

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ**

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

**Методичні рекомендації та завдання
до виконання контрольних робіт
для студентів спеціальності
122 "Комп'ютерні науки та інформаційні технології"
першого (бакалаврського) рівня**

**Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2017**

УДК 512.64:514.12(07.034)

Л59

Укладачі: Т. В. Денисова

А. П. Рибалко

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.

Протокол № 7 від 15.03.2017 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Лінійна алгебра та аналітична геометрія : методичні рекомендації та завдання до виконання контрольних робіт для студентів спеціальності 122 "Комп'ютерні науки та інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня [Електронний ресурс] / уклад. Т. В. Денисова, А. П. Рибалко. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 112 с.

Подано теоретичний матеріал у стислому вигляді з ілюстративними прикладами, зміст завдань і зразок виконання типового варіанта самостійної контрольної роботи, контрольні запитання для самодіагностики засвоєння матеріалу.

Рекомендовано для студентів спеціальності 122 "Комп'ютерні науки та інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня.

УДК 512.64:514.12(07.034)

© Харківський національний економічний
університет імені Семена Кузнеця, 2017

Вступ

Дедалі більшу роль у сучасній науці та техніці відіграють математичні методи дослідження, моделювання та проектування. Це обумовлено вдосконаленням обчислювальної техніки, завдяки якій істотно збільшилася можливість успішного застосування математики під час розв'язання конкретних задач. Математичні науки тісно пов'язані з розвитком інформаційних комп'ютерних технологій, які проникли практично в усі сфери людської діяльності і відіграють вирішальну роль в освіті сучасного конкурентоспроможного фахівця, надаючи йому апарат дослідження складних систем будь-якої природи і логіку побудови проектної діяльності. З іншого боку, високопродуктивні інформаційні технології перетворилися на найважливіший сегмент наукомісткого високотехнологічного виробництва, реалізувати який можуть тільки фахівці, що мають поглиблену підготовку в галузі математики та комп'ютерних наук.

Лінійна алгебра – розділ математики, *об'єктом* вивчення якого є лінійні (векторні) простори, а *предметом* – розроблення відповідних алгебраїчних методів і застосування їх до побудови лінійних математичних моделей реальних явищ та процесів у різноманітних галузях людської діяльності.

Аналітична геометрія – розділ математики, *об'єктом* вивчення якої є геометричні фігури, а *предметом* – установлення їхніх властивостей засобами алгебри за допомогою координатного методу.

Метою вивчення навчальної дисципліни "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" є: ознайомлення студентів з основними положеннями щодо методів векторної та матричної алгебри; дослідження геометричних об'єктів та їх властивостей шляхом вивчення властивостей рівнянь, геометричними образами яких є ці об'єкти.

У процесі вивчення навчальної дисципліни основну увагу приділено формуванню у студентів професійних компетентностей, а саме:

набуття базових знань із матричного числення та лінійної алгебри для їх застосувань під час розроблення математичних моделей;

підготовленість до засвоєння методів розв'язання геометричних задач алгебраїчними методами;

здатність до застосування опанованих ідей і методів під час розв'язання конкретних задач в області комп'ютерних наук та інформаційних технологій, які зводяться до лінійних моделей;

володіння методами аналізу інформації, яка подана у вигляді багатовимірних векторів;

здатність до алгебраїчного аналізу на площині й у просторі різноманітних залежностей між характеристиками об'єктів у задачах, що зводяться до моделей, які не є лінійними;

підготовленість до впровадження засобів координатного методу візуалізації в задачах аналізу складових інформаційних систем.

Запропоновані методичні рекомендації і завдання для контрольних робіт укладені відповідно до робочої програми навчальної дисципліни "Лінійна алгебра та аналітична геометрія" для студентів спеціальності 122 "Комп'ютерні науки та інформаційні технології" й охоплюють увесь теоретичний матеріал із відповідних розділів дисципліни.

Теоретичний матеріал викладено у стислому вигляді з ілюстративними прикладами. Кожний варіант контрольної роботи містить набір задач, які відображають основні теоретичні положення навчальної дисципліни й їх застосування. Для полегшення процесу засвоєння відповідного матеріалу та розв'язання задач власного варіанта контрольної роботи наведено зразок виконання типового варіанта, який водночас може слугувати студентам прикладом для оформлення.

Варіант контрольної роботи визначається числом, яке відповідає останній цифрі номера залікової книжки або студентського квитка. Номери задач для кожного варіанта наведені в табл. 1.

