МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні рекомендації і завдання до виконання контрольних робіт для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2017

УДК 519.863(07)
ББК 22.1р
Д 70

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.

Протокол № 1 від 25.08.2016 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: Л. М. Малярець
О. В. Мінєнкова

Д 70 **Дослідження** операцій та методи оптимізації : методичні рекомендації і завдання до виконання контрольних робіт для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня : [Електронне видання] / уклад. Л. М. Малярець, О. В. Мінєнкова. – Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 44 с.

Метою роботи є надання студентам допомоги у засвоєнні теоретичних знань і набутті практичних навичок під час виконання контрольних робіт із навчальної дисципліни. Подано чотири контрольних роботи по десять варіантів у кожній, а також приклад виконання нульового варіанта кожної з цих контрольних робіт.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня денної форми навчання.

УДК 519.863(07)
ББК 22.1р

Вступ

Сьогодні характерною особливістю розвитку інструментів дослідження соціально-економічних процесів і явищ на різних рівнях їх управління є інтенсивне поширення математичних методів і моделей.

Дослідження операцій та методи оптимізації є методами досліджень складних проблем в економіці, які дають можливість формалізувати опис суттєвих зв'язків змінних та об'єктів в економіці, виявити особливі ознаки функціонування об'єкта дослідження та дати їм оцінку, передбачити майбутні зміни характеристик його розвитку, сформувати обґрунтовані висновки, які адекватні ситуації, та отримати нові знання про об'єкт дослідження.

Основними темами методичних рекомендацій є економіко-математичні методи і моделі; задача лінійного програмування та методи її розв'язання; симплексний метод розв'язання задач лінійного програмування; теорія двоїстості, двоїсті задачі лінійного програмування; економічна інтерпретація двоїстих невідомих; транспортна задача; задача дробово-лінійного програмування; методи нелінійного програмування; квадратичне програмування; теорія ігор, основні методи їх розв'язання й аналізу.

Запропоновані завдання з контрольних робіт, які передбачені навчальним планом. Допомогу у розв'язанні кожного із завдань студент може отримати, розглянувши приклади виконання нульового варіанта, що наведені після переліку завдань певної контрольної роботи.

Наведені приклади не тільки роз'яснюють загальнотеоретичні положення, але й наочно показують можливі сфери застосування в економічному аналізі.

Виконання контрольних робіт сприяє закріпленню теоретичної бази знань і формуванню практичних навичок, які необхідні для розв'язку питань, пов'язаних з дослідженням економічних процесів і явищ, а також дає можливість оцінити якість засвоєння матеріалу.

Набуті студентами знання, навички, вміння формування оптимізаційних задач і моделей в економіці, обґрунтування методів їх розв'язування, аналіз отриманих результатів складають фундамент компетентностей сучасного економіста.

Дана дисципліна є необхідним ланцюгом неперервної аналітично-математичної підготовки економістів. Вона викладається кафедрою вищої математики й економіко-математичних методів після засвоєння дисципліни

"Математичний аналіз та лінійна алгебра", а також "Теорія ймовірностей та математична статистика" і передує вивченню дисциплін економічного спрямування, що передбачають використання інструментарію економіко-математичного моделювання.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студент повинен **знати:** принципи побудови економіко-математичних моделей для дослідження економічних систем в різних умовах визначеності та в умовах ризику; основні математичні методи оптимізації, за допомогою яких розробляються економіко-математичні моделі для обґрунтування управлінських рішень в економіці, а також **вміти:** виконувати постановку та формалізацію практичних задач оптимізації згідно із загальною технологією моделювання в економіці; класифікувати типи задач оптимізації та вибирати математичні моделі і методи для їх розв'язання; розв'язувати економічні задачі за допомогою методів лінійного програмування; будувати модель двоїстої задачі, визначати розв'язок вихідної задачі за розв'язком двоїстої та надавати економічну інтерпретацію двоїстих оцінок задачі оптимального використання сировини; розв'язувати задачі транспортного типу методом потенціалів; розв'язувати окремі задачі нелінійного програмування з використанням графічного методу та методу множників Лагранжа; застосовувати елементи теорії ігор до розв'язання парних матричних ігор. Студент також повинен володіти: математичними методами економіко-математичного моделювання при розв'язанні практичних задач економіки; навиками застосування програмного середовища *MS Excel* до розв'язування практичних оптимізаційних задач в економіці.

Контрольна робота 1
Побудова математичної моделі ЗЛП і застосування графічного методу до її розв'язання

1.1. Варіанти для виконання контрольної роботи

Варіант 1

Для виготовлення двох виробів A та B використовуються три види сировини. Прибуток від реалізації одиниці готової продукції кожного виду, запаси та витрати сировини на виготовлення одиниці продукції відповідно до прийнятої технології подані в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Вихідні дані

Різновид сировини	Затрати сировини на виготовлення одиниці продукції, кг		Запас сировини, кг
	A	B	
1	0	5	10
2	2	7	14
3	1	1	1
Прибуток від реалізації одиниці продукції, у.о.	1	5	

Побудувати математичну модель для визначення оптимального плану виробництва, за яким підприємство отримає максимальний прибуток від реалізації готової продукції. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Варіант 2

Кредити на придбання 1 кв. м. житла у центрі міста та 1 кв. м. житла у передмісті забезпечують банку, відповідно, 6 і 5 тис. грн прибутку. Операції кредитування здійснюють три агенції нерухомості, в яких працює, відповідно, 13, 10 і 18 спеціалістів. У табл. 1.2 наведено кількість робітників кожної агенції, яких необхідно залучити до укладання угоди кредитування на 1 кв. м. житла.

Таблиця 1.2

Вихідні дані

№ агенції	Кількість робітників, осіб	
	житло в центрі міста	житло в передмісті
1	2	3
2	3	2
3	2	1

Побудувати математичну модель визначення оптимальної площі житла за умови максимізації прибутку. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Варіант 3

Аналітичний відділ складає план виробництва продукції двох типів на другий квартал поточного року з метою досягнення максимального прибутку та з урахуванням того, що використовуються тільки наявні запаси сировини чотирьох видів. Вихідні дані наведено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Вихідні дані

Вид сировини	Норма витрат, кг/м		Запас сировини, кг
	продукція I	продукція II	
1	1	3	18
2	2	1	16
3	0	1	5
4	3	0	21
Прибуток	2	3	

Побудувати математичну модель задачі. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Варіант 4

Кредитний відділ банку визначає оптимальний портфель інвестування на модернізацію обладнання та соціальні програми трьох підприємств, що забезпечить найменший рівень збитковості банку. Збитковість програми модернізації обладнання – 4 бали за 1 грош. од. інвестицій, соціальних програм – 6 балів. Інвестування здійснюється за умовою досягнення рівнів розвитку капіталу підприємств не менше, ніж 9, 8, 12 одиниць, відповідно. У табл. 1.4 наведено величини зростання рівня розвитку капіталу підприємств за відповідним напрямом інвестування.

