УДК 517.596.225

Т. В. Денисова

Задача теории потенциала для слоя с круговой цилиндрической полостью

Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеца

Обобщенный метод Фурье решения краевых задач математической физики применяется к решению задачи Дирихле для уравнения Лапласа в плоско-параллельном слое с полостью в виде кругового цилиндра, образующая которого параллельна граничным плоскостям слоя. Использованные в работе формулы разложения гармонических функций из декартовой системы координат в цилиндрическую и им обратные позволили привести задачу к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений, для которой при условии некасания граничных поверхностей доказана возможность нахождения приближенного решения методом редукции. При этом приближенные решения сходятся к точному решению с увеличением порядка урезанных систем. Метод может быть распространен как на другие основные задачи теории потенциала для одного или нескольких цилиндрических включений, так и на основные задачи пространственной теории упругости.

Ключевые слова: обобщенный метод Фурье, задача Дирихле, уравнение Лапласа, слой с цилиндрической полостью, бесконечные системы линейных алгебраических уравнений, метод редукции.

Введение

Достаточно широкий круг задач, таких как задачи электростатики, гидромеханики, теплопроводности, магнитостатики и др., моделируются уравнением Лапласа с теми или другими граничными условиями. Классическим методом решения таких задач для отдельных тел, границы которых естественно описываются в той или другой системах координат, является метод разделения переменных Фурье [1 – 3]. Для тела, ограниченного двумя поверхностями разных криволинейных систем координат, развит обобщенный метод Фурье [4 – 6], который приводит к нахождению неизвестных коэффициентов из бесконечных систем линейных алгебраических уравнений второго рода. Как правило, для этих систем можно установить их принадлежность к системам с вполне непрерывной формой [7] и находить приближенное решение методом урезания, который сходится к точному решению при увеличении порядка урезанных систем.

В статье показано, что указанная в заголовке задача Дирихле для уравнения Лапласа в слое с круговой цилиндрической полостью сводится к упомянутым бесконечным системам и значит, решение этой краевой задачи может быть найдено в аналитической форме с высокой степенью точности.

1. Постановка задачи и необходимые формулы

В слое $(-h_1 < y < h, -\infty < x, z < +\infty)$ с цилиндрической полостью надо найти решение уравнения Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0 \qquad (1)$$

при условии, что на границах слоя $y=-h_1$, $y=h$ и на границе цилиндра $x^2+y^2=R^2$ заданы значения искомой функции u:

$$u(x,-h_1,z)=f_1(x,z),\quad u(x,h,z)=f(x,z), \tag{2}$$

$$u\big|_{\Gamma}=f_R(\varphi,z),\quad \Gamma=\{(x,y)|\,x^2+y^2=R^2\}. \tag{3}$$

Будем предполагать, что заданные функции на бесконечности достаточно быстро убывают к нулю. Естественно при этом потребовать также и от искомой функции убывания к нулю на бесконечности.

В дальнейшем будем пользоваться формулами перехода:

$$K_n(|\lambda|\rho)e^{in\varphi}=\frac{(-i)^n}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{\mu\gamma y+i\mu x}\left(\frac{\mu\,\mu\,\gamma}{|\lambda|}\right)^n\frac{d\mu}{\gamma} \tag{4}$$

$$\left(\gamma=\sqrt{\lambda^2+\mu^2},\ y>0,\ 0<\varphi<\pi;\ y<0,\ -\pi<\varphi<0\right),$$

$$\begin{pmatrix} ch \\ sh \end{pmatrix}\!\gamma y\, e^{i\mu x}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{i^n}{2}\left[\left(\frac{\mu-\gamma}{\lambda}\right)^n\pm\left(\frac{\mu+\gamma}{\lambda}\right)^n\right]\cdot I_n(\lambda\rho)e^{in\varphi}. \tag{5}$$

В формулах (4), (5) (ρ,φ) – полярные координаты, связанные с центром круга в плоскости xOy. Их можно получить из соответствующих формул теории бесселевых функций [8].

2. Метод решения задачи

Решение исходной задачи будем искать в виде:

$$u=\iint\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i(\lambda z+\mu x)}d\lambda d\mu\left[a(\lambda,\mu)ch\gamma y+b(\lambda,\mu)sh\gamma y\right]+$$

$$+\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda z}d\lambda\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n(\lambda)K_n(|\lambda|\rho)e^{in\varphi}, \tag{6}$$

где неизвестными являются функции $a(\lambda,\mu)$, $b(\lambda,\mu)$, $c_n(\lambda)$.

