинаються в одній точці $M_0(0,0,0) \in R^3$;

2) нехай $r = \text{rang}(A) = 2$, тоді $k = n - r = 3 - 2 = 1$. Вимір **ФСР** дорівнює 1. Базис – це один розв'язок. **ФСР** – це довільний вектор прямої по якій перетинаються дві не паралельні площини, що описуються двома лінійно незалежними рівняннями системи (3.7). Розв'язок системи – одновимірний напівпростір: $R^k = R^1 \subseteq R^3$.

Зауваження. Два лінійно незалежні рівняння системи (3.7) становить загальне рівняння прямої у тривимірному просторі і, оскільки рівняння однорідні, пряма проходить через початок системи координат;

3) нехай $r = \text{rang}(A) = 1$, тоді $k = n - r = 3 - 1 = 2$. Вимір **ФСР** дорівнює 2. Базис – це два розв'язки. **ФСР** – це площина, що описуються одним лінійно незалежним рівнянням системи (3.7). Розв'язок системи – двовимірний напівпростір: $R^k = R^2 \subseteq R^3$.

Приклад 4 Знайти який-небудь базис та визначити вимірність лінійного простору розв'язків системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

Базисом лінійного простору розв'язків системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь є **ФСР**, вимірність лінійного простору розв'язків $k = \dim(R) = n - r(A)$, де $r(A) = \text{rang}(A)$, A -матриця системи, $n = \dim(R^n) = 4$. Знайдемо ранг матриці A :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Отже, $r(A) = 2$, $\kappa = \dim(R) = n - r(A) = 4 - 2 = 2$ – вимірність простору розв'язків. Побудуємо **ФСР**. Оскільки ми здійснювали еквівалентні перетворення виключно над рядками, остання матриця в рядку перетворень є матрицею рівносильної системи (відносно початкової), отже, $x_1 = 0$; $x_2 = x_3 - x_4$, змінні x_3, x_4 будемо вважати вільними, а x_1, x_2 – базисними:

- 1) $x_3 = 1; x_4 = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = 1$;
- 2) $x_3 = 0; x_4 = 1 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -1$.

Отже, вектори, що утворюють базис $(E_1, E_2) \in R^2$ лінійного напівпростору розв'язків системи лінійних алгебраїчних однорідних рівнянь, мають вигляд

$$E_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad E_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3.3. Евклідовий простір

Нехай R^n – n -вимірний лінійний простір. Введемо в R^n метрику, тобто спосіб виміру довжини відрізка та спосіб виміру кута. Скористаємося для цього скалярним добутком, який ми ввели в R^2 та R^3 . Узагальнимо це поняття на випадок R^n .

Для " $\mathbf{x} \in R^n$ ", " $\mathbf{y} \in R^n \Rightarrow (\mathbf{x}\mathbf{y}) \in R^1$ ". (R^1 – множина дійсних чисел).

Скалярний добуток двох векторів має такі властивості:

- 1) $(\mathbf{x}\mathbf{y}) = (\mathbf{y}\mathbf{x})$ – комутативність;
- 2) " $\lambda \in R^1$ ", $\lambda(\mathbf{x}\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x}\mathbf{y}) = (\mathbf{x}\lambda\mathbf{y})$ – асоціативність скалярного добутку на дійсне число;
- 3) $(\mathbf{x} + \mathbf{y})\mathbf{z} = (\mathbf{x}\mathbf{z}) + (\mathbf{y}\mathbf{z})$ – дистрибутивність скалярного добутку відносно додавання векторів;

4) " $\mathbf{x} \in R^n$, $(\mathbf{x}\mathbf{x}) \geq 0$, якщо $(\mathbf{x}\mathbf{x}) = 0 \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{0}$ – додатність скалярного добутку вектора $\mathbf{x}$ на самого себе.

Означення. Лінійний n -вимірний простір R^n , в якому визначено скалярний добуток двох векторів, який задовольняє умовам (1) ÷ (4) називається евклідовим простором.

Зауваження. R^1 , R^2 та R^3 в яких введено скалярний добуток двох векторів є евклідовими просторами.

Означення. Довжиною або модулем вектора $\mathbf{x}$ в евклідовому просторі R^n називається корінь квадратний із скалярного квадрата

$$|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}\mathbf{x})^{1/2} = \sqrt{(\mathbf{x}\mathbf{x})}. \quad (3.8)$$

Кут між векторами $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ визначається співвідношенням

$$\cos \varphi = (\mathbf{x}\mathbf{y}) / (|\mathbf{x}||\mathbf{y}|). \quad (3.9)$$

Означення. Вектори $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in R^n$ називаються ортогональними, якщо їх скалярний добуток дорівнює нулю, тобто $(\mathbf{x}\mathbf{y}) = 0$.

Означення. Вектор $\mathbf{x} \in R^n$ називається одиничним вектором, якщо його довжина дорівнює одиниці, тобто $|\mathbf{x}| = (\mathbf{x}\mathbf{x})^{1/2} = \sqrt{(\mathbf{x}\mathbf{x})} = 1$. (3.10)

Означення. Базис $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div n$, де $\mathbf{e}_i \in R^n$ називається ортонормованим базисом, якщо скалярний добуток цих векторів дорівнює нулю, тобто $(\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j) = 0$, а довжини векторів дорівнюють одиниці $|\mathbf{e}_i| = 1$. (3.11)

3.4. Лінійне перетворення та його матриця

Нехай R^n – n -вимірний лінійний простір. Якщо будь-якому вектору $\mathbf{x}$, який належить цьому простору $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$, за допомогою певного правила ставиться у відповідність вектор $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T \in R^n$, то говорять, що задано перетворення A :

$$R^n \xrightarrow{A} R^n, \text{ або } \mathbf{y} = A\mathbf{x}. \quad (3.12)$$

Вектор $\mathbf{y}$ називають образом вектора $\mathbf{x}$ при дії перетворення A , а вектор $\mathbf{x}$ – прообразом вектора $\mathbf{y}$ при дії перетворення A .

Означення. Перетворення A називається лінійним перетворенням, якщо для довільних векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ n -вимірного лінійного простору та будь-яких сталих $\forall \alpha_1, \alpha_2$ виконується:

(3.15)

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x} = A\left(\sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n x_i A\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j \quad \text{де} \quad A\mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j.$$
$$\mathbf{y} = \sum_{j=1}^n y_j \mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n x_i \sum_{j=1}^n a_{ji} \mathbf{e}_j = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \mathbf{e}_j.$$
$$y_j = \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i, \quad j=1 \div n. \quad (3.16)$$
$$\left\{ \begin{array}{l} y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + + a_{1j}x_j + + a_{1n}x_n; \\ y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + + a_{2j}x_j + + a_{2n}x_n; \\ \\ y_k = a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + a_{k3}x_3 + + a_{kj}x_j + + a_{kn}x_n; \\ \\ y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + + a_{nj}x_j + + a_{nn}x_n. \end{array} \right. \quad (3.17)$$
$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = AX. \quad (3.18)$$

15

перемножуємо на матрицю-стовпець X . Подіємо лінійним перетворенням A на нульовий вектор $\mathbf{0}$ ($\mathbf{0} = \mathbf{x}$): $A(\mathbf{x}) = A(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Будь-яке лінійне перетворення переводить нульовий вектор у нульовий.

Означення. Лінійне перетворення A називається невивордженим, якщо $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ тоді і тільки тоді, коли $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. В інакшому випадку лінійне перетворення є вивордженим, тобто існує ненульовий вектор $\mathbf{x}$, для якого $A(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$.

Означення. Якщо в n -вимірному лінійному просторі R^n будь-який вектор $\mathbf{x}$ під дією лінійного перетворення залишається незмінним $\mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, то таке лінійне перетворення називають тотожним.

Нехай $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div n$ – деякий базис в R^n . Знайдемо матричне зображення лінійного тотожного перетворення в даному базисі:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.19)$$

Таким чином, матриця тотожного лінійного перетворення в будь-якому базисі є одинична матриця E . Лінійне перетворення $\mathcal{E}$ – невиворжене лінійне перетворення.

Означення. Якщо в n -вимірному лінійному просторі R^n з деяким базисом $\{\mathbf{e}_i\}$, $i=1 \div n$ будь-який вектор $\mathbf{x}$ під дією лінійного перетворення перетворюється в нульовий вектор $\mathbf{0}\mathbf{x}=\mathbf{0}$, то таке лінійне перетворення називають нульовим.

Знайдемо матричне зображення лінійного нульового перетворення $\mathbf{O}$ в даному базисі:

$$\begin{cases} \mathbf{O} \mathbf{e}_1 = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{e}_n; \\ \mathbf{O} \mathbf{e}_2 = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{e}_n; \\ \dots \\ \mathbf{O} \mathbf{e}_n = \mathbf{0} = 0 \cdot \mathbf{e}_1 + 0 \cdot \mathbf{e}_2 + \dots + 0 \cdot \mathbf{e}_n, \end{cases} \quad \mathbf{O} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

Матрицею нульового лінійного перетворення $\mathbf{O}$ є нульова матриця $\mathbf{O}$ у будь-якому базисі $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div n$.

Означення. Лінійне перетворення A^{-1} називається зворотним відносно невиродженого лінійного перетворення A , якщо для будь-якого вектора $\mathbf{x} \in R^n$ виконується: $(A \cdot A^{-1})\mathbf{x} = (A^{-1} \cdot A)\mathbf{x} = \mathcal{E}\mathbf{x} = \mathbf{x}$, де $\mathcal{E}$ – тотожне лінійне перетворення в R^n .

Нехай $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div n$ – деякий базис в R^n . Якщо невиродженому лінійному перетворенню A в базисі $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div n$, відповідає матриця A , то зворотному лінійному перетворенню відповідає в тому ж базисі A^{-1} , причому $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, де E – матричне зображення тотожного лінійного перетворення $\mathcal{E}$.

Нехай R^n – n -вимірний лінійний простір, A – лінійне перетворення в R^n , $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div n$ – початковий базис, $\{\mathbf{e}'_j\}$, $j = 1 \div n$ – новий базис.

Для будь-якого вектора $\mathbf{x} \in R^n$, існує вектор цього ж простору $\mathbf{y} \in R^n$, який є образом вектора $\mathbf{x}$ під дією лінійного перетворення A : $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$. Нехай A – матричне зображення лінійного перетворення A в базисі $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div n$. Запишемо в матричному вигляді:

$$\forall \mathbf{x} \in R^n: \mathbf{x} \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \quad \exists \mathbf{y} \in R^n \quad \mathbf{y} \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad Y = AX. \quad (3.21)$$

Перейдемо в лінійному просторі R^n до нового базису $\{\mathbf{e}'_j\}$, $j = 1 \div n$. Усі величини в новому базисі будемо позначати штрихами. Тоді в новому базисі:

$$Y' = A'X', \quad (3.22)$$

де X' – матриця-стовпець, що відповідає вектору $\mathbf{x}$ в новому базисі $\{\mathbf{e}'_j\}$, $j = 1 \div n$; Y' – матриця-стовпець, що відповідає вектору $\mathbf{y}$ в новому базисі;

A' – матричне зображення лінійного перетворення A в новому базисі.