Таблиця 1.4

Вихідні дані

№ підприємства	Зростання рівня розвитку капіталу, у.о.	
	модернізація обладнання	соціальні програми
1	3	1
2	1	2
3	1	6

Побудувати математичну модель інвестиційного портфеля. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Варіант 5

Кредити на придбання 1 кв. м. житла у центрі міста та 1 кв. м. житла у передмісті забезпечують банку, відповідно, 6 і 5 тис. грн прибутку.

Операції кредитування здійснюють три агенції нерухомості, в яких працює, відповідно, 13, 10 і 18 спеціалістів. У табл. 1.5 наведено кількість робітників кожної агенції, яких необхідно залучити до укладання угоди кредитування на 1 кв. м. житла.

Побудувати математичну модель визначення оптимальної площі житла за умови максимізації прибутку. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Таблиця 1.5

Вихідні дані

№ агенції	Кількість робітників, осіб	
	житло в центрі міста	житло в передмісті
1	2	3
2	3	2
3	2	1

Варіант 6

Для виготовлення двох виробів А та В використовуються чотири види сировини. Прибуток від реалізації одиниці готової продукції кожного виду, запаси та витрати сировини на виготовлення одиниці продукції відповідно до прийнятої технології подані в табл. 1.6.

Таблиця 1.6

Вихідні дані

Різновид сировини	Затрати сировини на виготовлення одиниці продукції, кг		Запас сировини, кг
	А	В	
1	10	16	2
2	9	12	3
3	0	1	7
4	2	0	8
Прибуток від реалізації одиниці продукції, у.о.	2	6	

Побудувати математичну модель для визначення оптимального плану виробництва, за яким підприємство отримає максимальний прибуток від реалізації готової продукції.

Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Варіант 7

Виділено два маршрути, за кожним з яких необхідно зробити певну кількість рейсів, і два типи автомашин, які можна використати протягом чотирьох і одної години. Норми витрат часу та прибуток рейсу наведені в табл. 1.7. Побудувати математичну модель задачі з визначення оптимальної кількості рейсів. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Таблиця 1.7

Вихідні дані

Тип машини	Норма витрат, г/м	
	перший маршрут	другий маршрут
1	2	3
2	0	1
Прибуток	1	2

Варіант 8

Кредитний відділ банку визначає оптимальний портфель інвестування на модернізацію обладнання та соціальні програми трьох підприємств, що забезпечить найменший рівень збитковості банку. Збитковість програми модернізації обладнання – 3 бали за 1 грош. од. інвестицій, соціальних програм – 3 бали. Інвестування здійснюється за умовою досягнення рівнів розвитку капіталу підприємств не менше, ніж 6, 8, 3 одиниці, відповідно.

У табл. 1.8 наведено величини зростання рівня розвитку капіталу підприємств за відповідним напрямом інвестування.

Таблиця 1.8

Вихідні дані

№ підприємства	Зростання рівня розвитку капіталу, у.о.	
	модернізація обладнання	соціальні програми
1	3	2
2	4	4
3	3	0

Побудувати математичну модель інвестиційного портфеля. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Варіант 9

Аналітичний відділ складає план виробництва продукції двох типів на другий квартал поточного року з метою досягнення максимального прибутку та з урахуванням того, що використовуються тільки наявні запаси сировини чотирьох видів. Вихідні дані наведено в табл. 1.9.

Побудувати математичну модель задачі. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Таблиця 1.9

Вихідні дані

Вид сировини	Норма витрат кг/м		Запас сировини, кг
	продукція I	продукція II	
1	2	1	12
2	3	4	12
3	1	1	1
4	2	0	4
Прибуток	4	2	

Варіант 10

Кредити на придбання 1 кв. м. житла у центрі міста та 1 кв. м. житла у передмісті забезпечують банку, відповідно, 7 і 4 тис. грн прибутку.

Операції кредитування здійснюють три агенції нерухомості, в яких працює, відповідно, 20, 14 і 3 спеціалісти. У табл. 1.10 наведено кількість робітників кожної агенції, яких необхідно залучити до укладання угоди кредитування на 1 кв. м. житла.

Таблиця 1.10

Вихідні дані

№ агенції	Кількість робітників, осіб	
	житло в центрі міста	житло в передмісті
1	2	1
2	2	2
3	0	3

Побудувати математичну модель визначення оптимальної площі житла за умови максимізації прибутку. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

1.2. Приклад виконання контрольної роботи 1

Підприємство виготовляє дизельні двигуни. Для виготовлення двох основних видів дизельних двигунів HDI та TDI підприємство використовує три види допоміжних деталей (циліндри, поршні, клапани). Прибуток від реалізації одного двигуна кожного виду, запаси та витрати деталей на виготовлення одного двигуна кожного виду відповідно до прийнятої технології подані в таблиці 1.11.

Таблиця 1.11

Вихідні дані

Різновид допоміжних деталей	Затрати на виготовлення одного дизельного двигуна, шт.		Запас деталей, шт.
	HDI	TDI	
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації двигуна, у.о.	30	40	max

Побудувати математичну модель для визначення оптимального плану виробництва дизельних двигунів двох типів, за яким підприємство отримає максимальний прибуток від їх реалізації. Розв'язати задачу графічним методом. Проаналізувати отримані результати.

Розв'язання:

За вихідними даними укладемо математичну модель задачі. Якщо через x_1 позначити кількість двигунів першого типу HDI, а через x_2 – двигунів TDI, то загальний прибуток z від реалізації є функцією двох змінних: $z = 20x_1 + 40x_2$. Оскільки витрати деталей на виготовлення двигунів не може перевищувати їх запасів, то обмеження за деталями має вигляд системи нерівностей:

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252. \end{cases}$$

Крім того, кількість готової продукції не може бути від'ємною, тобто маємо обмеження на знак: $x_1 \ge 0$, $x_2 \ge 0$. Задачу можна сформулювати таким чином: необхідно знайти такі значення x_1 і x_2, які б задовольняли систему обмежень і за яких цільова функція z сягає максимального значення. Отже, математична модель задачі має вигляд:

$$z_{\max} = 20x_1 + 40x_2$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 300, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 120, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 252, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Застосуємо до розв'язання задачі графічний метод. Для побудови багатокутника планів у першій чверті координатної площини проведемо прямі через дві точки, відповідно:

$$L_1: \quad (25;0), \quad (0;75); \quad L_2: \quad (30;0), \quad (0;30); \quad L_3: \quad (84;0), \quad (0;21).$$

Усі нерівності системи обмежень сумісні в межах багатокутника планів (рис. 1.1).

