МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Елементи теорії матриць і визначників" навчальної дисципліни

"МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ І ЛІНІЙНА АЛГЕБРА"

для студентів галузей знань
0305 "Економіка та підприємництво",
0306 "Менеджмент і адміністрування"
денної форми навчання

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2016

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.

Протокол № 5 від 23.12.2015 р.

Укладачі: А. В. Воронін
О. В. Гунько

М 54

Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Елементи теорії матриць і визначників" навчальної дисципліни "Математичний аналіз і лінійна алгебра" для студентів галузей знань 0305 "Економіка та підприємництво", 0306 "Менеджмент і адміністрування" денної форми навчання / уклад. А. В. Воронін, О. В. Гунько. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 76 с.

Розглянуто основні моменти, які допоможуть студентам під час виконання самостійної роботи з навчальної дисципліни. Наведено багато вправ до самостійного розв'язання. До кожного завдання надано приклад розв'язання подібного. Вміщено запитання для самоперевірки теоретичних знань за вказаними темами.

Рекомендовано для студентів економічних спеціальностей.

Вступ

Опанування знань в галузі економіки неможливе без використання досягнень сучасної математичної теорії. Застосування математичної методології сприяє якісному викладанню базових засад економічного аналізу, що, безумовно, розширює можливості економічних досліджень. Це, у свою чергу, ініціює зростання загального рівня математичної підготовки економістів та їхніх навичок у застосуванні математичного моделювання під час розв'язання різноманітних економічних задач.

Означене робить актуальним та зумовлює практичну необхідність у вивченні навчальної дисципліни "Математичний аналіз і лінійна алгебра" в систематизованій формі з відповідною логікою розміщення базового матеріалу, згідно з робочою програмою. Ці методичні рекомендації орієнтовано на розділи лінійної алгебри, які мають абстрактний характер, що зумовлює певні труднощі в засвоєнні навчального матеріалу. Зміст та порядок викладення основних положень лінійної алгебри такий, що сприяє набуттю базових навичок у матричному аналізі та використанні їх для розв'язання реальних задач та прикладів.

Методичні рекомендації сприятимуть наданню допомоги студентам в оволодінні методикою розв'язання практичних задач із відповідною активізацією їхньої самостійної роботи в межах дисципліни.

Матеріал, викладений у цих методичних рекомендаціях, може бути використано в таких дисциплінах, як: "Теорія ймовірностей та математична статистика", "Оптимізаційні методи і моделі", "Економетрика" тощо.

Основними завданнями вивчення теми "Елементи теорії матриць і визначники" є такі:

визначення основних понять (визначника, рангу матриці; оберненої матриці, власних значень та векторів матриць; канонічної форми квадратичної форми).

ознайомлення з основними методами розв'язування задач.

Згідно з вимогами освітньо-професійної програми, студенти мають

знати:

основні означення, теореми, математичні методи, за допомогою яких можна знаходити визначники n-го порядку;

як знаходити обернену матрицю, визначати ранг матриці, установлювати сумісність лінійної системи;

уміти:

виконувати елементарні перетворення матриць;

за їхньою допомогою знаходити визначник квадратної матриці, ранг прямокутної матриці $m \times n$;

розв'язувати задачі: з'ясовувати сумісність (несумісність) систем лінійних рівнянь, розв'язувати системи лінійних рівнянь;

знаходити власні значення та вектори матриці;

зводити квадратичну форму до канонічного вигляду.

1. Визначники матриць

Поняття визначника виникло, у зв'язку із проблемою відшукання формул для розв'язування системи лінійних рівнянь.

Необхідно розглянути систему двох лінійних рівнянь із двома невідомими x та y:

$$\begin{cases} b_{11}x + b_{12}y = c_1; \\ b_{21}x + b_{22}y = c_2. \end{cases} \tag{1.1}$$

Щоб знайти невідому змінну x, слід помножити перше рівняння на b_{22}, а друге на $-b_{12}$. Додаючи знайдені ліві та праві частини, буде отримано:

$$(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})x = c_1b_{22} - c_2b_{12}.$$

Аналогічно, помноживши перше рівняння на $-b_{21}$, друге – на $-b_{11}$, буде знайдено:

$$(b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12})y = c_2b_{11} - c_1b_{21}.$$

Припускаючи, що $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0$, визначено:

$$x = \frac{c_1b_{22} - c_2b_{12}}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}, \quad y = \frac{c_2b_{11} - c_1b_{21}}{b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}}. \tag{1.2}$$

Безпосередньою перевіркою неважко переконатися, що значення для x та y, які задають формулами (1.2), дійсно задовольняють систему рівнянь (1.1). Таким чином, якщо $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12} \neq 0$, то система лінійних рівнянь має єдиний розв'язок (1.2).

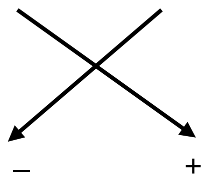
Необхідно розглянути таблицю чисел:

$$\begin{Vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{Vmatrix}, \tag{1.3}$$

яку складено з коефіцієнтів при невідомих x та y системи (1.1). Її називають квадратною матрицею 2-го порядку. Позначити її для стислості літерою B. Вираз $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$, який міститься у знаменнику формул (1.2), визначено числами матриці (1.3), за таким правилом: треба взяти добуток чисел, розташованих на головній діагоналі, та відняти від нього добуток чисел, розташованих на побічній діагоналі. Знайдений вираз $b_{11}b_{22} - b_{21}b_{12}$ називають **визначником 2-го порядку** матриці B і позначають його через $|B|$ або $\|B\|$ або $det(B)$.

Наприклад, якщо $B = \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$, то $|B| = \left\| \begin{pmatrix} 8 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \right\| = 8 \cdot (-3) - 1 \cdot (-4) = -20.$

Правило, за яким обчислюють визначник матриці 2-го порядку, схематично можна зобразити таким чином:



Узявши наведене визначення визначника 2-го порядку, слід зазначити, що чисельники у формулах (1.2) може бути подано тепер у такому вигляді:

$$c_1 b_{22} - c_2 b_{11} = \begin{vmatrix} c_1 & b_{12} \\ c_2 & b_{22} \end{vmatrix} = \Delta_1, \quad c_2 b_{11} - c_1 b_{21} = \begin{vmatrix} b_{11} & c_1 \\ b_{21} & c_2 \end{vmatrix} = \Delta_2,$$

де вказані матриці визначають заміною першого, другого стовпця, відповідно, стовпцем вільних членів.

Формули (1.2) набирають тепер такого вигляду:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_{12} \\ c_2 & b_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} b_{11} & c_1 \\ b_{21} & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix}} = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \tag{1.4}$$

де $\Delta = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} \neq 0.$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 5x + 8y = 34; \\ 11x - 9y = 56. \end{cases}$$

Розв'язання. Необхідно скласти матрицю коефіцієнтів при невідомих x та y:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 11 & -9 \end{bmatrix}$$

та обчислити її визначник $|A| = 5 \cdot (-9) - 11 \cdot 8 = -133$.

Оскільки $|A| \neq 0$, то формули (1.4) може бути застосовано.

Слід обчислити визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 34 & 8 \\ 56 & -9 \end{vmatrix} = 34 \cdot (-9) - 56 \cdot 8 = -754;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 34 \\ 11 & 56 \end{vmatrix} = 5 \cdot 56 - 11 \cdot 34 = -94.$$

Звідки випливає, що:

$$x = \frac{\Delta_1}{|A|} = \frac{-754}{-133} \cong 5{,}67; \quad y = \frac{\Delta_2}{|A|} = \frac{-94}{-133} \cong 0{,}7.$$

Відповідь: $x = 5{,}67$; $y = 0{,}7$.

Система трьох лінійних рівнянь

Необхідно розглянути тепер систему трьох рівнянь із трьома невідомими: x, y, z:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_3 \end{cases}. \qquad (1.5)$$

Для знаходження x слід помножити рівняння системи (1.5), відповідно, на $a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}$, $a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}$, $a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}$ і додати визначені ліві та праві частини. Після зведення подібних членів (відносно x, y, z) виявиться, що коефіцієнти при y та z дорівнюють 0. Припускаючи, що коефіцієнт при x відмінний від 0, буде визначено:

$$x = \frac{b_1a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}b_3 + b_2a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}b_3 - b_2a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}b_1}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{23}a_{32}a_{11}}. \qquad (1.6)$$

Далі слід скласти матрицю коефіцієнтів при невідомих x, y, z:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Цю матрицю називають квадратною матрицею 3-го порядку. Вираз знаменника дробу (1.6) складено з елементів матриці A за таким правилом: добуток елементів, розташованих на головній діагоналі, та два добутки чисел, розташованих у вершинах двох рівнобічних трикутників з основою, паралельною головній діагоналі, і вершиною у протилежному куті, беруть зі знаком "+". Три добутки, які будують за тим же законом, але відносно побічної діагоналі, беруть зі знаком "–". Це правило називають "правилом трикутника" і схематично воно може бути зображено так:

Рис. 1.1. **Правило трикутників**

Так складену суму із шести доданків (три перших узяті зі знаком "+", а останні три – зі знаком "–") називають визначником 3-го порядку матриці A і позначають:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Наприклад, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} -9 & -2 & 0 \\ 1 & 11 & 5 \\ 3 & 8 & -3 \end{pmatrix},$$

то $|A| = \begin{vmatrix} -9 & -2 & 0 \\ 1 & 11 & 5 \\ 3 & 8 & -3 \end{vmatrix} = (-9)\cdot 11\cdot(-3)+(-2)\cdot 5\cdot 3+1\cdot 8\cdot 0-$

$$-[0\cdot 11\cdot 3+5\cdot 8\cdot(-9)+1\cdot(-2)\cdot(-3)] = 621.$$

Таким чином, знаменник виразу (1.6) є визначником $|A|$. У чисельнику знаходиться визначник, який знаходять із матриці A шляхом заміни її першого стовпця правими частинами $\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix}$ системи (1.5):

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Аналогічно, якщо рівняння системи (1.5) помножити послідовно на $a_{31}a_{23}-a_{21}a_{33}$, $a_{13}a_{31}-a_{11}a_{33}$, $a_{11}a_{23}-a_{21}a_{13}$ та додати їх, буде знайдено формулу для невідомого y. А якщо ці різниці мають вигляд $a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31}$, $a_{12}a_{31}-a_{11}a_{32}$, $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$, буде визначено вираз для третього невідомого z:

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad |\Delta_3| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

$$x = \frac{\Delta_1}{|A|}; \quad y = \frac{\Delta_2}{|A|}; \quad z = \frac{\Delta_3}{|A|}. \tag{1.7}$$

Приклад. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} x + 2y + z = 4 \\ 3x + 5y - 7z = 1. \\ 2x + 7y - z = 8 \end{cases}$$

Розв'язання. Необхідно обчислити визначник матриці системи:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -7 \\ 2 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -5 - 4 \cdot 7 + 3 \cdot 7 - (2 \cdot 5 - 3 \cdot 2 - 7 \cdot 7) = 33$$

та додаткові визначники:

$$|\Delta_1| = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & -7 \\ 8 & 7 & -1 \end{vmatrix} = -4 \cdot 5 - 2 \cdot 7 \cdot 8 + 7 - (8 \cdot 5 - 2 - 7 \cdot 4 \cdot 7) = 33;$$

$$|\Delta_2| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & -7 \\ 2 & 8 & -1 \end{vmatrix} = -1 - 2 \cdot 7 \cdot 4 + 3 \cdot 8 - (2 - 3 \cdot 4 - 8 \cdot 7) = 33;$$

$$|\Delta_3| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{vmatrix} = 5 \cdot 8 - 2 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 7 - (2 \cdot 5 \cdot 4 + 7 - 3 \cdot 2 \cdot 8) = 33.$$

Тому $x = \frac{33}{33} = 1,\ y = \frac{33}{33} = 1,\ z = \frac{33}{33} = 1.$

Визначники n-го порядку

Квадратну таблицю n^2 чисел, розташованих у n рядках та n стовпцях,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

будуть називати матрицею n-го порядку.

Щоб помітити загальне правило складання визначників матриць n-го порядку, слід придивитися уважно до визначників 2-го та 3-го порядків. Не враховуючи знака, необхідно відповісти на питання: чим характеризується добуток, який входить до складу визначника? Відразу помітно, що кількість множників у кожному добутку дорівнює порядку матриці.

Далі можна побачити, що в ньому множники взяті по одному з кожного рядка й кожного стовпця. Це характерно для визначників 2-го та 3-го порядків. Тому можна припустити, що буде знайдено розумне визначення визначника матриці n-го порядку, якщо в його основу покладено помічену закономірність.

Необхідно визначити, скільки можна скласти різних добутків з елементів матриці A, узятих по одному з кожного рядка та стовпця. Слід зазначити, що під різними розуміють добутки, складені різними способами, так що різні в нашому сенсі добутки можуть випадково опинитись однаковими за своїми значеннями.

Нехай P – деякий такий добуток. Множник P із першого рядка має вигляд $a_{1\alpha}$, де α – номер стовпця, тобто $1 \le \alpha \le n$. Множник P із другого рядка має вигляд $a_{2\beta}$, де β – номер стовпця, тобто $1 \le \beta \le n$. Нарешті, множник із n-го рядка має вигляд $a_{2\omega}$, де ω – номер стовпця, тобто $1 \le \omega \le n$.

Таким чином,

$$P = a_{1\alpha} a_{1\beta} \cdot \ldots \cdot a_{1\omega}. \quad (1.9)$$

З іншого боку, усі множники в цьому добутку взяті по одному з кожного стовпця, тобто всі інші індекси $\alpha, \beta, \ldots, \omega$ різні. А це означає, що вони утворюють перестановку чисел $1, 2, ..., n$. І так кожний добуток. Із цих міркувань випливає, що кількість добутків, із яких буде складатися визначник матриці (1.8), дорівнює кількості всіх перестановок із чисел $1, 2, ..., n$, тобто $n!$.

Необхідно додати таке визначення.

Визначником матриці *A* *n*-го порядку називають суму всіх $n!$ добутків елементів цієї матриці, узятих по одному з кожного рядка та стовпця; до того ж кожний добуток забезпечено знаком "+" або "–" за деяким правилом.

Припускаючи, що A є матрицею 4-го порядку, слід розглянути декілька прикладів.

1. Добутки $a_{11}a_{23}a_{34}$ та $a_{12}a_{23}a_{34}a_{41}a_{44}$ не входять до визначника $|A|$, оскільки кількість їхніх множників не дорівнює порядку матриці.

2. Добуток $a_{12}a_{31}a_{22}a_{44}$ також не входить до визначника, оскільки два множники, a_{12} і a_{22}, належать одному й тому ж (другому) стовпцю.

3. Добутки $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$ і $a_{31}a_{22}a_{43}a_{14}$ мають множники по одному з кожного рядка та стовпця, тому вони входять до складу визначника.

Щоб наведене визначення зробити повним, треба ще сформулювати правило для знака, за яким беруть той чи інший добуток.

Означення. Нехай є перестановка $(\alpha, \beta, ..., \omega)$ чисел $1, 2, ..., n$. Два числа, які входять до цієї перестановки, утворюють **інверсію**, якщо більше число з такої пари передує меншому. Кількість пар, що утворюють інверсію, називають **кількістю інверсій перестановки**.

У натуральній послідовності $1, 2, ..., n$ немає пар, що утворюють інверсію. З іншого боку, найбільше можливе значення міститься в перестановці $(n, n-1..., 2, 1)$; тут кожна з $C_n^2 = \dfrac{n(n-1)}{2}$ пар утворює інверсію. У перестановці $(3, 4, 2, 1, 5)$ мають місце п'ять інверсій: $(3,1)$; $(3,2)$; $(4,2)$; $(4,1)$; $(2,1)$.

Неважко помітити, що для визначення кількості інверсій у деякій перестановці $(\alpha, \beta, ..., \omega)$ слід урахувати, скільки для кожного числа є наступних за ним менших чисел, а потім усі знайдені значення скласти.

Наприклад, кількість інверсій у перестановці $(6, 7, 3, 5, 1, 4, 2)$ дорівнює $5+5+2+3+0+1+0=16$.

Означення. Перестановку називають **парною**, якщо вона має парну кількість інверсій, і **непарною**, якщо їхня кількість непарна.

Натуральне розташування $(1, 2, \ldots, n)$ має 0 інверсій, тому це парна перестановка. Указана перестановка $(6, 7, 3, 5, 1, 4, 2)$ теж парна, оскільки в неї 16 інверсій.

Правило для знака. Нехай P – фіксований добуток, який входить до складу визначника матриці A n-го порядку. Слід виписати множники в порядку слідування рядків: $P = a_{1\alpha}a_{2\beta}\ldots a_{n\omega}$. Тоді номери стовпців дадуть перестановку $(\alpha, \beta, \ldots, \omega)$. Добуток P беруть зі знаком "+", якщо ця перестановка парна, і зі знаком "–", якщо вона непарна.