Нехай T – матриця переходу до нового базису. Це невироджена квадратна матриця n -го порядку з визначником, відмінним від нуля. Згідно з формулою переходу до нового базису для координат векторів:

$$X = TX' \Rightarrow X' = T^{-1}X, \quad Y = TY' \Rightarrow Y' = T^{-1}Y. \quad (3.23)$$

Здійснимо перехід до нового базису в матричному співвідношенні:

$$Y = AX \Rightarrow Y' = A'X'.$$

Для цього матричне співвідношення $Y = AX$ помножимо ліворуч на T^{-1} та отримаємо:

$$T^{-1}Y = T^{-1}AX, \quad T^{-1}Y = Y' = A'X' = T^{-1}ATX'.$$

Порівнявши матриці при X' , будемо мати:

$$A' = T^{-1}AT. \quad (3.24)$$

Отже, при переході до нового базису $\{e'_j\}$, $j = 1 \div n$ з матрицею переходу T , матриця лінійного перетворення A , а саме матриця A переходить у матрицю A' згідно з формулою (3.24).

Означення. Матриці A і A' пов'язані співвідношенням $A' = T^{-1}AT$, де $|T| \neq 0$, називаються подібними матрицями, а саме перетворення називається подібним перетворенням.

Висновок: Усі матриці лінійного перетворення A в різних базисах подібні між собою або просто подібні матриці. Подібні матриці – це різні матричні зображення одного й того ж лінійного перетворення.

Знайдемо зворотне перетворення від нового базису $\{e'_j\}$ до старого $\{e_i\}$:

$$TA'T^{-1} = \underbrace{TT^{-1}}_E A \underbrace{TT^{-1}}_E \Rightarrow A = TA'T^{-1}. \quad (3.25)$$

Теорема. Для квадратних матриць одного порядку $|AB| = |A| \cdot |B|$, $|AB|$ – це визначник добутку двох матриць.

Доведення. Доведемо цю теорему для матриць другого порядку.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} |AB| &= \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} \\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}b_{11} & a_{12}b_{22} \\ a_{21}b_{11} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12} \\ a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}b_{21} & a_{12}b_{22} \\ a_{22}b_{21} & a_{22}b_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{21} \underbrace{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{11} & b_{12} \end{vmatrix}}_{=0} + b_{11}b_{22}|A| + \end{aligned}$$

$$+ b_{21}b_{12}(-|A|) + a_{12}a_{22} \underbrace{\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}}_{=0} = |A| \cdot |B|.$$

Отже, $|AB| = |A| \cdot |B|$. (3.26)

Зауваження. Для квадратної матриці $\underline{|T^{-1}| = |T|^{-1}}$, тобто показник (-1) можна виносити за знак визначника. Доведемо це.

$$T \cdot T^{-1} = E \Rightarrow |TT^{-1}| = |E| = 1 = |T| \cdot |T^{-1}| \Rightarrow |T^{-1}| = \frac{1}{|T|} = |T|^{-1}, \text{ де } |T| \neq 0.$$

Теорема справедлива для квадратних матриць будь-якого порядку. Її можна узагальнити на будь-яку скінчену кількість множників.

Означення. Матриця A для якої виконується співвідношення

$$Q^{-1} = Q^T \quad (3.27)$$

називається ортогональною матрицею, а перетворення

$$A' = Q^T A Q \quad (3.28)$$

називається ортогональним перетворенням. Ортогональне перетворення є частковим випадком подібного перетворення.

Для ортогональної матриці мають місце такі властивості:

- 1) визначник ортогональної матриці дорівнює ± 1 ;
- 2) сума попарних добутків елементів будь-яких рядків (стовпців) дорівнює нулю;
- 3) сума квадратів елементів будь-якого рядка (стовпця) дорівнює 1.

Ортогональне перетворення зберігає довжини векторів, кут між двома векторами, переводить будь-який ортонормований базис в ортонормований базис.

Теорема. Визначники подібних матриць рівні між собою.

Доведення. Нехай R^n – n -вимірний лінійний простір; $\{e_i\}$, $i = 1 \div n$ – початковий базис, $\{e'_j\}$, $j = 1 \div n$ – новий базис, A – лінійний оператор у R^n . Матричне зображення лінійного оператора A в новому базисі $A' = T^{-1}AT$, де T – матриця переходу до нового базису.

$$|A'| = |T^{-1}AT| = |T^{-1}| \cdot |A| \cdot |T| = |A| \cdot |T^{-1}| \cdot |T| = |A| \cdot |T^{-1}T| = |A| \cdot |E| = |A|.$$

Властивість математичного об'єкта не змінюватися при певних перетвореннях називається інваріантністю.

Висновок. Величина визначника матриці лінійного перетворення A не залежить від вибору базису. Такі величини, значення яких не залежить від вибору базису називають інваріантами і позначають:

$$|A'| = |A| = \text{Inv}. \quad (3.29)$$

Оскільки $|A| = \text{Inv}$, то в будь-якому базисі невиродженому лінійному перетворенню A відповідає невироджена матриця, $|A| \neq 0$. Поняття невироджене лінійне перетворення A не пов'язане з базисом, не залежить від базису. І навпаки, виродженому лінійному перетворенню A в будь-якому базисі відповідає вироджена матриця, $|A| = 0$.

Теорема. Будь-яке матричне співвідношення інваріантне (не змінюється) при подібному перетворенні.

Доведення. Нехай R^n – n -вимірний лінійний простір; $\{e_i\}$, $i = 1 \div n$ – початковий, $\{e'_j\}$, $j = 1 \div n$ – новий базис; T – матриця переходу від початкового до нового базису, для якої визначник $|T| \neq 0$ та існує зворотна матриця T^{-1} . Розглянемо деяке матричне співвідношення в старому базисі:

$$ABC + \lambda D = 0, \quad \lambda \in R^1.$$

A, B, C, D – квадратні матриці n -го порядку. Застосуємо подібне перетворення до даного матричного співвідношення

$$\begin{aligned} ABC + \lambda D &= T^{-1}ABCT + T^{-1}\lambda DT = T^{-1}(AAB + \lambda D)T = \\ &= T^{-1}0T = \underbrace{T^{-1}AT}_{A'} \underbrace{TT^{-1}B}_{B'} \underbrace{TT^{-1}CT}_{C'} + \lambda \underbrace{T^{-1}DT}_{D'} = A'B'C' + \lambda D' = 0 = \text{Inv}. \end{aligned}$$

Бачимо, що матричне співвідношення зберігає свою форму при подібному перетворенні.

3.5. Власні значення та власні вектори лінійного перетворення

Нехай R^n – n -вимірний лінійний простір, A – лінійне перетворення в

R^n , $\{e_i\}$, $i = 1 \div n$ – деякий базис, A – матричне уявлення лінійного перетворення A в даному базисі. Це означає:

$$\forall x \in R^n \quad \exists y \in R^n \quad y = Ax \Leftrightarrow Y = AX.$$

Нас будуть цікавити вектори, які при дії лінійного перетворення A перетворюються в колінеарні вектори, тобто

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow AX = \lambda X, \text{ де } X \neq 0, X \in R^n. \quad (3.30)$$

Означення Вектор x , який задовольняє умові (3.30) називається власним вектором лінійного перетворення A (або матриці A , яка є матричним уявленням лінійного перетворення A в даному базисі $\{e_i\}$, $i = 1 \div n$).

Означення Коефіцієнт пропорційності λ називають власним значенням лінійного перетворення A , яке відповідає власному вектору x .

Власні вектори – це вектори, які переводяться лінійним перетворенням A в колінеарні вектори.

Розглянемо задачу визначення власних значень і власних векторів лінійного перетворення A .

$$Ax = \lambda x \Leftrightarrow AX = \lambda EX, \text{ де } X \neq 0.$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \in R^n, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n}, \quad EX = X.$$

(3.31)

Запишемо матричне співвідношення у координатній формі.

Зауваження. Власні значення та власні вектори лінійного перетворення A називають також власними значеннями та власними векторами матриці A цього лінійного перетворення в базисі $\{e_i\}$, $i = 1 \div n$.

$$AX - \lambda EX = (A - \lambda E)X = 0$$

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}. \quad (3.32)$$

Отже, отримали систему лінійних однорідних рівнянь. Ця система завжди сумісна, оскільки їй задовольняє тривіальний розв'язок:

$$x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0.$$

Але цей розв'язок нас не цікавить, оскільки за умовою $|X| \neq 0$. Для того, щоб система лінійних однорідних рівнянь мала відмінний від нуля розв'язок, вона повинна бути невизначеною, тоді визначник системи повинен дорівнювати нулю.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = P_n(\lambda) = 0. \quad (3.33)$$

Це рівняння має назву характеристичного рівняння матриці A лінійного перетворення A і позначається $P_n(\lambda)$. Якщо розкрити визначник, то отримаємо поліном n -го ступеня, який у загальному випадку має n коренів (λ_i) , серед яких можуть бути кратні та комплексно-спряжені корені, оскільки $P_n(\lambda)$ – поліном з дійсними коефіцієнтами. Кожному власному значенню λ_i відповідає власний вектор $x_i = X_i$ матриці A , який є відмінним від 0 розв'язком системи однорідних рівнянь (3.32).

Зауваження. Слід пам'ятати, що власні вектори X_i , як розв'язки системи однорідних рівнянь визначаються з точністю до постійного множника. Це означає, що якщо X_i – власний вектор, то і cX_i , де $c \neq 0$, $c \in R^1$ – також власний вектор.

Означення. Сукупність усіх власних значень лінійного перетворення A називається його *спектром*, причому кожне власне значення входить у спектр стільки разів, яка його кратність.

Означення. Спектр називається простим, якщо характеристичне рівняння має тільки прості корені.

Теорема. Характеристичне рівняння лінійного перетворення A зберігається при подібному перетворенні, тобто є інваріантом подібного перетворення.

Це означає, що вигляд характеристичного рівняння лінійного перетворення A не залежить від вибору базису в R^n . Тобто його корені (власні значення) при переході до нового базису зберігаються.