Представим заданные краевые функции в виде интегралов Фурье:

$$\begin{pmatrix} f_1(x,z) \\ f(x,z) \\ f_R(\varphi,z)\end{pmatrix}=\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\lambda z}\begin{pmatrix} \overline{f}_1(x,\lambda) \\ \overline{f}(x,\lambda) \\ \overline{f}_R(\varphi,\lambda)\end{pmatrix}d\lambda, \tag{7}$$

где $\overline{f}_1(x,\lambda)$, $\overline{f}(x,\lambda)$, $\overline{f}_R(\varphi,\lambda)$ – обратные преобразования Фурье функций $f_1(x,z)$, $f(x,z)$, $f_R(\varphi,z)$.

Для того, чтобы удовлетворить граничным условиям на границах слоя $y=-h_1$ и $y=h$, перепишем (6), воспользовавшись формулой (4) соответственно при $y<0$ и $y>0$, и приравняем полученный результат заданным функциям $f_1(x,z)$, $f(x,z)$. В результате получим систему уравнений относительно неизвестных $a(\lambda,\mu)$, $b(\lambda,\mu)$, в правые части которых будут входить неизвестные коэффициенты $c_n(\lambda)$.

Разрешив эту систему, найдем:

$$\begin{pmatrix} a(\lambda,\mu) \\ b(\lambda,\mu) \end{pmatrix} = \frac{1}{sh\gamma H}\left[F\begin{pmatrix} sh\gamma h_1 \\ ch\gamma h_1 \end{pmatrix} \pm F_1\begin{pmatrix} sh\gamma h \\ ch\gamma h \end{pmatrix} \right], \tag{8}$$

где обозначено: $H = h + h_1$,

$$\begin{pmatrix} F \\ F_1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} e^{-\gamma h} \\ e^{-\gamma h_1} \end{pmatrix} \frac{1}{2\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(\lambda)(-i)^n \left(\frac{\mu \mu \gamma}{|\lambda|} \right)^n + \begin{pmatrix} A(\lambda,\mu) \\ B(\lambda,\mu) \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A(\lambda,\mu) \\ B(\lambda,\mu) \end{pmatrix} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\mu x} \begin{pmatrix} \overline{f}_1(x,\lambda) \\ \overline{f}(x,\lambda) \end{pmatrix} dx .$$

Для удовлетворения граничному условию на цилиндре при $\rho = R$ перепишем (6) через цилиндрические функции с помощью (5). В результате найдем:

$$x_n(\lambda) = \alpha_n(\lambda) - \frac{i^n}{2} I_n(\lambda R) \int_{-\infty}^{+\infty} \left[a(\lambda,\mu)(\omega_n^- + \omega_n^+) + b(\lambda,\mu)(\omega_n^- - \omega_n^+) \right] d\mu , \tag{9}$$

где

$$x_n(\lambda) = c_n(\lambda) K_n(|\lambda| R),$$

$$\alpha_n(\lambda) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{f}(\varphi,\lambda) e^{-in\varphi} d\varphi, \quad \omega_n^\pm = \left(\frac{\mu \pm \gamma}{\lambda} \right)^n .$$

После исключения из (9) функций $a(\lambda,\mu)$, $b(\lambda,\mu)$ с помощью (8) получим бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $x_n(\lambda) = a_n(\lambda) K_n(|\lambda| R)$:

$$x_n(\lambda) = \gamma_n(\lambda) + \sum_{k=-\infty}^{\infty} x_k(\lambda) a_{nk}(\lambda), \tag{10}$$

где через $a_{nk}(\lambda)$ и $\gamma_n(\lambda)$ обозначены соответственно матричные элементы и свободные члены системы. Явные выражения для них не выписываем (их можно получить без особого труда). Отметим лишь, что матричные элементы системы удовлетворяют неравенству:

$$\begin{aligned} | a_{nk}(\lambda) | &< 8 \cdot I_n(q) K_k^{-1}(|q|) \left[K_{n+k}(p) + K_{n+k}(p_1) + \right. \\ &\left. + \frac{2}{|\lambda| H} (K_{n+k-1}(p) + K_{n+k-1}(p_1)) \right], \end{aligned} \tag{11}$$

$$q = \lambda R, \quad p = 2|\lambda| h, \quad p_1 = 2|\lambda| h_1 .$$

Последнее неравенство позволяет доказать при $R < \min(h, h_1)$ сходимость двойного ряда $\sum_{n,k} | a_{nk}(\lambda) |^2$ для всех $\lambda \in (-\infty,+\infty)$. Как и в [9] доказывается, что при некоторых, вполне естественных, ограничениях на гладкость граничных функций свободные члены $\gamma_n(\lambda) \in l_2$ при всех λ.

Эти утверждения позволяют сделать вывод, что бесконечная система (10) может быть решена методом редукции (усечения) и ее приближенные решения сходятся к точному решению при увеличении порядка усеченных систем. Эти выводы справедливы при выполнении условия $R < \min(h, h_1)$ – условия некасания границ области.

Когда коэффициенты $x_n(\lambda)$ найдены, то тем самым найдены $c_n(\lambda)$ и функции $a(\lambda,\mu)$, $b(\lambda,\mu)$ из равенства (8).