Таким чином, визначник матриці A n-го порядку:

$$|A| = \sum_{(\alpha\beta\ldots\omega)} \pm a_{1\alpha}a_{2\beta}\ldots a_{n\omega},$$

де знак перед добутком визначено за правилом знака.

Приклад 1. Добуток $a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$ елементів, розташованих на головній діагоналі, завжди беруть зі знаком "+", оскільки натуральна перестановка $(1, 2, 3, \ldots, n)$ є парною.

Приклад 2. Добуток $a_{1n}a_{2n-1}\ldots a_{n-12}a_{n1}$ елементів побічної діагоналі входить до складу визначника зі знаком $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$, оскільки перестановка $(n, n-1, \ldots, 2, 1)$ має $\dfrac{n(n-1)}{2}$ інверсій.

Приклад 3. Необхідно розглянути добутки $a_{34}a_{13}a_{42}a_{21}$ і $a_{24}a_{33}a_{12}a_{41}$, які входять до складу визначника матриці 4-го порядку. Щоб визначити знаки, із якими ці добутки входять до складу визначника, треба їх переписати у вигляді $a_{13}a_{21}a_{34}a_{42}$ і $a_{12}a_{24}a_{33}a_{41}$. Далі виписати перестановки з номерів стовпців: $3, 1, 4, 2$ і $2, 4, 3, 1$. У першій перестановці є три інверсії: $(3, 1), (3, 2), (4, 2)$, у другій – чотири: $(4, 3); (4, 1); (3, 1); (2, 1)$. Отже, перший добуток входить до складу визначника зі знаком "–", другий – зі знаком "$+$".

За допомогою визначника n-го порядку

$$\Delta_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

можна компактно записати формули для розв'язання систем лінійних рівнянь.

Обчислення визначника матриці n-го порядку, засноване лише на означенні, є дуже трудомістким процесом, оскільки кількість доданків, із яких складено визначник, дуже швидко зростає зі збільшенням n. Для Δ_4 це $4! = 24$ доданки, а для Δ_5 їх уже $5! = 120$. У подальшому буде вказано методи їхнього обчислення, які швидко досягають мети.

Але в деяких випадках можна знайти визначник, використовуючи лише визначення. Нехай, наприклад, є нулі на якомусь одному рядку (останньому):

$$\Delta_n = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Оскільки в кожному добутку наявний елемент із кожного рядка, у тому числі й з останнього (нульового), то всі ці добутки будуть дорівнювати 0, отже їхня сума також дорівнює 0.

Отже, **якщо всі елементи якого-небудь рядка (стовпця) дорівнюють 0, то такий визначник дорівнює 0.**

Слід зазначити ще один важливий випадок. Нехай у матриці A всі елементи, розташовані вище від головної діагоналі, дорівнюють 0, тобто для $j > i$ виконано рівність $a_{ij} = 0$. У цьому разі ті добутки, які мають як множники хоча б один елемент, розташований вище від головної діагоналі, будуть дорівнювати 0. Слід вилучити всі ці нульові добутки, які містять множники $a_{ij} = 0$ з $j > i$. Тому множники, які залишились, будуть мати такий вигляд:

$$a_{1\alpha_1} \cdot a_{2\alpha_2} \cdot \ldots \cdot a_{n\alpha_n},$$

де $\alpha_1 \le 1, \quad \alpha_2 \le 2, \ldots, \alpha_n \le n$.

Але із цих нерівностей послідовно буде визначено:

$$\alpha_1 = 1, \quad \alpha_2 = 2, \ldots, \alpha_n = n.$$

Слід нагадати, що натуральні числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ попарно відрізняються.

Таким чином, лише один добуток, а саме $a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}$, не має елементів, розташованих вище від головної діагоналі. Оскільки цей добуток входить зі знаком "+", то остаточно буде визначено:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} \cdot \ldots \cdot a_{nn}.$$

Аналогічно може бути визначено формулу для випадку, коли дорівнюють 0 всі елементи, розташовані нижче від головної діагоналі.

Матриці

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix} \text{ або } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

називають **трикутними.**

Слід зазначити, що визначник першого порядку $|a|$ дорівнює елементу цієї матриці.

Означення. Матрицю називають особливою (виродженою), якщо її визначник дорівнює 0.

Теоретичні запитання для самодіагностики

1. Назвіть дії над матрицями.
2. За якої умови можна додавати матриці?
3. За якої умови можна перемножувати матриці?
4. Чи зміниться добуток AB, якщо переставити місцями матриці-множники, за умови, що такий добуток існує?
5. Добуток матриць $A \cdot A^T$ існує завжди чи ні?

Властивості визначників

Обчислення визначників буде полегшено, якщо користуватися їхніми властивостями.

Разом із матрицею:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

слід розглянути матрицю:

$$A' = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

складену з матриці A заміною рядків на стовпці. Рядки матриці A' є стовпцями для матриці A. Матриця A' є **транспонованою** до матриці A.

Властивість 1. Під час транспонування визначник матриці не змінюється, тобто

$$|A'| = |A|.$$

Властивість 2. Якщо у квадратній матриці поміняти два рядки (або два стовпці), залишивши останні на своїх місцях, то визначник складеної матриці буде дорівнювати визначнику початкової матриці із протилежним знаком. Коротше кажучи, у разі заміни місцями двох рядків (стовпців) визначник змінює знак.

Властивість 3. Якщо квадратна матриця має два однакових рядки (або два однакових стовпці), то визначник дорівнює 0.

Означення. Нехай дана матриця A. Слід викреслити в ній i-й рядок і k-й стовпець, зрушити, не порушуючи порядку, елементи, що залишились. Визначник складеної матриці $n-1$-го порядку називають **мінором** елемента i-го рядка і k-го стовпця матриці A і позначають через A_{ik}.

Наприклад, у матриці

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 10 & 3 \\ 2 & 22 & 5 & -1 \\ 3 & 6 & 8 & -4 \\ 0 & 2 & 30 & 12 \end{pmatrix}$$

мінори A_{23} і A_{44} будуть мати такий вигляд:

$$\Delta_{23} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix} \quad \Delta_{44} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 10 \\ 2 & 22 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Оскільки визначник матриці є числом, то мінор – це теж число. Для матриці n-го порядку буде, очевидно, n^2 мінорів елементів a_{ij}, $i, j = \overline{1, n}$. Для кожного елемента свій мінор.

Означення*.* Нехай *А* – матриця n-го порядку. Мінор A_{ik} елемента i-го рядка і k-го стовпця матриці A, узятий зі знаком $(-1)^{i+k}$, називають **алгебраїчним доповненням** цього елемента:

$$A_{ik} = (-1)^{i+k} \Delta_{ik}.$$

Наприклад,

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \Delta_{23} = -\begin{pmatrix} 9 & -1 & 3 \\ 3 & 6 & -4 \\ 0 & 2 & 12 \end{pmatrix}; \quad A_{44} = (-1)^{4+4} \Delta_{44} = \begin{pmatrix} 9 & -1 & 10 \\ 2 & 22 & 5 \\ 3 & 6 & 8 \end{pmatrix}.$$

Слід зазначити, що мінори двох сусідніх елементів завжди мають протилежні знаки, оскільки в разі заміни i чи k на 1 парність числа $i + k$ змінюється. Послідовність знаків у мінорів (для визначення алгебраїчних доповнень) можна зобразити таким чином:

+	–	+	–	
–	+	–	+	
+	–	+	–	
–	+	–	+	

Властивість 4. Визначник матриці A n-го порядку дорівнює сумі добутків усіх елементів будь-якого фіксованого рядка на їхні алгебраїчні доповнення, тобто для будь-якого $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$ має місце рівність:

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + ... + a_{in}A_{in}, \tag{1.10}$$

названа **розкладання визначника $|A|$ за елементами i-го рядка**.

Аналогічно для будь-якого $k = 1,\ 2,\ ...,\ n$ має місце розкладання визначника $|A|$ за елементами k-го стовпця:

$$|A| = a_{1k}A_{1k} + a_{2k}A_{2k} + ... + a_{nk}A_{nk}. \tag{1.11}$$

Таке розкладання називають **розкладанням визначника за Лапласом.**

Приклад 1. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 & 9 \\ y & x & p & z \\ 7 & 1 & 10 & -8 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. За правилом розкладання визначника за Лапласом за елементами другого рядка буде:

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 & 9 \\ y & x & p & z \\ 7 & 1 & 10 & -8 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} = y(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -2 & 6 & 9 \\ 1 & 10 & -8 \\ 5 & 1 & -1 \end{vmatrix} + x(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 6 & 9 \\ 7 & 10 & -8 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+ p(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 9 \\ 7 & 1 & -8 \\ 2 & 5 & -1 \end{vmatrix} + z(-1)^{2+4}\begin{vmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 7 & 1 & 10 \\ 2 & 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 671y - 177x - 432p + 25z.$$

Приклад 2. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} -w & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -w & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -w \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. За правилом розкладання визначника за Лапласом за елементами третього стовпця буде:

$$\begin{vmatrix} -w & -2 & 0 & -1 \\ -1 & -w & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & -w \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2(-1)^{4+3}\begin{vmatrix} -w & -2 & -1 \\ -1 & -w & 1 \\ 1 & -1 & -w \end{vmatrix} =$$

$$= -2[(-w)(w^2+1) + 2(w-1) - (1+w)] = (-2)[-w^3 - 3] = 2w^3 + 6.$$

Властивість 5. Якщо всі елементи будь-якого рядка або стовпця дорівнюють 0, то визначник такої матриці дорівнює 0.

Властивість 6. Лінійність. Якщо *j*-й стовпець (рядок) матриці A_j визначника D є лінійною комбінацією двох будь-яких стовпців (рядків) B і C: $A_j = \lambda B + \mu C$, то й сам визначник є лінійною комбінацією визначників $D_j(B)$ та $D_j(C)$: $D = D_j(\lambda B + \mu C) = \lambda D_j(B) + \mu D_j(C)$

або

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \lambda b_{1j} + \mu c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \lambda b_{2j} + \mu c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \lambda b_{nj} + \mu c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & b_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & c_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & c_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Зауваження: властивість 6 залишається правильною, якщо рядок (стовпець) є лінійною комбінацією не двох, а будь-якої кількості рядків (стовпців).

Властивість 7. Під час множення будь-якого стовпця або рядка на число λ сам визначник слід помножити на це число:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & \lambda a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & \lambda a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & \lambda a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

або загальний множник усіх елементів будь-якого стовпця (рядка) визначника можна винести за знак визначника.

Властивість 8. Якщо будь-який стовпець (рядок) матриці A є лінійною комбінацією інших стовпців, то визначник $|A|$ дорівнює 0.

Зауваження. Стовпці $A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$ визначника є лінійно залежними тоді й тільки тоді, коли один із них є лінійною комбінацією решти. Тому властивості 8 можна надати таку форму: якщо стовпці визначника є лінійно залежними, то визначник дорівнює 0.

Властивість 9. Визначник не зміниться, якщо до будь-якого стовпця додати довільну лінійну комбінацію решти його стовпців (рядків) .

Властивість 10. Сума добутків алгебраїчних доповнень елементів одного рядка на елементи іншого рядка дорівнює 0.

$$\sum_{j=1}^{n} A_{ij} a_{kj} = 0\,,\ i \neq k\,.$$

Приклад 3. Обчислити визначник: $\begin{vmatrix} 7 & 9 & -1 & -4 & 6 \\ -5 & 7 & 10 & -3 & 8 \\ 13 & -7 & 5 & -5 & 9 \\ 19 & -11 & 0 & 4 & 5 \\ 2 & 7 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}$.

Розв'язання. Слід додати до першого стовпця решту стовпців:

$$\begin{vmatrix} 17 & 9 & -1 & -4 & 6 \\ 17 & 7 & 10 & -3 & 8 \\ 17 & -7 & 5 & -5 & 11 \\ 17 & -11 & 0 & 4 & 5 \\ 17 & 7 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix},$$

Із першого стовпця винести множник 17:

$$17\cdot\begin{vmatrix} 1 & 9 & -1 & -4 & 6 \\ 1 & 7 & 10 & -3 & 8 \\ 1 & -7 & 5 & -5 & 11 \\ 1 & -11 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 7 & 3 & 6 & -1 \end{vmatrix}.$$

Відняти перший рядок із другого, третього, четвертого та п'ятого рядків та вписати у відповідні рядки:

$$\Delta = 17\cdot\begin{vmatrix} 1 & 9 & -1 & -4 & 6 \\ 0 & -2 & 11 & 1 & 2 \\ 0 & -16 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & -20 & 1 & 8 & -1 \\ 0 & -2 & 4 & 10 & -7 \end{vmatrix}.$$

Розкласти останній визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = 17\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} -2 & 11 & 1 & 2 \\ -16 & 6 & -1 & 5 \\ -20 & 1 & 8 & -1 \\ -2 & 4 & 10 & -7 \end{vmatrix}\begin{array}{l} -8\,-10\,-1 \\ \;\hookleftarrow \\ \qquad\hookleftarrow \\ \qquad\quad\;\hookleftarrow \end{array} = 17\begin{vmatrix} -2 & 11 & 1 & 2 \\ 0 & -82 & -9 & -11 \\ 0 & -109 & -2 & -21 \\ 0 & -7 & 9 & -9 \end{vmatrix}.$$

Символ $\hookleftarrow$ означає, що:

перший рядок слід помножити на (-8) і додати до другого, відповідь поставити на місце другого рядка;

перший рядок слід помножити на (-10) і додати до третього, відповідь поставити на місце третього рядка;

перший рядок слід помножити на (-1) і додати до четвертого, відповідь поставити на місце четвертого рядка.

Розкласти останній визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = 17\begin{vmatrix} -2 & 11 & 1 & 2 \\ 0 & -82 & -9 & -11 \\ 0 & -109 & -2 & -21 \\ 0 & -7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = 17\cdot(-2)\begin{vmatrix} -82 & -9 & -11 \\ -109 & -2 & -21 \\ -7 & 9 & -9 \end{vmatrix}.$$

Винести (-1) із першого та другого рядків та обчислити знайдений визначник 3-го порядку за правилом трикутників:

$$\Delta = 17\cdot(-2)(-1)^2\begin{vmatrix} 82 & 9 & 11 \\ 109 & 2 & 21 \\ -7 & 9 & -9 \end{vmatrix} = -34\{[82\cdot 2\cdot(-9)+9\cdot 21\cdot(-7)+$$

$$+109\cdot 9\cdot 11]-[11\cdot 2\cdot(-7)+109\cdot 9\cdot(-9)+9\cdot 21\cdot 82]\} = -34\cdot 1477 =$$

$$= -50218.$$

Приклад 4. З'ясувати, чи входять дані добутки до визначників відповідних порядків і з якими знаками. Указати порядок визначника:

1) $g_{43}g_{21}g_{35}g_{12}g_{54}$;

2) $g_{61}g_{23}g_{45}g_{36}g_{12}g_{54}$;

3) $g_{27}g_{36}g_{51}g_{74}g_{25}g_{43}g_{62}$;

4) $g_{12}g_{23}g_{34}\ldots g_{n-1,n}g_{kk}\quad (1\le k\le n)$;

5) $g_{12}g_{23}g_{34}\ldots g_{n-1,n}g_{n1}$.

Розв'язання:

1. Для того щоб добуток був у складі визначника n-го порядку, необхідно, щоб:

а) він мав n множників $n = 5$;

б) складався з елементів матриці, в індексах яких немає повторень: ні в перших, ні других, інакше кажучи, і перший індекс має пробігати всі номери від 1 до n, і другий індекс — від 1 до n, до того ж кожен рядок і кожен стовпець подано одним елементом у добутку.

Слід переставити множники так, щоб перші індекси було записано в порядку $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$: $g_{12}g_{21}g_{35}g_{43}g_{54}$. Тоді другий індекс з'являється в послідовності: $2,\ 1,\ 5,\ 3,\ 4$. Обчислити кількість інверсій у цій перестановці: $(2, 1)$; $(5, 3)$; $(5, 4)$. Їх три. Отже, знак цього добутку визначено як $(-1)^3 = -1$.

Відповідь: цей добуток входить до визначника 5-го порядку зі знаком $(-)$.

2. $g_{61}g_{23}g_{45}g_{36}g_{12}g_{54}$, $n = 6$. Переставити множники так, щоб перші індекси було записано в порядку $1, 2, 3, 4, 5, 6$: $g_{12}g_{23}g_{36}g_{45}g_{54}g_{61}$. Тоді другий індекс з'являється в послідовності: $2,\ 3,\ 6,\ 5,\ 4,\ 1$. Видно, що повторень індексів (ні першого, ні другого) тут немає, тому можна зробити висновок, що цей добуток до визначника 6-го порядку входить. Обчислити кількість інверсій у цій перестановці: $(2,\ 1)$; $(3,\ 1)$; $(6,\ 5)$; $(6, 4)$; $(6,\ 1)$; $(5,\ 4)$; $(5,\ 1)$; $(4,\ 1)$. Їх вісім. Отже знак цього добутку визначено як $(-1)^8 = 1$.

