УДК 313.42

Циклы в производственной динамике

Воронин Анатолий Витальевич, к. т. н., доцент, Харьковский национальный экономический университет имени Семёна Кузнеца, г. Харьков, Украина
Гунько Ольга Владимировна, к. ф.-м.н., доцент, Харьковский национальный экономический университет имени Семёна Кузнеца, г. Харьков, Украина

Анотація. Представлено математематичну модель динаміки взаємозв'язків виробничих потужностей та ціноутворення на відповідну продукцію. Використовується два традиційних підходи, що базуються на засадах ринкової рівноваги та оптимізації граничних витрат виробництва. При цьому реалізований формальний механізм єдиної динамічної системи, заснований на балансі попиту та пропозиції, а також обліку прибутку та витрат.

Ключові слова: біфуркації, динаміка, пропозиція, пропозиція, витрати, прибуток, нестабільність, граничний цикл

Рассмотрим базовую экономическую модель, в которой представлен формальный механизм взаимодействия цены и объёма выпуска продукции.

$$\begin{cases} \alpha_1 \dfrac{dP}{dt} = D(P) - Y, \\ \alpha_2 \dfrac{dY}{dt} = P - S(Y), \end{cases} \quad (1)$$

где P – цена производимого и продаваемого продукта;

Y – объем продукта в натуральном выражении (рыночное предложение това-ра);

$D(P)$– рыночный спрос на производимый продукт в натуральном выражении; $S(Y)$– цена предложения, равная предельным затратам производства, т. е. $S(Y) = C'(Y)$, где $C'(Y)$ – производственные затраты (издержки);

α_1, α_2 – постоянные положительные параметры, характеризующие характерные времена переходных процессов.

Первое уравнение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (1) представляет собой классическую модель рыночного ценообразования в форме Л. Вальраса (или П. Самуэльсона). Оно базируется на схеме формирования цены, ищущей точку равновесия между спросом и предложением: при $D(P) > Y$ – цена увеличивается, а при противоположном знаке неравенства – уменьшается. Второе уравнение (1) описывает процесс установления равновесия между ценой спроса и предельными издержками по выпуску (ценой предложения). Здесь предполагается, что равновесие нарушено и необходимо регулировать объем производства: если $P > S(Y)$ то прибыль производителя $PY - C(Y)$ возрастает при увеличении объёма производства, в противном случае следует снижать производственную активность.

В основу построения модели заложены существенные упрощения. Во-первых, производство считается монопродуктовым. Во-вторых, рассматривается локальный рынок сбыта без конкуренции, когда все предложение продукта формируется одним производителем. Но, несмотря на вышеуказанные допущения, модель (1) допускает сложные типы поведения и их анализу будет посвящено дальнейшее изложение.

Формальный анализ качественных свойств системы (1) следует начать с рассмотрения особых решений, характеризующих положения равновесия в экономической модели.

Полагая равными нулю левые части в (1), получим два уравнения связи между равновесными значениями цены P^* и объема Y^*:

$$\begin{cases} D(P^*) = Y^*; \\ P^* = S(Y^*). \end{cases}$$

Допустим, что система алгебраических уравнений (2) имеет, как минимум, одно положительное решение (P^*, Y^*). Относительно величины спроса $D(P)$ отме-тим, что зависимость от цены является сугубо нелинейной функцией и существует тейлоровское разложение до третьей степени включительно в окрестности точки P^*

$$D(P) = d_0 + d_1\left(P - P^*\right) + d_2 \frac{\left(P - P^*\right)^2}{2} + + d_3 \frac{\left(P - P^*\right)^3}{6} + O\left(\left|p - p^*\right|^4\right)$$

где $d_i = \dfrac{d^i D\left(P^*\right)}{dP^i}, \quad i = \overline{0,3}$

Функцию затрат (издержек) представим в виде квадратичной функции от объема выпуска $C(Y) = S_1 \dfrac{Y^2}{2} + S_0 Y + C_0$,

где S_1, S_0, C_0 – постоянные параметры.

Соответственно, предельные издержки (цена предложения) описываются формулой

$$C'(Y) = S(Y) = S_1 Y + S_0$$

Тогда система уравнений (2) может быть представлена следующим образом

$$\begin{cases} S_1 D\left(P^*\right) + S_0 - P^* = 0; \\ Y^* = \dfrac{P^* - S_0}{S_1}. \end{cases} \quad (3)$$

Представляется удобным исследовать систему (1) в новых переменных, являющимися отклонениями от равновесных значений $\widetilde{P} = P - P^*, \widetilde{Y} = Y - Y^*$, предварительно изменив масштаб времени. В таком случае, система (1) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{\widetilde{P}} &= d_1 \widetilde{P} + d_2 \frac{\widetilde{P}^2}{2} + d_3 \frac{\widetilde{P}^3}{6} - \widetilde{Y}, \\ \dot{\widetilde{Y}} &= \gamma\left(\widetilde{P} - S_1 \widetilde{Y}\right). \end{aligned} \quad (4)$$

где $\gamma = \dfrac{\alpha_1}{\alpha_2}$.