Таблиця 1

Номери задач контрольної роботи за варіантами

Номер варіанта	Номери задач контрольної роботи
0	1.0, 2.0, 3.0, 4.0, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0
1	1.1, 2.1, 3.1, 4.1, 5.1, 6.1, 7.1, 8.1, 9.1, 10.1
2	1.2, 2.2, 3.2, 4.2, 5.2, 6.2, 7.2, 8.2, 9.2, 10.2
3	1.3, 2.3, 3.3, 4.3, 5.3, 6.3, 7.3, 8.3, 9.3, 10.3
4	1.4, 2.4, 3.4, 4.4, 5.4, 6.4, 7.4, 8.4, 9.4, 10.4
5	1.5, 2.5, 3.5, 4.5, 5.5, 6.5, 7.5, 8.5, 9.5, 10.5
6	1.6, 2.6, 3.6, 4.6, 5.6, 6.6, 7.6, 8.6, 9.6, 10.6
7	1.7, 2.7, 3.7, 4.7, 5.7, 6.7, 7.7, 8.7, 9.7, 10.7
8	1.8, 2.8, 3.8, 4.8, 5.8, 6.8, 7.8, 8.8, 9.8, 10.8
9	1.9, 2.9, 3.9, 4.9, 5.9, 6.9, 7.9, 8.9, 9.9, 10.9

1. Теоретичні відомості

1.1. Матриці та дії над ними

Матрицею розміру $m \times n$ називають упорядковану таблицю елементів, що складається з m рядків та n стовпців.

Позначають матриці великими латинськими літерами: $A, B, \dots$, а їх елементи – відповідними малими літерами: $a_{ij}, b_{ij}, \dots$. Індеси в позначенні елемента матриці a_{ij} вказують на його розташування: перший є номером рядка i , другий – номер стовпця j . На письмі таблицю беруть в дужки:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & 5 \\ 4 & -1 & 2 & 8 \end{pmatrix} - \text{матриця } 2 \times 4;$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -9 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \text{матриця } 3 \times 2;$$

$$C = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix} - \text{матриця-стовпець } 2 \times 1;$$

$$D = (-4 \quad 0 \quad 1) - \text{матриця-рядок } 1 \times 3.$$

Нульовою називають матрицю (будь-якого розміру) O , всі елементи якої дорівнюють нулю.

Квадратною матрицею порядку n називають матрицю, в якій кількості рядків та стовпців співпадають та дорівнюють n :

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Наприклад,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 6 \\ 9 & -5 & 1 \end{pmatrix} - \text{матриця третього порядку (або } 3 \times 3 \text{)}.$$

Головною діагоналлю квадратної матриці називають сукупність елементів з однаковими індексами $\{a_{ii}, i = \overline{1, n}\} = \{a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}\}$; **побічною** – сукупність елементів $\{a_{(n-i+1)i}, i = \overline{1, n}\} = \{a_{1n}, a_{2(n-1)}, \dots, a_{n1}\}$.

Діагональною називають квадратну матрицю, всі елементи якої поза головною діагоналлю дорівнюють нулю:

$$D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n) = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & d_n \end{pmatrix}.$$

Діагональну матрицю, всі діагональні елементи якої дорівнюють одиниці, називають **одиничною** матрицею відповідного порядку та позначають E (або I):

$$E = \text{diag}(1, \dots, 1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}. \quad (1.1.1)$$

Наприклад, одиничні матриці другого та третього порядку мають відповідно вигляд:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{та} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Верхньотрикутною (нижньотрикутною) називають квадратну матрицю, всі елементи якої нижче (вище) головної діагоналі дорівнюють нулю:

$$a_{ij} = 0 \quad \forall i > j \quad (i < j) \quad i, j = \overline{1, n}.$$

Матриці називають **рівними**, якщо вони співпадають поелементно:

$$A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij} \quad \forall i, j \ (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}).$$

Очевидно, рівними можуть бути лише матриці однакового розміру.

Розглянемо **основні операції** над матрицями.

1. Сумою $A + B$ матриць $A = (a_{ij})_{m \times n}$ і $B = (b_{ij})_{m \times n}$ однакового розміру називають матрицю $C = (c_{ij})_{m \times n}$ (того ж розміру), елементи якої дорівнюють сумам відповідних елементів:

$$C = A + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad \forall i, j \ (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (1.1.2)$$

Наприклад, якщо задано матриці розміру 2×3 :

$$A_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 7 & -4 \end{pmatrix} \text{ і } B_{2 \times 3} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & 6 \end{pmatrix},$$

тоді їх сума дорівнює:

$$A + B = \begin{pmatrix} 1+5 & -2-1 & 0+3 \\ 3-2 & 7+0 & -4+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & 3 \\ 1 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Добутком на число λ матриці довільного розміру $A = (a_{ij})_{m \times n}$ називають матрицю $C = (c_{ij})_{m \times n}$ (того самого розміру), елементи якої дорівнюють добуткам вихідної матриці на це число:

$$C = \lambda A \Leftrightarrow c_{ij} = \lambda a_{ij} \quad \forall i, j \ (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (1.1.3)$$

Наприклад,

$$A_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 2A = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 5 \\ 2 \cdot 3 & 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 10 \\ 6 & 0 \end{pmatrix}.$$

Операції додавання матриць та множення матриці на число називають **лінійними операціями**.

Наведемо *властивості лінійних операцій*:

1) комутативність додавання: $A + B = B + A$;

2) асоціативність додавання: $(A + B) + C = A + (B + C) = A + B + C$;

3) комутативність множення на число: $\lambda A = A\lambda$ ($\lambda - const$);

4) асоціативність множення на число: $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$ ($\lambda, \mu - const$);

5) дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць: $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$;

6) дистрибутивність множення на число відносно додавання чисел:
 $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$;

7) $A + O = A$;

8) $A + (-A) = O$;

9) $0 \cdot A = O$;

10) $1 \cdot A = A$.