Доведення. Нехай у деякому базисі $\{e_i\}$, $i = 1 \div n$ характеристичне рівняння лінійного перетворення A має вигляд:

$$|A - \lambda E| = 0,$$

де A – матричне зображення лінійного перетворення A в даному базисі.

Перейдемо до нового базису $\{e'_j\}$, $j = 1 \div n$. При цьому

$$A' = T^{-1}AT,$$

де T – матриця переходу до нового базису, $|T| \neq 0$. A та A' – подібні матриці. В новому базисі характеристичне рівняння має вигляд:

$$\begin{aligned} |A' - \lambda E'| &= |T^{-1}AT - \lambda E| = |T^{-1}AT - \lambda T^{-1}ET| = |T^{-1}(A - \lambda E)T| = \\ &= |T^{-1}| \cdot |A - \lambda E| |T| = |A - \lambda E| = 0 = Inv. \end{aligned}$$

$E' = E$ – в будь-якому базисі.

Оскільки $|T^{-1}| = |T|^{-1}$, звідки $|T^{-1}| \cdot |T| = 1$.

Приклад 5 У просторі R^2 з базисом $\{e_i\}$, $i = 1 \div 2$ в загальному вигляді лінійне перетворення A задано матрицею A . Розглянемо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} = 0. \quad (3.34)$$

Якщо перейти до іншого базису $\{e'_j\}$, $j=1 \div 2$, то характеристичне рівняння (3.34) мало б вигляд:

$$\lambda^2 - (a'_{11} + a'_{22})\lambda + a'_{11}a'_{22} - a'_{21}a'_{12} = 0 = \lambda^2 - I_1\lambda + I_2 = 0, \quad (3.35)$$

коефіцієнти цього рівняння при переході до нового базису зберігаються, тобто є інваріантними. Робимо висновок:

$$a_{11} + a_{22} = a'_{11} + a'_{22} = I_1 - \text{є інваріантом.}$$

Введемо позначення: $SpA = a_{11} + a_{22} = Inv$ (SpA – шпур матриці A , або ще одна назва – слід матриці A).

У співвідношенні (3.35) позначено:

$$I_2 = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = |A'| = \begin{vmatrix} a'_{11} & a'_{12} \\ a'_{21} & a'_{22} \end{vmatrix} = Inv.$$

Згідно з теоремою Вієта, корені характеристичного рівняння (3.34) повинні задовольняти таким співвідношенням:

$$\lambda_1 + \lambda_2 = a_{11} + a_{22} = Inv,$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = |A| = |A'| = Inv.$$

Приклад 6. Розглянемо характеристичне рівняння у просторі R^3 з базисом $\{e_i\}$, $i = 1 \div 3$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Остаточнo отримаємо:

$$\lambda^3 - I_1 \lambda^2 + I_2 \lambda - I_3 = 0,$$

де позначено: $I_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} = Inv = SpA$;

$$I_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} = Inv;$$

$$I_3 = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{31}a_{23} + \\ + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{31}a_{22} = Inv.$$

Теорема. Власні вектори, що належать різним власним значенням, лінійно незалежні.

Доведення. Нехай R^n – n -вимірний лінійний простір, A – лінійне перетворення в R^n , $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ – власні значення. Всі вони утворюють простий спектр. $x_1, x_2, \dots, x_n$ – відповідні власні вектори лінійного перетворення A .

$$Ax_i = \lambda_i x_i, \quad i = 1 \div n.$$

Розглянемо лінійну комбінацію власних векторів та прирівняємо її до нуля

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0. \quad (3.36)$$

Треба довести, що всі $\alpha_i = 0$, $i = 1 \div n$. Доведемо це твердження методом математичної індукції.

Для $n=1$: $\alpha_1 \mathbf{x}_1 = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_1 = 0$, оскільки $|\mathbf{x}_1| \neq 0$. Власні вектори відмінні від нуля. Припустимо, що теорема справедлива для $n-1$ власних векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$, тобто

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{0} \text{ для всіх } \alpha_i = 0, i = 1 \div n.$$

Покажемо, що співвідношення (3.36) справедливо для n власних векторів $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{n-1}$, тобто

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \text{ для всіх } \alpha_i = 0, i = 1 \div n.$$

Застосуємо до співвідношення (3.36) лінійне перетворення A , отримаємо:

$$A(\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n) = \alpha_1 A\mathbf{x}_1 + \alpha_2 A\mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n A\mathbf{x}_n = A\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

З визначення власних векторів $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$ отримаємо:

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \lambda_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}. \quad (3.37)$$

З іншого боку лінійна комбінація дорівнює нулю (3.36):

$$\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Помножимо останнє рівняння на $(-\lambda_n)$ та додамо його до (3.37):

$$\alpha_1 (\lambda_1 - \lambda_n) \mathbf{x}_1 + \alpha_2 (\lambda_2 - \lambda_n) \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_n (\lambda_{n-1} - \lambda_n) \mathbf{x}_{n-1} = \mathbf{0},$$

$$\lambda_1 - \lambda_n \neq 0, \lambda_2 - \lambda_n \neq 0, \dots, \lambda_{n-1} - \lambda_n \neq 0 \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-1} = 0$$

Тоді у рівності

$$\underbrace{\alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \dots + \alpha_{n-1} \mathbf{x}_{n-1}}_{=0} + \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0} \Rightarrow \alpha_n \mathbf{x}_n = \mathbf{0}.$$

Оскільки $\mathbf{x}_n \neq \mathbf{0}$, то $\alpha_n = 0$. Отже, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ лінійно незалежні вектори. Теорема доведена.

Означення. Базис у лінійному просторі R^n , в якому діє лінійне перетворення A , складений із власних векторів лінійного перетворення A (якщо такий базис існує) називається власним базисом лінійного перетворення A .

Для існування власного базиса та діагоналізації матриці A необхідно і достатньо, щоб кожному власному значенню відповідало стільки власних векторів, яка кратність власного значення. Це означає, що якщо

$$\text{де } Q = \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} & \dots & q_{1n} \\ q_{21} & q_{22} & \dots & q_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ q_{n1} & q_{n2} & \dots & q_{nn} \end{pmatrix} \text{ – матриця переходу до власного базису.}$$

Її стовпці – власні вектори лінійного перетворення A . Ці вектори розташовані в тому ж порядку, як і власні значення в канонічній формі лінійного перетворення A . Вектори базисів пов'язані співвідношенням:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 \\ \dots \\ \mathbf{a}_n \end{pmatrix} = Q^T \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \dots \\ \mathbf{e}_n \end{pmatrix}, \quad A' = Q^{-1}AQ, \quad (3.38)$$

де A' – канонічна або діагональна матриця лінійного перетворення A .

Це найпростіше зображення лінійного перетворення. Ми бачимо, що власні вектори відіграють дуже важливу роль у матричному аналізі.

Якщо існує базис із власних векторів, то в цьому випадку лінійне перетворення має канонічну форму – найпростіше зображення, яке визначається лише за допомогою власних значень. Оскільки матриці A і A' подібні, вони мають однакові ранги, отже, ранг матриці A дорівнює кількості відмінних від нуля власних значень цієї матриці.

Покажемо як діє лінійне перетворення у власному базисі. Розглянемо n -вимірний лінійний простір R^n , в якому задано лінійне перетворення A , $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div n$ – деякий базис цього простору R^n . Будь-який вектор $\forall \mathbf{x} \in R^n$ можна розкласти за цим базисом:

$$\mathbf{x} = \sum_{i=1}^n x_i \mathbf{e}_i \Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Вектор Y – образ вектора X , тоді $Y = AX$, A – матричне зображення оператора A в даному базисі, $\{a_i\}$, $i = 1 \div n$ – власний базис. Усі величини в новому базисі будемо позначати штрихами:

$$Y' = A'X' \quad \text{де} \quad x = \sum_{i=1}^n x'_i a_i \quad \Leftrightarrow \quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

$$Y' = \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \dots \\ y'_n \end{pmatrix} = A'X' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \dots \\ x'_n \end{pmatrix} \Rightarrow y'_i = \lambda_i x'_i, \quad i = 1 \div n. \quad (3.39)$$

Очевидно, що перетворення координат вектора x у власному базисі має найпростіший вигляд.

3.6. Симетричне перетворення

Означення. Лінійне перетворення A , для якого виконується співвідношення:

$$x A y = y A x. \quad (3.40)$$

для будь-яких векторів евклідового простору, називається симетричним перетворенням. У будь-якому базисі матриця симетричного перетворення A є симетрична матриця, тобто $A = A^T$.

Тотожне перетворення є симетричним перетворенням, оскільки $E = E^T$ у будь-якому базисі.

Теорема Власні вектори лінійного симетричного перетворення A , що відповідають різним власним значенням, ортогональні між собою.

Доведення Розглянемо R^3 – тривимірний лінійний простір, у ньому задано лінійне симетричне перетворення, для якого в будь-якому базисі $\{e_i\}$, $i = 1 \div 3$, $A = A^T$, a_i , $i = 1 \div 3$ – власні вектори лінійного симетричного перетворення, $\lambda_i \neq \lambda_j$, $i \neq j$ – власні значення.

$$\begin{cases} A\mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1; \\ A\mathbf{a}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2. \end{cases} \quad (3.41)$$

Помноживши праву і ліву частини першого співвідношення (3.41) скалярно на вектор $\mathbf{a}_2$, а другого співвідношення скалярно на вектор $\mathbf{a}_1$, отримаємо:

$$\begin{cases} \mathbf{a}_2 A \mathbf{a}_1 = \lambda_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2; \\ \mathbf{a}_1 A \mathbf{a}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1. \end{cases} \quad (3.42)$$

Оскільки внаслідок (3.40) ліві частини цього співвідношення рівні між собою, то рівні також і праві частини, тобто

$$\lambda_1 \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 = \lambda_2 \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1,$$

або внаслідок комутативності скалярного добутка $(\lambda_1 - \lambda_2) \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 = 0$.

Враховуючи, що власні значення за умовою теореми різні між собою, приходимо до висновку, що $\mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 = 0$, тобто власні вектори ортогональні між собою.

Теорема. Власні значення симетричного лінійного перетворення A завжди дійсні числа.