Побудуємо вектор $\vec{N} = grad\, z = (20; 40)$, який визначає напрям найбільш швидкого зростання цільової функції, і перпендикулярно йому через початок координат проведемо лінію рівня, якій відповідає значення цільової функції $z_{\min} = 0$. Пересуваючи лінію рівня в напрямі градієнта, визначимо, що лінія рівня виходить із багатокутника планів через точку C перетину прямих L_2 і L_3. Визначаємо її координати з системи рівнянь:

$$\begin{cases} 4x_1 + 4x_2 = 120, \\ 3x_1 + 12x_2 = 252 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 30, \\ x_1 + 4x_2 = 84 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 12, \\ x_2 = 18. \end{cases}$$

Отже, маємо оптимальний план $\mathbf{X}^* = (12; 18)$, якому відповідає максимальне значення цільової функції:

$$Z_{\max} = Z(\mathbf{X}^*) = 20 \cdot 12 + 40 \cdot 18 = 960.$$

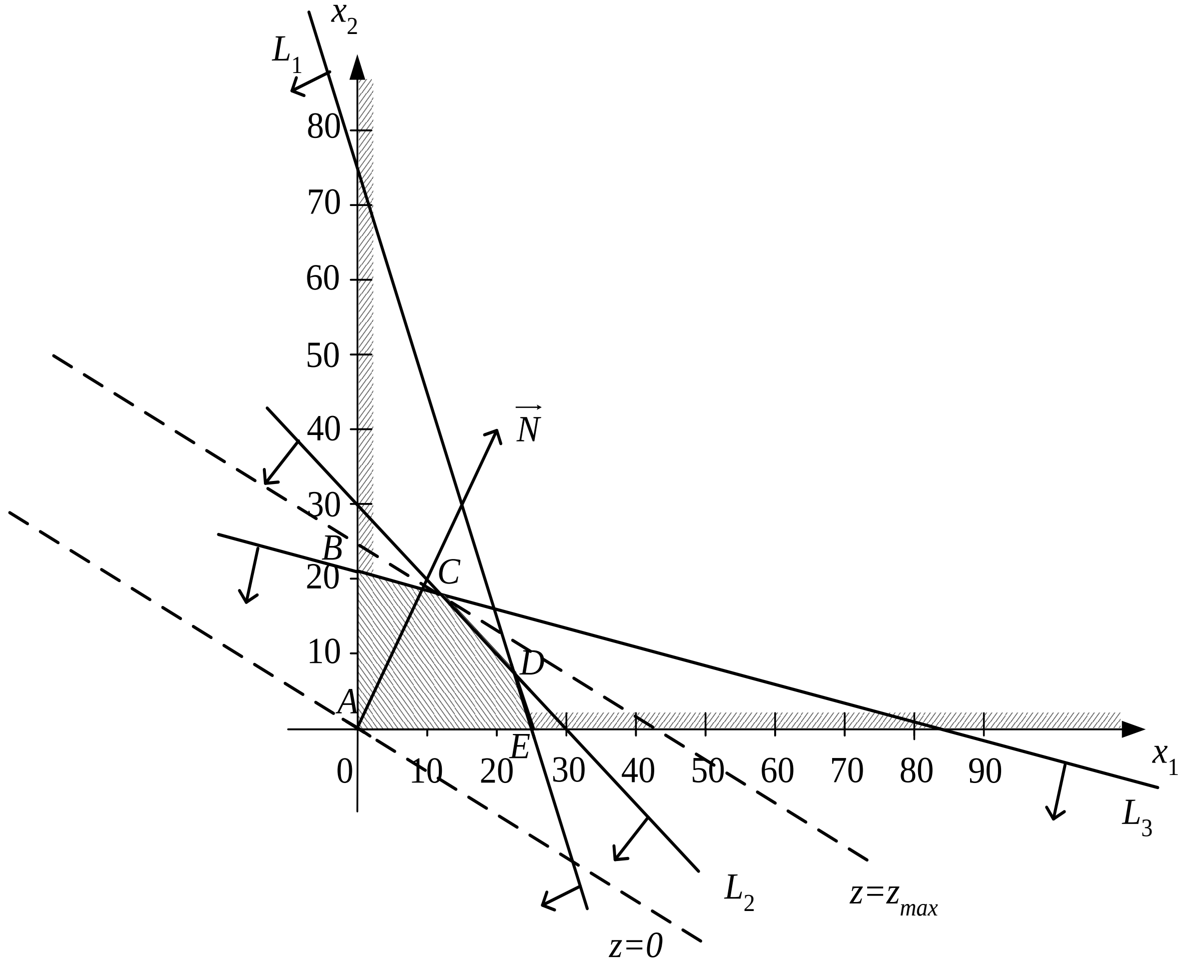

Рис. 1.1. **Графічне розв'язання задачі**

Таким чином, підприємство повинно випускати 12 одиниць дизельних двигунів HDI та 18 одиниць дизельних двигунів TDI, тоді прибуток підприємства буде максимальним і складатиме 960 у.о. Залишки деталей кожного типу становлять відповідно: циліндри – 84 одиниці, поршні та клапани використано повністю.

Контрольна робота 2
Побудова спряженої пари двоїстих задач та їх розв'язання з використанням графічного та симплексного методів і теорем двоїстості

2.1. Варіанти для виконання контрольної роботи

Варіант 1

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;
2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\max} = x_1 + 3x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Варіант 2

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;
2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\max} = 3x_1 - 2x_2 + 6x_3$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 4x_2 - 2x_3 \le 1, \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Варіант 3

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;
2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\min} = 2x_1 + 2x_2 + 6x_3$$
$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 \ge 1, \\ -2x_1 + x_2 + x_3 \ge -1, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Варіант 4

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;
2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\max} = x_1 + x_2 - x_3$$
$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 \le -1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Варіант 5

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;

2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\max} = -x_1 + x_2 - 2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - 2x_3 \le 1, \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Варіант 6

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;

2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\min} = 3x_1 - x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 \ge 1, \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \ge 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Варіант 7

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;

2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\max} = -3x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4$$

$$\begin{cases} -5x_1 + x_2 + 3x_3 + 3x_4 \le -1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 \le 2, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Варіант 8

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;
2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\max} = 5x_1 - x_2 + 6x_3$$
$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_3 \le 6, \\ x_1 - 2x_2 + 4x_3 \le 10, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Варіант 9

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;
2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\max} = -2x_1 - 4x_2 - 23x_3 - 4x_4$$
$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 + x_4 \le -2, \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 + 3x_4 \le 2, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

Варіант 10

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;
2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$z_{\min} = 4x_1 + 24x_2 + 20x_3 + 6x_4$$
$$\begin{cases} -4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 2, \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 \ge 5, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0.$$

2.2. Приклад виконання контрольної роботи 2

Скласти двоїсту задачу до даної та розв'язати обидві задачі за допомогою:

1) графічного метода та теорем двоїстості;
2) симплексного методу та перевірити точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

$$Z_{\max} = 6x_1 + 8x_2 + x_3$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$
$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Розв'язання:

Побудуємо двоїсту задачу до даної. Пряма задача на мінімум має обмеження вигляду "$\le$", кількість невідомих дорівнює 3 (x_1, x_2, x_3) та обмежень 2. Тоді двоїста задача на максимум буде мати обмеження вигляду "$\ge$", кількість невідомих дорівнюватиме 2 (y_1, y_2) та обмежень 3.