Зауважимо, що за допомогою розглянутих операцій додавання та множення на число можна визначити різницю двох матриць:

$$A - B = A + (-1) \cdot B.$$

Тоді, очевидно, що операцію віднімання матриць $A = (a_{ij})_{m \times n}$ і $B = (b_{ij})_{m \times n}$ визначено для будь-яких матриць однакового розміру та виконують її також поелементно:

$$C = A - B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad \forall i, j \ (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (1.1.4)$$

3. Добутком AB матриць $A = (a_{ij})_{m \times k}$ розміру $m \times k$ та $B = (b_{ij})_{k \times n}$ розміру $k \times n$ називають матрицю $C = (c_{ij})_{m \times n}$ розміру $m \times n$, елементи якої дорівнюють сумам попарних добутків елементів i -го рядка матриці A та відповідних елементів j -го стовпця матриці B :

$$C = AB \Leftrightarrow c_{ij} = \sum_{s=1}^k a_{is} b_{sj} \quad \forall i, j \ (i = \overline{1, m}; j = \overline{1, n}). \quad (1.1.5)$$

З означення випливає, що добуток двох матриць визначено *тільки* для матриць узгоджених розмірів: число стовпців першої (лівої) матриці співпадає із числом рядків другої (правої) матриці.

Наприклад, для матриць:

$$A_{3 \times 2} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ і } B_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

визначено добуток AB , але не визначено добуток BA . Розмір матриці добутку AB складається з кількості рядків першої матриці та кількості стовпців другої, тобто дорівнює 3×2 .

Для обчислення елементів добутку AB згідно з формулою (1.1.5) необхідно брати елементи рядків першої (лівої) матриці та множити їх на відповідні елементи стовпців другої (правої):

$$\begin{aligned} (AB)_{3 \times 2} &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-3) + (-1) \cdot 2 & 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 4 \cdot (-3) + 0 \cdot 2 & 4 \cdot 0 + 0 \cdot 1 \\ 1 \cdot (-3) + 3 \cdot 2 & 1 \cdot 0 + 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} -8 & -1 \\ -12 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Властивості множення матриць наступні:

1) некомутативність множення в загальному випадку:

$$AB \neq BA;$$

2) комутативність множення на одиничну:

$$AE = EA = A; \tag{1.1.6}$$

3) асоціативність множення:

$$(AB)C = A(BC);$$

4) комутативність та асоціативність відносно множення на число:

$$\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B) \quad (\lambda - \text{const});$$

5) дистрибутивність множення відносно додавання матриць:

$$(A + B)C = AC + BC; \quad C(A + B) = CA + CB;$$

4. Піднесенням до степеня k називають множення матриці на себе k разів:

$$A^k = \underbrace{AA \dots A}_{k \text{ разів}}, \quad (1.1.7)$$

тому ця операція визначена тільки для квадратних матриць.

Піднесення до степеня є частинним випадком множенням матриць (1.1.5), тому має ті самі властивості.

5. Транспонування – це запис елементів кожного рядка матриці в стовпець (або навпаки) без порушення порядку їх розташування.

Ця операція визначена для матриці A будь-якого розміру $m \times n$. У результаті отримаємо матрицю розміру $n \times m$, яку називають **транспонованою** до вихідної матриці та позначають A^T :

$$A = (a_{ij})_{m \times n} \Rightarrow A^T = (a_{ji})_{n \times m}. \quad (1.1.8)$$

Наприклад,

$$A_{2 \times 4} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & -1 & 6 \\ -2 & 3 & 0 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow (A^T)_{4 \times 2} = \begin{pmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 3 \\ -1 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}.$$

Мають місце наступні *властивості транспонування*:

- 1) $(A^T)^T = A$;
- 2) $(A + B)^T = A^T + B^T$;
- 3) $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ ($\lambda - \text{const}$);
- 4) $(AB)^T = B^T A^T$.

Підсумовуючи, зазначимо, що операції над матрицями мають різний *пріоритет*. Наведемо перелік операцій у послідовності спадання пріоритету:

- 1) транспонування – найвищий пріоритет;
- 2) множення матриці на число та множення матриць (у частинному випадку, піднесення до степеня) – мають однаковий пріоритет;
- 3) додавання (віднімання) матриць – найнижчий пріоритет.

У такому порядку слід виконувати дії над матрицями у випадку складних виразів. *Наприклад*, для обчислення $2CA^T - B^2$ необхідно виконати таку послідовність дій: 1) транспонування A^T ; 2) множення CA^T ; 3) множення $2CA^T$; 4) піднесення до степеня B^2 ; 5) віднімання $2CA^T - B^2$.

1.2. Визначники. Обернена матриця. Ранг матриці

Визначник (детермінант) n -го порядку – це числова характеристика квадратної матриці відповідного порядку. Визначник матриці A позначають $\det A$ або $|A|$.