Доведення. Розглянемо R^3 – тривимірний лінійний простір, у ньому задано лінійне симетричне перетворення, для якого в будь-якому базисі $\{\mathbf{e}_i\}$, $i = 1 \div 3$, $A = A^T$. Припустимо супротивне, тобто, що власні значення комплексно-спряжені числа. Характеристичне рівняння третього ступеня з дійсними коефіцієнтами припускає таку можливість:

$$\lambda_1 = \lambda = \alpha + \beta i, \quad \lambda_2 = \lambda^* = \alpha - \beta i,$$

Тоді $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^*$, власні вектори, що відповідають власним значенням λ_1 , λ_2 :

$$\begin{cases} A\mathbf{a} = \lambda \mathbf{a}; \\ A\mathbf{a}^* = \lambda^* \mathbf{a}^*. \end{cases} \quad (3.43)$$

Власні вектори $\mathbf{a}$, $\mathbf{a}^*$ мають комплексно-спряжені компоненти, тобто:

$$\mathbf{a} = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i, \quad \mathbf{a}^* = \sum_{i=1}^3 x_i^* \mathbf{e}_i. \quad (3.44)$$

Оскільки $\lambda \neq \lambda^*$ то за попередньою теоремою, яка зберігається і для комплексно-спряжних власних значень, вектори $\mathbf{a}$ та $\mathbf{a}^*$ повинні бути ортогональними між собою, отже $\mathbf{a} \mathbf{a}^* = 0$. Але з іншого боку

$$\mathbf{a} \mathbf{a}^* = \sum_{i=1}^3 x_i \mathbf{e}_i \sum_{i=1}^3 x_i^* \mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^3 |x_i|^2 > 0.$$

Отримане протиріччя означає, що власні значення симетричного перетворення є дійсні числа.

Теорема. Симетричне лінійне перетворення в R^3 має три власних попарно ортогональних вектора, тобто ортонормований власний базис.

Приклад 7. Знайти власні значення та власні вектори матриці A , привести матрицю до діагонального вигляду, вказати відповідне перетворення:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення і власні вектори матриці A . Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 11\lambda^2 + 36\lambda - 36 = 0.$$

Коренями цього рівняння є $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$, $\lambda_3 = 6$. Знайдемо власні вектори, використовуючи систему лінійних однорідних рівнянь у матричному вигляді $(A - \lambda E) X = 0$.

Ця система у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} (3 - \lambda)x_1 - x_2 + x_3 = 0; \\ -x_1 + (5 - \lambda)x_2 - x_3 = 0; \\ x_1 - x_2 + (3 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 2$ система має вигляд:

$$x_1 - x_2 + x_3 = 0; -x_1 + 3x_2 - x_3 = 0.$$

Її розв'язок $x_1 = 1; x_2 = 0; x_3 = -1$. Отже, перший власний вектор є:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad X_1' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Штрихом позначено відповідний нормований власний вектор, який буде використано для побудови власного базису та подібного перетворення.

При $\lambda_2 = 3$ система має вигляд: $-x_1 + x_3 = 0; x_1 - x_2 = 0$.

Її розв'язок $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = 1$. Отже, другий власний вектор є:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad X_2' = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_3 = 6$ система має вигляд: $-3x_1 - x_2 + x_3 = 0; -x_1 - x_2 - x_3 = 0$.

Її розв'язок $x_1 = 1; x_2 = -2; x_3 = 1$. Отже, третій власний вектор є:

$$X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad X_3' = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Ми бачимо, що нормовані власні вектори попарно ортогональні, отже

матриця ортогонального перетворення є:

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix}.$$

Саме ортогональне перетворення має вигляд: $X' = Q^T X$, $X = Q X'$.

Координатна форма цього перетворення є:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3; \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 - \frac{2}{\sqrt{6}} x'_3; \\ x_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}} x'_1 + \frac{1}{\sqrt{3}} x'_2 + \frac{1}{\sqrt{6}} x'_3. \end{cases}$$

Застосувавши до матриці A отримане ортогональне перетворення, отримаємо діагональну форму матриці A , яка має вигляд:

$$A' = Q^T A Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 8. Знайти власні значення та власні вектори матриці A , привести матрицю до діагонального вигляду, вказати відповідне перетворення:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайдемо власні значення і власні вектори матриці A . Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -4 \\ 2 & -2-\lambda & -2 \\ -4 & -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -(3+\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 18) = 0.$$

Коренями цього рівняння є $\lambda_1 = 6$, $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$. Знайдемо власні вектори, використовуючи систему лінійних однорідних рівнянь у матричному вигляді $(A - \lambda E) X = 0$.

Ця система у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} (1 - \lambda)x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \\ 2x_1 - (2 + \lambda)x_2 - 2x_3 = 0; \\ -4x_1 - 2x_2 + (1 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 6$ система приймає вигляд:

$$-5x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 0; \quad 2x_1 - 8x_2 - 2x_3 = 0.$$

Її розв'язок $x_1 = 2$; $x_2 = 1$; $x_3 = -2$. Отже, перший власний вектор є:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad X_1' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Штрихом позначено відповідний нормований власний вектор, який буде використано для побудови власного базису, ортогональної матриці та ортогонального перетворення.

При $\lambda_2 = \lambda_3 = -3$ система зводиться до одного рівняння:

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 0.$$

Згідно з цим рівнянням одна змінна є базисною змінною, дві інші змінні – вільні змінні. Одним із розв'язків ФСР є: $x_1 = 0$; $x_2 = 2$; $x_3 = 1$. Отже, другий власний вектор є:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad X_2' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Відомо, що власні вектори, що відповідають двократному власному значенню не ортогональні між собою. Для побудови третього власного вектора, доцільно взяти векторний добуток вже отриманих власних векторів:

$$X_3 = X_1 \times X_2.$$

$$X_3 = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 5i - 2j + 4k = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ або } X_3' = \frac{1}{3\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця ортогонального перетворення є:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}.$$

Саме ортогональне перетворення має вигляд: $X' = Q^T X$, $X = Q X'$.

Координатна форма цього перетворення:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{5}{3\sqrt{5}} x_2' + \frac{2}{3} x_3'; \\ x_2 = \frac{2}{\sqrt{5}} x_1' - \frac{2}{3\sqrt{5}} x_2' + \frac{1}{3} x_3'; \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{5}} x_1' + \frac{4}{3\sqrt{5}} x_2' - \frac{2}{3} x_3'. \end{cases}$$

Застосувавши до матриці A отримане ортогональне перетворення, отримаємо діагональну форму матриці A , яка має вигляд:

$$A' = Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{5}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{3\sqrt{5}} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 9. Є n країн $S_1, S_2, S_3, \dots, S_n$ і весь національний дохід цих країн використовується на закупівлю товарів (і послуг) всередині країни і за її межами (імпорт з інших країн). Задана структурна матриця торгівлі:

$S_1, S_2, \dots, S_n$ – покупці товарів

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}_{n \times n} \begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ \dots \\ S_n \end{cases} \text{ – продавці товарів.}$$

де a_{ij} – загальний елемент цієї матриці, означає частку національного прибутку, яку країна S_j витрачає на придбання товарів з країни S_i

$$S_j \xrightarrow{a_{ij}} S_i.$$

Наприклад, a_{11} – частка національного прибутку, яку країна S_1 витрачає на придбання товарів у себе, a_{12} – частка національного прибутку, яку країна S_2 витрачає на придбання товарів у країни S_1 , a_{21} – частка національного прибутку, яку країна S_1 витрачає на придбання товарів у країни S_2 , a_{i1} – частка національного прибутку, яку країна S_1 витрачає на придбання товарів у країни S_i (в тому числі й у себе).

Нехай $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ – вектор національного прибутку n країн. Наприклад, x_1 національний прибуток країни S_1 . Тоді

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_1 + \dots + a_{n1}x_1 = x_1 & \text{для } S_1, \\ a_{12}x_2 + a_{22}x_2 + \dots + a_{n2}x_2 = x_2 & \text{для } S_2, \\ \dots & \dots \\ a_{1n}x_n + a_{2n}x_n + \dots + a_{nn}x_n = x_n & \text{для } S_n. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11} + a_{21} + \dots + a_{n1} = 1, \\ a_{12} + a_{22} + \dots + a_{n2} = 1, \\ \dots & \dots \\ a_{1n} + a_{2n} + \dots + a_{nn} = 1, \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^n a_{ij} = 1, \forall j = 1 \div n.$$

Ми бачимо, що структурна матриця торгівлі $A = (a_{ij})_{n \times n}$ є стохастична матриця, оскільки сума елементів кожного стовпця цієї матриці дорівнює одиниці.

Прибуток від внутрішньої і зовнішньої торгівлі країни S_i складає:

[illegible]

Для сбалансованого торгівельного обігу необхідна бездефіцитна торгівля кожної країни (для торгівельного балансу). Прибуток від торгівлі кожної країни повинен бути не менше від її національного прибутку, тобто

$$\begin{cases} \boldsymbol{a}_{11}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{12}\boldsymbol{x}_2 ++ \boldsymbol{a}_{1n}\boldsymbol{x}_n > x_1 , \\ \boldsymbol{a}_{21}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{22}\boldsymbol{x}_2 ++ \boldsymbol{a}_{2n}\boldsymbol{x}_n > x_2 , \\ \\ \boldsymbol{a}_{n1}\boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{a}_{n2}\boldsymbol{x}_2 ++ \boldsymbol{a}_{nn}\boldsymbol{x}_n > x_n . \end{cases}$$

Склавши всі нерівності, отримаємо:

$x_1 + x_2 + \dots + x_n > x_1 + x_2 + \dots + x_n$. Таким чином, нерівність

$$p_i > x_i, i = 1 \div n$$

неможлива, оскільки не можуть усі країни одночасно отримати прибуток, тобто повинна виконуватися рівність $p_i = x_i, i = 1 \div n$, або $AX = X \leftrightarrow Ax = x$. Це означає, що X є власний вектор матриці A , що відповідає власному значенню $\lambda = 1$.

Приклад 10. Структурна матриця торгівлі трьох країн S_1 , S_2 , S_3 має вигляд:

S_1, S_2, S_3 – покупці товарів

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & 0 \end{pmatrix} \begin{cases} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{cases} \quad - \text{продавці товарів.}$$

Знайти національні прибутки трьох країн для збалансованої торгівлі.

Нехай $X = (x_1, x_2, x_3)^T$ – вектор національного прибутку 3-х країн. Тоді власний вектор, що відповідає власному значенню $\lambda = 1$ визначається з матричного рівняння:

$$AX=X \leftrightarrow Ax=x \rightarrow \begin{cases} -\frac{2}{3}x_1 + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0, \\ \frac{1}{3}x_1 - \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 = 0. \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -8x_1 + 3x_2 + 6x_3 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь має вигляд $x_1=3/2$; $x_2=2$; $x_3=2$. Таким чином, відношення національних прибутків країн дорівнює $x_1 : x_2 : x_3 = 3:4:2$.