Відповідь: цей добуток входить до визначника 6-го порядку зі знаком "+".

3. $g_{27}g_{36}g_{51}g_{74}g_{25}g_{43}g_{62}$, $n = 7$. Очевидно, що цей добуток до визначника 7-го порядку не входить, тому що другий рядок подано двома елементами: g_{27}, g_{25}.

Відповідь: цей добуток не входить до визначника 7-го порядку.

4. $g_{12}g_{23}g_{34}\cdots g_{n-1,n}g_{kk}$, $(1 \le k \le n)$. Обчислити порядок визначника: елементи добутку перелічити за другим індексом: $\underbrace{(2, 3, 4,\ \ldots,\ n}_{n-1}, k)$.

Їх $(n-1)+1 = n$. Отже, порядок визначника дорівнює n. Але цей добуток не входить до цього визначника, тому що k-й рядок подано двома елементами: $g_{k(k+1)}$ і g_{kk}.

Відповідь: добуток $g_{12}g_{23}g_{34}\cdots g_{n-1,n}g_{kk}$ не входить до визначника *n*-го порядку.

5. $g_{12}g_{23}g_{34}\cdots g_{n-1,n}g_{n1}$. Цей добуток має n елементів, тому порядок визначника n. Слід зазначити, що множники такі, у яких перші індекси записано в послідовності $1,\ 2,\ 3,\ ...,\ n-1,\ n$: $g_{12}g_{23}g_{34}\cdots g_{n-1,n}g_{n1}$. Тут другий індекс з'являється в послідовності: $2,\ 3,\ 4,\ ...,\ n,\ 1$. Видно, що повторень індексів (ні першого, ні другого) тут немає, тому можна зробити висновок: цей добуток до визначника n-го порядку входить.

Обчислити кількість інверсій у цій перестановці:

$$\underbrace{(2,1),(3,1),(4,1),...,(n-1,1),(n,1)}_{n-1}\text{. Їх } n-1.$$

Отже, знак цього добутку визначають як $(-1)^{n-1}$.

Відповідь: цей добуток входить до визначника n-го порядку зі знаком $(-1)^{n-1}$.

Приклад 5. Обрати значення індексів i та k так, щоб добуток $g_{47}g_{63}g_{1i}g_{55}g_{7k}g_{24}g_{31}$ був у складі визначника 7-го порядку зі знаком "+".

Розв'язання. Слід переставити множники так, щоб перші індекси було записано в порядку 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7: $g_{1i}g_{24}g_{31}g_{47}g_{55}g_{63}g_{7k}$. Тоді другий індекс з'являється в послідовності: i, 4, 1, 7, 5, 3, k. Обчислити кількість інверсій у цій перестановці: (4, 1); (4, 3); (7, 5); (7, 3); (5, 3). Поки їх п'ять. Кількість непарна. Не вистачає номерів 6 та 2.

Нехай $i=6,\ k=2$. Тоді буде перестановка 6, 4, 1, 7, 5, 3, 2. Як видно, додано ще п'ять інверсій: (6, 4); (6, 1); (6, 5); (6, 3); (6, 2).

5 + 5 = 10. Кількість інверсій стає парною. Отже, знак добутку визначено як $(-1)^{10}=+1$.

Нехай тепер $i=2,\ k=6$. Тоді буде перестановка 2, 4, 1, 7, 5, 3, 6. Як видно, додано ще 2 інверсії: (2, 1); (7, 6).

5 + 2 = 7. Кількість інверсій залишається непарною. Знак добутку "–".

Відповідь: Цей добуток буде входити до визначника 7-го порядку зі знаком "+", якщо $i=6,\ k=2$.

Приклад 6. Знайти доданки визначника 4-го порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix},$$

які мають елемент a_{32} і входять до визначника зі знаком "+".

Розв'язання: Розкласти визначник за елементами третього рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{31}\Delta_{31} - a_{32}\Delta_{32} + a_{33}\Delta_{33} - a_{34}\Delta_{34},$$

де Δ_{3j} – мінори 3-го порядку, які визначають викреслюванням третього рядка та *j*-го стовпця. У кожному мінорі Δ_{3j} не наявні елементи третього рядка, у тому числі й a_{32}. Як випливає з формули, елемент a_{32} входить до складу тільки доданка $a_{32}\,\Delta_{3j}$:

$$a_{32}\,\Delta_{3j} = a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{32}\big[a_{11}\left(a_{23}a_{44} - a_{43}a_{24}\right) -$$

$$- a_{13}\left(a_{21}a_{44} - a_{41}a_{24}\right) + a_{14}\left(a_{21}a_{43} - a_{41}a_{23}\right)\big].$$

Відповідь: $a_{32}a_{11}a_{43}a_{24}, a_{32}a_{13}a_{21}a_{44}, a_{32}a_{14}a_{21}a_{43}, a_{32}a_{14}a_{41}a_{23}$.

Приклад 7. Знайти доданки визначника: $\Delta = \begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix},$

які мають степені x^3 та x^4.

Розв'язання. Слід переставити перший та третій рядки, у цьому разі визначник змінює знак:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & 1 & 2 & 2x \end{vmatrix} \begin{array}{ll} (-x) & (-5x) \\ \hookleftarrow & \\ & \hookleftarrow \\ \hookleftarrow & \end{array}.$$

Перший рядок помножити на $(-x)$ і додати до другого та четвертого рядків, а потім – на $(-5x)$ і додати до третього рядка. У цьому разі визначник не змінить знака:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 3 \\ 0 & -x & 1-x^2 & 2-3x \\ 0 & 1-10x & 2-5x^2 & 3-15x \\ 0 & 1-2x & 2-x^2 & -x \end{vmatrix}.$$

Розкласти визначник за елементами першого стовпця:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & x & 3 \\ 0 & -x & 1-x^2 & 2-3x \\ 0 & 1-10x & 2-5x^2 & 3-15x \\ 0 & 1-2x & 2-x^2 & -x \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} -x & 1-x^2 & 2-3x \\ 1-10x & 2-5x^2 & 3-15x \\ 1-2x & 2-x^2 & -x \end{vmatrix}.$$

Останній визначник можна обчислити за правилом трикутників:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -x & 1-x^2 & 2-3x \\ 1-10x & 2-5x^2 & 3-15x \\ 1-2x & 2-x^2 & -x \end{vmatrix} =$$

$$= -[(-x)(2-5x^2)(-x) + (1-2x)(1-x^2)(3-15x) + (1-10x)(2-x^2)(2-3x)] +$$

$$+ [(1-2x)(2-5x^2)(2-3x) + (-x)(2-x^2)(3-15x) + (1-10x)(1-x^2)(-x)] =$$

$$= x^4(5+30+30-30-15-10) + x^3(-15-6-20-3+15+20+3+1) + \ldots =$$

$$= 10x^4 - 5x^3 + \ldots .$$

Відповідь: $10x^4 - 5x^3$.

Приклад 8. За якого значення α матриця $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2-\alpha & \alpha & \alpha+5 \\ 2 & 3-8\alpha & 2 \end{pmatrix}$ є особливою?

Розв'язання. Матриця є особливою, якщо її визначник дорівнює 0. Тому її треба прирівняти до 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2-\alpha & \alpha & \alpha+5 \\ 2 & 3-8\alpha & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Розкрити визначник за елементами першого рядка:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \alpha+5 \\ 3-8\alpha & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2-\alpha & \alpha \\ 2 & 3-8\alpha \end{vmatrix} = \left(2\alpha - (\alpha+5)(3-8\alpha)\right) + 2\left((2-\alpha)(3-8\alpha)\right) =$$

$$= 24\alpha^2 - \alpha - 3 = 0. \Rightarrow \quad D = 1 + 4\cdot 3\cdot 24 = 289 = 17^2$$

$$\Rightarrow \quad \alpha_{1,2} = \frac{1\pm 17}{48} = \frac{3}{8}, -\frac{1}{3}.$$

Відповідь: $\alpha_1 = \dfrac{3}{8}$, $\alpha_2 = -\dfrac{1}{3}$

Приклад 9. Спростити вираз: $\begin{vmatrix} \xi^2 x + \gamma^2 y & \xi^2 z + \gamma^2 p \\ \zeta^2 x + \delta^2 y & \zeta^2 z + \delta^2 p \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

$$\begin{vmatrix} \xi^2 x + \gamma^2 y & \xi^2 z + \gamma^2 p \\ \zeta^2 x + \delta^2 y & \zeta^2 z + \delta^2 p \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \xi^2 x & \xi^2 z + \gamma^2 p \\ \zeta^2 x & \zeta^2 z + \delta^2 p \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma^2 y & \xi^2 z + \gamma^2 p \\ \delta^2 y & \zeta^2 z + \delta^2 p \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} \xi^2 x & \xi^2 z \\ \zeta^2 x & \zeta^2 z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \xi^2 x & \gamma^2 p \\ \zeta^2 x & \delta^2 p \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} \gamma^2 y & \xi^2 z \\ \delta^2 y & \zeta^2 z \end{vmatrix} + \left\|\begin{matrix} \gamma^2 y & \gamma^2 p \\ \delta^2 y & \delta^2 p \end{matrix}\right\| = \xi^2\zeta^2 xz \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + xp\left(\xi^2\delta^2 - \gamma^2\zeta^2\right) +$$

$$+\left(\gamma^2\zeta^2-\xi^2\delta^2\right)yz+\xi^2\zeta^2xz\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=\xi^2\zeta^2xz(1-1)+xp\left(\xi^2\delta^2-\gamma^2\zeta^2\right)+$$

$$+\left(\gamma^2\zeta^2-\xi^2\delta^2\right)yz+\xi^2\zeta^2xz(1-1)=xp\left(\xi^2\delta^2-\gamma^2\zeta^2\right)+\left(\gamma^2\zeta^2-\xi^2\delta^2\right)yz=$$

$$=\left(\xi^2\delta^2-\gamma^2\zeta^2\right)(xp-yz).$$

Приклад 10. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix}\alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2\\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2\\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2\\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2\end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Слід віднімати перший стовпець із другого, третього, четвертого стовпців і визначені різниці записати на місці другого, третього, четвертого стовпців, у цьому разі визначник не змінюється (властивість 9):

$$\begin{vmatrix}\alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2\\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2\\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2\\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2\end{vmatrix}.$$

Другий стовпець замінити лінійною комбінацією стовпців: $(II)+$ $+(III)-(IV)$, а третій – $(III)+(II)-(IV)$:

$$\begin{vmatrix}\alpha^2 & -4 & -4 & 6\alpha+9\\ \beta^2 & -4 & -4 & 6\beta+9\\ \gamma^2 & -4 & -4 & 6\gamma+9\\ \delta^2 & -4 & -4 & 6\delta+9\end{vmatrix}=0,$$

оскільки у визначнику є два однакових стовпці (властивість 3).

Відповідь: 0.

Приклад 11. Знайти корені рівняння:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1-x & 1 & \dots & 1\\ 1 & 1 & 2-x & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-1)-x\end{vmatrix}=0.$$

Розв'язання. Помножити перший рядок на (-1) і додати до другого, третього і т. д. до $(n-1)$ рядків, суми записати на відповідних місцях другого, третього і т. д. $(n-1)$ стовпців:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1 & \dots & 1\\ 0 & -x & 0 & \dots & 0\\ 0 & 0 & 1-x & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 1 & 1 & 1 & \dots & (n-2)-x\end{vmatrix}=(-x)(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot((n-2)-x)=0.$$

Відповідь: корені визначеного рівняння:

$$(-x)(1-x)(2-x)\cdot\ldots\cdot((n-2)-x)=0.$$
$$x=0, x=1, x=2,\ldots,x=n-2.$$

Приклад 12. Обчислити визначник n-го порядку $(q>0)$.

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}1 & q & 0 & \dots & 0 & 0\\ q & 1 & q & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 1\end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Розкласти визначник за елементами першого рядка:

$$\Delta_n=n\left\{\underbrace{\begin{vmatrix}1 & q & 0 & \dots & 0 & 0\\ q & 1 & q & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 1\end{vmatrix}}_{n}\right.=1\cdot(-1)^2(n-1)\left\{\begin{vmatrix}1 & q & 0 & \dots & 0 & 0\\ q & 1 & q & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 1\end{vmatrix}\right.+$$

$$+q\cdot(-1)^3\left.\begin{vmatrix} q & q & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & q & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 1\end{vmatrix}\right\}(n-1).$$

Якщо розкласти останній визначник за елементами першого стовпця:

$$\left.\begin{vmatrix} q & q & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & 1 & q & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 1\end{vmatrix}\right\}(n-1)=q\left.\begin{vmatrix} 1 & q & 0 & \dots & 0 & 0\\ q & 1 & q & \dots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & q & 1\end{vmatrix}\right\}(n-2)=q\cdot\Delta_{n-2},$$

то можна виразити визначник n-го порядку Δ_n через визначники $n-1$ та $n-2$-го порядків Δ_{n-1} та Δ_{n-2}:

$$\Delta_n=\Delta_{n-1}-q^2\Delta_{n-2}.$$

Отже, є різницеве рівняння щодо функції Δ_n цілочислового аргументу n:

$$\Delta_n=\Delta_{n-1}-q^2\Delta_n. \quad (1.12)$$

Необхідно шукати загальний розв'язок рівняння (1.12) у вигляді [10]:

$$\Delta_n=C_1\lambda_1^n+C_2\lambda_2^n,$$

де λ_1,λ_2 – корені характеристичного рівняння $\lambda^2=\lambda-q^2$.

Визначити їх:

$$\lambda^2-\lambda+\frac{1}{4}+q^2-\frac{1}{4}=0.$$

$$\left(\lambda-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-q^2\Rightarrow\lambda-\frac{1}{2}=\pm\sqrt{\frac{1}{4}-q^2}.$$

Нехай $q=\frac{3}{10}$, тоді $\lambda-\frac{1}{2}=\pm\frac{4}{5}\Rightarrow\lambda=\frac{1}{2}\pm\frac{4}{5}$, $\lambda_1=-\frac{3}{10},\lambda_2=\frac{13}{10}$.

Отже,

$$\Delta_n = C_1\left(-\frac{3}{10}\right)^n + C_2\left(\frac{13}{10}\right)^n, \qquad (1.13)$$

де C_1, C_2 – довільні константи.

Знайти їх за умови: $\Delta_1 = 1;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \frac{3}{10} \\ \frac{3}{10} & 1 \end{vmatrix} = 1 - \frac{9}{100} = \frac{91}{100}$.

Підставити ці значення в (1.13):

$$\begin{cases} 1 = C_1\left(-\frac{3}{10}\right) + C_2\left(\frac{13}{10}\right) \\ \frac{91}{100} = C_1\left(-\frac{3}{10}\right)^2 + C_2\left(\frac{13}{10}\right)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3C_1 + 13C_2 = 10 \\ 9C_1 + 169C_2 = 91 \end{cases};$$

$$(39+169)C_2 = 121 \Rightarrow 208C_2 = 121 \Rightarrow C_2 = \frac{121}{208};$$

$$3C_1 = 13C_2 - 10 \Rightarrow 3C_1 = \frac{13\cdot 121}{208} - 10 = 1573 - 2080 = -507 \Rightarrow C_1 = -\frac{13}{16}.$$

Відповідь: $\Delta_n = \left(-\frac{13}{16}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)^n + \frac{121}{208}\left(\frac{13}{10}\right)^n$.

Обернена матриця

Як відомо, для кожного $a \neq 0$ існує число b, якщо $ab = 1$. Число b називають **оберненим** до a. У разі квадратних матриць n-го порядку матриця E відіграє роль одиниці.

Означення. Нехай A квадратна матриця n-го порядку. Квадратну матрицю $X \equiv A^{-1}$ того ж порядку називають **оберненою** до A**,** якщо

$$AX = XA = E.$$

Перейти в цій рівності до визначників.

Оскільки $|E| = 1$ і $|A| = |A|\cdot|Y|$, то $|A|\cdot|Y| = 1$.

Із цієї формули випливає, що $\left|A\right| \neq 0$ (інакше ліва частина дорівнювала б 0). Очевидно, що в разі $\left|A\right| = 0$ оберненої матриці не існує.

Означення. Квадратну матрицю A називають **особливою (виродженою),** якщо її визначник дорівнює 0. Інакше вона є неособливою (невиродженою).

Особлива матриця оберненої матриці не має.

Важливого застосування обернена матриця набуває під час розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_1 = f_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_1 = f_2 \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_1 = f_n \end{cases}. \tag{1.14}$$

Увести матрицю системи A і вектори x і F:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$$

і записати СЛАР (1) у матричній формі:

$$AX = F. \tag{1.15}$$

Якщо відомо обернену матрицю A^{-1}, то, помноживши рівність (1.15) зліва на обернену A^{-1}, буде визначено рівність: $AA^{-1}X = A^{-1}f$.