Очевидно, что в системе (4) имеется тривиальное положение равновесия $\widetilde{P} = 0, \widetilde{Y} = 0$.

Для устойчивости тривиального равновесного значения выпишем явное выражение для характеристического уравнения линейной части системы (4)

$$\lambda^2 + \left(\gamma S_1 - d_1\right)\lambda + \gamma\left(1 - d_2 S_1\right) = 0 \quad (5)$$

Квадратное уравнение (5) имеет отрицательные вещественные части в случае выполнения условий

$$\begin{aligned} \gamma S_1 &< d_1 \\ S_1 d_1 &< 1 \end{aligned}. \quad (6)$$

Неравенства (6) определяют ограничения на параметры исходной системы для устойчивости в линейном приближении.

Рассмотрим более детально ситуацию вблизи границы области устойчивости, исходя из выполнения равенства

$$\gamma C_1 = d_1 - \mu, . \quad (7)$$

где μ – малая знакопеременная величина. Очевидно, что в таком случае дивергенция векторного поля системы (4) равна малому параметру μ. Поэтому тип особой точки (положения равновесия) при $\mu < 0$ является устойчивым фокусом, а при $\mu > 0$, соответственно, неустойчивым фокусом. Другими словами при $\mu = 0$ в окрестности положения равновесия происходит смена устойчивости фокуса и возможно рождение (гибель) предельного цикла в результате бифуркации Хопфа.

Проверим справедливость условий теоремы Хопфа применительно к системе (4). Собственные значения определяются равенством (при $\mu = 0$)

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad (8)$$

где величины $i^2 = -1, \omega^2 = \gamma - d_1^2$ являются чисто мнимыми. Если подставить (7) в квадратное уравнение (5) и продифференцировать по μ, то получим при $\mu = 0$

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \lambda'(0) = \frac{1}{2} - i\frac{d_1}{2\omega} \quad (9)$$

Из (9) следует, что вещественная часть производной собственного числа по параметру не равна нулю, т.е. собственные числа на комплексной плоскости пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью. В итоге, все условия бифуркационной теоремы Хопфа выполнены.

Возвратимся еще раз к равенству (7), чтобы дать ему содержательную интерпретацию.

Вышеназванное условие может быть выполнено, если параметры d_1 и S_1 имеют одинаковые знаки. Так как в качестве бифуркационного параметра далее будет фигурировать значение $S_1 = C''(Y)$, то его положительность характеризует вогнутость функции издержек $C(Y)$, а отрицательность, соответственно, выпуклость. С экономической точки зрения $S_1 < 0$ определяет позитивный эффект масштаба производства $(C''(Y) < 0)$, а $S_1 > 0$ означает, что рост издержек опережает выпуск продукции $(C''(Y) > 0)$ т. е. имеет место ресурсоемкое производство.

С целью определения необходимых параметров предельного цикла, характеризующих его устойчивость и структуру периодических решений, трансформируем систему дифференциальных уравнений (4) к виду нормальной формы Пуанкаре путем соответствующей замены переменных $\tilde{P} = x_1, \tilde{Y} = d_1 x_1 + \omega x_2$ В результате преобразований получим при $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega x_2 + \frac{d_2 x_1^2}{2} + \frac{d_3 x_1^3}{6}, \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 - \frac{d_1 d_2}{\omega}\frac{x_1^2}{2} - \frac{d_1 d_3}{\omega}\frac{x_1^3}{6}. \end{aligned} \quad (10)$$

Располагая явным видом коэффициентов при нелинейных слагаемых системы (10), получим выражение для первой ляпуновской величины

$$l_1(0) = \frac{d_3\left(\gamma - d_1^2\right) + d_2^2 d_1}{16\left(\gamma - d_1^2\right)} \quad (11)$$

При $l_1(0) < 0$ имеет место устойчивый предельный цикл, а соответствующий режим автоколебаний называется «мягким». Наоборот, если же $l_1(0) > 0$ то предельный цикл является неустойчивым, автоколебания срываются «жестко» с проявлением необратимости (гистерезис). Случай $l_1(0) = 0$ является самым сложным в смысле разнообразия структур фазовой плоскости системы (10), т. к. возможно одновременное сосуществование двух предельных циклов (один из которых устойчивый, а другой неустойчивый) с последующим их слияниям в один кратный предельный цикл. Данная бифуркация обладает коразмерностью два и в данной работе не будет подробно исследована.