3.7. Поняття про квадратичні форми

Розглянемо евклідовий простір R^3 . Нехай A – симетричне лінійне перетворення в R^3 . Нехай $\{e_i\}$, $i = 1 \div 3$ є деякий базис евклідового простору R^3 . Довільний вектор $x \in R^3$ можна розкласти єдиним чином по векторам базису $\{e_i\}$

$$x = \sum_{i=1}^3 x_i e_i. \quad (3.45)$$

Коефіцієнти розкладу x_1, x_2, x_3 є координати вектора x у базисі $\{e_i\}$. Кожному вектору $x \in R^3$ можна поставити у відповідність матрицю-стовпець 3-го порядку:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (3.46)$$

Причому, $X^T = (x_1, x_2, x_3)$ – відповідний матриця-рядок координат вектора x . Оскільки лінійне перетворення A є симетричне, йому в даному базисі $\{e_i\}$ відповідає симетрична матриця

$$A = A^T (a_{ij} = a_{ji} \text{ " } i, j = 1 \div 3), \quad (3.47)$$

де A^T – транспонована відносно матриці A матриця.

Розглянемо матричне співвідношення:

$$\begin{aligned}
 X^T A X &= (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = \\
 &= a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{22}x_2^2 + a_{33}x_3^2 = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_ix_j.
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

У лінійній алгебрі такий вираз називається квадратичною формою другого-го порядку відносно змінних x_1, x_2, x_3 , або просто квадратичною формою. Це є квадратична форма третього порядку відносно змінних $x_1,$

$$F(x_1, x_2, x_3) = X^T A X = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij}x_ix_j. \tag{3.49}$$

x_2, x_3

Аналогічно можна отримати квадратичну форму n -го порядку відносно змінних $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$, тобто

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = X^T A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}x_ix_j. \tag{3.50}$$

Матриця цієї квадратичної форми є симетрична матриця n -го порядку

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{3.51}$$

Означення. Квадратичною формою n -го порядку відносно змінних $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ називається однорідний многочлен другого ступеня відносно вказаних змінних, тобто вираз, визначений співвідношенням (3.50), де a_{ij} —задані числа, коефіцієнти квадратичної форми, $a_{ij} = a_{ji}$ " $i, j = 1 \div n$ ".

Означення. Рангом квадратичної форми (3.50) називається ранг матриці A даної квадратичної форми. Якщо $\text{rang}(A) = n$, то квадратична форма (3.50) називається не виродженою квадратичною формою, в протилежному випадку ($\text{rang}(A) < n$) квадратична форма (3.50) називається виродженою квадратичною формою.

Розглянемо задачу приведення квадратичної форми (3.50) до канонічного вигляду, тобто до найпростішого вигляду канонічної форми. Найпростіший вигляд квадратичної форми – це вигляд, у якому присутні лише квадрати змінних і відсутні їх добутки. Оскільки квадратичній формі (3.50) у даному базисі $\{e_i\}$, $i = 1 \div n$ відповідає симетрична матриця A , то приведення квадратичної форми до канонічного вигляду означає, що матрицю A необхідно привести до діагонального вигляду. Симетрична матриця, як відомо, завжди діагоналізується і набуває діагонального вигляду у власному базисі, тобто базисі, утвореному з власних векторів матриці A . Відомо також, що цей базис існує і становить при цьому ортогональний базис. Якщо власні вектори попередньо нормувати, то власний базис буде ортонормованим. Позначимо U матрицю, стовпці якої нормовані власні вектори матриці A . Матриця Q є матриця переходу до нового базису, утвореного власними векторами матриці A . Матриця U є ортогональна матриця, тобто $U^{-1} = U^T$. Розглянемо ортогональне перетворення:

$$X' = U^{-1} X = U^T X \text{ або } X = U X' \quad (3.52)$$

У власному базисі (новій системі координат, позначеній штрихами) матриця A приймає вигляд:

$$A' = U^{-1} A U = U^T A U, \quad (3.53)$$

а відповідна квадратична форма набуває канонічного вигляду

$$\begin{aligned} F(x'_1, x'_2, x'_3, \dots, x'_n) &= X'^T A' X' = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2 = \\ &= \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \dots + \lambda_n (x'_n)^2. \end{aligned} \quad (3.54)$$

Тут

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad (3.55)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ – власні значення матриці A .

Зауваження. В діагональній формі матриці A' власні значення $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ розташовані в тому ж порядку, в якому розташовані нормовані власні вектори матриці A , що становлять стовпці матриці U . Приведений метод має назву метода ортогональних перетворень. Використання цього метода полягає в такому:

- 1) знаходженні власних значень і власних векторів матриці A . Побудові власного базису з нормованих власних векторів та ортогональної матриці U переходу до цього базису;
- 2) виконанні ортогонального перетворення $X = U X'$, яке приводить квадратичну форму до канонічного вигляду;
- 3) отриманні діагональної матриці $A' = U^T A U = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n)$;
- 4) побудові канонічного вигляду квадратичної форми.

Приклад 11. Привести квадратичну форму

$$F(x_1, x_2, x_3) = 7x_1^2 + 6x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 5x_3^2$$

до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень. Вказати відповідну ортогональну матрицю U , ортогональне перетворення та канонічний вигляд квадратичної форми.

Розв'язання. Матриця даної квадратичної форми має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ -2 & 6 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Будуємо характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 0 \\ -2 & 6 - \lambda & -2 \\ 0 & -2 & 5 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^3 - 18\lambda^2 + 99\lambda - 162 = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 6, \lambda_3 = 9$. Усі власні значення різні, отже відповідні власні вектори попарно ортогональні, оскільки матриця A симетрична. Знайдемо ці вектори. Система лінійних однорідних рівнянь для визначення власних векторів у матричному вигляді:

$$(A - \lambda E) X = 0.$$

Ця система у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} (7 - \lambda)x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0; \\ -2x_1 + (6 - \lambda)x_2 - 2x_3 = 0; \\ 0x_1 - 2x_2 + (5 - \lambda)x_3 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 3$ система приймає вигляд:

$$\begin{cases} 4x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0; \\ -2x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 0x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Оскільки $\text{rang}(A - \lambda_1 E) = 2$, вважаємо змінну x_3 – вільною змінною, а змінні x_1, x_2 – базисними змінними. З останнього рівняння системи маємо $x_2 = x_3 = 1$. А з першого рівняння системи $2x_1 = x_2 = 1$, звідки $x_1 = 0,5$. Отже, перший власний вектор та відповідний нормований власний вектор у вигляді матриці-стовпця є:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad X_1' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_2 = 6$ система приймає вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0; \\ -2x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0; \\ 0x_1 - 2x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Тут також $\text{rang}(A - \lambda_2 E) = 2$. З другого рівняння маємо $x_1 = -x_3 = 1$, $x_3 = -1$. З першого рівняння отримаємо значення x_2 : $2x_2 = x_1 = 1$, звідки $x_2 = 0,5$. Отже, другий власний вектор у вигляді матриці-стовпця є:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ або } X_2' = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

При $\lambda_3 = 9$ система приймає вигляд:

$$\begin{cases} -2x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0; \\ -2x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0; \\ 0x_1 - 2x_2 - 4x_3 = 0. \end{cases}$$

Як і в попередніх випадках $\text{rang}(A - \lambda_3 E) = 2$. З останнього рівняння системи випливає, що $x_2 = -2x_3$, $x_3 = -1$, $x_2 = 2$. З першого рівняння маємо $x_1 = -x_2 = -2$. Отже,

$$X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{або} \quad X'_3 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Отримані вектори X'_1, X'_2, X'_3 – одиничні і попарно ортогональні вектори. Безпосередньо переконуємося, що $X'_i X'_j = \delta_{ij}$, де $\delta_{ij} = 1$, якщо $i = j$, та $\delta_{ij} = 0$ якщо $i \neq j$. Будуємо ортогональну матрицю U в якій вектори $X'_i, i = 1 \div n$ розташовані стовпцями:

$$U = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Отримана матриця є матрицею переходу від початкового базису до власного базису. Ортогональне перетворення, що приводить квадратичну форму до канонічного вигляду, є $X = UX'$. Координатна форма цього перетворення має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{3}x'_1 + \frac{2}{3}x'_2 - \frac{2}{3}x'_3; \\ x_2 = \frac{2}{3}x'_1 + \frac{1}{3}x'_2 + \frac{2}{3}x'_3; \\ x_3 = \frac{2}{3}x'_1 - \frac{2}{3}x'_2 - \frac{1}{3}x'_3. \end{cases}$$

Підставивши у вихідну квадратичну форму формули щойно отриманого ортогонального перетворення і виконавши необхідні алгебраїчні дії, отримаємо канонічний вигляд квадратичної форми, тобто дамо відповідь на поставлену задачу:

$$F(x'_1, x'_2, x'_3) = 3x'^2_1 + 6x'^2_2 + 9x'^2_3.$$

3.8. Знаковизначені квадратичні форми

Означення. Квадратична форма (3.50) називається додатно визначеною, якщо для будь-яких значень $x_i \neq 0$, $i = 1 \div n$ не рівних нулю одночасно, ця квадратична форма приймає додатні значення, тобто

$$X^T A X > 0, \quad \forall X \in R^n, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 \neq 0. \quad (3.56)$$

Означення. Квадратична форма (3.50) називається від'ємно визначеною, якщо для будь-яких значень $x_i \neq 0$, $i = 1 \div n$ не рівних нулю одночасно, ця квадратична форма приймає від'ємні значення, тобто

$$X^T A X < 0, \quad \forall X \in R^n, \quad \sum_{i=1}^n x_i^2 \neq 0. \quad (3.57)$$

Означення. Квадратична форма (3.50) називається знаковизначеною, якщо для будь-яких значень $x_i \neq 0$, $i = 1 \div n$ не рівних нулю одночасно, ця квадратична форма приймає лише додатні або лише від'ємні значення (крім того, приймає значення 0 тільки при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$).

Якщо відповідні нерівності у знаковизначеної форми не строгі, то знаковизначена квадратична форма має назву відповідно до невід'ємно або недодатно визначеної квадратичної форми. Іноді такі квадратичні форми називають додатно (від'ємно) напіввизначеними.

Означення. Квадратична форма (3.50) називається знакозмінною, якщо вона приймає як додатні, так і від'ємні значення.

Означення. Симетрична матриця A називається додатньо (від'ємно) визначеною, якщо відповідна квадратична форма (3.50) додатньо (від'ємно) визначена.

Приведемо квадратичну форму (3.50) до канонічного вигляду, тобто до найпростішого вигляду квадратичної форми. Це вигляд квадратичної форми, у якому відсутні добутки змінних, а присутні лише їх квадрати (до речі, деякі з них можуть бути відсутніми). Квадратичній формі відповідає симетрична матриця, яка, як відомо, завжди діагоналізується і набуває діагонального вигляду у власному базисі, утвореному із власних векторів матриці A :

$$A' = U^{-1}AU = U^T AU. \quad (3.58)$$

Тут U матриця, стовпці якої є нормовані власні вектори матриці A . Це є матриця переходу до нового базису, утвореного власними векторами матриці A . Матриця U є ортогональна матриця, тобто $U^{-1} = U^T$.