Оскільки $AA^{-1} = E$ за означенням оберненої матриці, то в результаті буде визначено:

$$EX = A^{-1}f$$

або

$$X = A^{-1}f. \tag{1.16}$$

Тут застосовано очевидну рівність:

$$EX = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = X.$$

З іншого боку, можна обернену матрицю обчислити, розв'язавши СЛАР (1.14) щодо X:

$$\begin{cases} x_1 = b_{11} f_1 + b_{12} f_2 + \dots + b_{1n} f_1 \\ x_2 = b_{21} f_1 + b_{22} f_2 + \dots + b_{2n} f_1 \\ \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_n = b_{n1} f_1 + b_{n2} f_2 + \dots + b_{nn} f_1 \end{cases} \tag{1.17}$$

та обернену матрицю:

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

Слід розглянути більш детально цю процедуру. Якщо припустити, що $|A| \neq 0$, тоді й $\left|A^{-1}\right| = |B| \neq 0$. Тому до системи рівнянь (1.17) можна застосувати формули Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

де $\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & f_1 & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & f_2 & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & f_n & a_{nn} \end{vmatrix} = f_1 A_{1i} + \dots + f_1 A_{1n}$.

$$i$$

Розкладаючи визначник Δ_i за елементами i-го стовпця, буде визначено:

$$\Delta_i = \sum_{j=1}^{n} f_j \cdot A_{ji} .$$

Отже, є система рівностей:

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{A_{11}}{\Delta} f_1 + \ldots + \dfrac{A_{n1}}{\Delta} f_n \\ x_2 = \dfrac{A_{12}}{\Delta} f_1 + \ldots + \dfrac{A_{n2}}{\Delta} f_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n = \dfrac{A_{1n}}{\Delta} f_1 + \ldots + \dfrac{A_{nn}}{\Delta} f_n \end{cases} .$$

Порівнюючи коефіцієнти при f_i цієї системи з відповідними коефіцієнтами системи (1.17). буде визначено вирази для коефіцієнтів оберненої матриці B:

$$b_{ij} = \frac{A_{ij}^T}{\Delta}, \quad i = 1, \ldots, n; \; j = 1, \ldots, n.$$

Слід перевірити, що матриця B задовольняє означенню оберненої матриці: $AB = E$ та $BA = E$.

Для цього побудувати матрицю: $C = AB = \begin{pmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i1} & \ldots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ldots & A_{j1}/\Delta & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \ldots & A_{j1}/\Delta & \ldots \end{pmatrix}.$

Згідно із правилом множення матриць, елемент c_{ij} буде дорівнювати:

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot \frac{A_{j1}}{\Delta} + \ldots + a_{in} \cdot \frac{A_{jn}}{\Delta} = \frac{1}{\Delta}\left(a_{i1} \cdot A_{j1} + \ldots + a_{in} \cdot A_{jn}\right),$$

де вираз у дужках, згідно із правилом розкладання за елементами рядка, дорівнює Δ, якщо $j = i$; 0, якщо $j \neq i$. Тому $C = E$.

Аналогічно слід перевірити рівність $BA = E$.

Отже, $$A^{-1} = B = \begin{pmatrix} \frac{A_{11}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{n1}}{\Delta} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{A_{n1}}{\Delta} & \dots & \frac{A_{nn}}{\Delta} \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & \dots & A_{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{11} & \dots & A_{11} \end{pmatrix}$$ – транспонована матриця алгебраїчних доповнень матриці A.

Приклад. Знайти обернену матрицю до

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -7 & -2 \\ 1 & -3 & 5 \\ 22 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання: Транспонована матриця системи:

$$A^T = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 22 \\ -7 & -3 & 5 \\ -2 & 5 & -8 \end{pmatrix}.$$

Обчислити алгебраїчні доповнення елементів матриці A^T:

$$A_{11}^T = \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = (-3)(-8) - 5 \cdot 5 = -1;$$

$$A^T{}_{12} = -\begin{vmatrix} -7 & 5 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -((-7)(-8) + 2 \cdot 5) = -66;$$

$$A^T{}_{13} = \begin{vmatrix} -7 & -3 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -7 \cdot 5 - (-3)(-2) = -41;$$

$$A^T{}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 22 \\ 5 & -8 \end{vmatrix} = -((-8) - 5 \cdot 22) = 118;$$

$$A^T{}_{22} = \begin{vmatrix} 4 & 22 \\ -2 & -8 \end{vmatrix} = -8 \cdot 4 + 2 \cdot 22 = 12;$$

$$A^T{}_{23} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 5 + 2) = -22;$$

$$A^T{}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 22 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5 + 22 \cdot 3 = 71;$$

$$A^T{}_{32} = -\begin{vmatrix} 4 & 22 \\ -7 & 5 \end{vmatrix} = -(4 \cdot 5 + 22 \cdot 7) = -174;$$

$$A^T{}_{33} = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -7 & -3 \end{vmatrix} = -3 \cdot 4 + 7 = -5;$$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & -66 & -41 \\ 118 & 12 & -22 \\ 71 & -174 & -5 \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\tilde{A} = \frac{1}{-972}\begin{pmatrix} -1 & -66 & -41 \\ 118 & 12 & -22 \\ 71 & -174 & -5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $A^{-1} = \dfrac{1}{-972}\begin{pmatrix} -1 & -66 & -41 \\ 118 & 12 & -22 \\ 71 & -174 & -5 \end{pmatrix}$.

Властивості оберненої матриці

Разом із характеристичними властивостями оберненої матриці $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$ слід зазначити ще дві:

1. Для невироджених матриць A та B має місце рівність:

$$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

2. $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Доведення:

1. Для перевірки рівності (1) помножити її справа на B^{-1}:

$$(AB)^{-1} \cdot A = B^{-1} \cdot A^{-1} \cdot A \Rightarrow (AB)^{-1} \cdot A = B^{-1}.$$

Тепер помножити останню рівність справа на A^{-1}:

$$(AB)^{-1} \cdot A \cdot A^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1} \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Рівність доведено.

Зауваження: ця властивість, очевидно, справедлива і в разі довільної кількості множників. Наприклад, якщо A, B, C – невироджені матриці, то $(ABC)^{-1} = C^{-1} \cdot B^{-1} \cdot A^{-1}$.

2. Для доведення рівності 2, виконати такі дії:

записати очевидну рівність $E = E$, або $E = A \cdot A^{-1}$, або $E = A \cdot B$, де $B = A^{-1}$;

помножити останню рівність справа на $B^{-1} E \cdot B^{-1} = A \quad \Rightarrow \; B^{-1} = A$ або $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

Приклад 1. Розв'язати систему рівнянь методом оберненої матриці:

$$\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda \\ \lambda x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2 \end{cases}.$$

Розв'язання. Транспонована матриця системи $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$ має визначник:

$$\Delta = \lambda^3 + 1 + 1 - (\lambda + \lambda + \lambda) = \lambda^3 - 3\lambda + 2 = \lambda^3 - \lambda - 2\lambda + 2 =$$
$$= \lambda\left(\lambda^2 - 1\right) - 2(\lambda - 1) = (\lambda - 1)[\lambda(\lambda + 1) - 2] = (\lambda + 2)(\lambda - 1)^2.$$

Обчислити допоміжні визначники:

$$A^T{}_{11} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1; \quad A^T{}_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1); \quad A^T{}_{13} = \begin{vmatrix} 1 & \lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1);$$
$$A^T{}_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = -(\lambda - 1); \quad A^T{}_{22} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1; \quad A^T{}_{23} = -\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1);$$
$$A^T{}_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1); \quad A^T{}_{32} = -\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(\lambda - 1); \quad A^T{}_{33} = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Матриця алгебраїчних доповнень:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda^2 - 1 & -(\lambda - 1) & -(\lambda - 1) \\ -(\lambda - 1) & \lambda^2 - 1 & -(\lambda - 1) \\ -(\lambda - 1) & -(\lambda - 1) & \lambda^2 - 1 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1}=\frac{1}{(\lambda-1)^2(\lambda+2)}\begin{pmatrix}\lambda^2-1 & -(\lambda-1) & -(\lambda-1)\\ -(\lambda-1) & \lambda^2-1 & -(\lambda-1)\\ -(\lambda-1) & -(\lambda-1) & \lambda^2-1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+2)}\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+1\end{pmatrix},\quad \lambda\neq 1,\lambda\neq -2.$$

Отже,

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=A^{-1}B=\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+2)}\begin{pmatrix}\lambda+1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda+1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda+1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \lambda\\ \lambda^2\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+2)}\begin{pmatrix}\lambda+1 & -\lambda & -\lambda^2\\ -1 & +\lambda^2+\lambda & -\lambda^2\\ -1 & -\lambda & \lambda^2+\lambda\end{pmatrix}=\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+2)}\begin{pmatrix}(1-\lambda^2)\\ \lambda-1\\ \lambda^3-1\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{(\lambda-1)(\lambda+2)}\begin{pmatrix}(1-\lambda)(1+\lambda)\\ \lambda-1\\ (\lambda-1)(\lambda^2+\lambda+1)\end{pmatrix}=\frac{1}{(\lambda+2)}\begin{pmatrix}-(1+\lambda)\\ 1\\ \lambda^2+\lambda+1\end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1=-\dfrac{\lambda+1}{\lambda+2},\quad x_2=-\dfrac{1}{\lambda+2},\quad x_3=\dfrac{\lambda^2+\lambda+1}{\lambda+2}.$

Приклад 2. Система рівнянь $\begin{cases}ay+bx=c\\ cx+az=b\\ bz+cy=a\end{cases}$ має єдиний розв'язок.

Довести, що $abc\neq 0$. Розв'язати цю систему.

Розв'язання. Подати цю систему рівнянь у матричному вигляді:

$$\begin{pmatrix}b & a & 0\\ c & 0 & a\\ 0 & c & b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ b\\ a\end{pmatrix}.$$

Обчислити визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} b & a & 0 \\ c & 0 & a \\ 0 & c & b \end{vmatrix} = -b \cdot a \cdot c - a \cdot c \cdot b = -2 \cdot a \cdot b \cdot c \neq 0.$$

Обчислити допоміжні визначники:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} c & a & 0 \\ b & 0 & a \\ a & c & b \end{vmatrix} = c\begin{vmatrix} 0 & a \\ c & b \end{vmatrix} - a\begin{vmatrix} b & a \\ a & b \end{vmatrix} = -c^2 a - a\left(b^2 - a^2\right) = -a\left(a^2 - b^2 - c^2\right);$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b & c & 0 \\ c & b & a \\ 0 & a & b \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} b & a \\ a & b \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} c & a \\ 0 & b \end{vmatrix} = b\left(b^2 - a^2\right) - c^2 b = b\left(b^2 - a^2 - c^2\right);$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} b & a & c \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix} = b\begin{vmatrix} 0 & b \\ c & a \end{vmatrix} - c\begin{vmatrix} a & c \\ c & a \end{vmatrix} = -b^2 c - c\left(a^2 - c^2\right) = -c\left(b^2 + a^2 - c^2\right).$$

За формулами Крамера можна обчислити:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \\ \Delta_3 \end{pmatrix} \frac{1}{\Delta} = \frac{1}{-2abc} \begin{pmatrix} -a\left(c^2 + b^2 - a^2\right) \\ b\left(b^2 - a^2 - c^2\right) \\ -c\left(b^2 + a^2 - c^2\right) \end{pmatrix};$$

$$x = \frac{-a\left(c^2 + b^2 - a^2\right)}{-2abc} = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc};$$

$$y = \frac{-b\left(a^2 + c^2 - b^2\right)}{-2abc} = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$z = \frac{-a\left(a^2 + b^2 - c^2\right)}{-2abc} = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

Обернену матрицю можна шукати іншим способом, а саме: спочатку треба скласти матрицю з вихідної A та одиничної того ж порядку, причому одинична має стояти праворуч від матриці A. Побудовану матрицю елементарними перетвореннями слід звести до вигляду, коли справа буде розташовано неодиничну матрицю, а зліва – одиничну. Тоді складена неодинична матриця й буде становити обернену до A матрицю.

Приклад 3. Знайти M^{-1}, де $M = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & -6 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} -\frac{2}{5} \\ \\ \hookleftarrow \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & -1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{17}{5} & -\frac{38}{5} & -\frac{2}{5} & 0 & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \\ -\frac{17}{5} \\ \hookleftarrow \end{array} \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{72}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{-17}{5} & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \frac{5}{36}\,\frac{5}{12} \end{array} \approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 5 & 0 & 0 & \frac{5}{6} & -\frac{5}{12} & \frac{5}{12} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{18} & \frac{19}{36} & \frac{5}{36} \\ 0 & 0 & -\frac{72}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{-17}{5} & 1 \end{array}\right]\begin{array}{l} (:5) \\ \\ \cdot\left(-\frac{5}{72}\right) \end{array} \approx$$

$$\approx \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{18} & \frac{19}{36} & \frac{5}{36} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{36} & \frac{17}{72} & -\frac{5}{72} \end{array}\right] \Rightarrow$$

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & -\frac{1}{12} & \frac{1}{12} \\ \frac{1}{18} & \frac{19}{36} & \frac{5}{36} \\ \frac{1}{36} & \frac{17}{72} & -\frac{5}{72} \end{bmatrix} = \frac{-1}{72}\begin{bmatrix} -12 & 6 & -6 \\ 4 & -38 & -10 \\ -2 & -17 & 5 \end{bmatrix}.$$

Приклад 4. Знайти обернену до матриці $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання:

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} -1 \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ \leftrightarrow \\ \\ \leftrightarrow \end{array}$$

Поміняти місцями другий та четвертий рядки:

$$\approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \leftarrow \\ \frac{1}{2}\ -1 \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & -2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ -1 \\ \\ \hookleftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & -2 & 0 & -2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ -\frac{1}{2}\ \frac{1}{4} \end{array} \approx \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right)\begin{array}{c} \\ :(-2) \\ :2 \\ :(-4) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 \end{array}\right).$$

Відповідь: $\begin{pmatrix} 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 & 0{,}25 \\ 0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 & -0{,}25 \\ 0{,}25 & -0{,}25 & -0{,}25 & 0{,}25 \end{pmatrix}$ – обернена матриця.

Ранг матриці

Поняття рангу введено для довільної $m \times n$ матриці:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Вибрати в A k рядків із номерами $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ та k стовпців із номерами $j_1 < j_2 < \ldots < j_k$, $k < n,m$. З елементів матриці A, розташованих на перетині обраних k рядків і k стовпців, побудувати визначник:

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots & a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots & a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots & a_{i_k j_k} \end{vmatrix},$$

який називають мінором k-го порядку матриці A. Змінюючи вибір k рядків і k стовпців, визначають велику кількість мінорів матриці A. Деякі з них можуть дорівнювати 0.

Означення. Рангом матриці A називають максимальний порядок усіх мінорів матриці, відмінний від 0. Позначають ранг як $rg(A) = rang(A)$.

Теорема. Якщо мінори k-го порядку матриці A дорівнюють 0, то і всі мінори вищого порядку також дорівнюють 0. Це випливає із правила обчислення визначника шляхом розкладання за елементами рядка (стовпця).

Приклад. Знайти ранг матриць:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 4 & 10 \\ 7 & 8 & 18 \\ 3 & 7 & 17 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$; в) $\begin{vmatrix} 2 & 5 & -5 & 8 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 10 & 9 & -4 & 3 \\ 3 & -15 & 6 & 9 \end{vmatrix}$.

Розв'язання:

а) $\begin{vmatrix}1 & 4 & 10\\ 7 & 8 & 18\\ 3 & 7 & 17\end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix}8 & 18\\ 7 & 17\end{vmatrix} - 4\cdot\begin{vmatrix}7 & 18\\ 3 & 17\end{vmatrix} + 10\cdot\begin{vmatrix}7 & 8\\ 3 & 7\end{vmatrix} = (8\cdot 17 - 7\cdot 18) -$

$$-4\cdot(7\cdot 17 - 3\cdot 18) + 10\cdot(7\cdot 7 - 3\cdot 8) = 10 - 4\cdot 65 + 10\cdot 25 = -260 + 260 = 0.$$

Один із мінорів другого порядку, наприклад,

$$\begin{vmatrix}1 & 10\\ 3 & 17\end{vmatrix} = 1\cdot 17 - 3\cdot 10 = -13 \neq 0.$$

За означенням рангу знайдено мінор 2-го порядку, відмінний від 0, а мінор 3-го порядку дорівнює 0, тому $rg(A) = 2$.

Інший спосіб: за допомогою елементарних перетворень звести матрицю до верхньотрикутного вигляду: кількість ненульових рядків у зведеній матриці визначає ранг матриці:

$$\begin{pmatrix}1 & 4 & 10\\ 7 & 8 & 18\\ 3 & 7 & 17\end{pmatrix}\begin{matrix}-7\;-3\\ \hookleftarrow \qquad\\ \qquad\hookleftarrow\end{matrix} = \begin{pmatrix}1 & 4 & 10\\ 0 & -20 & -52\\ 0 & -5 & -13\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ -\frac{1}{4}\\ \hookleftarrow\end{matrix} = \begin{pmatrix}1 & 4 & 10\\ 0 & -20 & -52\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix} \Rightarrow rg(A) = 2,$$

оскільки кількість ненульових рядків в останній матриці два.