Визначник 1-го порядку (тобто матриці 1×1) дорівнює тому єдиному елементу, з якого складається матриця:

$$A = (a_{11}) \Rightarrow \det A = |a_{11}| = a_{11}.$$

Визначником 2-го порядку називають різницю добутків елементів головної та побічної діагоналей:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \quad (1.2.1)$$

Визначником 3-го порядку називають величину:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}. \quad (1.2.2)$$

Формулу для обчислення визначника 3-го порядку ілюструють геометричною схемою – **правилом Саррюса** (правило трикутників):

$$+ \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \\ \circ & \circ & \circ \end{vmatrix} \quad (1.2.3)$$

Тут в першому визначнику наведено трійки множників, які потрібно взяти із знаком "+", а в другому – із знаком "-". Правило Саррюса може бути застосованим *тільки для розкриття визначників 3-го порядку*.

Для означення визначників вищих порядків необхідне поняття переставлення. Розташування чисел $1, 2, 3, \dots, n$ у деякому порядку називають **переставленням** цих чисел. Якщо числа a і b із цієї множини $\{1, 2, 3, \dots, n\}$ задовольняють нерівність $a < b$, а в переставленні b передує a , то має місце **інверсія**. Переставлення називають **парним (непарним)**, якщо воно містить парну (непарну) кількість інверсій.

Визначником n -го порядку називають число, яке дорівнює сумі добутків вигляду $a_{1j_1} \cdot a_{2j_2} \cdot a_{3j_3} \cdot \dots \cdot a_{nj_n}$, кожен з яких містить лише по одному елементу кожного рядка та кожного стовпця, причому у випадку парного переставлення $(j_1, j_2, j_3, \dots, j_n)$ знак не змінюють, у випадку непарного – змінюють на протилежний.

Мінором M_{ij} елемента a_{ij} квадратної матриці A порядку n називають визначник порядку $(n-1)$, отриманий викресленням i -го рядка та j -го стовпця. **Алгебраїчним доповненням A_{ij} елемента a_{ij}** квадратної матриці порядку n називають його мінор M_{ij} , помножений на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}. \quad (1.2.4)$$

Наприклад, мінор і алгебраїчне доповнення елемента $a_{12} = 2$ заданої матриці мають вигляд:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow M_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = -21, A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 21.$$

Наступна теорема надає можливість обчислювати визначники будь-якого порядку шляхом розкладання за елементами рядка або стовпця.

Теорема 1.2.1 (Лапласа, про розкладання визначника). Визначник n -го порядку дорівнює сумі попарних добутоків елементів деякого рядка (стовпця) на їх алгебраїчні доповнення:

$$\det A = \sum_{k=1}^n a_{ik} A_{ik} = \sum_{k=1}^n a_{kj} A_{kj}. \quad (1.2.5)$$

Наведемо *властивості визначників*:

1) визначники взаємно транспонованих матриць співпадають:

$$\det A = \det A^T: \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix};$$

2) якщо переставити місцями два рядки (стовпці), то визначник поміняє знак; *наприклад*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{vmatrix};$$

3) якщо один з рядків (стовпців) складається лише з нулів, то визначник дорівнює нулю; *наприклад*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 0;$$

4) якщо визначник має два однакові рядки (стовпці), то він дорівнює нулю; *наприклад*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a & b & c \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} a & a_{12} & a \\ b & a_{22} & b \\ c & a_{32} & c \end{vmatrix} = 0;$$

5) спільний множник елементів одного рядка (стовпця) можна винести за знак визначника; *наприклад*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

6) якщо елементи двох рядків (стовпців) пропорційні, то визначник дорівнює нулю; *наприклад*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix} = 0;$$

7) якщо кожен елемент деякого рядка (стовпця) є сумою двох доданків, то визначник дорівнює сумі двох визначників таких, що в одному визначнику рядок складається з перших доданків, в іншому – з других (інші елементи не змінюються); *наприклад*,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & b_{12} & a_{13} \\ a_{21} & b_{22} & a_{23} \\ a_{31} & b_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

8) якщо до елементів одного рядка (стовпця) додати відповідні елементи іншого рядка (стовпця), помножені на число, то визначник не зміниться; *наприклад*,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} + ka_{21} & a_{12} + ka_{22} & a_{13} + ka_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix};$$

9) визначник трикутної матриці дорівнює добутку елементів головної діагоналі:

$$\begin{vmatrix} a & a_{12} & a_{13} \\ 0 & b & a_{23} \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc; \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ a_{21} & b & 0 \\ a_{31} & a_{32} & c \end{vmatrix} = abc. \quad (1.2.6)$$

У багатьох випадках використання властивостей визначників дозволяє спростити їх обчислення.

Квадратну матрицю A називають **невиродженою (неособливою)**, якщо її визначник не дорівнює нулю: $\det A \neq 0$. У протилежному випадку матриця є **виродженою (особливою)**.