Розглянемо ортогональне перетворення

$$X' = U^{-1}X = U^T X \text{ або } X = U X'. \quad (3.59)$$

У власному базисі (новій системі координат, позначеній штрихами) квадратична форма набуває канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} F(x'_1, x'_2, x'_3 \dots x'_n) &= X'^T A' X' = \sum_{i=1}^n \lambda_i (x'_i)^2 = \\ &= \lambda_1 (x'_1)^2 + \lambda_2 (x'_2)^2 + \dots + \lambda_n (x'_n)^2, \end{aligned} \quad (3.60)$$

де $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ – власні значення матриці A .

Канонічний вигляд квадратичної форми свідчить про те, що вона є додатньо визначеною квадратичною формою, якщо всі її власні значення додатні числа, і навпаки, від'ємно визначена — якщо всі власні значення є від'ємні числа. Квадратична форма знакозмінна, якщо серед власних значень матриці A є додатні і від'ємні.

Ми з'ясували, що канонічний вигляд квадратичної форми дозволяє встановити знаковизначеність квадратичної форми. Але приводити кожного разу квадратичну форму, коли необхідно встановити її знаковизначеність, до канонічного вигляду не досить зручно, оскільки процес є досить громіздкий. Існує критерій, який має назву критерія Сільвестра і дозволяє досить просто встановити знаковизначеність квадратичної форми.

Приведемо цей критерій. Введемо такі позначення:

$$A_1 = |a_{11}| = a_{11};$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad A_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \dots \quad A_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.61)$$

Ці визначники мають назву головних мінорів матриці A квадратичної

форми (3.44). Сформулюємо критерій.

Для того, щоб квадратична форма (3.44) була знаковизначеною, необхідно і достатньо, щоб виконувалися нерівності:

$$A_1 > 0; A_2 > 0; A_3 > 0; \dots \dots \dots A_n > 0, \quad (3.62)$$

для додатньо визначеної і

$$A_1 < 0; A_2 > 0; A_3 < 0; \dots \dots \dots (-1)^n A_n > 0, \quad (3.63)$$

для від'ємно визначеної квадратичної форми.

Зауваження. Критерій Сільвестра використовується при дослідженні на екстремум функції багатьох змінних, а саме при формулюванні достатніх умов екстремума. Для цього розглядають другий диференціал:

$$A(dx_1, dx_2, dx_3, \dots, dx_n) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f(X_0)}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} dx_i dx_j.$$

Якщо цей диференціал у стаціонарній точці X_0 є додатньо (від'ємно) визначена квадратична форма диференціалів незалежних змінних, то точка X_0 є точкою строгого мінімуму (максимуму). Якщо приведена квадратична форма невизначена, то екстремума в точці X_0 немає. Якщо другий диференціал у стаціонарній точці звертається до нуля, то функція може мати, а може і не мати екстремума. Для остаточної відповіді необхідне дослідження знака приросту функції в деякому околі стаціонарної точки.

Приклад 12. Використати критерій Сільвестра при дослідженні на екстремум функції:

$$f(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + 11x_3^2 - 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 6x_2x_3 - 2x_2 + 8x_3.$$

Розв'язання. Прирівнявши похідні першого порядку до нуля, знайдемо стаціонарну точку даної функції: $x_{10} = 1$; $x_{20} = 2$; $x_{30} = 0$. Другий диференціал даної функції має вигляд:

$$d^2 f(x_1, x_2, x_3) = 2(dx_1^2 + dx_2^2 + 11dx_3^2 - 2dx_1 dx_2 + 4dx_1 dx_3 - 6dx_2 dx_3).$$

У дужках отриманого співвідношення — квадратична форма відносно диференціалів незалежних змінних dx_1, dx_2, dx_3 . Матриця цієї квадратичної форми має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 11 \end{pmatrix}.$$

Головні мінори матриці цієї квадратичної форми:

$$A_1 = 2, \quad A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & 11 \end{vmatrix}$$

додатні. Отже, ця квадратична форма додатньо визначена, а функція $f(x_1, x_2, x_3)$ має в точці $(1, 2, 0)$ мінімум. $f_{\min}(x_1, x_2, x_3) = f(1, 2, 0) = -2$.

Приклад 13. Використати критерій Сільвестра при дослідженні на екстремум функції:

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_3 + x_1 - 2x_3.$$

Розв'язання. Прирівнявши похідні першого порядку до нуля, знайдемо стаціонарну точку даної функції:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 2x_1 - x_3 + 1 = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 2x_2 = 0; \\ \frac{\partial f}{\partial x_3} = 2x_3 - x_1 - 2 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь є $x_{10} = -2/3$; $x_{20} = 0$; $x_{30} = 1$.

Для використання критерія Сільвестра знайдемо частинні похідні у визначеній стаціонарній точці $M_0(-2/3; 0; 1)$:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_1} = 2; & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0; & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_3} = -1; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} = 0; & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2} = 2; & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3} = 0; \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_1} = -1; & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2} = 0; & \frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_3} = 2. \end{cases}$$

Таким чином:

$$\begin{cases} a_{11} = 2; & a_{12} = 0; & a_{13} = -1; \\ a_{21} = 0; & a_{22} = 2; & a_{23} = 0; \\ a_{31} = -1; & a_{32} = 0; & a_{33} = 2. \end{cases}$$

$$A_1 = |a_{11}| = 2 > 0;$$

$$A_2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 > 0;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2(4 - 1) = 6 > 0.$$

Головні мінори матриці квадратичної форми додатні, що визначає диференціал другого порядку. Отже, ця квадратична форма додатньо визначена а функція $f(x_1, x_2, x_3)$ має в точці $M_0(-2/3; -1/3; 1)$ мінімум.

$$f_{\min}(x_1, x_2, x_3) = f((-2/3; -1/3; 1)) = -4/3.$$

Розглянемо питання про екстремальні значення квадратичної форми за умови, що незалежні змінні x_i ($i = 1 \div n$) пов'язані співвідношенням $X^T X = 1$, тобто знаходяться на одиничній n -вимірній сфері.

Теорема. Екстремальні значення квадратичної форми (3.50) за умови, що незалежні змінні x_i ($i=1 \div n$) пов'язані співвідношенням $X^T X=1$, дорівнюють власним значенням матриці A і досягаються на її одиничних власних векторах.

Доведення. Поставлена задача є задачею на умовний екстремум:

$$F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = X^T A X = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_i x_j,$$

$$X^T X = \sum_{i=1}^n x_i^2 = 1.$$

Для розв'язання цієї задачі використаємо метод Лагранжа. Для цього по-будуємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) = F(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n) - \lambda(X^T X - 1).$$

Згідно з методом Лагранжа умовний екстремум квадратичної форми співпадає з безумовним, тобто абсолютним екстремумом функції Лагранжа. Для його знаходження використаємо необхідну умову екстремуму:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial x} - \lambda \frac{\partial}{\partial x} (X^T X - 1) = 2AX - 2\lambda EX = 2(A - \lambda E)X = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial F}{\partial \lambda} - \frac{\partial}{\partial \lambda} (\lambda(X^T X - 1)) = X^T X - 1 = 0.$$

Ми бачимо, що задача звелась до знаходження власних значень і власних векторів матриці A досліджуваної квадратичної форми (3.50). Нехай λ_0 – деяке власне значення матриці A , а X_0 – відповідний нормований власний вектор цієї ж матриці. Підставивши ці значення в нашу систему рівнянь отримаємо:

$$\begin{aligned} A X_0 &= \lambda_0 E X_0 = \lambda_0 X_0, \quad | X_0^T \\ X_0^T X_0 &= 1. \end{aligned}$$

Помноживши обидві частини першого співвідношення ліворуч на матрицю-рядок X_0^T , отримаємо:

$$X_0^T A X_0 = X_0^T \lambda_0 X_0 = \lambda_0 X_0^T X_0 = \lambda_0.$$

Ми встановили, що на одиничному власному векторі X_0 квадратична форма (1.50) приймає значення λ_0 , тобто відповідне цьому вектору власне значення. Оскільки це власне значення довільне, то робимо висновок, що $\lambda_{\min} \leq X^T A X \leq \lambda_{\max}$. Тобто мінімальне і максимальне власні значення є відповідними екстремальними значеннями квадратичної форми (3.50).

Матричний аналіз широко застосовується також при приведенні кривих і поверхонь другого порядку до канонічного (найпростішого) вигляду. Покажемо це на прикладі.

Приклад 14. Привести криву другого порядку до канонічного вигляду, вказати відповідні перетворення.

$$5x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_2^2 - 32x_1 - 56x_2 + 80 = 0.$$

Розв'язання. З'ясуємо тип кривої, для цього обчислимо дискримінант кривої Δ та дискримінант її старших членів δ :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -16 \\ 2 & 8 & -28 \\ -16 & -28 & 80 \end{vmatrix} = -1296, \quad \delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = 36 > 0.$$

Оскільки дискримінант кривої відмінний від нуля, а дискримінант старших членів додатний — крива центрального типу, становить еліпс.

Щоб позбавитися в рівнянні кривої лінійних членів, здійснимо паралельне перенесення початку системи координат в центр еліпса. Знайдемо центр кривої, для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - 16 = 0; \\ 2x_1 + 8x_2 - 28 = 0. \end{cases}$$

Розв'язок цієї системи рівнянь є $x_{10} = 2; x_{20} = 3 \Rightarrow O'(2; 3)$. Отже, паралельне перенесення має вигляд:

$$\begin{cases} x'_1 = x_1 - x_{10} = x_1 - 2; \\ x'_2 = x_2 - x_{20} = x_2 - 3. \end{cases}$$

При цьому $a'_{33} = f(x_{10}, x_{20}) = \Delta\delta = -36$.