б) елементарними перетвореннями звести матрицю $\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}$ до верхньотрикутного вигляду.

Розв'язання:

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 2 & -1 & 3 & 5\\ 1 & 10 & -6 & 1\end{pmatrix}\begin{matrix}-2\,-1\\ \hookleftarrow \qquad\\ \qquad\hookleftarrow\end{matrix} \approx \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -7 & 5 & 1\\ 0 & 7 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}-2\,-1\\ \hookleftarrow \qquad\\ \qquad\hookleftarrow\end{matrix} \approx \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -7 & 5 & 1\\ 0 & 7 & -5 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ +1\\ \hookleftarrow\end{matrix} \approx$$

$$\approx \begin{pmatrix}1 & 3 & -1 & 2\\ 0 & -7 & 5 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix},$$

оскільки ненульових рядків два у зведеній матриці, то $rg(A) = 2$.

в) $\begin{pmatrix} 2 & 5 & -5 & 8 \\ 1 & -5 & 2 & 3 \\ 10 & 9 & -4 & 3 \\ 3 & -15 & 6 & 9 \end{pmatrix} \Updownarrow \approx \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & -5 & 8 \\ 10 & 9 & -4 & 3 \\ 3 & -15 & 6 & 9 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -2 -10 -3 \\ \hookleftarrow \\ \quad \hookleftarrow \\ \qquad \hookleftarrow \end{array} \approx$

$$\approx \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & -9 & 2 \\ 0 & 59 & -24 & -27 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ -\frac{59}{15} \\ \hookleftarrow \\ \\ \end{array} \approx \begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & 3 \\ 0 & 15 & -9 & 2 \\ 0 & 0 & \frac{57}{5} & \frac{-118}{15} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$rg(A) = 3$, оскільки зведена матриця має три ненульових рядки.

Із прикладів випливає, що задача визначення рангу матриці потребує обчислення великої кількості визначників. Цю велику роботу можна спростити, використовуючи елементарні перетворення:

1^0 – множення будь-якого рядка матриці на число, відмінне від 0;

2^0 – додавання до елементів одного рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка, помноженого на число, відмінне від 0;

3^0 – перестановку місцями двох рядків.

Позначити через $1^*, 2^*, 3^*$ аналогічні операції над стовпцями.

Доводиться, що елементарні перетворення не змінюють рангу матриці [1, с. 71–73].

Доводиться, що елементарними перетвореннями над рядками та перестановками стовпців може бути перетворено матрицю до трикутного вигляду.

Метод Жордана – Гаусса

Спочатку слід з'ясувати, сумісна ця система чи ні.

Теорема (про сумісність СЛАР). Лінійна система рівнянь $AX = B$ сумісна тільки в разі, коли $rg(A) = rg(AB)$.

Наслідок. Якщо $rg(A) \neq rg(AB)$, то система несумісна.

У разі сумісності систему лінійних рівнянь $AX = B$ може бути розв'язано таким чином:

1) зведенням елементарними перетвореннями їхньої розширеної матриці до верхньотрикутної;

2) переходом до системи зі змінними;

3) визначенням єдиного $(rg(A)=rg(AB)=r=n)$ розв'язку або нескінченної множини розв'язків $r<n$.

Приклад. Дослідити на сумісність і розв'язати систему:

а) $\begin{cases}5x_1-x_2+2x_3=7\\2x_1+3x_2-x_3=3\\3x_1-4x_2+3x_3=5\end{cases}$; б) $\begin{cases}3x_1+2x_2-3x_3=-3\\x_1+2x_2+4x_3=9\\2x_1+7x_2-x_3=0\\3x_1+8x_2-x_3=1\end{cases}$; в) $\begin{cases}3x_1+2x_2+x_3=0\\5x_1+4x_2+3x_3=0\\4x_1+3x_2+2x_3=0\end{cases}$.

Розв'язання:

а) слід скласти розширену матрицю $AB=\left(\begin{array}{ccc|c}5&-1&2&7\\2&3&-1&3\\3&-4&3&5\end{array}\right)$

і звести її до матриці трикутного вигляду:

$$AB=\left(\begin{array}{ccc|c}5&-1&2&7\\2&3&-1&3\\3&-4&3&5\end{array}\right)\begin{array}{c}-\frac{2}{5}\;-\frac{3}{5}\\ \hookleftarrow\\ \quad\hookleftarrow\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}5&-1&2&7\\0&\frac{17}{5}&-\frac{9}{5}&\frac{1}{5}\\0&-\frac{17}{5}&\frac{9}{5}&\frac{4}{5}\end{array}\right)\begin{array}{c}\\1\\ \hookleftarrow\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}5&-1&2&7\\0&\frac{17}{5}&-\frac{9}{5}&\frac{1}{5}\\0&0&0&1\end{array}\right).$$

Визначити ранги матриць A і AB:

$rg(A)=2$, кількість ненульових рядків зведеної матриці A дорівнює 2;

$rg(AB)=3$, кількість ненульових рядків зведеної матриці AB дорівнює 3.

Отже, $2=rg(A)\neq rg(AB)=3$. Система несумісна;

б) слід скласти розширену матрицю $AB=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-3&-3\\1&2&4&9\\2&7&-1&0\\3&8&-1&1\end{array}\right)$ і звести її до трикутного вигляду:

$$AB=\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&-3&-3\\1&2&4&9\\2&7&-1&0\\3&8&-1&1\end{array}\right)\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\3&2&-3&-3\\2&7&-1&0\\3&8&-1&1\end{array}\right)\begin{array}{l}-3-2\\ \hookleftarrow\\ \quad\hookleftarrow\\ \hookleftarrow\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-4&-15&-30\\0&3&-9&-18\\0&2&-13&-26\end{array}\right)\approx$$

$$\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&4&9\\0&-4&-15&-30\\0&3&-9&-18\\0&2&-13&-26\end{array}\right)\begin{array}{l}\leftarrow\\ \frac{3}{4}\ \frac{1}{2}\\ \hookleftarrow\\ \quad\hookleftarrow\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{7}{2}&9\\0&-4&-15&-30\\0&0&-\frac{33}{2}&-33\\0&0&-\frac{41}{2}&-41\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ -\frac{41}{33}\\ \hookleftarrow\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-\frac{7}{2}&9\\0&-4&-15&-30\\0&0&-\frac{33}{2}&-33\\0&0&0&0\end{array}\right).$$

Визначити ранги матриць A і AB:

$rg(A)=3=rg(AB)$, оскільки кількість ненульових рядків зведених матриць A і AB дорівнює 3, то система сумісна;

оскільки $r = 3 = n$-кількості змінних, то система має єдиний розв'язок.

Помножити третій рядок останньої матриці на $-1/33$ і додати до другого, потім на 7 і додати до першого:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&1\\0&-4&0&0\\0&0&\frac{1}{2}&1\end{array}\right)\Rightarrow\begin{cases}x_1=1;\\x_2=0;\\x_3=2.\end{cases}$$

Відповідь: $x_1=1; x_2=0; x_3=2.$

в) аналогічно, $\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&0\\5&4&3&0\\4&3&2&0\end{array}\right)\begin{array}{l}-\frac{5}{3}-\frac{4}{3}\\ \hookleftarrow\\ \qquad\hookleftarrow\end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}&0\\0&\frac{1}{3}&\frac{2}{3}&0\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ -\frac{1}{2}\\ \\ \end{array}\approx\left(\begin{array}{ccc|c}3&2&1&0\\0&\frac{2}{3}&\frac{4}{3}&0\\0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow$

$\Rightarrow rg(A)=rg(AB)=2\Rightarrow$ система рівнянь сумісна.

Оскільки $r=2<n=3$, то система має нескінчену множину розв'язків. Знайти її:

$rg(A)=2 \Rightarrow$ у матриці A є мінор 2-го порядку, відмінний від 0.

Наприклад, $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Цей мінор називають **базисним**. А змінні x_1 і x_2 – базисними, залишок – вільні. У нас це x_3. Перейти до системи зі змінними, залишивши базисні змінні зліва, а вільні перенести вправо:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = -x_3; \\ \frac{2}{3}x_2 = -\frac{4}{3}x_3. \end{cases}$$

Розв'язати її щодо базисних змінних x_1 і x_2:

$$x_2 = -\frac{1}{2}x_3; \quad 3x_1 = -x_3 - 2x_2 = -x_3 - 2\left(-\frac{1}{2}x_3\right) = -x_3 + x_3 = 0,$$

де x_3 виконує роль параметра.

Отже, загальний розв'язок системи рівнянь має такий вигляд:

$$X = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2}x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} x_3,$$

де x_3 – довільна стала.

Це і є нескінченна множина розв'язків системи лінійних рівнянь.

Теоретичні запитання для самодіагностики

1. Як обчислити визначник матриці за правилом Лапласа?
2. Назвіть правило знака під час визначення доданків визначника n-го порядку.
3. Для квадратних матриць A та A^T визначники однакові чи ні?
4. Знак визначника змінюється на протилежний під час перестановки тільки сусідніх рядків (стовпців) чи будь-яких?
5. Ранг матриці визначають для матриці будь-якого порядку?
6. Як визначають ранг матриці не за означенням?
7. За якої умови СЛАР $AX = B$ сумісна?

8. Якщо цю умову не виконано, чи випливає з цього, що система рівнянь несумісна?

9. За якої умови можна застосовувати метод оберненої матриці для розв'язання СЛАР?

10. За якої умови можна застосовувати метод Крамера для розв'язання СЛАР?

11. Наведіть формули Крамера для розв'язання СЛАР.

12. Що називають алгебраїчним доповненням елемента матриці?

13. Яку матрицю називають оберненою до матриці A?

14. Чи для будь-якої матриці існує обернена?

15. Чи виконується рівність $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A$?

2. Власні значення та вектори матриць

Необхідно розглянути лінійний оператор n – вимірний лінійний простір R^n, у якому задано лінійний оператор A. Нехай $\{\vec{e}_i\}, i = 1, n$ – деякий базис цього простору R^n. A – матричне уявлення оператора A в цьому базисі. Це означає, що для будь-якого вектора $\vec{x} \in R^n$ існує вектор $\vec{y} \in R^n$: $\vec{y} = A\vec{x} \Leftrightarrow Y = AX$.

Цікавими є вектори, які під час дії оператора A перетворюються на колінеарні вектори, тобто

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow AX = \lambda X, \tag{2.1}$$

де $X \neq \vec{0}, X \in R^n$.

Означення. Вектор $\vec{x} \in R^n$, який задовольняє умову (2.1), називають **власним вектором** лінійного оператора A (або матриці A, яка є матричним уявленням оператора A в цьому базисі).

Означення. Коефіцієнт λ називають **власним значенням** оператора A, яке відповідає власному вектору $\vec{x} \in R^n$.

Власні вектори – це вектори, які оператор A перетворює на колінеарні.

Слід розглянути задачу визначення власних значень і власних векторів лінійного оператора:

$$A\vec{x} = \lambda\vec{x} \Leftrightarrow \quad AX = \lambda EX,$$

де $X \neq \vec{0}$;

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x \end{pmatrix} \in R^n \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \Rightarrow EX = X. \qquad (2.2)$$

Записати матричне співвідношення в координатній формі:

$$(A - \lambda E)X = \vec{0},$$

де $X \neq \vec{0}$;

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{11}x_1 + (a_{12} - \lambda)x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + (a_{1n} - \lambda)x_n = 0 \end{cases} \qquad (2.3)$$

Отже, визначено систему лінійних однорідних рівнянь, яка завжди є сумісною, оскільки її задовольняє тривіальний розв'язок $x_1 = x_2 = = \dots = x_n = 0$.

Але цей розв'язок не цікавий, тому що за умовою $\vec{X} \neq \vec{0}$. Для того щоб однорідна система лінійних рівнянь мала відмінний від 0 розв'язок, вона має бути невизначеною, тоді визначник системи має дорівнювати 0:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = P_n(\lambda) = 0. \qquad (2.4)$$

Це рівняння називають **характеристичним**. Якщо розкрити визначник, то буде знайдено поліном n-го степеня, який у загальному випадку має n коренів λ_i. Вони можуть бути комплексно-спряженими парами або дійсними.

Слід пам'ятати, що власні вектори визначають із точністю до постійного множника. Це означає, що якщо X_i – власний вектор, то і aX_i, де $a \neq 0$, є також власним вектором.

Приклад 1. Знайти власні значення та власні вектори матриці:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Побудувати характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 2 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow -\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3 = 0.$$

Корені цього рівняння $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 3.$ Усі власні значення різні. Слід знайти ці вектори. Система лінійних однорідних рівнянь для визначення власних векторів у матричному вигляді така:

$$(A - \lambda E)X = 0.$$

Ця система у розгорнутому вигляді:

$$\begin{cases} (1-\lambda)x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + (1-\lambda)x_2 + 0x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 + (1-\lambda)\cdot x_3 = 0 \end{cases}.$$

За $\lambda_1 = 1$ система набирає такого вигляду:

$$\begin{cases} 0x_2 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 0 \end{cases} \text{ або } \begin{cases} x_3 = 0 \\ x_2 = t \\ x_1 = 0 \end{cases}.$$

Оскільки $rg(A-\lambda_1 E)=2$ слід уважати змінну x_2 вільною змінною, а змінні x_1, x_3 – базисними змінними. З останнього рівняння системи буде $x_1 = 0$. А з першого рівняння системи $2x_3 = 0$, звідки $x_3 = 0$.

Отже, перший власний вектор у вигляді матриці-стовпця є: $X_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Його довжина $|X_1| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1$. Відповідний нормований власний вектор є $X_1' = \dfrac{X_1}{|X_1|} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

За $\lambda_2 = -1$ система набирає такого вигляду:

$$\begin{cases} 2x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 + 2x_2 + 0x_2 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \text{або} \quad \begin{cases} 2x_1 + 2x_3 = 0 \\ 2x_2 = 0 \\ 2x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

Тут також $rg(A-\lambda_2 E)=2$. Слід уважати змінну x_3 вільною змінною, а змінні x_1, x_2 – базисними змінними.

Із другого рівняння буде $x_2 = 0$.

Із першого рівняння знайдено значення x_1:

$$x_1 + x_3 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -x_3; \quad x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = -1.$$

Отже, другий власний вектор є: $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Довжина вектора $|X_2| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Відповідний нормований власний вектор має такий вигляд:

$$X_2' = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

За $\lambda_3 = 3$ система набирає такого вигляду:

$$\begin{cases} -2x_1 + 0x_2 + 2x_3 = 0 \\ 0x_1 - 2x_2 + 0x_3 = 0 \\ 2x_1 + 0x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases} \quad \text{або} \quad \begin{cases} x_3 = x_1 = 1 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

Як і в попередніх випадках $rg(A - \lambda_3 E) = 2$. Із другого рівняння буде $x_2 = 0$. Із першого рівняння буде $x_1 = x_3 = 1$.

Отже, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Довжина вектора $|X_3| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.

Третій нормований власний вектор має такий вигляд: $X_3' = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Визначені вектори X_1', X_2', X_3' одиничні й попарно ортогональні вектори.

Приклад 2. Знайти власні значення та вектори $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. Скласти характеристичне рівняння:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = 1.$$

Знайти власний вектор, відповідний цьому кратному власному значенню $\lambda = 1$:

$$\begin{cases} (1-1)x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0x_1 + (1-1)x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0x_1 + 2x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_2 = 0 \\ 0x_1 + 0x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 - \textit{будь-яке} \end{cases}. \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Один власний вектор відповідає одному кратному власному значенню.

Приклад 3. Знайти власні значення та власні вектори матриці

$$\begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Скласти характеристичне рівняння:

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -5 & 2 \\ 5 & -7-\lambda & 3 \\ 6 & -9 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \quad (4-\lambda)[-(7+\lambda)(4-\lambda)+27]+$$

$$+5[5(4-\lambda)-18]+2[-45+6(7+\lambda)]=0;$$

$$(4-\lambda)\{\lambda^2+3\lambda-1\}-13\lambda+4=0;$$

$$-\lambda^3+\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda^2(1-\lambda)=0 \Rightarrow \lambda_{1,2}=0, \lambda_3=1.$$

Знайти власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_1 = 0$.

$$\begin{cases} (4-\lambda_1)x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - (7+\lambda_1)x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \begin{vmatrix} -5 \\ 4 \end{vmatrix} \Rightarrow$$

$$-3x_2 + 2x_3 = 0 \Rightarrow 2x_3 = 3x_2;$$

$$4x_1 - 2x_2 = 0 \Rightarrow 2x_1 = x_2.$$

Нехай $x_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 2; \\ x_3 = \frac{3}{2}\cdot 2 = 3. \end{cases}$.

Отже, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ – власний вектор, відповідний $\lambda_1 = 0$.