Квадратну матрицю A^{-1} називають **оберненою** до невинродженої квадратної матриці A , якщо вона в добутку з матрицею A справа і зліва дає одиничну матрицю E :

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E. \quad (1.2.7)$$

Матриця A^* , складена з алгебраїчних доповнень елементів транспонованої матриці A^T , називається **приєднаною**, або **союзною**, матрицею до матриці A :

$$B = A^* \Leftrightarrow b_{ij} = A_{ji} \quad \forall i, j \ (i, j = \overline{1, n}). \quad (1.2.8)$$

Теорема 1.2.2 (існування та єдиності оберненої матриці). Для будь-якої невинродженої квадратної матриці A існує єдина обернена матриця A^{-1} , яку визначає формула:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*. \quad (1.2.9)$$

За допомогою оберненої матриці розв'язують матричні рівняння вигляду:

$$AX = B \quad (1.2.10)$$

або

$$XA = B, \quad (1.2.11)$$

де A – задана невинроджена квадратна матриця;

B – відома матриця узгодженого розміру;

X – невідома матриця.

Якщо помножити рівняння (1.2.10) і (1.2.11) на A^{-1} зліва та справа відповідно, а потім скористатися означенням оберненої матриці (1.2.8) та властивістю (1.1.6), отримаємо наступні формули для відшукування розв'язку матричного рівняння:

$$AX = B \Rightarrow X = A^{-1}B; \quad (1.2.12)$$

$$XA = B \Rightarrow X = BA^{-1}. \quad (1.2.13)$$

Розглянемо ще одну *числову характеристику* матриць довільного розміру.

Рангом матриці $\text{rang}A$ називають максимальний порядок ненульових мінорів, що містить у собі матриця A .

Отже, якщо матриця A має ранг r , то це означає, що знайдеться хоча б один мінор порядку r , не рівний нулю, а всі мінори $(r + 1)$ -го порядку і вище – рівні нулю.

Будь-який ненульовий мінор матриці A порядку $r = \text{rang}A$ називають **базовим**.

Для відшукування рангу матриці зазвичай застосовують *метод елементарних перетворень матриці*.

Елементарними перетвореннями матриці називають:

- 1) переставлення рядків (стовпців);
- 2) множення всіх елементів деякого рядка (стовпця) на ненульове число;
- 3) додавання до елементів деякого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), помножених на число;
- 4) викреслення нульових рядків (стовпців);
- 5) викреслення пропорційних рядків (стовпців).

Якщо матрицю A шляхом скінченного числа елементарних перетворень можна звести до матриці B (і навпаки), то їх називають **еквівалентними** та пишуть: $A \sim B$.

Теорема 1.2.3. Елементарні перетворення матриці не змінюють її рангу.

Теорема 1.2.4. Будь-яка матриця може бути зведена до трикутного або ступінчастого (трапецоїдного) вигляду шляхом елементарних перетворень.

Основною матрицею системи (1.3.1) називають квадратну матрицю $n \times n$, складену із коефіцієнтів a_{ij} системи:

$$A = (a_{ij})_{i,j=1}^n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}. \quad (1.3.2)$$

Головним визначником Δ системи (1.3.1) називають визначник матриці коефіцієнтів (1.3.2):

$$\Delta = \det A. \quad (1.3.3)$$

Розширеною матрицею системи (1.3.1) називають прямокутну матрицю $n \times (n + 1)$, яка має вигляд:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right), \quad (1.3.4)$$

де зліва від риски розміщено основну матрицю системи, справа – стовпець правих частин.

Розв'язком системи (1.3.1) називають упорядкований набір чисел $(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$, підстановка яких в систему перетворює кожне рівняння на тотожність.

Систему (1.3.1) називають **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв'язок, і **несумісною**, якщо не має жодного.

Систему (1.3.1) називають **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **невизначеною**, якщо розв'язків більше за один.

Дві системи називають **еквівалентними**, якщо множини їх розв'язків співпадають.

Систему (1.3.1) називають **однорідною**, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю ($b_i = 0 \ \forall i = \overline{1, n}$), інакше – **неоднорідною** ($\exists i : b_i \neq 0$).

Легко бачити, що однорідна СЛАР завжди є сумісною, оскільки набір нулів $x_i = 0, i = \overline{1, n}$ (*тривіальний розв'язок*) перетворює всі рівняння у тотожності.

Теорема 1.3.1. (Кронекера – Капеллі). Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна тоді і тільки тоді, коли ранги основної та розширеної матриць співпадають:

$$\text{rang} A = \text{rang}(A | B).$$

Очевидно, обидва ранги не можуть бути більшими за кількість невідомих n : $\text{rang} A \leq n$, $\text{rang}(A | B) \leq n$.

Наслідками теореми Кронекера – Капеллі є наступні твердження.

Ознаки визначеності (єдиності розв'язку) системи:

1) СЛАР визначена тоді і тільки тоді, коли:

$$\text{rang} A = \text{rang}(A | B) = n \quad (n - \text{число невідомих});$$

2) СЛАР $n \times n$ визначена тоді і тільки тоді, коли її головний визначник не дорівнює нулю:

$$\Delta = \det A \neq 0.$$

Ознака невизначеності (неєдиності розв'язку) системи: СЛАР невизначена тоді і тільки тоді, коли:

$$\text{rang} A = \text{rang}(A | B) < n.$$

Як побачимо далі, такі системи зводяться до прямокутних систем m рівнянь з n невідомими. Методам розв'язання СЛАР $m \times n$ присвячено наступний п.1.4.