Коефіцієнти цільової функції прямої задачі є величинами у правих частинах системи обмежень двоїстої задачі, та навпаки:

$$Z_{\max} = 6x_1 + 8x_2 + x_3 \text{ та } F_{\min} = 3y_1 + 4y_2.$$

Матриця, елементами якої є коефіцієнти системи обмежень, має вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

тоді транспонована до неї матриця, яка є матрицею коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі, набуває вигляду:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Змінні в обох задачах повинні бути невід'ємними:

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3} \text{ та } y_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}.$$

Тоді двоїста задача має вигляд:

$$F_{\min} = 3y_1 + 4y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 6, \\ y_1 + 2y_2 \geq 8, \\ y_1 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо задачу графічним методом.

Визначимо багатокутник планів, який містить усі розв'язки основної системи нерівностей та системи обмежень на знак. Для цього на координатній площині в першій чверті побудуємо прямі:

$$L_1: \quad (6;0), \quad (0;6); \quad L_2: \quad (8;0), \quad (0;4); \quad L_3: \quad (1;0), \quad (1;2).$$

Для кожної прямої стрілками вказано півплощину, де виконується відповідна нерівність. Та частина площини, де виконуються всі нерівності системи обмежень, і є багатокутником планів (рис. 2.1).

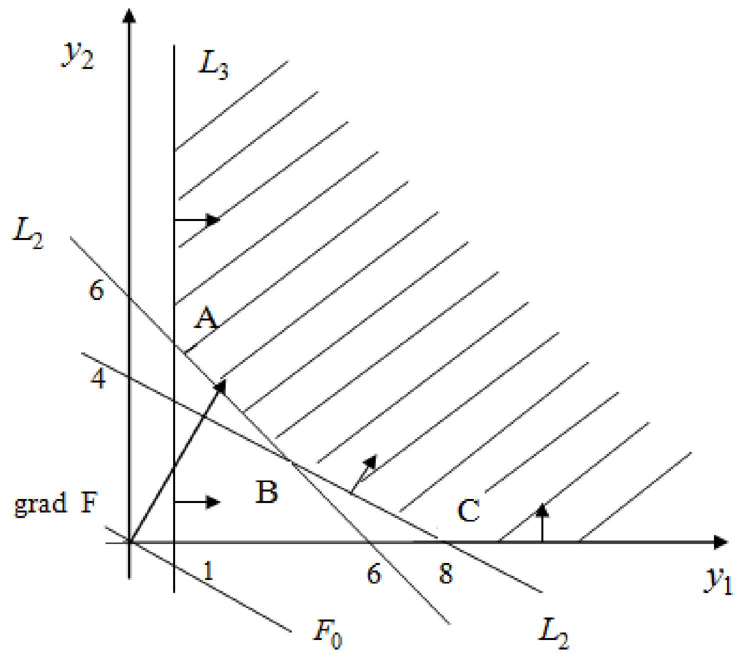

Рис. 2.1. **Розв'язання двоїстої задачі графічним методом**

Вектор $grad\,F=(3;4)$ визначає напрям, у якому відбувається зростання цільової функції.

Проведемо перпендикулярно до нього лінію, що проходить через початок координат.

Оптимальна точка – це точка, через яку лінія рівня входить у відкриту область планів, тобто точка перетину ліній L_1 і L_2. У вершині B цільова функція досягає мінімального значення.

Визначимо компоненти оптимального плану, розв'язуючи систему рівнянь, що відповідають рівнянням ліній L_1 і L_2:

$$\begin{cases} y_1+y_2=6 \\ y_1+2y_2=8. \end{cases}$$

Вирішивши цю систему рівнянь, отримаємо оптимальний розв'язок двоїстої задачі: $Y^*=(4,2)$.

Тепер обчислимо: $\mathrm{F}_{\min}=F(Y^*)=3\cdot 4+4\cdot 2=20$.

Використовуючи другу теорему двоїстості, знайдемо розв'язок вихідної прямої задачі.

Підставимо $y_1=4$ та $y_2=2$ в обмеження двоїстої задачі.

$$\begin{cases} 4+2=6, \\ 4+2\cdot 2=8, \\ 4>1. \end{cases}$$

Перше та друге обмеження виконуються як рівності, тому в оптимальному розв'язку $x_1>0$ і $x_2>0$. А третє обмеження виконується як строга нерівність, тому в оптимальному розв'язку вихідної задачі $x_3=0$.

Розглянемо $Y^*=(4,2)$.

Маємо: $y_1=4>0$ і $y_2=2>0$. Тому перше та друге обмеження прямої задачі виконуються як рівності. Таким чином:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=3, \\ x_1+2x_2=4, \\ x_3=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1+x_2=3, \\ x_2=1, \\ x_3=0, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=2, \\ x_2=1, \\ x_3=0. \end{cases}$$

Отже, $X^*=(2,1,0)$ і $\mathrm{Z}_{\max}=F(X^*)=6\cdot 2+8\cdot 1=20$.

Перша теорема двоїстості виконується: $Z_{\max} = F_{\min} = 20$.

Розв'яжемо вихідну задачу симплекс-методом.

Для цього запишемо систему обмежень в канонічному вигляді за допомогою балансових змінних, а потім складемо симплекс–таблицю (табл. 2.1).

Таблиця 2.1

Симплекс-таблиця

i	Базис	$C_{баз}$	c_j	6	8	1	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A_4	0	3	1	1	1	1	0
2	A_5	0	4	1	2	0	0	1
3	z_j		0	0	0	0	0	0
4	Δ_j			–6	–8	–1	0	0
5	A_4	0	1	1/2	0	1	1	-1/2
6	A_2	8	2	1/2	1	0	0	1/2
7	z_j		16	4	8	0	0	4
8	Δ_j			-2	0	-1	0	4
9	A_1	6	2	1	0	2	2	-1
10	A_2	8	1	0	1	-1	-1	1
11	z_j		20	6	8	4	4	2
12	Δ_j			0	0	3	4	2

Таким чином, $X^* = (2, 1, 0, 0, 0)$, $\mathrm{Z}_{\max} = 20$.