Знайти власний вектор, який відповідає власному значенню $\lambda_3 = 1$.

$$\begin{cases} (4-\lambda_2)x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - (7+\lambda_2)x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases} \Big| \Rightarrow$$

$$x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2;$$

$$-2x_1 + 2x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = x_3.$$

Нехай $x_1 = 1 \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 1; \\ x_3 = 1. \end{cases}$

Отже, $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ – власний вектор, відповідний $\lambda_3 = 1$.

Висновок: якщо корені характеристичного рівняння кратні, то лінійно незалежних власних векторів може виявитися менше ніж n.

3. Квадратичні форми

Необхідно розглянути евклідовий простір R^n. Нехай A – самоспряжений лінійний оператор, що діє в R^n. Це означає, що для $\forall x, y \in R^n$: $(Ax, y) = (x, A^* y) = (x, Ay)$. Якщо $x = y$, то буде визначено $(Ax, x) = (x, Ax)$. Слід розглянути матричне уявлення визначеного скалярного добутку. Нехай $\{\vec{e}_i\}, i = \overline{1,n}$ є деякий базис евклідового простору R^n. Довільний вектор $x \in R^n$ можна розкласти єдиним чином за векторами базису $\{\vec{e}_i\}, i = \overline{1,n}$:

$$\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{e}_i \ . \qquad (3.1)$$

Коефіцієнтами розкладання $x_1, x_2, ..., x_n$ є координати вектора x у базисі $\{\vec{e}_i\}, i = \overline{1,n}$. Кожному вектору $x \in R^n$ можна поставити у відповідність матрицю-стовпець n-го порядку:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \qquad (3.2)$$

причому $X^T = (x_1 \quad x_2 \quad \ldots \quad x_n)$ – відповідний матриця-рядок координат вектора $\vec{x}$. Оскільки оператор A є самоспряжений оператор, йому в цьому базисі $\{\vec{e}_i\}, i=\overline{1,n}$ відповідає симетрична матриця:

$$A = A^T \ \left(a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1,n}\right), \tag{3.3}$$

де A^T – транспонована щодо матриці A матриця.

Слід розглянути окремі випадки скалярного добутку $(Ax,x)=(x,Ax)$ у матричному вигляді. Ураховуючи введені позначення, матричне уявлення скалярного добутку буде таким:

$$(x, Ax) = \left(x^T Ax\right). \qquad 3.4)$$

Нехай $n=2$, тоді

$$X^T AX = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \end{pmatrix} =$$
$$= a_{11}x_1^2 + a_{12}x_1x_2 + a_{21}x_2x_1 + a_{22}x_2^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j \, . \tag{3.5}$$

Вираз, який визначено, слід позначити:

$$F(x_1, x_2) = X^T AX = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_ix_j . \tag{3.6}$$

У лінійній алгебрі такий вираз називають **квадратичною формою** 2-го порядку щодо змінних x_1, x_2 або просто квадратичною формою.

Нехай $n=3$, тоді:

$$X^T A\,X = (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} =$$

$$= \left(x_1, x_2, x_3\right) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 \end{pmatrix} = a_{11}x_1^{\,2} + 2a_{12}x_1x_2 +$$

$$+ 2a_{13}x_1x_3 + 2a_{23}x_2x_3 + a_{22}x_2^{\,2} + a_{33}x_3^{\,2} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j. \qquad (3.7)$$

Це є квадратична форма 3-го порядку щодо змінних x_1, x_2, x_3:

$$F(x_1, x_2, x_3) = X^T AX = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} a_{ij}x_i x_j. \qquad (3.8)$$

Аналогічно можна визначити квадратичну форму *n*-го порядку щодо змінних $x_1, x_2, ..., x_n$, тобто:

$$F\left(x_1, x_2, ..., x_n\right) = X^T AX = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j. \qquad (3.9)$$

Матриця цієї квадратичної форми є симетричною матрицею *n*-го порядку:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}. \qquad (3.10)$$

Означення. Квадратичною формою *n*-го порядку щодо змінних $x_1,\ x_2,\ ...,\ x_n$ називають однорідний многочлен другого степеня щодо вказаних змінних, тобто вираз, визначений співвідношенням (3.9), де a_{ij} – задані числа, коефіцієнти квадратичної форми, $a_{ij} = a_{ji}, \forall i, j = \overline{1,n}$.

Означення. Рангом квадратичної форми (3.9) називають ранг матриці A цієї квадратичної форми.

Якщо $rang(A) = n$, то квадратичну форму (3.9) називають невиродженою квадратичною формою, інакше ($rang(A) < n$) квадратичну форму (3.9) називають виродженою квадратичною формою.

4. Зведення квадратичної форми до канонічного вигляду. Метод ортогональних перетворень

Необхідно розглянути задачу зведення квадратичної форми (3.9) до канонічного вигляду, тобто до найпростішого вигляду канонічної форми. Найпростіший вигляд квадратичної форми – це вигляд, у якому наявні лише квадрати змінних і відсутні їхні добутки. Оскільки квадратичній формі (3.9) у цьому базисі $\{\vec{e}_i\}, i=\overline{1,n}$ відповідає симетрична матриця A, то зведення квадратичної форми до канонічного вигляду означає, що матрицю A необхідно звести до діагонального вигляду. Симетрична матриця, як відомо, завжди діагоналізується й набирає діагонального вигляду у власному базисі, тобто базисі, утвореному із власних векторів матриці A. Відомо також, що цей базис існує та становить ортогональний базис. Якщо власні вектори попередньо нормувати, то власний базис буде ортонормованим. Слід позначити через Q матрицю, стовпці якої нормовані, власні вектори матриці A. Матриця Q є матрицею переходу до нового базису, утвореного власними векторами матриці A. Матриця Q є ортогональною матрицею, тобто $Q^{-1}=Q^T$.

Необхідно розглянути таке ортогональне перетворення:

$$X'=Q^{-1}X=Q^TX \text{ або } X=QX'. \tag{3.11}$$

У власному базисі (новій системі координат, позначеній штрихами) матриця A набирає такого вигляду:

$$A'=Q^{-1}AQ=Q^TAQ, \tag{3.12}$$

а відповідна квадратична форма набирає канонічного вигляду:

$$F(x_1',x_2',\dots,x_n')=X^TA'X'=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i')^2=$$
$$=\lambda_1(x_1')^2+\lambda_2(x_2')^2+\dots+\lambda_n(x_n')^2, \tag{3.13}$$

де $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n$ – власні значення матриці A.

Зауваження: у діагональній формі матриці A' власні значення λ_1, λ_2, λ_3, ..., λ_n розташовані в тому ж порядку, у якому розміщені нормовані власні вектори матриці A, що становлять стовпці матриці Q:

$$A' = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Зведений метод має назву **"метод ортогональних перетворень"**. Використання цього методу полягає в такому:

1) знаходженні власних значень і власних векторів матриці A;

2) побудові власного базису з нормованих власних векторів та ортогональної матриці Q переходу до цього базису;

3) виконанні ортогонального перетворення $X = QX'$, яке зводить квадратичну форму до канонічного вигляду;

4) складанні діагональної матриці $A' = Q^T AQ = diag(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$;

5) побудові канонічного вигляду квадратичної форми.

Приклад. Звести квадратичну форму методом ортогональних перетворень. Указати відповідну ортогональну матрицю Q, ортогональне перетворення та канонічний вигляд квадратичної форми:

$$F(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_3.$$

Розв'язання. Матриця цієї квадратичної форми такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Визначені вектори X_1', X_2', X_3' – одиничні й попарно ортогональні вектори. Безпосередньо можна переконатися, що $X_i' \cdot X_j' = \delta_{ij}$, де $\delta_{ij} = 1$, якщо $i = j$, та $\delta_{ij} = 0$, якщо $i \neq j$.

Побудувати ортогональну матрицю зі стовпців $X_i', i=\overline{1,n}$:

$$Q=\begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Складена матриця є матрицею переходу від початкового до власного базису. Ортогональним перетворенням, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду, є $X=QX'$. Координатна форма цього перетворення має такий вигляд:

$$\begin{cases} x_1 = 0x_1' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' - \frac{1}{\sqrt{2}}x_3'; \\ x_2 = x_1' + 0x_2' + 0x_3'; \\ x_3 = 0x_1' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_2' + \frac{1}{\sqrt{2}}x_3'. \end{cases}.$$

Підставивши у вихідну квадратичну форму формули щойно визначеного ортогонального перетворення та виконавши необхідні алгебраїчні дії, буде знайдено канонічний вигляд квадратичної форми, тобто дано відповідь на поставлену задачу:

$$F(x_1',x_2',x_3') = x_1'^2 - x_1'^2 + 3x_3'^2.$$

Як приклад математичної моделі економічного процесу, який використовує власні значення та власні вектори матриці, буде розглянуто лінійну модель обміну (модель міжнародної торгівлі). У відомій літературі [7] детально описано схему торгівлі для вільної кількості країн. Тут можна обмежитися трьома учасниками.

Нехай є три значення величин їхніх національних доходів x_1, x_2, x_3. Якщо вважати, що увесь національний дохід витрачено на закупівлю товарів або у країні або на імпорт з інших країн, то умова збалансованості торгівлі означає:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Отже, матриця $A = \{a_{ij}\}, i, j = \overline{1,3}$ повинна мати власне значення $\lambda = 1$, і в цьому разі сума стовпців матриці має дорівнювати 1.

Якщо припустити, що торгівля має виключно зовнішній характер, тобто діагональ матриці A є нульовою, у цьому разі матриця A має такий вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & b & c \\ a & 0 & 1-c \\ 1-a & 1-b & 0 \end{pmatrix},$$

де a, b, c – додатні числа, менші ніж 1.

Характеристичний многочлен матриці A має такий вигляд:

$$\lambda^3 + (ac - ab - cb + b - 1)\lambda + ab - ac + bc - b = 0.$$

За допомогою підстановки неважко перевірити, що $\lambda = 1$ є коренем цього кубічного рівняння й дає таку факторизацію:

$$(\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda + a - ab - cb + b) = 0.$$

За $\lambda = 1$ визначити відповідний власний вектор:

$$\begin{pmatrix} -1 & b & c \\ a & -1 & 1-c \\ 1-a & 1-b & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

що утворює систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} -x_1 + bx_2 + cx_3 = 0, \\ ax_1 - x_2 + (1-c)x_3 = 0, \\ (1-a)x_1 + (1-b)x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Очевидно, що сума трьох рівнянь утворить тотожність $0 \equiv 0$. Слід відкинути третє рівняння та звести систему до такого вигляду:

$$\begin{cases} bx_2 + cx_3 = x_1, \\ -x_2 + (1-c)x_3 = -ax_1. \end{cases}$$

Якщо припустити, що $x_1 = d$ – довільне число, тоді

$$x_2 = \frac{1-c+ac}{b+c-bc}d; \quad x_3 = \frac{1-ab}{b+c-ba}d.$$

Знайдений результат означає, що збалансованість зовнішньої торгівлі досягнуто за співвідношення національних доходів:

$(b+c-bc):(1-c+ac):(1-ab)$ для будь-яких $0 < a, b, c < 1$.

Прикладом квадратичної форми в економіці може слугувати функція прибутку фірми, реалізуючої свій продукт на ринку одного товару:

$$E = p \cdot D(p) - C(y),$$

де p – ціна одиниці товару;

y – обсяг товарної продукції;

$D(y)$ – величина попиту;

$C(y)$ – величина виробничих витрат.

У разі лінійної функції попиту $D(p) = d_0 - d_1 p$, $d_0, d_1 > 0$ і квадратичної функції витрат $C(y) = c_1 y - c_2 \frac{y^2}{2}$, $c_1, c_2 > 0$ прибуток E набирає такого вигляду:

$$E = d_0 p - d_1 p^2 - c_1 y + c_2 \frac{y^2}{2}.$$

Виділяючи повні квадрати за величинами p і y, буде визначено:

$$E = -d_1\left(p - \frac{d_0}{d_1}\right)^2 + \frac{c_2}{2}\left(y - \frac{c_1}{c_2}\right)^2 + \frac{d_0^2}{4d_1} - \frac{c_1^2}{2c_2}.$$

Якщо ввести нові змінні $\tilde{p} = p - \frac{d_0}{d_1}, \tilde{y} = y - \frac{c_1}{c_2}$, які є відхиленнями ціни й обсягу від своїх граничних значень, і позначити $E_0 = \frac{d_0^2}{4d_1} - \frac{c_1^2}{2c_2}$ як критичне значення прибутку, тобто в результаті буде квадратична форма $E(\tilde{p}, \tilde{y}) - E_0 = \frac{c_2}{2}(\tilde{y})^2 - d_1(\tilde{p})^2$, зведена до канонічного вигляду.

Раніше не було вказано зв'язку між ціною p та обсягом y. Якщо припустити, що виконано умови рівності попиту та пропозиції, а також відповідність ціни граничним витратам, тобто:

$$D(p) = y, \quad p = \frac{dC(y)}{dy}.$$

Далі буде утворено лінійну систему рівнянь для рівноважних значень p^*, y^*: $\begin{cases} d_0 - d_1 p = y, \\ p = c_1 - c_2 y. \end{cases}$.

Із цієї системи неважко знайти таке:

$$p^* = \frac{c_1 - c_2 d_0}{1 - c_2 d_1}, y^* = \frac{d_0 - c_1 d_1}{1 - c_2 d_1}.$$

Підстановка рівноважних значень p^* і y^* у вираз для прибутку дає величину $E^* = -\frac{c_2}{2}\left(y^*\right)^2$.

Від'ємність прибутку пояснюють спадною функцією виробничих витрат.

Теоретичні запитання для самодіагностики

1. Скільки різних власних значень має матриця n-го порядку?

2. Який вектор називають власним для матриці n-го порядку ?

3. Чи може бути власний вектор нульовим, чи власне значення нульовим?

4. За якої умови однорідна система має ненульові розв'язки?

5. Завдання до самостійної роботи

1. За якого α матриця N є особливою ? Варіанти матриць надано в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Варіанти матриць

№ п/п	Матриця N	№ п/п	Матриця N
1	2	3	4
1	$N=\begin{pmatrix}5+\alpha & 4 & -5\\ 1 & 2 & -6\\ \alpha & 2 & 9\end{pmatrix}$	16	$N=\begin{pmatrix}11+\alpha & 12-\alpha & 3\\ \alpha & 32 & 5\\ 1 & \alpha+1 & \alpha-2\end{pmatrix}$
2	$N=\begin{pmatrix}5+\alpha & 4 & -5\\ 1 & 2 & -6\\ \alpha & 2 & 9\end{pmatrix}$	17	$N=\begin{pmatrix}11+\alpha & 12-\alpha & 3\\ \alpha & 32 & 5\\ 1 & \alpha+1 & \alpha-2\end{pmatrix}$
3	$N=\begin{pmatrix}5+\alpha & 4 & -5\\ 1 & 2 & -6\\ \alpha & 2 & 9\end{pmatrix}$	18	$N=\begin{pmatrix}2 & 5 & 6+\alpha\\ 3-\alpha & 11 & 7+2\alpha\\ 4+\alpha & 4 & 1+\alpha\end{pmatrix}$
4	$N=\begin{pmatrix}\alpha-8 & 5+\alpha & 2\\ 2+\alpha & 3 & \alpha\\ 4\alpha & 9-\alpha & 4-3\alpha\end{pmatrix}$	19	$N=\begin{pmatrix}1 & 4+\alpha & 3+\alpha\\ \alpha & 11+6\alpha & 5\\ \alpha-1 & 2-8\alpha & 1\end{pmatrix}$
5	$N=\begin{pmatrix}4+2\alpha & \alpha & 11\\ 8 & 2 & 2+\alpha\\ 1-\alpha & \alpha-5 & 1\end{pmatrix}$	20	$N=\begin{pmatrix}3\alpha & 3 & 4\alpha\\ \alpha & \alpha-5 & 8\\ 1 & 4 & 2+\alpha\end{pmatrix}$
6	$N=\begin{pmatrix}2 & 4\alpha & 12\\ \alpha-1 & 2 & 3+\alpha\\ 4 & \alpha & 7+\alpha\end{pmatrix}$	21	$N=\begin{pmatrix}3-\alpha & 2 & 5+\alpha\\ 2\alpha & 6 & \alpha\\ 1+\alpha & \alpha & 2\end{pmatrix}$
7	$N=\begin{pmatrix}\alpha & 2 & 3-\alpha\\ 9\alpha & 3+\alpha & 1\\ 7 & \alpha & 4+\alpha\end{pmatrix}$	22	$N=\begin{pmatrix}4 & 1-\alpha & \alpha\\ 5 & 6\alpha & \alpha+5\\ 11 & 8-\alpha & 3\end{pmatrix}$
8	$N=\begin{pmatrix}2 & 3+\alpha & 4+\alpha\\ 3+7\alpha & 11 & \alpha-8\\ 1 & \alpha & \alpha+6\end{pmatrix}$	23	$N=\begin{pmatrix}21 & \alpha-3 & \alpha\\ 3\alpha & 8+\alpha & 3\\ 5-8\alpha & 2 & 6\end{pmatrix}$
9	$N=\begin{pmatrix}21 & 4\alpha & 9+\alpha\\ 11 & 7-\alpha & \alpha\\ \alpha+5 & 2\alpha & 3\end{pmatrix}$	24	$N=\begin{pmatrix}4 & 2-\alpha & 3\\ 2\alpha & \alpha+3 & 4-\alpha\\ 2-\alpha & \alpha & 1+\alpha\end{pmatrix}$