Розглянемо методи розв'язання визначених систем.

1. Формули Крамера.

Допоміжним визначником Δ_j , що відповідає невідомому x_j , називають визначник, отриманий із головного визначника системи Δ заміною j -го стовпця стовпцем вільних членів (правих частин), тобто:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}, \dots, \Delta_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & b_1 \\ a_{11} & a_{22} & \dots & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & b_n \end{vmatrix}. \quad (1.3.5)$$

Теорема 1.3.2. (Правило Крамера). Якщо головний визначник (1.3.3) системи (1.3.1) не дорівнює нулю $\Delta \neq 0$, її розв'язок можна знайти за формулами:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}. \quad (1.3.6)$$

2. Метод оберненої матриці.

Легко перевірити, що СЛАР $n \times n$ (1.3.1) може бути представленою у **матричній формі**, тобто у вигляді матричного рівняння:

$$AX = B, \quad (1.3.7)$$

де $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – **стовпець невідомих**;

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix} \text{ – стовпець правих частин (вільних членів)}. \quad (1.3.8)$$

Цей підхід базується на матричній формі (1.3.7) системи (1.3.1). Коли $\Delta = \det A \neq 0$, основна матриця системи A має обернену A^{-1} , тому розв'язок системи можна знайти за формулою:

$$X = A^{-1}B. \quad (1.3.9)$$

Легко бачити, що у частинному випадку визначеної однорідної СЛАР єдиним розв'язком системи є тривіальний:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що визначені системи, як і будь-які інші, можна розв'язувати методом Жордана – Гаусса, який є універсальним і буде розглянутий у наступному пункті.

1.4. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $m \times n$)

Системою m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $m \times n$) називають сукупність m рівнянь першого степеня відносно n невідомих:

[illegible]

Системи (1.4.1) перш за все досліджують на сумісність за теоремою 1.3.1 Кронекера – Капеллі. У випадку $m > n$ система може виявитись визначеною, тоді її можна розв'язати методами п.1.3. Якщо $m < n$ і система сумісна, то вона невизначена, тобто має безліч розв'язків.

Розглянемо **метод Жордана – Гаусса**, який на відміну від формул Крамера та методу оберненої матриці не потребує ніяких припущень, тому може бути використаний і для невизначених систем. Цей метод базується на понятті елементарних перетворень СЛАР (будь-якого розміру).

Елементарними перетвореннями системи називають:

- 1) переставлення рівнянь;
- 2) множення обох частин рівняння на ненульове число;
- 3) додавання до обох частин одного рівняння відповідних частин іншого рівняння, помножених на ненульове число;
- 4) викреслення тотожностей та однакових рівнянь.

Теорема 1.4.1. Елементарні перетворення СЛАР не міняють множини її розв'язків.

Ідея методу Жордана – Гаусса полягає в зведенні системи шляхом елементарних перетворень до:

трикутного або діагонального вигляду у випадку визначеної СЛАР;
трапеціїдного (ступінчастого) вигляду у випадку невизначеної СЛАР.

Зазвичай цей метод реалізують на розширеній матриці системи (1.3.4).

У випадку визначеної системи метою перетворень стає одинична матриця зліва від риски. Тоді на місці вільних членів з'являється упорядкований набір чисел, що дає розв'язок:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & x_1^0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_2^0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_n^0 \end{array} \right).$$

У випадку невизначеної системи $r = \text{rang} A = \text{rang}(A|B) < n$. Тоді метою елементарних перетворень є зведення розширеної матриці системи до матриці $r \times n$ трапецоїдного вигляду:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right) \rightarrow \dots$$

$$\dots \rightarrow \left(\begin{array}{cccc|ccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & \tilde{a}_{1(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{1n} & \tilde{b}_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \tilde{a}_{2(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{2n} & \tilde{b}_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \tilde{a}_{r(r+1)} & \dots & \tilde{a}_{rn} & \tilde{b}_r \end{array} \right),$$

яка містить одиничну матрицю r -го порядку.

Після цього здійснюють зворотній перехід, від розширеної матриці до системи рівнянь. Змінні $x_1, \dots, x_r$ називають **базовими**, змінні $x_{r+1}, \dots, x_n$ — **вільними**. Базові змінні $x_1, \dots, x_r$ виражають через вільні $x_{r+1}, \dots, x_n$ (переносять останні до правих частин рівнянь):

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_r \end{array} \right. = \begin{array}{l} \tilde{a}_{1(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{1n}x_n + \tilde{b}_1 \\ \tilde{a}_{2(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{2n}x_n + \tilde{b}_2 \\ \dots \\ \tilde{a}_{r(r+1)}x_{r+1} + \dots + \tilde{a}_{rn}x_n + \tilde{b}_r \end{array}.$$

Вільні змінні покладають незалежними параметрами: $x_{r+1} = t_1, \dots, x_n = t_{n-r}; t_i \in \mathbf{R}, i = \overline{1, n}$ кожен з яких набуває довільних дійсних значень. Таким чином, отримаємо нескінченну множину розв'язків. Цю множину називають **загальним розв'язком** системи. Розв'язок, який отримано із загального підстановкою конкретних значень параметрів, називають **частинним розв'язком** системи. Розв'язок, що відповідає нульовим значенням параметрів, називають **базисним**.