За правилом Δ-рядка отримаємо $Y^* = (4,\ 2)$. Це той самий розв'язок двоїстої задачі, що й за теоремами двоїстості.

Отже $X^* = (2, 1, 0)$, $Z_{\max} = 20$, $Y^* = (4, 2)$, $F_{\min} = 20$.

Контрольна робота 3
Розв'язання ТЗ і визначення її оптимального плану перевезень за методом потенціалів

3.1. Варіанти для виконання контрольної роботи

Варіант 1

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 , B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A = (120; 140; 110)$, потреби споживачів – матрицею $B = (85;\ 65;\ 90;\ 60; 70)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 15 & 14 & 4 \\ 3 & 7 & 12 & 5 & 8 \\ 21 & 18 & 6 & 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант 2

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 , B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A = (120; 140; 110)$, потреби споживачів – матрицею $B = (85;\ 65;\ 90;\ 60; 70)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 11 & 5 & 3 \\ 8 & 17 & 13 & 7 & 6 \\ 14 & 10 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

Варіант 3

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 , B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A = (120; 140; 110)$, потреби споживачів – матрицею $B = (85;\ 65;\ 90;\ 60; 70)$.

Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 4 & 15 & 7 & 2 \\ 20 & 9 & 7 & 14 & 5 \\ 18 & 10 & 3 & 8 & 6 \end{pmatrix}.$$

Варіант 4

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 , B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A = (150; 170; 260)$, потреби споживачів – матрицею $B = (100;\ 90;\ 160;\ 150; 80)$.

Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 15 & 14 & 4 \\ 3 & 7 & 12 & 5 & 8 \\ 21 & 18 & 6 & 13 & 16 \end{pmatrix}.$$

Варіант 5

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 , B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A = (120; 140; 110)$, потреби споживачів – матрицею $B = (85;\ 65;\ 90;\ 60; 70)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C = (c_{ij})_{3\times4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 9 & 15 & 35 \\ 3 & 10 & 12 & 20 & 46 \\ 15 & 11 & 16 & 19 & 48 \end{pmatrix}.$$

Варіант 6

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A = (120; 140; 110)$, потреби споживачів – матрицею $B = (85;\ 65;\ 90;\ 60; 70)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C = (c_{ij})_{3\times4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 15 & 9 & 14 \\ 11 & 2 & 7 & 3 & 10 \\ 4 & 5 & 12 & 8 & 17 \end{pmatrix}.$$

Варіант 7

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3, B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A = (120; 140; 110)$, потреби споживачів – матрицею $B = (85;\ 65;\ 90;\ 60; 70)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C = (c_{ij})_{3\times4}$:

$$C=\begin{pmatrix} 3 & 8 & 7 & 11 & 15 \\ 14 & 3 & 1 & 8 & 6 \\ 9 & 5 & 16 & 7 & 12 \end{pmatrix}.$$

Варіант 8

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 , B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A=(120; 140; 110)$, потреби споживачів – матрицею $B=(85;\ 65;\ 90;\ 60; 70)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C=\left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$:

$$C=\begin{pmatrix} 12 & 9 & 7 & 11 & 6 \\ 4 & 3 & 12 & 2 & 6 \\ 5 & 17 & 9 & 4 & 11 \end{pmatrix}.$$

Варіант 9

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 , B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A=(120; 140; 110)$, потреби споживачів – матрицею $B=(85;\ 65;\ 90;\ 60; 70)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C=\left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$:

$$C=\begin{pmatrix} 11 & 7 & 3 & 9 & 15 \\ 12 & 3 & 14 & 12 & 20 \\ 18 & 15 & 25 & 16 & 19 \end{pmatrix}.$$

Варіант 10

Скласти оптимальний план перевезень однорідного вантажу від постачальників A_1, A_2 й A_3 до споживачів B_1, B_2, B_3 , B_4 і B_5, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими.

Запаси вантажу задані матрицею $A = (120; 140; 110)$, потреби споживачів – матрицею $B = (85; \ 65; \ 90; \ 60; 70)$. Вартість перевезення одиниці вантажу від кожного постачальника до кожного споживача задана матрицею $C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 11 & 3 \\ 12 & 8 & 6 & 14 & 11 \\ 10 & 15 & 7 & 9 & 18 \end{pmatrix}.$$

3.2. Приклад виконання контрольної роботи 3

Власник трьох різних велосипедних заводів здійснює постачання продукції до п'яти магазинів. Кількість велосипедів на кожному заводі, які вони готові перевезти до магазинів, становить 180, 400, 280 одиниць, відповідно. А магазини потребують наступну кількість велосипедів для їх реалізації: 240, 320, 120, 180 одиниць, відповідно. Скласти оптимальний план перевезень велосипедів від заводів до магазинів, за яким загальні транспортні витрати були б найменшими. Вартість перевезення одного велосипеда від завода-постачальника до магазина-споживача задана платіжною матрицею $C = \left(c_{ij}\right)_{3\times 4}$:

$$C = \begin{pmatrix} 22 & 15 & 40 & 18 \\ 9 & 12 & 32 & 16 \\ 11 & 38 & 10 & 14 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

Загальні запаси велосипедів всіх заводів становлять:

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 180 + 400 + 280 = 860.$$

Це дорівнює загальним потребам усіх магазинів:

$$\sum_{j=1}^{4} b_j = 240 + 320 + 120 + 180 = 860.$$

Отже, ТЗ є закритою.

Запишемо вихідні дані задачі у вигляді таблиці та складемо вихідний опорний план перевезень за методом північно-західного кута.

Згідно з цим методом першою заповнюється клітинка, що має індекси $i = 1$, $j = 1$.

Порівнявши запаси постачальника A_1 та потреби споживача B_1, визначаємо, що обсяг постачання до цієї клітинки становить 180 одиниць.

Оскільки постачальник A_1 вичерпав свої можливості, а споживачеві B_1 потрібно ще 60 одиниць, то наступною заповнюємо клітинку $i = 2$, $j = 1$, направивши туди необхідні 60 одиниць вантажу. Тепер потреби споживача B_1 задовільнили в повному обсязі, а запас постачальника A_2 зменшився до 340 одиниць.

Наступною заповнюємо клітинку $i = 2$, $j = 2$. Відповідно до потреб споживача B_2 направляємо туди 320 одиниць вантажу. Оскільки в постачальника A_2 залишилося ще 20 одиниць, поставимо цей вантаж до клітинки $i = 2$, $j = 3$. Тепер постачальник A_2 вичерпав свої можливості, але споживачеві B_3 необхідні ще 100 одиниць.