Закінчення табл. 5.1

1	2	3	4
10	$N=\begin{pmatrix} 1+\alpha & 3\alpha & 2+\alpha \\ 10 & 2+\alpha & 5-8\alpha \\ 2+\alpha & \alpha & 3 \end{pmatrix}$	25	$N=\begin{pmatrix} 1 & \alpha & 3+\alpha \\ 2-\alpha & 11 & 3+9\alpha \\ 3 & 4-\alpha & 3+\alpha \end{pmatrix}$
11	$N=\begin{pmatrix} 3 & 5-\alpha & 1-7\alpha \\ 2 & 6\alpha & 2 \\ 0 & \alpha-8 & 2\alpha \end{pmatrix}$	26	$N=\begin{pmatrix} \alpha & 2+\alpha & 3 \\ 4-\alpha & \alpha & 3+9\alpha \\ 0 & 2-\alpha & \alpha \end{pmatrix}$
12	$N=\begin{pmatrix} 1 & \alpha+9 & 7+\alpha \\ 2 & 4-\alpha & 3-\alpha \\ 4\alpha & \alpha-3 & 1 \end{pmatrix}$	27	$N=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 1-\alpha & \alpha & \alpha+8 \\ 2 & 3-9\alpha & 1 \end{pmatrix}$
13	$N=\begin{pmatrix} 3\alpha & \alpha-6 & 3+\alpha \\ 2-\alpha & 5 & 0 \\ 1-6\alpha & 4\alpha & 2 \end{pmatrix}$	28	$N=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2-\alpha & 3\alpha & 2-\alpha \\ 3 & 1+\alpha & 10\alpha \end{pmatrix}$
14	$N=\begin{pmatrix} 1-9\alpha & 3\alpha & 2 \\ 5 & \alpha-3 & 4\alpha \\ 1 & 3-2\alpha & 12 \end{pmatrix}$	29	$N=\begin{pmatrix} 34 & 3+4\alpha & 7 \\ 5-\alpha & 1+7\alpha & \alpha \\ 2 & 2+5\alpha & 1 \end{pmatrix}$
15	$N=\begin{pmatrix} 6-9\alpha & \alpha & 1 \\ 5 & 3+2\alpha & 6-9\alpha \\ 0 & 3 & 5\alpha \end{pmatrix}$	30	$N=\begin{pmatrix} 2+3\alpha & 7 & 5+\alpha \\ 3 & 4-8\alpha & 11 \\ 4\alpha & 4+9\alpha & 1 \end{pmatrix}$

2. З'ясувати, які з наведених добутків входять до визначників відповідних порядків і з якими знаками. Указати порядок визначника (табл. 5.2).

Таблиця 5.2

Варіанти добутків елементів визначників

№ п/п	Варіанти добутків	
1	2	3
1	$a_{12}a_{21}a_{33}a_{44}a_{55}$	$a_{42}a_{25}a_{34}a_{66}a_{21}a_{53}$
2	$a_{13}a_{22}a_{31}a_{44}a_{55}$	$a_{33}a_{62}a_{41}a_{53}a_{12}a_{24}$
3	$a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}a_{55}$	$a_{16}a_{35}a_{26}a_{44}a_{52}a_{61}$
4	$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}$	$a_{44}a_{26}a_{35}a_{12}a_{52}a_{61}$
5	$a_{11}a_{25}a_{33}a_{44}a_{52}$	$a_{53}a_{35}a_{62}a_{14}a_{41}a_{21}$

Закінчення табл. 5.2

1	2	3
6	$a_{15}a_{22}a_{33}a_{44}a_{51}$	$a_{31}a_{64}a_{53}a_{33}a_{26}a_{11}$
7	$a_{11}a_{11}a_{11}a_{11}a_{11}$	$a_{14}a_{24}a_{35}a_{61}a_{43}a_{22}$
8	$a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}$	$a_{52}a_{34}a_{63}a_{36}a_{11}a_{45}$
9	$a_{11}a_{22}a_{33}a_{45}a_{54}$	$a_{14}a_{36}a_{46}a_{32}a_{65}a_{45}$
10	$a_{11}a_{22}a_{35}a_{44}a_{53}$	$a_{31}a_{13}a_{54}a_{62}a_{35}a_{24}$
11	$a_{11}a_{24}a_{33}a_{42}a_{55}$	$a_{33}a_{64}a_{51}a_{25}a_{12}a_{46}$
12	$a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}a_{55}$	$a_{15}a_{23}a_{32}a_{45}a_{56}a_{45}$
13	$a_{12}a_{21}a_{34}a_{43}a_{55}$	$a_{54}a_{23}a_{45}a_{61}a_{12}a_{32}$
14	$a_{21}a_{12}a_{34}a_{43}a_{55}$	$a_{16}a_{23}a_{54}a_{62}a_{41}a_{35}$
15	$a_{55}a_{21}a_{34}a_{43}a_{12}$	$a_{61}a_{25}a_{44}a_{13}a_{32}a_{51}$
16	$a_{34}a_{21}a_{12}a_{43}a_{55}$	$a_{44}a_{35}a_{26}a_{12}a_{13}a_{51}$
17	$a_{43}a_{21}a_{34}a_{12}a_{55}$	$a_{46}a_{25}a_{14}a_{33}a_{52}a_{61}$
18	$a_{12}a_{34}a_{21}a_{43}a_{55}$	$a_{53}a_{12}a_{62}a_{44}a_{26}a_{31}$
19	$a_{12}a_{43}a_{34}a_{21}a_{55}$	$a_{41}a_{32}a_{65}a_{23}a_{54}a_{16}$
20	$a_{12}a_{55}a_{34}a_{43}a_{21}$	$a_{15}a_{64}a_{33}a_{42}a_{56}a_{21}$
21	$a_{12}a_{21}a_{43}a_{34}a_{55}$	$a_{54}a_{32}a_{24}a_{66}a_{41}a_{13}$
22	$a_{12}a_{21}a_{55}a_{43}a_{34}$	$a_{31}a_{22}a_{53}a_{15}a_{41}a_{64}$
23	$a_{12}a_{21}a_{34}a_{55}a_{43}$	$a_{64}a_{52}a_{13}a_{35}a_{22}a_{25}$
24	$a_{12}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$	$a_{52}a_{63}a_{14}a_{21}a_{31}a_{46}$
25	$a_{13}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$	$a_{55}a_{23}a_{14}a_{31}a_{62}a_{41}$
27	$a_{14}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$	$a_{21}a_{35}a_{41}a_{63}a_{54}a_{61}$
28	$a_{15}a_{22}a_{33}a_{44}a_{55}$	$a_{44}a_{63}a_{25}a_{51}a_{32}a_{16}$
29	$a_{11}a_{23}a_{33}a_{44}a_{55}$	$a_{54}a_{32}a_{11}a_{64}a_{35}a_{52}$
30	$a_{11}a_{24}a_{33}a_{44}a_{55}$	$a_{11}a_{23}a_{65}a_{43}a_{24}a_{15}$

3. Обчислити визначник Δ та ранг матриці A. Варіанти наведено в табл. 5.3.

Таблиця 5.3

Варіанти визначників Δ та матриць A

№ п/п	Визначники	Матриця A
1	2	3
1	$\begin{vmatrix} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 8 \\ -1 & 0 & 2 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 8 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
2	$\begin{vmatrix} 2 & 9 & -1 & -1 \\ 4 & 0 & 9 & 1 \\ 7 & -5 & 2 & 5 \\ -2 & 3 & 10 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & 3 & 4 & -2 & 5 \\ 4 & -3 & 1 & -3 & 12 \\ 2 & 3 & 5 & -10 & -9 \end{pmatrix}$
3	$\begin{vmatrix} 6 & -6 & 0 & 4 \\ 8 & -7 & -8 & 7 \\ 3 & -11 & -12 & 20 \\ 12 & -12 & 0 & 8 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & 1 & 10 \\ 10 & 1 & 11 \\ 11 & 1 & 10 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
4	$\begin{vmatrix} 100 & 99 & 98 & 97 \\ 96 & 95 & 94 & 93 \\ 92 & 91 & 90 & 89 \\ 88 & 87 & 86 & 85 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 8 & 10 \\ 12 & 4 & 9 \\ 11 & 3 & 3 \\ 6 & 12 & 0 \end{pmatrix}$
5	$\begin{vmatrix} 11 & 12 & 13 & 14 \\ 15 & 16 & 17 & 18 \\ 19 & 20 & 21 & 22 \\ 23 & 24 & 25 & 26 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 20 & 23 & 26 & 29 & 31 & 34 \end{pmatrix}$
6	$\begin{vmatrix} 2 & -8 & -5 & 1 \\ 4 & 14 & 3 & -6 \\ -8 & -2 & -30 & 9 \\ 9 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 11 & 14 & 17 \\ 20 & 23 & 26 & 29 & 31 & 34 \end{pmatrix}$
7	$\begin{vmatrix} 2 & 5 & 6 & 12 \\ 7 & 8 & 10 & -19 \\ -14 & 5 & 3 & 0 \\ 4 & -4 & 5 & 6 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 & -4 \\ 7 & 7 & -7 & 0 \\ 8 & 8 & 1 & -6 \\ 11 & -9 & 1 & -1 \\ 3 & -5 & 2 & 32 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

Продовження табл. 5.3

1	2	3
8	$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 8 & 14 \\ 22 & 28 & 55 & 11 \\ 4 & 0 & 1 & -1 \\ 4 & 9 & 2 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 & -4 \\ 7 & 3 & -11 & 4 \\ 2 & 6 & 1 & -16 \\ 15 & 9 & 2 & 1 \\ 6 & -5 & 2 & 32 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
9	$\begin{vmatrix} 3 & -8 & 5 & 6 \\ 0 & 1 & 10 & 2 \\ 4 & -5 & -4 & -7 \\ 0 & 2 & 12 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -2 & 8 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & 12 & 0 \end{pmatrix}$
10	$\begin{vmatrix} 4 & 11 & -6 & -4 \\ -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -7 & 6 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 10 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 11 & -6 & -4 \\ -3 & 2 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 6 & 2 \\ 3 & -6 & 0 & 10 \end{pmatrix}$
11	$\begin{vmatrix} 5 & -5 & 1 & 11 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ 4 & 5 & 8 & -8 \\ 3 & 4 & 6 & -9 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 & 11 & 4 & 17 \\ 2 & 3 & 22 & 9 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
12	$\begin{vmatrix} 3 & 7 & -8 & 2 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 2 & -2 \\ 1 & 3 & -4 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$
13	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 12 & 23 \\ 4 & -5 & 6 & 4 \\ 1 & -1 & 3 & 7 \\ 9 & -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 & 23 \\ 4 & -5 & -6 & 4 \\ 2 & 1 & 3 & 7 \\ 9 & -3 & 2 & -4 \end{pmatrix}$
14	$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 4 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 7 & 3 & -2 & 8 \end{pmatrix}$
15	$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 10 & -9 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & 1 & 3 & -7 \\ 2 & -1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$

Продовження табл. 5.3

1	2	3
16	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 7 & 5 & 3 & 1 \\ 5 & 3 & 7 & 1 \\ 3 & 7 & 1 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 9 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & 6 & 3 & -7 \\ 2 & 1 & 5 & 4 & 6 \end{pmatrix}$
17	$\begin{vmatrix} 10 & 1 & 3 & 7 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \\ 4 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 3 & 12 & 9 \\ 4 & 5 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
18	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 \\ 5 & 1 & 2 & -9 \\ 4 & -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{pmatrix}$
19	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 9 & -7 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 9 & 8 \\ 1 & -18 & 2 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$
20	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 6 & 4 \\ 3 & 1 & 3 & 2 \\ 5 & 7 & 5 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} -9 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 8 & 6 & 1 \\ 2 & 1 & 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$
21	$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 5 & 4 & 9 & 1 \\ -3 & -1 & 3 & 4 \\ 7 & 9 & 3 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$
22	$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & -2 \\ 3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$
23	$\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 & 3 \\ 9 & 1 & 4 & 2 \\ 11 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -2 \\ 1 & -1 & 5 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

1	2	3
24	$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -2 & 3 \\ 1 & 9 & 7 & 8 \\ 5 & -5 & 2 & 3 \\ 4 & -2 & 3 & 4 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
25	$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 2 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 9 \end{pmatrix}$
26	$\begin{vmatrix} 1 & 7 & 2 & 5 \\ -2 & 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 2 & -7 \\ 5 & 1 & 6 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ -3 & 5 & 0 & 1 & 10 \\ 3 & -1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
27	$\begin{vmatrix} 11 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 9 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$
28	$\begin{vmatrix} 6 & 1 & 6 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & -4 & 0 \\ 2 & 1 & 11 & 9 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -5 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$
29	$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 7 \\ -7 & 1 & 3 & 2 \\ 4 & 5 & 4 & -1 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 2 & -7 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$
30	$\begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & -7 & 2 & 1 \\ 4 & -4 & 5 & 2 \end{vmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 11 & 10 \\ 16 & 2 & -4 & 7 \\ 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

4. Дослідити систему лінійних алгебраїчних рівнянь на сумісність та знайти загальний розв'язок у разі її сумісності. Варіанти систем наведено далі:

$$1.\begin{cases}2x_1-3x_2+5x_3+x_4-9x_5=-7\\ -x_1+x_2+4x_3-2x_4+3x_5=4\\ 5x_1+2x_2-3x_3+6x_4-5x_5=1\\ 2x_1-3x_2+5x_3+x_4-9x_5=-6\\ -2x_1+5x_2+5x_3-7x_4+3x_5=4\end{cases}$$

$$2.\begin{cases}2x_1+3x_2+4x_3+5x_4-3x_5=-2\\ 3x_1+x_2+2x_3+4x_4+8x_5=1\\ 4x_1+6x_2+3x_3+7x_4-4x_5=1\\ 5x_1+2x_2+x_3+4x_4-4x_5=4\\ 5x_1-5x_2+x_3+x_4+9x_5=6\end{cases}$$

$$3.\begin{cases}4x_1-2x_2+5x_3+2x_4-5x_5=7\\ 5x_1-x_2+3x_3+x_4+9x_5=1\\ x_1+3x_2-1x_3+2x_4-5x_5=14\\ 3x_1-2x_2+x_3-x_4-2x_5=5\\ x_1+6x_2-x_3+2x_4-7x_5=5\end{cases}$$

$$4.\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4-x_5=7\\ x_1+2x_3+2x_4+4x_5=5\\ 4x_1+x_2-x_3-5x_5=3\\ 2x_1+x_2+3x_3=2\\ 6x_1-7x_2+4x_3-2x_5=8\end{cases}$$

$$5.\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3+4x_4-6x_5=0\\ x_1+14x_2+20x_3+27x_4+3x_5=0\\ 5x_1+10x_2+16x_3+9x_4-5x_5=-2\\ 3x_1+5x_2+6x_3+13x_4-x_5=6\\ 4x_1+7x_2-3x_3+2x_4-6x_5=3\end{cases}$$

$$6.\begin{cases}3x_1+4x_2-2x_3+5x_4-x_5=10\\ 2x_1+3x_2+5x_3-4x_4-x_5=-2\\ 4x_1+5x_2-4x_3-3x_4+3x_5=-2\\ 5x_1+3x_2+2x_3-5x_4-x_5=-1\\ x_1-6x_2+2x_3+x_4+5x_5=5\end{cases}$$

$$7.\begin{cases}3x_1-2x_2+x_3-x_4-2x_5=11\\ x_1+3x_2-x_3+2x_4+19x_5=14\\ 5x_1-x_2+3x_3+x_4-x_5=1\\ 4x_1-2x_2+5x_3+2x_4-14x_5=7\\ 5x_1+2x_2-x_3+4x_4-7x_5=-2\end{cases}$$

$$8.\begin{cases}5x_1+2x_2+x_3+4x_4-2x_5=4\\ x_1+6x_2+3x_3+7x_4+6x_5=1\\ 3x_1+x_2+2x_3+4x_4+5x_5=1\\ 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4-4x_5=-2\\ 2x_1-5x_2+x_3+3x_4+8x_5=-8\end{cases}$$

$$9.\begin{cases}x_1-3x_2+4x_3+2x_4-12x_5=-7\\ -x_1-3x_2+x_3+2x_4+6x_5=4\\ 7x_1+2x_2-3x_3+4x_4+3x_5=2\\ 4x_1+3x_2+3x_3-x_4-2x_5=-3\\ -x_1+3x_2+4x_3-x_4+3x_5=-4\end{cases}$$

$$10.\begin{cases}5x_1+x_2+3x_3-x_4-15x_5=-9\\ -2x_1+4x_2-x_3-3x_4+3x_5=4\\ 6x_1+x_2-5x_3+2x_4-10x_5=-3\\ 2x_1+9x_2-7x_3+x_4+13x_5=-6\\ 2x_1+6x_2-2x_3+x_4-15x_5=-7\end{cases}$$

11. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+5x_3-x_4-6x_5=-1 \\ -2x_1+4x_2-x_3+2x_4-x_5=-4 \\ 7x_1-2x_2-x_3+4x_4+4x_5=1 \\ 2x_1-5x_2+6x_3+8x_4-3x_5=-3 \\ 5x_1-3x_2-4x_3+x_4=-3 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 4x_1+3x_2-2x_3+x_4-17x_5=-8 \\ -x_1+2x_2+5x_3-2x_4-6x_5=-4 \\ 2x_1+3x_2-6x_3+x_4-4x_5=-4 \\ 7x_1+3x_2-x_3+5x_4-9x_5=-7 \\ 2x_1-5x_2+5x_3-7x_4-14x_5=-6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 2x_1-4x_2+2x_3+5x_4-2x_5=-3 \\ -x_1+4x_2+2x_3-3x_4+5x_5=-5 \\ 3x_1+5x_2-4x_3-2x_4-12x_5=-3 \\ 7x_1-2x_2-5x_3+x_4-17x_5=-4 \\ 2x_1-9x_2+4x_3-x_4+3x_5=-3 \end{cases}$

14. $\begin{cases} 2x_1+4x_2+5x_3-x_4-14x_5=-2 \\ -2x_1+5x_2-4x_3-x_4+x_5=4 \\ 5x_1+x_2-3x_3+5x_4+10x_5=3 \\ x_1+4x_2+2x_3-x_4+2x_5=-8 \\ x_1-6x_2+2x_3+7x_4-9x_5=-4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} 4x_1+2x_2+x_3-7x_4-7x_5=-6 \\ -3x_1+x_2+2x_3+x_4+4x_5=5 \\ 3x_1+5x_2-x_3-2x_4-9x_5=2 \\ 3x_1-4x_2+2x_3-6x_4+5x_5=-4 \\ 2x_1-4x_2+5x_3+2x_4-4x_5=-8 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 9x_1-10x_2+5x_3+x_4-2x_5=-6 \\ -x_1+2x_2+4x_3-2x_4-4x_5=8 \\ 5x_1+2x_2-4x_3+2x_4+12x_5=7 \\ 6x_1-2x_2+5x_3-5x_4-7x_5=-2 \\ 3x_1-7x_2+2x_3+x_4+5x_5=-2 \end{cases}$

17. $\begin{cases} 5x_1-3x_2+7x_3+3x_4-2x_5=-2 \\ -x_1+7x_2+4x_3+9x_4-3x_5=5 \\ 6x_1+x_2+4x_3+x_4+3x_5=3 \\ 8x_1-3x_2-x_3+5x_4-6x_5=-6 \\ 3x_1-13x_2+8x_3-2x_4+8x_5=-7 \end{cases}$

18. $\begin{cases} 12x_1-3x_2+8x_3+x_4-5x_5=-7 \\ -x_1+4x_2-8x_3-9x_4+2x_5=4 \\ 7x_1+14x_2-4x_3-x_4-5x_5=-1 \\ 4x_1-3x_2+15x_3+3x_4+6x_5=-1 \\ 12x_1-6x_2+5x_3+9x_4+2x_5=7 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 18x_1-3x_2+15x_3+x_4-x_5=2 \\ -x_1+6x_2+4x_3-12x_4+13x_5=4 \\ -5x_1-4x_2-9x_3+x_4+5x_5=3 \\ 2x_1-2x_2+5x_3+16x_4-9x_5=-2 \\ 2x_1-3x_2-7x_3+x_4+8x_5=-3 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 7x_1+4x_2-8x_3+x_4-17x_5=3 \\ -2x_1+7x_2+3x_3-x_4+3x_5=-9 \\ 7x_1+2x_2-2x_3+6x_4-9x_5=14 \\ 5x_1-7x_2+13x_3-2x_4+9x_5=3 \\ x_1-3x_2+6x_3+2x_4-14x_5=18 \end{cases}$

$$21.\begin{cases}6x_1+8x_2-5x_3+4x_4+3x_5=-6\\-x_1+2x_2+4x_3-15x_4+3x_5=4\\5x_1+2x_2-8x_3+6x_4-5x_5=9\\2x_1+4x_2+5x_3+x_4-x_5=-15\\2x_1-6x_2+3x_3+x_4-7x_5=-17\end{cases}\quad 22.\begin{cases}x_1-3x_2+5x_3+3x_4-18x_5=-7\\-x_1+7x_2+4x_3-2x_4+3x_5=14\\9x_1+2x_2-13x_3+6x_4-x_5=-1\\2x_1-4x_2+5x_3+8x_4-9x_5=11\\2x_1+13x_2-5x_3+9x_4-8x_5=-7\end{cases}$$

$$23.\begin{cases}9x_1-3x_2+12x_3+7x_4-4x_5=7\\-x_1+3x_2+4x_3-7x_4+3x_5=18\\9x_1+3x_2-3x_3-2x_4-5x_5=15\\-2x_1-8x_2+5x_3+2x_4+9x_5=5\\2x_1-3x_2+9x_3+x_4-2x_5=12\end{cases}\quad 24.\begin{cases}8x_1-3x_2+14x_3-3x_4-x_5=-7\\-12x_1+x_2+5x_3+2x_4-3x_5=13\\5x_1+7x_2-3x_3+2x_4-17x_5=16\\12x_1-3x_2+15x_3+x_4-9x_5=16\\-x_1-3x_2+3x_3+x_4+9x_5=-3\end{cases}$$

$$25.\begin{cases}x_1-8x_2+5x_3+17x_4-9x_5=-6\\-x_1+2x_2+4x_3-3x_4+8x_5=-5\\2x_1+2x_2-13x_3+6x_4-5x_5=9\\2x_1-3x_2+15x_3+x_4-7x_5=12\\2x_1-5x_2+5x_3+2x_4-9x_5=-6\end{cases}\quad 26.\begin{cases}x_1-19x_2+5x_3+2x_4-9x_5=-5\\-3x_1+x_2+6x_3-2x_4+7x_5=4\\-2x_1+2x_2-4x_3+9x_4-5x_5=5\\2x_1-8x_2+5x_3+2x_4-9x_5=16\\-4x_1-3x_2-5x_3+x_4+4x_5=14\end{cases}$$

$$27.\begin{cases}9x_1-3x_2+12x_3+7x_4-4x_5=7\\-x_1+3x_2+4x_3-7x_4+3x_5=18\\9x_1+3x_2-3x_3-2x_4-5x_5=15\\-2x_1-8x_2+5x_3+2x_4+9x_5=5\\2x_1-3x_2+9x_3+x_4-2x_5=-12\end{cases}\quad 28.\begin{cases}8x_1-3x_2+14x_3-3x_4-x_5=-7\\-12x_1+x_2+5x_3+2x_4-3x_5=13\\5x_1+7x_2-3x_3+2x_4-17x_5=16\\12x_1-3x_2+15x_3+x_4-9x_5=16\\-x_1-3x_2+3x_3+x_4+9x_5=-3\end{cases}$$

$$29.\begin{cases}x_1-8x_2+5x_3+17x_4-9x_5=-6\\x_1+2x_2+4x_3-3x_4+8x_5=-5\\2x_1+2x_2-13x_3+6x_4-5x_5=9\\2x_1-3x_2+15x_3+x_4-7x_5=12\\2x_1-5x_2+5x_3+2x_4-9x_5=-6\end{cases}\quad 30.\begin{cases}x_1-19x_2+5x_3+2x_4-9x_5=5\\-3x_1+x_2+6x_3-2x_4+7x_5=4\\-2x_1+2x_2-4x_3+9x_4-5x_5=5\\2x_1-8x_2+5x_3+2x_4-9x_5=16\\-4x_1-3x_2-5x_3+x_4+4x_5=14\end{cases}$$

5. Розв'язати лінійні системи рівнянь методами оберненої матриці та Крамера. У табл. 5.4 наведено варіанти систем.

Таблиця 5.4

Варіанти лінійних систем рівнянь

1	2	1	2
1	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 5 \\ x_2 + 3x_3 = 16 \\ 5x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$	2	$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$
3	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6 \end{cases}$	4	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$
5	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 = -1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = -2 \end{cases}$	6	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1 \\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3 \end{cases}$
7	$\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 = 0 \\ 3x_2 - 2x_3 = 1 \end{cases}$	8	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 2 \\ 4x_1 + 2x_2 - 7x_3 = 4 \\ 3x_1 - 9x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$
9	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 - 3x_2 - x_3 = 2 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -2 \end{cases}$	10	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 5x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 4 \end{cases}$
11	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 8 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 22 \end{cases}$	12	$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - 9x_2 + 2x_3 = 8 \\ x_1 + x_2 + 7x_3 = -2 \end{cases}$
13	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$	14	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$
15	$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_3 = 2 \end{cases}$	16	$\begin{cases} -x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - x_3 = 0 \end{cases}$
17	$\begin{cases} 8x_1 + x_2 + 4x_3 = 4 \\ x_1 - 5x_2 - x_3 = 1 \\ 3x_1 + 4x_3 = 0 \end{cases}$	18	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 8x_3 = 1 \\ x_1 - 3x_2 + 6x_3 = 1 \end{cases}$

1	2	1	2
19	$\begin{cases}5x_1 - x_2 + x_3 = 2\\ x_1 + x_2 + 5x_3 = 0\\ 2x_1 - 5x_3 = -2\end{cases}$	20	$\begin{cases}-2x_1 + x_2 - 9x_3 = 1\\ 2x_1 - 7x_2 + x_3 = 0\\ 5x_1 - 5x_3 = 0\end{cases}$
21	$\begin{cases}6x_1 + 7x_2 + x_3 = 0\\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 = 1\\ 3x_1 + 4x_3 = 0\end{cases}$	22	$\begin{cases}x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 0\\ 8x_1 + x_3 = 1\\ x_1 - 2x_2 + 7x_3 = 1\end{cases}$
23	$\begin{cases}x_1 - x_2 + x_3 = 0\\ x_1 + 7x_2 + 6x_3 = 0\\ 2x_1 - x_3 = 2\end{cases}$	24	$\begin{cases}-5x_1 + x_2 - x_3 = 1\\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 = 0\\ x_1 - x_3 = 0\end{cases}$
25	$\begin{cases}3x_1 + x_2 + 2x_3 = 2\\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0\\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 = 6\end{cases}$	26	$\begin{cases}3x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\\ 2x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 3\\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 1\end{cases}$
27	$\begin{cases}6x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 1\\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = -1\\ x_1 - 4x_2 - x_3 = -2\end{cases}$	28	$\begin{cases}2x_1 - 9x_2 + x_3 = -2\\ -3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = -1\\ x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 3\end{cases}$
29	$\begin{cases}4x_1 + x_2 + 2x_3 = 2\\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0\\ 4x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6\end{cases}$	30	$\begin{cases}9x_1 + x_2 + 2x_3 = 0\\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 8\\ 4x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 4\end{cases}$

6. Знайти власні числа та вектори матриці:

1) $\begin{pmatrix}3 & 6\\ 2 & -5\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}1 & 0\\ 3 & 8\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 10 & -5\end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix}4 & 3\\ -1 & 2\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}-4 & -1\\ 0 & 7\end{pmatrix}$;

6) $\begin{pmatrix}11 & 3\\ -5 & 1\end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix}5 & 2\\ 4 & 1\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}1 & -1\\ 6 & -2\end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix}8 & -4\\ 3 & 7\end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix}2 & 7\\ -6 & 3\end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix}3 & -2\\ -4 & 3\end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 7 & -2\end{pmatrix}$; 13) $\begin{pmatrix}3 & 5\\ 4 & -1\end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix}3 & 0\\ 4 & -2\end{pmatrix}$; 15) $\begin{pmatrix}5 & 8\\ 1 & -1\end{pmatrix}$;

16) $\begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & 6\end{pmatrix}$; 17) $\begin{pmatrix}1 & -3\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; 18) $\begin{pmatrix}2 & 4\\ -7 & 1\end{pmatrix}$; 19) $\begin{pmatrix}5 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$; 20) $\begin{pmatrix}1 & 5\\ 7 & 2\end{pmatrix}$;

21) $\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$; 22) $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$; 23) $\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$; 24) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; 25) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$;

26) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$; 27) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$; 28) $\begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; 29) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$; 30) $\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$.

7. Звести квадратичну форму $F(x_1, x_2, x_3)$ до канонічного вигляду. Указати матрицю лінійного перетворення, що зводить квадратичну форму до канонічного вигляду:

1. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 - 3x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.
2. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 5x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3$.
3. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3$.
4. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 5x_2^2 - 4x_3^2 + 2x_1x_2 - 4x_1x_3$.
5. $F(x_1;x_2;x_3) = 4x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 + 4x_1x_3 - 3x_2x_3$.
6. $F(x_1;x_2;x_3) = 2x_1^2 + 18x_2^2 + 8x_3^2 - 12x_1x_2 + 8x_1x_3 - 27x_2x_3$.
7. $F(x_1;x_2;x_3) = -12x_1^2 - 3x_2^2 - 12x_3^2 + 12x_1x_2 - 24x_1x_3 + 8x_2x_3$.
8. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 4x_3^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
9. $F(x_1;x_2;x_3) = 4x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3$.
10. $F(x_1;x_2;x_3) = 4x_1^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_2x_3$.
11. $F(x_1;x_2;x_3) = 4x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3$.
12. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 4x_2x_3$.
13. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3$.
14 $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 - 3x_2^2 - 2x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3 - 6x_2x_3$.
15. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 3x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$.
16. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 - x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$.
17. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 2x_1x_3$.
18. $F(x_1;x_2;x_3) = x_1^2 + 8x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$.
19. $F(x_1;x_2;x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 8x_2x_3$.
20. $F(x_1;x_2;x_3) = 4x_1^2 + 8x_2^2 + x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.
21. $F(x_1;x_2;x_3) = 4x_1^2 + 5x_2^2 + 4x_3^2 + 8x_1x_2 + 4x_1x_3 + 8x_2x_3$.

22. $F(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+5x_2^2+7x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+12x_2x_3$.

23. $F(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+8x_2^2+7x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+16x_2x_3$.

24. $F(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+2x_1x_2+2x_1x_3+10x_2x_3$.

25. $F(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+5x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+2x_1x_3+6x_2x_3$.

26. $F(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+5x_2^2+4x_3^2+4x_1x_2+2x_2x_3$.

27. $F(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+2x_2^2+x_3^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_1x_3$.

28. $F(x_1;x_2;x_3)=x_1^2+2x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$.

29. $F(x_1;x_2;x_3)=4x_1^2+2x_3^2-3x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3$.

30. $F(x_1;x_2;x_3)=4x_1^2+x_3^2+8x_1x_2+4x_1x_3$.

Рекомендована література

1. Боревич З. И. Определители и матрицы / З. И. Боревич. – Санкт-Петербург ; Москва ; Краснодар : Изд-во "Лань", 2009. – 184 с.

2. Валуєв К. Г. Вища математика : навч. посіб. / К. Г. Валуєв, І. А. Джалладова. – Київ : КНЕУ, 2001. – 452 с.

3. Васильченко І. П. Вища математика для економістів : підручник / І. П. Васильченко. – Київ : Знання-Прес, 2002. – 454 с.

4. Вища математика для економістів : підручник / за ред. О. І. Ляшенко, О. І. Черняка. – Київ : ВПЦ "Київський університет", 2008. – 497 с.

5. Лютий О. І. Збірник задач з вищої математики : навч. посіб. / О. І. Лютий, О. І. Макаренко. – Київ : КНЕУ, 2003. – 305 с.

6. Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посіб. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2006. – 539 с.

7. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. У 2-х ч. / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – Ч.1. – 348 с.

8. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. У 2-х ч. / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – Ч. 2. – 308 с.

9. Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посіб. до розв'язання задач. У 2-х ч. / Л. М.Малярець, Л. Д. Широкорад. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2008. – Ч.1. – 476 с.

10. Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Економічна динаміка та її моделювання: диференціальні та різницеві рівняння" навчальної дисципліни "Математика для економістів" / укл. А. В. Воронін, О. В. Гунько. – Харків : ХНЕУ, 2012. – 64 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з теми "Елементи теорії матриць і визначників" навчальної дисципліни

"МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ І ЛІНІЙНА АЛГЕБРА"

для студентів галузей знань
0305 "Економіка та підприємництво",
0306 "Менеджмент і адміністрування"
денної форми навчання

Укладачі: **Воронін** Анатолій Віталійович
Гунько Ольга Володимирівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. Г. Доценко*

Коректор *О. Г. Доценко*

План 2016 р. Поз. № 33.
Підп. до друку 22.11.2016 р. Формат 60 x 90 1/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 4,75. Обл.-вид. арк. 5,94. Тираж 75 пр. Зам. № 246.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.