Легко помітити, що всі елементарні перетворення системи є також елементарними перетвореннями матриць. Тому рекомендують для знаходження рангів матриць використовувати перетворення, що водночас є реалізацією методу Жордана – Гаусса розв'язання систем. У цьому випадку розрахунки під час відшукування рангу розширеної матриці системи можуть бути використаними як кроки розв'язання системи методом Жордана – Гаусса.

1.5. Векторна алгебра

Скаляр – це величина, яка характеризується за певної одиниці вимірювання лише числом. **Векторною** називають величину, яка, крім числа, характеризується ще й напрямом у просторі. Векторну величину зображують напрямленим відрізком, який і називають **вектором**.

Вектор, початком якого є точка A (точка прикладення), а кінцем – точка B , позначають символом $\overline{AB}$. Також вживають позначення вектора однією малою буквою латинського алфавіту з рискою або стрілкою: $\vec{a}$ або $\vec{a}$ (рис. 1.5.1).

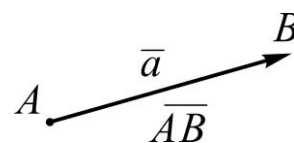


Рис. 1.5.1. Вектор

Модулем (довжиною) вектора $\overline{AB}$ називають число $|\overline{AB}|$, що дорівнює довжині відрізка AB (відстані від початку до кінця вектора).

Нульовим називають вектор нульової довжини (початок і кінець якого співпадають). Вважають, що напрям нульового вектора невизначений.

Вектор, модуль якого дорівнює одиниці, називають **одиничним**.

Одиничний вектор, напрям якого співпадає з напрямом осі l (вектора $\vec{a}$), називають **ортом l** (ортом $\vec{a}$).

Колінеарними називають вектори, які лежать на одній прямій або на паралельних прямих.

Рівними вважають вектори, що є колінеарними, мають однакові напрямки і рівні довжини.

Взаємно протилежними називають два колінеарні вектори, які мають однакові довжини та протилежні напрямки. Вектор, протилежний вектору $\vec{a}$ позначається $-\vec{a}$.

Три вектори називаються **компланарними**, якщо вони лежать в одній площині або паралельні одній площині.

Лінійними операціями над векторами є **додавання** векторів і **множення вектора на число**. Вони мають такі **властивості**:

- 1) комутативність додавання: $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;
- 2) асоціативність додавання: $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$;
- 3) комутативність множення на число: $\lambda \vec{a} = \vec{a} \lambda$;
- 4) асоціативність множення на число: $\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda \mu) \vec{a}$;
- 5) дистрибутивність множення на число відносно додавання векторів: $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda \vec{a} + \lambda \vec{b}$;
- 6) дистрибутивність множення на число відносно додавання чисел: $(\lambda + \mu) \vec{a} = \lambda \vec{a} + \mu \vec{a}$;
- 7) $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$;
- 8) $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$;
- 9) $0 \cdot \vec{a} = \vec{0}$;
- 10) $1 \cdot \vec{a} = \vec{a}$.

Необхідною й достатньою *умовою колінеарності* двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ є їх пропорційність, тобто $\vec{a} = k\vec{b}$, де k – число.

Проекцією $\text{Pr}_l \vec{a}$ **вектора** $\vec{a}$ **на вісь** l називають довжину відрізка, який з'єднує проекції на цю вісь початку й кінця цього вектора, що беруть зі знаком "+", якщо кут між вектором і віссю гострий, і знаком "-", якщо цей кут тупий.

Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l визначається формулою:

$$\text{Pr}_l \vec{a} = |\vec{a}| \cdot \cos \varphi, \text{ де } \varphi = (\vec{a} \wedge l). \quad (1.5.1)$$

На рис. 1.5.2 зображено: вектор $\vec{a}$ з початком в точці A та кінцем у точці B ; A_1 і B_1 – проекції на вісь l точок A і B відповідно; $\overline{A_1B_1}$ – проекція вектора $\vec{a}$.

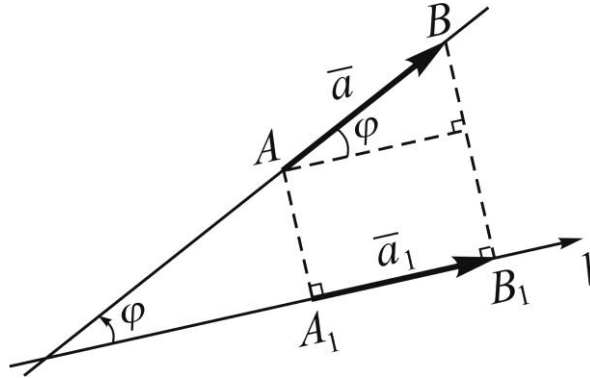


Рис. 1.5.2. Проекція вектора $\vec{a}$ на вісь l

Проекція задовольняє умови лінійності:

$$\begin{aligned}\text{Pr}_l(\vec{a} + \vec{c}) &= \text{Pr}_l\vec{a} + \text{Pr}_l\vec{c}; \\ \text{Pr}_l(\lambda\vec{a}) &= \lambda \cdot \text{Pr}_l(\vec{a}), \quad \lambda \in \mathbf{R}.\end{aligned}$$