Візьмемо цей вантаж у постачальника A_3, тобто робимо поставку такого обсягу до клітинки $i = 3$, $j = 3$. У постачальника A_3 лишилося ще 180 одиниць, але рівно стільки необхідно споживачеві B_4. Поставимо ці 180 одиниць до клітинки $i = 3$, $j = 4$.

Отже, весь вантаж було розподілено та потреби всіх споживачів задовільнили.

Маємо вихідний опорний план X_0, який подано в табл. 3.1.

За вихідним опорним планом вартість перевезень становить:

$$z(X_0) = 22 \cdot 180 + 9 \cdot 60 + 12 \cdot 320 + 32 \cdot 20 + 10 \cdot 100 + 14 \cdot 180 = 12\ 500.$$

Цей план є невиродженим, оскільки кількість заповнених клітинок таблиці становить $m + n - 1 = 6$, де m – кількість постачальників ($m = 3$),

n – кількість споживачів ($n = 4$). Отже, кількість заповнених клітинок дорівнює числу базисних невідомих.

Таблиця 3.1

Вихідний опорний план X_0

Поста-чальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	22 180	15	40	18	180
A_2	9 60	12 320	32 20	16	400
A_3	11	38	10 100	14 180	280
Потреби, b_j	240	320	120	180	860 / 860

Перевіримо за методом потенціалів, чи є вихідний план оптимальним. З цією метою кожному постачальникові поставимо у відповідність потенціал u_i, а споживачеві – потенціал v_j. Значення потенціалів визначаємо за умов, що для кожної заповненої клітинки таблиці перевезень сума потенціалів постачальника та споживача дорівнює вартості перевезень одиниці вантажу між цими учасниками, тобто $u_i + v_j = c_{ij}$. Отже, для базисних клітинок отримуємо систему з шести рівнянь, яка містить сім невідомих:

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 22, \\ u_2 + v_1 = 9, \\ u_2 + v_2 = 12, \\ u_2 + v_3 = 32, \\ u_3 + v_3 = 10, \\ u_3 + v_4 = 14. \end{cases}$$

Така система має нескінченну множину розв'язків. Знайдемо будь-який частинний розв'язок. Вибираємо довільно значення одного з потенціалів.

Нехай $u_1 = 0$, тоді з системи рівнянь знаходимо значення потенціалів усіх інших учасників: $v_1 = 22$, $u_2 = -13$, $v_2 = 25$, $v_3 = 45$, $u_3 = -35$, $v_4 = 49$.

Тепер перевіряємо, чи виконується для всіх вільних клітинок таблиці перевезень умова: $u_i + v_j \le c_{ij}$ $(i = \overline{1,3},\ \ j = \overline{1,4})$, тобто чи є оцінки всіх вільних клітинок $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij}$ недодатними.

Складемо таблицю потенціалів таким чином. До кожної клітинки таблиці, яка відповідає базисним змінним, ставимо значення c_{ij}; для вільних клітинок у правому верхньому куті вказуємо вартість перевезення одиниці вантажу за цією клітинкою c_{ij}, а в лівому нижньому куті – суму потенціалів учасників перевезень за цією клітинкою $u_i + v_j$.

Отримаємо таблицю потенціалів (табл. 3.2).

Оскільки в табл. 3.2 є чотири клітинки з додатною оцінкою: $\Delta_{12} = 10$, $\Delta_{13} = 5$, $\Delta_{14} = 31$, $\Delta_{24} = 20$, то план X_0 не є оптимальним. Його можна покращити, перерозподіливши вантаж.

Найбільшою є додатна оцінка $\Delta = \max\{10; 5; 31; 20\} = 31$, яка відповідає клітинці $i = 1$, $j = 4$, і туди зробимо поставку.

Таблиця 3.2

Таблиця потенціалів для плану X_0

u_i \ v_j	$v_1 = 22$	$v_2 = 25$	$v_3 = 45$	$v_4 = 49$
$u_1 = 0$	22	25 / 15	45 / 40	49 / 18
$u_2 = -13$	9	12	32	36 / 16
$u_3 = -35$	-13 / 11	-10 / 38	10	14

У таблиці перевезень, котра складає план X_0, побудуємо замкнутий цикл перерозподілу (вказано пунктиром) (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Замкнутий цикл перерозподілу перевезень для плану X_0

План X_0	-Θ 180			+Θ
	+Θ 60	320	-Θ 20	
			+Θ 100	-Θ 180

Починаючи зі знака "+", яким позначимо клітинку з найбільшою додатною оцінкою, розставимо по черзі знаки "–" і "+" у всіх кутах (поворотах). Кількість вантажу, що потрібно перерозподілити за цим циклом, визначаємо як найменшу з поставок, які відповідають "від'ємним" кутам циклу:

$$\theta = \min\{180;\ 20;\ 180\} = 20.$$

Згідно зі знаками, що проставлені в кутах циклу, перерозподілимо 20 одиниць вантажу й отримаємо новий опорний план X_1, з переходом до якого загальна вартість перевезень повинна зменшитися на величину $\Delta Z = \Delta \cdot \theta = 31 \cdot 20 = 620$, тобто цільова функція повинна дорівнювати:

$$Z(X_1) = 12500 - 620 = 11\ 880\ .$$

Перевіримо, чи є план X_1 оптимальним (табл. 3.4). Для цього складемо відповідну йому таблицю потенціалів (табл. 3.5).

Таблиця 3.4

Замкнутий цикл перерозподілу перевезень для плану X_1

План X_1	-Θ 160	+Θ		20
	+Θ 80	-Θ 320		
			120	160

Таблиця 3.5

Таблиця потенціалів для плану X_1

u_i \ v_j	$v_1 = 22$	$v_2 = 25$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
$u_1 = 0$	22	25 / 15	14 / 40	18
$u_2 = -13$	9	12	11 / 32	5 / 16
$u_3 = -4$	18 / 11	21 / 38	10	14

План X_1 не є оптимальним, оскільки має додатні оцінки $\Delta_{12} = 10$ і $\Delta_{31} = 8$. Визначаємо, що $\Delta = \max\{10; 8\} = 10$, отже, необхідно зробити поставку до клітинки $i = 1$, $j = 2$.

Цикл перерозподілу вказано пунктиром у таблиці перевезень за планом X_1.

За цим циклом перерозподіляємо вантаж у кількості:

$$\theta = \min\{160; 320\} = 160.$$

Складаємо новий план X_2 (табл. 3.6) і перевіряємо його на оптимальність (табл. 3.7).