Формула (6) будет представлять решение задачи, в которой неизвестные определяются с высокой точностью.

Выводы

Обобщенным методом Фурье решена задача Дирихле для уравнения Лапласа в плоско-параллельном слое, содержащем круговую цилиндрическую полость с образующей, параллельной границам слоя. Бесконечная система уравнений, к которой сведена задача, позволяет получить решение для неизвестных коэффициентов с высокой точностью при условии некасания границ. Сама система обладает свойством устойчивости при проведении конкретных вычислений. Такие вычисления были проведены в [9]. Предложенный в статье подход может быть применен к решению задачи Неймана и смешанных задач для слоя как с одной, так и несколькими цилиндрическими полостями или включениями. Он также будет пригодным при исследовании аналогичных задач теории упругости.

Список литературы

1.Тихонов, А. Н. Уравнения математической физики [Текст] / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский. – Москва : Наука, 1972. – 736 с.

2. Лебедев, Н. Н. Специальные функции и их приложения [Текст] / Н. Н. Лебедев. – Москва : Физматгиз, 1963. – 380 с.

3. Карслоу, Г. Теплопроводность твердых тел [Текст] / Г. Карслоу, Д. Егер. – Москва : Наука, 1967. – Т.1. – 488 с.

4. Иванов, Е. А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах [Текст] / Е. А. Иванов. – Минск : Наука и техника, 1968. – 584 с.

5. Гузь, А. Н. Дифракция упругих волн в многосвязных телах [Текст] / А. Н. Гузь, В. Т. Головчан. – Киев : Наукова думка, 1972. – 254 с.

6. Николаев, А. Г. Обобщенный метод Фурье в пространственных задачах теории упругости [Текст] / А. Г. Николаев, В. С. Проценко. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», 2011. – 344 с.

7. Канторович, Л. В. Приближенные методы высшего анализа [Текст] / Л. В. Канторович, В. И. Крылов. – Москва : Физматгиз, 1962. – 696 с.

8. Прудников, А. П. Интегралы и ряды [Текст] / А. П. Прудников, Ю. А. Брычков, О. И. Маричев. – Москва : Наука, 1983. – 750 с.

9. Проценко, В. С. Задача Дирихле для уравнения Лапласа в полупространстве с цилиндрической полостью [Текст] / В. С. Проценко, Н. А. Попова // Вісник Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна. Серія "Математика, прикладна математика і механіка". – Харьков : Харьковский национальный университет им. В. Н. Каразина, 2002. – № 542. – Вып. 51. – С. 42 – 51.

Поступила в редакцию 16.03.2018

Задача теорії потенціалу для шару з круговою циліндричною порожниною

Узагальнений метод Фур'є розв'язання граничних задач математичної фізики застосовується до розв'язання задачі Діріхле для рівняння Лапласа у плоско-паралельному шарі з порожниною у вигляді кругового циліндра, твірна якого паралельна граничним площинам шару. Використані в роботі формули розкладу гармонійних функцій із декартової системи координат у циліндричну та їм обернені дозволили звести задачу до нескінченної системи лінійних алгебраїчних рівнянь, для якої за умови недотику граничних поверхонь доведена можливість відшукання наближеного розв'язку методом редукції. Разом з тим, наближені розв'язки збігаються до точного розв'язку зі збільшенням порядку урізаних систем. Метод може бути поширений як на інші основні задачі теорії потенціалу для одного або декількох циліндричних включень, так і на основні задачі просторової теорії пружності.

Ключові слова: узагальнений метод Фур'є, задача Діріхле, рівняння Лапласа, шар з циліндричної порожниною, нескінченні системи лінійних алгебраїчних рівнянь, метод редукції.

The Problem of Potential Theory for a Layer with a Circular Cylindrical Cavity

The generalized Fourier method for the solution of the boundary value problems of the mathematical physics is applied to the solution of the Dirichlet problem for the Laplace equation in a plane-parallel layer with a cavity in the form of a circular cylinder, whose generatrix is parallel to the boundary planes of the layer. The formulas for the expansion of harmonic functions from the Cartesian coordinate system to the cylindrical coordinate system and their inverses, which were used in the work, allowed to reduce the problem to the infinite system of linear algebraic equations, for which the possibility of the finding an approximate solution by the reduction method is proved under the condition of non-touching surfaces. In this case, the approximate solutions tend to the exact solution with increasing the order of the truncated systems. The method can be extended to other basic problems of potential theory for one or several cylindrical inclusions, and to the basic problems of the spatial theory of elasticity.

Keywords: generalized Fourier method, Dirichlet problem, Laplace equation, layer with a cylindrical cavity, infinite systems of linear algebraic equations, reduction method.

Сведения об авторах:

Денисова Татьяна Владимировна – кандидат технических наук, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов Харьковского национального экономического университета имени Семена Кузнеца.