Після застосування паралельного перенесення рівняння кривої набуває вигляду:

$$5x'^2_1 + 4x'_1x'_2 + 8x'^2_2 - 36 = 0.$$

$$|A_{\kappa\kappa} - \lambda E| = \begin{vmatrix} 5 - \lambda & 2 \\ 2 & 8 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 13\lambda + 36 = 0.$$

Щоб позбавитися в рівнянні кривої добутку координат, здійснимо ортогональне перетворення. Знайдемо власні значення і власні вектори матриці $A_{\kappa\kappa}$ квадратичної частини кривої. Для цього розв'яжемо характеристичне рівняння:

Коренями цього рівняння є $\lambda_1 = 4, \lambda_2 = 9$. Знайдемо власні вектори. Система лінійних однорідних рівнянь для визначення власних векторів у матричному вигляді:

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

Ця система у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} (5 - \lambda)x_1 + 2x_2 = 0; \\ 2x_1 + (8 - \lambda)x_2 = 0. \end{cases}$$

При $\lambda_1 = 4$ система набуває вигляду $x_1 + 2x_2 = 0$, розв'язок якої є $x_1 = 2; x_2 = -1$. Отже, перший власний вектор має вигляд:

$$X_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ або } X'_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Штрихом позначено відповідний нормований власний вектор, який буде використано для побудови власного базису, ортогональної матриці та відповідного ортогонального перетворення.

При $\lambda_2 = 9$ система набуває вигляду $-4x_1 + 2x_2 = 0$, розв'язок якої є $x_1 = 1; x_2 = 1$. Отже, другий власний вектор має вигляд:

$$X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ або } X_2' = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, матриця ортогонального перетворення є:

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad Q^T = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Саме ортогональне перетворення має вигляд:

$$X'' = Q^T X', \quad X' = Q X''.$$

Координатна форма цього перетворення є:

$$\begin{cases} x_1'' = \frac{1}{\sqrt{5}} (2x_1' - x_2'); \\ x_2'' = \frac{1}{\sqrt{5}} (x_1' + 2x_2'). \end{cases}$$

Застосувавши до рівняння кривої, отриманого після паралельного перенесення, ортогональне перетворення, отримаємо канонічне рівняння кривої:

$$4(x_1'')^2 + 9(x_2'')^2 - 36 = 0 \quad \text{або} \quad \frac{(x_1'')^2}{9} + \frac{(x_2'')^2}{4} = 1.$$

Запитання для самодіагностики

1. Лінійний простір. Означення. Властивості. Вимір і базис. Дії над векторами в координатній формі.
3. Теорема, за умов якої лінійно незалежні вектори утворюють базис.
4. Перехід до нового базису в лінійному просторі.
5. Перетворення координат вектора при переході до нового базису.
6. Евклідовий простір. Означення. Властивості.
7. Лінійне перетворення. Матричне зображення. Координатна форма.
8. Приклади лінійних перетворень: тотожне; нульове.

9. Зворотне перетворення. Матричне зображення.
10. Подібні матриці. Подібні перетворення.
11. Теорема про визначник добутку двох матриць.
12. Теорема про інваріантність визначника подібних матриць.
13. Теорема про інваріантність матричного співвідношення при подібному перетворенні.
14. Власні значення та власні вектори лінійного перетворення. Основні означення. Спектр, простий спектр лінійного перетворення.
15. Характеристичне рівняння. Інваріантність при подібному перетворенні.
16. Інваріантність коефіцієнтів характеристичного рівняння. Слід матриці.
17. Теорема про лінійну незалежність власних векторів, що належать різним власним значенням.
18. Власний базис лінійного перетворення. Матриця переходу до власного базису. Матричне зображення лінійного перетворення у власному базисі.
19. Канонічна форма лінійного перетворення. Проблема діагоналізації лінійного перетворення (випадок кратних власних значень).
20. Симетричне перетворення. Симетрична матриця.
21. Теорема про ортогональність власних векторів симетричного перетворення, що відповідають різним власним значенням.
22. Теорема про власні значення симетричного перетворення.
23. Ортогональна матриця. Теорема про визначник ортогональної матриці.
24. Ортогональне перетворення, як частковий випадок подібного перетворення.
25. Квадратична форма. Матрична форма запису.
26. Ранг квадратичної форми.
27. Приведення квадратичної форми до канонічного вигляду.
28. Знаковизначена квадратична форма.
29. Критерій Сільвестра.
30. Використання критерію Сільвестра при дослідженні функції багатьох змінних на екстремум.
31. Приведення кривої другого порядку до канонічного виду. Ортогональне перетворення. Інваріанти кривої при дії ортогонального перетворення.
32. Центральна крива. Визначення центра. Паралельне перенесення в центр. Інваріанти паралельного перенесення.

Завдання до самостійної роботи

1. Знайти який-небудь базис (ФСР) та визначити вимірність лінійного простору розв'язків системи лінійних алгебраїчних рівнянь.

$$1. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0. \end{cases} \quad 2. \begin{cases} 7x_1 + 2x_2 - x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$3. \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 5x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases} \quad 4. \begin{cases} 6x_1 - 9x_2 + 21x_3 - 3x_4 - 12x_5 = 0; \\ -4x_1 + 6x_2 - 14x_3 + 2x_4 + 8x_5 = 0; \\ 2x_1 - 3x_2 + 7x_3 - x_4 - 4x_5 = 0. \end{cases}$$

$$5. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 10x_2 - 3x_3 - 2x_4 - x_5 = 0; \\ 4x_1 + 19x_2 - 4x_3 - 5x_4 - x_5 = 0. \end{cases} \quad 6. \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 - 7x_4 - 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 2x_2 - 2x_4 - 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$7. \begin{cases} 12x_1 - x_2 + 7x_3 + 11x_4 - x_5 = 0; \\ 24x_1 - 2x_2 + 14x_3 + 22x_4 - 2x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + x_5 = 0. \end{cases} \quad 8. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 + x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - 5x_5 = 0; \\ x_1 + 3x_2 - x_3 - 6x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$9. \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 + 16x_2 - 6x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases} \quad 10. \begin{cases} \frac{3}{2}x_1 + \frac{5}{4}x_2 + \frac{5}{7}x_3 + x_4 = 0; \\ \frac{3}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \frac{2}{7}x_3 + \frac{2}{5}x_4 = 0; \\ \frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{6}x_2 + \frac{2}{21}x_3 + \frac{2}{15}x_4 = 0. \end{cases}$$

$$11. \begin{cases} 8x_1 + x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 5x_5 = 0. \end{cases} \quad 12. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + 12x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 10x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 + 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$13. \begin{cases} 7x_1 - 14x_2 + 3x_3 - x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 + 7x_5 = 0; \\ 5x_1 - 10x_2 + x_3 + 5x_4 - 13x_5 = 0. \end{cases} \quad 14. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 5x_3 - 3x_4 + x_5 = 0; \\ 3x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$15. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 - x_5 = 0. \end{cases}$$

$$16. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$17. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 10x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + 3x_3 - 10x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 6x_2 - 9x_3 + 30x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$18. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + 7x_4 + 5x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 5x_4 - 7x_5 = 0; \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2x_5 = 0. \end{cases}$$

$$19. \begin{cases} 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$20. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - x_4 + 4x_5 = 0; \\ 7x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$21. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 - 34x_4 - 5x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$22. \begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 + 5x_5 = 0; \\ 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0. \end{cases}$$

$$23. \begin{cases} x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 9x_4 - x_5 = 0; \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$24. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 4x_4 + 7x_5 = 0; \\ 7x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2x_4 + 4x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 0. \end{cases}$$

$$25. \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 + 4x_4 = 0; \\ 7x_1 - 4x_2 + x_3 + 3x_4 = 0; \\ 5x_1 + 7x_2 - 4x_3 - 6x_4 = 0. \end{cases}$$

$$26. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 + 3x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$27. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 7x_3 - 4x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + 2x_2 + 11x_3 - 6x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$28. \begin{cases} 6x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0. \end{cases}$$

$$29. \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + 16x_3 + x_4 + 6x_5 = 0. \end{cases}$$

$$30. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 - 2x_5 = 0; \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$31. \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 0; \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0; \\ x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 = 0; \\ 4x_1 + 3x_2 - 4x_3 - x_4 = 0; \\ 4x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 0. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x_1 - x_2 + 10x_3 + x_4 - x_5 = 0; \\ x_1 - x_2 + 8x_3 - 2x_4 + 2x_5 = 0; \\ 3x_1 - 3x_2 - 12x_3 - 4x_4 + 4x_5 = 0. \end{cases} \quad 34. \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 4x_5 = 0; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0; \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

2. Знайти власні значення та власні вектори лінійного перетворення, матричним уявленням якого є матриця A . Вказати відповідне перетворення, та базис, в якому матриця A має діагональний вигляд. Привести матрицю до діагонального вигляду. Здійснити перевірку $A' = Q^{-1}AQ$.

$$1. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix}. \quad 2. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \quad 3. A = \begin{pmatrix} 19/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2/3 & -2/3 & 11/3 \end{pmatrix}.$$

$$4. A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \quad 5. A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}. \quad 6. A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$7. A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}. \quad 8. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \quad 9. A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$10. A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}. \quad 11. A = \begin{pmatrix} 5 & -4 & 4 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \quad 12. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$13. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}. \quad 14. A = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 15. A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$16. A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 4 & -1 & 4 \\ 4 & -2 & 5 \end{pmatrix}. \quad 17. A = \begin{pmatrix} 7 & -6 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \end{pmatrix}. \quad 18. A = \begin{pmatrix} 13 & 2 & -2 \\ 6 & 9 & -6 \\ 2 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$19. A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad 20. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2/3 & 7/3 & 4/3 \\ 2/3 & 2/3 & 5/3 \end{pmatrix}. \quad 21. A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$22. A = \begin{pmatrix} 7/3 & 2/3 & 2/3 \\ 4/3 & 5/3 & 2/3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad 23. A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 2 & 1 & -3 \\ -6 & -3 & 9 \end{pmatrix}. \quad 24. A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$25. A = \begin{pmatrix} 6 & 1 & -1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \quad 26. A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 4 \end{pmatrix}. \quad 27. A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$28. A = \begin{pmatrix} 7 & -4 & -2 \\ -2 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}. \quad 29. A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2/3 & 5/3 & -2/3 \\ -2/3 & 2/3 & -13/3 \end{pmatrix}. \quad 30. A = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

$$31. A = \begin{pmatrix} 5/3 & -2/3 & -4/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2/3 & 2/3 & 7/3 \end{pmatrix}. \quad 32. A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{pmatrix}. \quad 33. A = \begin{pmatrix} 19/3 & 2/3 & -2/3 \\ 2 & 5 & -2 \\ 2/3 & -2/3 & 11/3 \end{pmatrix}.$$

3. Привести квадратичну форму $F(x_1; x_2; x_3)$ до канонічного вигляду методом ортогональних перетворень. Вказати матрицю переходу до власного базису T та саме лінійне перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду.