Таблиця 3.6

План перевезень X_2

План X_2		160		20
	240	160		
			120	160

Таблиця 3.7

Таблиця потенціалів для плану X_2

u_i \ v_j	$v_1 = 12$	$v_2 = 15$	$v_3 = 14$	$v_4 = 18$
$u_1 = 0$	12 / 22	15	14 / 40	18
$u_2 = -3$	9	12	11 / 32	15 / 16
$u_3 = -4$	8 / 11	11 / 38	10	14

За планом X_2 загальна вартість перевезень повинна становити:

$$Z(X_2) = 11\,880 - 10 \cdot 160 = 10\,280.$$

Оскільки всі оцінки є недодатними, то план X_2 оптимальний. Загальна вартість перевезень велосипедів за цим планом є мінімальна та дорівнює:

$$Z_{\min} = Z(X_2) = 160 \cdot 15 + 20 \cdot 18 + 240 \cdot 9 + 160 \cdot 12 + 120 \cdot 10 + 160 \cdot 14 = \\ = 10\,280.$$

Загальна вартість перевезень велосипедів від заводів до магазинів мінімальна за таким планом:

$$X_{опт.} = \begin{pmatrix} 0 & 160 & 0 & 20 \\ 240 & 160 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 120 & 160 \end{pmatrix}.$$

Слід зауважити, що вихідний опорний план перевезень можна складати за методом мінімальної вартості, це може скоротити пошук оптимального плану та зменшити кількість циклів для розв'язання задачі. Згідно з цим методом клітинки заповнюються поступово, починаючи з тієї, що має найменшу вартість перевезення, і до найдорожчої.

Контрольна робота 4
Розв'язання задач нелінійного програмування та матричної гри

4.1. Варіанти для виконання контрольної роботи

Варіант 1

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ \sqrt{3}x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1, x_2) = x_1{}^2 + 8x_1x_2 + 2x_2{}^2$$

$$x_1 + x_2 = 5$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Варіант 2

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = -2x_2$$
$$\begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 2)^2 \le 4, \\ x_1 + x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
$$x_1 x_2 = 1$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 5 \\ 2 & 6 \\ 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Варіант 3

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 5)^2$$
$$\begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 5)^2 \le 25, \\ x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\,2} + 10x_1x_2 + 2x_2^{\,2}$$
$$16x_1 + 17x_2 = 82$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Варіант 4

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = 3x_1$$
$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 \le 0, \\ -2x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 2$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Варіант 5

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 + 1)^2$$
$$\begin{cases} (x_1 + 1)^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_1 \ge 3 \end{cases}$$
$$x_2 \ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1, x_2) = 3x_1{}^2 - 8x_1 x_2 + x_2{}^2$$
$$10x_1 - x_2 = 17$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 8 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

Варіант 6

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \ge 1, \\ x_1 + x_2 \ge 3 \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$
$$2x_1{}^2 + x_2{}^2 = 6$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 8 & 2 \\ 4 & 8 \\ 5 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Варіант 7

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 2)^2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1, x_2) = x_1 + x_2$$

$$3{x_1}^2 + {x_2}^2 = 12$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Варіант 8

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\begin{cases}(x_1-1)^2+x_2^2\le 9,\\ x_1+x_2\ge 4\end{cases}$$
$$x_{1,2}\ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1,x_2)=x_1^{\ 2}+8x_1x_2+3x_2^{\ 2}$$
$$9x_1+10x_2=29$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{\Pi}=\begin{pmatrix}6 & -2\\ 4 & 3\\ 0 & 4\\ 2 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

Варіант 9

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z=(x_1-2)^2+(x_2-3)^2$$
$$\begin{cases}(x_1-1)^2+x_2^2\le 25,\\ x_2\le 4\end{cases}$$
$$x_{1,2}\ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1,x_2)=x_1+2x_2$$
$$x_1+2x_2+x_1x_2=30$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$$

Варіант 10

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 1)^2$$
$$\begin{cases} (x_1 - 4)^2 + x_2^2 \le 9, \\ x_2 \ge \sqrt{5} \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$f(x_1, x_2) = 2x_1{}^2 + 10x_1x_2 + 3x_2{}^2$$
$$9x_1 + 13x_2 = 31$$

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{П} = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 4 & 3 \\ 0 & 4 \\ 2 & -3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4.2. Приклад виконання контрольної роботи 4

1) Знайти глобальні екстремуми функції при заданих обмеженнях за допомогою графічного методу:

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$
$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 - 2x_2 \le 3 \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв'язання:

Областю припустимих рішень є область, зображена на рис. 4.1. Лініями рівня є кола із центром у точці $O_1(2{,}1)$.

Глобальний мінімум досягається у точці $O_1(2{,}1)$. Глобальний максимум – у точці $A(0{,}4)$. Цільова функція у точці A дорівнює:

$$Z(A) = (0-2)^2 + (4-1)^2 = 13.$$

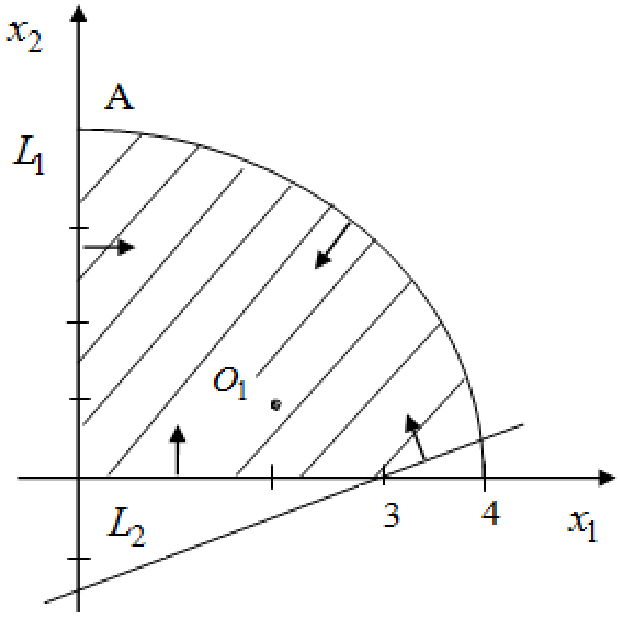

Рис. 4.1. **Область припустимих значень**

Отже, глобальний мінімум дорівнює нулю в точці $O_1(2{,}1)$, глобальний максимум дорівнює 13 у точці $A(0{,}4)$.

