

УДК 519.863

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О МАКСИМАЛЬНОМ ПАРОСОЧЕТАНИИ В ПРОГРАММНОЙ СРЕДЕ *MATLAB*

Ковалева Екатерина Александровна, к. т. н., ХНЭУ им. С. Кузнеца, г. Харьков, Украина

**Аннотация** — На примере задачи о максимальном паросочетании рассмотрена особенность использования функции целочисленного программирования `bintprog` программной среды *Matlab*.

**Ключевые слова** — граф, максимальное паросочетание, `bintprog`, *Matlab*.

В экономической сфере задачи теории графов применяются для принятия локально оптимальных решений на каждом этапе, причем конечное решение также окажется оптимальным. Классическим примером таких задач является задача о максимальном паросочетании (оптимизационная задача теории графов). Данная задача формулируется следующим образом: для заданного неориентированного графа требуется найти такое подмножество  $E^*$  из всего их множества  $E$  ( $E^* \subset E$ ) максимальной мощности, в котором никакие два ребра не будут инцидентны (не будут иметь общей вершины).

В данной работе автор статьи трактуют эту задачу в терминах булевого линейного программирования (БЛП), которое, в свою очередь, представляет собой класс задач дискретной оптимизации. Существует множество методов, алгоритмов и программных средств решения этих задач. В этой связи справедливо ожидать возможности решения данных задач с помощью программной среды *Matlab* – пакета прикладных программ для решения задач технических вычислений и одноименный язык программирования, используемый в этом пакете [1].

Однако, среда *Matlab*, имея мощный набор средств для решения разнообразных задач непрерывной оптимизации в виде пакетов `Optimization Toolbox` и `Global Optimization Toolbox`, не содержит встроенных функций для решения задач дискретной оптимизации [2, 3], а только встроенную функцию `bintprog` для решения задачи БЛП

методом ветвей и границ. Некоторые исследователи, стремясь восполнить этот пробел, разработали соответствующие функции путем трактовки задачи о максимальном паросочетании в терминах целочисленного линейного программирования [2, 3].

Автор статьи приводит свое решение задачи о максимальном паросочетании в терминах БЛП. Ниже приведена математическая модель задачи:

$$f = \sum_{j=1}^n x_j \rightarrow \max, \quad (1)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq 1, i = \overline{1, m}. \quad (2)$$

Здесь  $x_j$  – переменные, ассоциированные с ребрами графа, при этом  $x_j = 1$ , если ребро с номером  $j$  входит в максимальное паросочетание, и  $x_j = 0$  в противоположном случае. Коэффициенты  $a_{ij}$  принимают значение 1, если вершина с номером  $i$  инцидентна ребру с номером  $j$ , и значение 0 в противном случае. Выражение (2) задает условие, что в каждой вершине сумма инцидентных ей ребер не превышает единицы.

Как пример использования функции `bintprog` рассмотрим граф, описывающий некоторую экономическую модель (рис. 1).

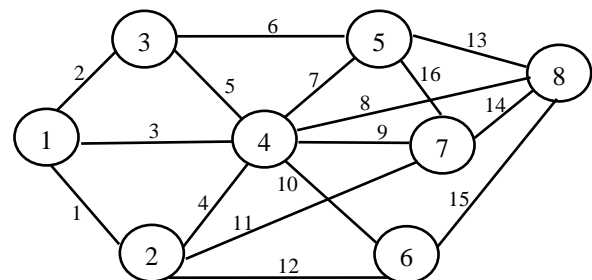


Рис. 1. Неориентированный граф

В этом случае Matlab-код для решения данной задачи имеет вид (m-файл MaxPar.m):

```
clc
clear all
f=ones(16,1);
A=[1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
  1 0 0 1 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0;
  0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;
  0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0;
  0 0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1;
  0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0;
  0 0 0 0 0 0 0 0 1 0 1 0 0 1 0 1;
  0 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 1 1 0];
b = ones(8,1);
x = bintprog(-f,A,b)
```

В результате вычислений получится вектор значений булевых переменных:

```
Optimization terminated.

x = 0 1 0 0 0 0
    0 0 0 1 1 0
    1 0 0 0 0 0

fval = -4

exitflag = 1

output =
    iterations: 19
           nodes: 1
           time: 0.2652
    algorithm: 'LP-based branch-and-bound'
    message: 'Optimization terminated.'
```

Таким образом, в максимальное паросочетание входит подмножество  $E^*$ , содержащее ребра с номерами  $E^* = \{2, 10, 11, 13\}$ .

Как видно из работы программы, выходные параметры exitflag и output функции bintprog имеет ряд особенностей, приведенных в табл. 1.

Таблица 1

**Выходные аргументы функции bintprog**

Параметр	Особенность
exitflag (некое целое число, идентифицирующее причину остановки алгоритма)	
1	Функция сошлась к некому решению x.
0	Число итераций превысило значение options.MaxIter.
-2	Данная задача не имеет решения.

-4	Число перебранных узлов превышает значение options.MaxNodes.
-5	Время перебора превышает значение options.MaxTime.
-6	Число итераций решателя LP для некоего узла при решении задачи LP-релаксации превысило значение options.MaxRLP.
output (структура с информацией о результатах оптимизации)	
iterations	Число выполненных итераций
nodes	Число узлов перебора
time	Превышение времени работы алгоритма
algorithm	Используемый алгоритм
message	Причина остановки работы алгоритма

Приведенный материал наглядно демонстрирует, что при определенном подходе к решению задач дискретной оптимизации-средствами Matlab, задачи БЛП могут быть решены с помощью встроенной функции bintprog. Изложенный материал может быть использован студентами старших и курсов, аспирантами и молодыми учеными.

**Список використаної літератури**

1. Джон, Г. Мэтьюз. Численные методы. Использование MATLAB (Numerical Methods: Using MATLAB) [Текст] / Мэтьюз Г. Джон, Д. Финк Куртис – 3-е изд. – М.: «Вильямс», 2001. – 720 с SBN 0-13-20042-5.
2. Иглин, С.П. Решение некоторых задач теории графов в MATLAB [Текст] / С.П. Иглин // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2004. – №4(4). – С. 28–33.
3. Иглин, С.П. Математические расчёты на базе MATLAB [Текст] / С.П. Иглин. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005. – 640 с.

**Авторы**

**Ковалева Екатерина Александровна**, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов, ХНЭУ им. С. Кузнеця (Kateryna.Kovalova@m.hneu.edu.ua).

Тези доповіді надійшли 7 лютого 2017 року.

Опубліковано в авторській редакції