$$1. F(x_1; x_2; x_3) = 4(x_2)^2 - 3(x_3)^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 8x_2x_3.$$

$$2. F(x_1; x_2; x_3) = 4(x_1)^2 + 4(x_2)^2 + (x_3)^2 - 2x_1x_2 + 2\sqrt{3}x_2x_3.$$

$$3. F(x_1; x_2; x_3) = 2(x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 2(x_3)^2 + 8x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

$$4. F(x_1; x_2; x_3) = 2(x_1)^2 + 9(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - 4x_1x_2 + 4x_2x_3.$$

$$5. F(x_1; x_2; x_3) = -4(x_1)^2 - 4(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - 4x_1x_2 + 8x_1x_3 - 8x_2x_3.$$

$$6. F(x_1; x_2; x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 5(x_3)^2 - 6x_1x_2 + 2x_1x_3 - 2x_2x_3.$$

$$7. F(x_1; x_2; x_3) = 4(x_1)^2 + 4(x_2)^2 + (x_3)^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

$$8. F(x_1; x_2; x_3) = 3(x_1)^2 + (x_2)^2 - 3/2(x_3)^2 + 2\sqrt{3}x_1x_2 - x_1x_3 + \sqrt{3}x_2x_3.$$

$$9. F(x_1; x_2; x_3) = -(x_1)^2 - (x_2)^2 - 3(x_3)^2 - 2x_1x_2 - 6x_1x_3 + 6x_2x_3.$$

$$10. F(x_1; x_2; x_3) = (x_1)^2 - 7(x_2)^2 + (x_3)^2 - 4x_1x_2 - 2x_1x_3 - 4x_2x_3.$$

11. $F(x_1; x_2; x_3) = 2(x_1)^2 + (x_2)^2 + 3(x_3)^2 - 4\sqrt{2}x_2x_3$.
12. $F(x_1; x_2; x_3) = 3(x_1)^2 - 7(x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 8x_1x_2 - 8x_1x_3 - 8x_2x_3$.
13. $F(x_1; x_2; x_3) = (x_1)^2 + 5(x_2)^2 + (x_3)^2 - 4x_1x_2 + 5\sqrt{2}x_1x_3 + \sqrt{2}x_2x_3$.
14. $F(x_1; x_2; x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 - 4/3x_1x_2 - (8\sqrt{2}/3)x_2x_3$.
15. $F(x_1; x_2; x_3) = 5(x_1)^2 + 9(x_2)^2 + 9(x_3)^2 - 12x_1x_2 - 6x_1x_3$.
16. $F(x_1; x_2; x_3) = 5(x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + x_2x_3$.
17. $F(x_1; x_2; x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 - (x_3)^2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
18. $F(x_1; x_2; x_3) = -2(x_1)^2 + 2(x_2)^2 - 2(x_3)^2 + 4x_1x_2 - 6x_1x_3 + 4x_2x_3$.
19. $F(x_1; x_2; x_3) = 2(x_1)^2 + 3(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - 8x_1x_2 - 4\sqrt{2}x_1x_3 + 2\sqrt{2}x_2x_3$.
20. $F(x_1; x_2; x_3) = -4(x_1)^2 + (x_2)^2 - 4(x_3)^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
21. $F(x_1; x_2; x_3) = 10(x_1)^2 + 14(x_2)^2 + 7(x_3)^2 - 10x_1x_2 - \sqrt{2}x_1x_3 - 5\sqrt{2}x_2x_3$.
22. $F(x_1; x_2; x_3) = 1,5(x_1)^2 - 5(x_2)^2 + 1,5(x_3)^2 + 4x_1x_2 - x_1x_3 - 4x_2x_3$.
23. $F(x_1; x_2; x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + 2(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 2\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.
24. $F(x_1; x_2; x_3) = 2(x_1)^2 - 3(x_3)^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 - 4x_1x_3 + 4\sqrt{3}x_2x_3$.
25. $F(x_1; x_2; x_3) = (x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2 + 4/3x_1x_3 + (8\sqrt{2}/3)x_2x_3$.
26. $F(x_1; x_2; x_3) = (x_1)^2 + (x_3)^2 + 8x_1x_2 + 4\sqrt{2}x_1x_3 - 2\sqrt{2}x_2x_3$.
27. $F(x_1; x_2; x_3) = 5(x_1)^2 + 13(x_2)^2 + 5(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 8x_2x_3$.
28. $F(x_1; x_2; x_3) = 2(x_1)^2 + 2(x_2)^2 + 2(x_3)^2 + 2/3x_1x_2 + (4\sqrt{2}/3)x_2x_3$.
29. $F(x_1; x_2; x_3) = 5(x_2)^2 + 4(x_2)^2 + 2(x_3)^2 - 4x_1x_2 - 2\sqrt{2}x_1x_3 + 4\sqrt{2}x_2x_3$.
30. $F(x_1; x_2; x_3) = -2(x_1)^2 + 5(x_2)^2 - 2(x_3)^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
31. $F(x_1; x_2; x_3) = -3(x_1)^2 + 9(x_2)^2 + 3(x_3)^2 + 2x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3$.
32. $F(x_1; x_2; x_3) = 6(x_1)^2 + 5(x_2)^2 + 7(x_3)^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3$.

$$33. F(x_1; x_2; x_3) = 11(x_1)^2 + 5(x_2)^2 + 2(x_3)^2 + 16x_1x_2 + 4x_1x_3 - 20x_2x_3.$$

$$34. F(x_1; x_2; x_3) = (x_1)^2 - 2(x_2)^2 + (x_3)^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3.$$

4. Знайти екстремум функції трьох змінних, використавши критерій Сільвестра.

$$1. z = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 6.$$

$$2. z = 2x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3 + x_1 - 4x_2 - 3x_3 + 6.$$

$$3. z = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1 - x_2 + 1.$$

$$4. z = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 8x_1x_3 - 14x_1 - 4x_2 + 14x_3 + 16.$$

$$5. z = 3x_1^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_3 - 5.$$

$$6. z = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 34x_1 + 2x_2 - 100.$$

$$7. z = x_1^2 + x_2^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 - 6x_2x_3 - 6x_1x_3 + 2x_1 + 2x_2 + 4x_3.$$

$$8. z = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 6x_1 - 24x_2 + 18x_3 + 30.$$

$$9. z = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2.$$

$$10. z = 2x_1^2 - 7x_2^2 - 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 16x_1x_3 + 204x_2x_3 + 60x_1 - 12x_2 - 64x_3 - 90.$$

$$11. z = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 - 4x_1 + 6x_2 - 2x_3 + 3.$$

$$12. z = 4x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 4x_1x_2 - 8x_1x_3 + 4x_2x_3 - 28x_1 + 2x_2 + 16x_3 + 45.$$

$$13. z = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1.$$

$$14. z = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3.$$

$$15. z = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 1.$$

$$16. z = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 - 2x_1 + 6x_2 + 2x_3.$$

17. $z = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6x_3 + 1.$
18. $z = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 6x_1 - 24x_2 + 18x_3 + 30.$
19. $z = 2x_1^2 + 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 + 2.$
20. $z = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 6x_2 + 2x_3.$
21. $z = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 - 3.$
22. $z = 2x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 - 3.$
23. $z = 7x_1^2 + 6x_2^2 + 5x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 - 18.$
24. $z = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 8x_1x_3 - 4x_2x_3 - 6.$
25. $z = 6x_1^2 - 2x_2^2 + 6x_3^2 + 4x_1x_3 + 8x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 1.$
26. $z = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + 6.$
27. $z = 2x_1^2 + x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 2x_1 - x_2 - 1.$
28. $z = 2x_1^2 - 2x_2^2 - 5x_3^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 - 4x_3 - 2.$
29. $z = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 + 1.$
30. $z = x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3 - 6x_3 - 1.$
31. $z = 4x_1^2 + 3x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3 + 4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + 3.$
32. $z = 2x_1^2 + 5x_2^2 + 2x_3^2 - 2x_1x_2 - 4x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 - 10x_2 - 2x_3 - 1.$
33. $z = x_1^2 + 5x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + 2x_2x_3 + 2x_1 + 6x_2 + 2x_3.$
34. $z = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 - 10x_1x_3 + 4x_2x_3 + 2x_1 + 4x_2 - 10x_3 - 1.$

Рекомендована література

Основна

1. Робоча програма навчальної дисципліни "Математика для економістів" для студентів галузі знань "Економіка і підприємництво" всіх форм навчання / укл. Л. М. Малярець, О. Д. Анохіна, І. Л. Лебедева — Х. : ХНЕУ, 2010. — 84 с.

2. Травкін Ю. І. Математика для економістів / Травкін Ю. І., Малярець Л. М. — Х. : ВД "ІНЖЕК", 2005. — 816 с.

Додаткова

3. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Головина Л. И. — М. : Наука, 1971. — 286 с.

4. Ильин В. А. Линейная алгебра / Ильин В. А., Позняк Э. Г. — М. : Наука, 1984. — 296 с.

5. Крутицкая Н. И. Линейная алгебра в вопросах и задачах / Крутицкая Н. И., Шишкин А. А. — М. : Высшая школа, 1985. — 120 с.

6. Рублев А. Н. Курс линейной алгебры и аналитической геометрии / Рублев А. Н. — М. : Высш. школа, 1972. — 420 с.

7. Проскуряков И. В. Сборник задач по линейной алгебре / Проскуряков И. В. — М. : Высш. школа, 1984. — 336 с.

8. Справочник по математике для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. — М. : Высшая школа, 1987. — 308 с.

9. Індивідуальні завдання з основ лінійної алгебри та методичні рекомендації до їх виконання з навчальної дисципліни "Математика для економістів" для студентів усіх напрямів підготовки всіх форм навчання / укл. В. Г. Титарєв. — Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. — 64 с.

10. Титарєв В. Г. Тексти лекцій з розділу "Лінійний оператор" курсу "Лінійна алгебра" / Титарєв В. Г., Анохіна О. Д. — Х. : ХДЕУ, 2004. — 80 с.

11. Титарєв В. Г. Лінійна алгебра (розділ "Квадратичні форми. Криві та поверхні другого порядку") : конспект лекцій / Титарєв В. Г., Анохіна О. Д. — Х. : ХНЕУ, 2005. — 64 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи з теми
"Елементи матричного аналізу"
навчальної дисципліни
"МАТЕМАТИКА ДЛЯ ЕКОНОМІСТІВ"
для студентів галузі знань 0305
"Економіка та підприємництво"
всіх форм навчання**

Укладач **Титарев** Віктор Георгійович

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**

Редактор **Пушкар І. П.**

Корректор **Бриль В. О.**

План 2012 р. Поз. № 44.

Підп. до друку Формат 60 x 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.

Ум.-друк. арк. 3,75. Обл.-вид. арк. 4,69. Тираж _____ прим. Зам. № _____

Видавець і виготівник — видавництво ХНЕУ, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк № 481 від 13.06.2001 р.