2) Знайти екстремум функції методом Лагранжа:

$$Z = x_1x_2 + x_2x_3$$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 2, \\ x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$$

Розв'язання:

Складемо функцію Лагранжа та знайдемо часткові похідні:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1x_2 + x_2x_3 + \lambda_1(x_1 - x_2 - 2) + \lambda_2(x_2 + 2x_3 - 4).$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 + \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = x_1 + x_3 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = x_2 + 2\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = x_1 - x_2 - 2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = x_2 + 2x_3 - 4 = 0 \end{cases}$$

Знайшовши часткові похідні функції Лагранжа за змінними $x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2$ та дорівнявши до нуля отримані вираження, розв'яжемо систему – звідки отримаємо:

$$\lambda_1 = -x_2, \quad \lambda_2 = -x_2/2, \quad x_1 = -2, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = 4, \quad Z = -8.$$

Визначимо характер екстремуму, змінюючи отримані значення змінних. Змінені значення повинні задовольняти заданій системі обмежень. Візьмемо $x_1 = -1$(більше, ніж $x_1 = -2$), тоді із системи обмежень $x_2 = -3$, $x_3 = 7$, $Z = -18$, при $x_1 = -3$(менше, ніж $x_1 = -2$) – $x_2 = -5$, $x_3 = 9$, $Z = -30$. Отже, $Z = -8$ – максимальне значення функції.

Отже, точка екстремуму $x_1 = -2, \quad x_2 = -4, \quad x_3 = 4$, при цьому максимальне значення функції $Z = -8$.

3) Розв'язати матричну гру графічно й аналітично, пояснити отримані результати.

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Розв'язання:

Перевіримо, чи можна розв'язати цю гру в чистих стратегіях.

Для цього знайдемо нижню ціну α, вибравши найбільше з найменших значень за кожною стратегією гравця A (за рядками платіжної матриці):

$$\alpha = \max\{1;\, 2;\, -1;\, 1\} = 2.$$

Визначимо верхню ціну гри β, вибравши найменше з найбільших значень програшу за стратегіями гравця B:

$$\beta = \min\{4;\, 7;\} = 4.$$

Отже, $\alpha \neq \beta$, а тому гра має розв'язання в змішаних стратегіях і її ціна ν задовільнює нерівності: $\alpha < \nu < \beta$.

Розв'яжемо задачу за допомогою графічного методу (рис. 4.2). Це можливо тому, що гравець B має тільки дві стратегії. Для цього на координатній площині вздовж вісі абсцис відкладаємо відрізок одиничної довжини. Перпендикулярно йому проводимо осі $0B_1$ і $1B_2$, на яких відкладаємо програші гравця B, які відповідають стратегіям B_1 і B_2 за умов, що гравець A приймає будь-яку зі своїх стратегій. Ламана лінія A_1MA_4 є верхньою межею програшів гравця B. Гравець B хоче мінімізувати свій програш, тому на лінії A_1MA_4 знаходимо точку з мінімальною ординатою. Це точка M, що утворена перетином ліній A_1A_1 й A_4A_4, які відповідають стратегіям A_1 й A_4 гравця A. Ордината точки M відповідає ціні гри, а проекція точки M поділяє одиничний інтервал на осі абсцис на відрізки, які відповідають ймовірностям p_2 і p_1, з якими гравець B приймає стратегії B_2 і B_1, відповідно.

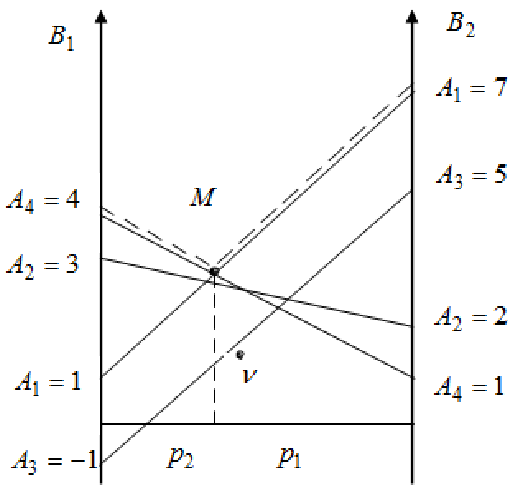

Рис. 4.2. **Розв'язання матричної гри графічним методом**

Точка M отримана перетином ліній A_1A_1 й A_4A_4, тому в активних стратегіях платіжна матриця має вигляд:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням активних стратегій оптимальна стратегія гравця A визначається вектором $X^* = (x_1;\ 0;\ 0;\ x_4;\ 0)$, а для гравця B – вектором $Y^* = (y_1;\ y_2)$.

Запишемо систему рівнянь для визначення компонентів вектора X^*, використовуючи в цих рівняннях в якості коефіцієнтів числа за стовпцями платіжної матриці.

Оскільки випадкові події, які полягають у використанні гравцем A стратегії A_1 або стратегії A_4, складають повну групу подій, сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці. Отже:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = \nu, \\ 7x_1 + x_4 = \nu, \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/3, \\ x_4 = 2/3, \\ \nu = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} X^* = (1/3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 2/3), \\ \nu = 3. \end{array}$$

Для визначення компонентів вектора Y^* запишемо систему рівнянь, де коефіцієнти – це числа за рядками платіжної матриці активних стратегій. Маємо:

$$\begin{cases} y_1 + 7y_2 = \nu, \\ 4y_1 + y_2 = \nu, \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2/3, \\ y_2 = 1/3, \\ \nu = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} Y^* = (2/3;\ 1/3), \\ \nu = 3. \end{array}$$

Бачимо, що значення ціни гри, яка визначається за оптимальними стратегіями обох гравців, однакові. Вони збігаються з даними, які були отримані у ході аналізу графічного рішення для гравця B.

Отже $X^* = (1/3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 2/3)$; $\quad Y^* = (2/3;\ 1/3)$; $\quad \nu = 3$.

Рекомендована література

1. Єгоршин О. О. Математичне програмування : підручник / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець. – Х. : ВД "ІНЖЕК", 2006. – 438 с.

2. Железнякова Е. Ю. Методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів усіх галузей знань денної форми навчання / Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2010. – 80 с.

3. Лебедєва І. Л. Лабораторний практикум з оптимізаційних методів і моделей навчальної дисципліни "Економіко-математичні методи та модель" : навч.-практ. посіб. / І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 216 с.

4. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи і моделі : навч.-практ. посіб. / Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Є. Ю. Місюра. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 320 с.

5. Малярець Л. М. Збірник вправ з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів всіх галузей знань усіх форм навчання / Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2009. – 88 с.

6. Малярець Л. М. Сучасні оптимізаційні методи в середовищі Matlab : навч. посіб. у 2 Ч. / Л. М. Малярець, Є. В. Рєзнік, Б. В. Сінкевич. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – Ч. 1. – 360 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні рекомендації і завдання до виконання контрольних робіт для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Малярець** Людмила Михайлівна
Мінєнкова Олена Вадимівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *Н. І. Ганцевич*

Коректор *Т. А. Маркова*

План 2017 р. Поз. № 235 ЕВ. Обсяг 44 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.