Само же периодическое решение малой амплитуды ε (с точностью до выбора начальной фазы) записывается в форме [2]

$$P(t) = P^* + x_1(t),$$

$$Y(t) = Y^* + d_1 x_1(t) + \omega \cdot x_2(t),$$

$$x_1(t) = \varepsilon \cdot \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{\varepsilon^2 d_2}{12\omega^2} \cdot \left[3d_1 - d_1 \cdot \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + 2\omega \cdot \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right)\right] + O\left(\varepsilon^3\right), \quad (12)$$

$$x_2(t) = \varepsilon \cdot \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{\varepsilon^2 d_2}{12\omega^2} \cdot \left[3d_1 - d_1 \cdot \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) - 2d_1\omega \cdot \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right)\right] + O\left(\varepsilon^3\right).$$

Здесь амплитуда – $\varepsilon^2 = \frac{2(\gamma S_1 - d_1)}{l_1(0)}$; период цикла зависящий, вообще говоря, от амплитуды ε –

$$T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega}\left(1 + \tau_2 \varepsilon^2 + O\left(\varepsilon^3\right)\right),$$

$$\tau_2 = \frac{d_2^2}{48\omega^2}\left(8 + 53\frac{d_1^2}{\omega^2}\right).$$

Таким образом на примере системы двух нелинейных дифференциальных уравнений (1) →(4)→(10) легко убедиться, что в отличие от линейной системы периодические решения не являются гармоническими, а период и амплитуда колебаний взаимосвязаны.

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим примеры производственно-экономических циклов для различных групп товаров по типам функций спроса от дохода, согласно классификации шведского экономиста Л. Торнквиста [3].

Пример 1. Функция спроса для товаров первой необходимости имеет представление

$$E = \frac{a_1 D}{D + C_1}$$

и отражает тот факт, что рост спроса на эти первоочередные товары с ростом дохода постепенно замедляется и имеет предел $a_1 > 0$. Параметр $C_1 > 0$ называется константой полунасыщения дохода.

Полагая равновесный доход функцией цены $E = PD(P)$, выразим спрос в виде $D = D(P)$. После соответствующих преобразований получаем

$$D(P) = \frac{a_1 - C_1 P}{P}. \quad (13)$$

С помощью (13) и (3) выпишем уравнение для равновесной цены

$$(P^*)^2 - (S_0 - S_1 C_1)P^* - S_1 a_1 = 0. \qquad (14)$$

Дифференцируя (13) по цене получим коэффициенты функции спроса

$$d_1 = -\frac{a_1}{(P^*)^2}, \quad d_2 = \frac{2a_1}{(P^*)^3}, \quad d_3 = -\frac{6a_1}{(P^*)^4}. \qquad (15)$$

Из (15) следует, что величины d1, d3 являются отрицательными числами и поэтому из (11) вытекает, что рождающийся предельный цикл устойчив. При этом причиной возникновения цикла служит факт позитивного влияния эффекта масштаба производства данной группы товаров, т. е. $S_1 < 0$.

Пример 2. Функция спроса для предметов роскоши представляется в форме

$$E = \frac{a_2 D(D - b_2)}{D + C_2}.$$

Аналогично примеру 1, выразим спрос в виде функции от цены

$$D(P) = \frac{C_2 P + a_2 b_2}{a_2 - P}, . \qquad (16)$$

где a_2, b_2, C_2 – положительные параметры.

Уравнение для цены равновесия имеет вид

$$\begin{aligned}&\left(P^*\right)^2 - \left(a_2 + S_0 - S_1 C_2\right)P^* - \\ &- a_2\left(S_1 d + S_0\right) = 0\end{aligned} \qquad (17)$$

Полагая, что (17) имеет по крайней мере один положительный корень P^*, вычислим коэффициенты при степенях P:

$$d_1 = \frac{a_2\left(b_2 + C_2\right)}{\left(a_2 - P^*\right)^2},$$

$$d_2 = \frac{2a_2\left(b_2 + C_2\right)}{\left(a_2 - P^*\right)^3},$$

$$d_3 = \frac{6a_2\left(b_2 + C_2\right)}{\left(a_2 - P^*\right)^4}, \qquad (18)$$

В данном случае коэффициенты d_1 и d_3 положительные числа и подстановка их значений в (11) обеспечивает условие $l_1(0) > 0$, что свидетельствует о катастрофической потере устойчивости предельного цикла. Так как $d_1 > 0$, то для появления предельного цикла необходимо обеспечить $S_1 > 0$, что возможно лишь при ресурсоемком способе производства с опережающим ростом затрат.

В заключение следует отметить, что предложенная модель (1) может быть дополнена уравнением, описывающим динамику спроса как независимой переменной. В таком случае система (1) из двухмерной становится трехмерной и можно предположить наличие более сложных видов динамического поведения – двухмерных торов и странных аттракторов.

Литература

1. Балацкий Е. В. Рыночное ценообразование и производственные циклы // Экономика и математические методы.– 2005.– Т. 41.– № 1.– С. 37 – 44.
2. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.– М.: Мир, 1985.– 284 с.
3. Федосеев в.В., Гармаш А. Н., Орлова И. В. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.– 304 с.

Авторы

Воронин Анатолий Витальевич, доцент, Харьковский национальный экономический университет имени Семёна Кузнеца

Гунько Ольга Владимировна, доцент, Харьковский национальный экономический университет имени Семёна Кузнеца (gunko-olga@lenta.ru)

Тези доповіді надійшли 06 лютого 2018 року

Опубліковано в авторській редакції