Будь-який вектор $\vec{a}$ простору можна подати у вигляді:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \quad \text{або} \quad \vec{a} = (a_x, a_y, a_z),$$

де $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ – орти осей Ox, Oy, Oz відповідно,

a_x, a_y, a_z – впорядкована трійка чисел – **координати** вектора $\vec{a}$ в декартовій системі координат, причому:

$$a_x = \text{Pr}_{Ox}\vec{a}, \quad a_y = \text{Pr}_{Oy}\vec{a}, \quad a_z = \text{Pr}_{Oz}\vec{a}.$$

Координати вектора $\overline{AB}$ із початком у точці $A(x_1; y_1; z_1)$ і кінцем у $B(x_2; y_2; z_2)$ знаходять за формулою:

$$\overline{AB} = (x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1). \quad (1.5.2)$$

Наприклад, координати вектора з початком в $A(4; 1; -2)$ та кінцем в $B(5; -3; 0)$ дорівнюють:

$$\overline{AB} = (5 - 4; -3 - 1; 0 - (-2)) = (1; -4; 2).$$

Модуль (довжину) вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$, заданого своїми координатами обчислюють за формулою:

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \quad (1.5.3)$$

Наприклад, модуль вектора $\vec{a} = (2; 1; -2)$ дорівнює:

$$|\vec{a}| = \sqrt{2^2 + 1^2 + (-2)^2} = 3.$$

Лінійні операції над векторами, заданими своїми координатами, виконують за *правилами*:

1) якщо вектор множать на число λ , його координати множать на це число;

2) якщо вектори додають, то додають і їх відповідні координати.

Тобто для $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ справедливо:

$$\lambda \vec{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z), \quad \lambda - \text{const}; \quad (1.5.4)$$

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z). \quad (1.5.5)$$

Умова колінеарності для векторів у термінах їх координат полягає у виконанні співвідношення:

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = k \neq 0 \quad (1.5.6)$$

або рівності нулю обох відповідних координат векторів.

Напрямними косинусами вектора $\vec{a}$ називають косинуси кутів $\alpha = (\vec{a} \wedge Ox)$, $\beta = (\vec{a} \wedge Oy)$, $\gamma = (\vec{a} \wedge Oz)$ між вектором $\vec{a}$ і додатними напрямними координатних осей. Вони однозначно визначають напрям вектора в просторі.

Напрямні косинуси вектора $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ визначаються формулами:

$$\cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos \gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \quad (1.5.7)$$

причому для цих величин виконується рівність:

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

До **нелінійних операцій** над векторами належать *скалярний, векторний та мішаний добуток*.

Скалярним добутком $\vec{a} \cdot \vec{b}$ **двох векторів** $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *число* (скаляр), яке дорівнює добутку довжин цих векторів на косинус кута між ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi, \quad \varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b}).$$

Для векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ заданих координатами скалярний добуток обчислюють за формулою:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z. \quad (1.5.8)$$

Із означення проекції вектора легко знайти формули:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot \text{Pr}_{\vec{a}} \vec{b} = |\vec{b}| \cdot \text{Pr}_{\vec{b}} \vec{a}.$$

Геометричними застосуваннями скалярного добутку є його використання для відшукування проекції вектора на задану вісь та кута між векторами (рис. 1.5.3) за формулами:

$$\text{Pr}_{\vec{a}}\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|}; \quad (1.5.9)$$

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \Rightarrow \varphi = \arccos \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right). \quad (1.5.10)$$

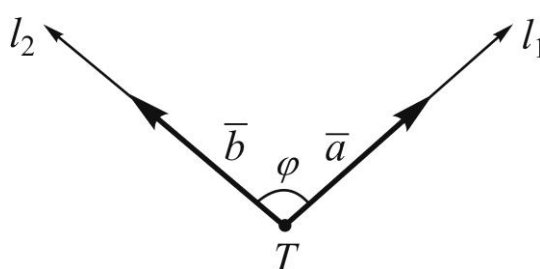


Рис. 1.5.3. Кут φ між векторами $\vec{a}$ і $\vec{b}$

Скалярний добуток має такі *властивості*:

1) комутативність множення:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a};$$

2) асоціативність щодо множення на число:

$$\lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot (\lambda\vec{b});$$

3) дистрибутивність щодо додавання векторів:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c};$$

4) скалярний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори ортогональні (перпендикулярні), тобто:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}. \quad (1.5.11)$$

Крім того:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0 \Leftrightarrow \varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b}) < \pi/2 \text{ (кут гострий);}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0 \Leftrightarrow \varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b}) > \pi/2 \text{ (кут тупий);}$$

5) $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$, звідки $|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$.

Наприклад, знайдемо скалярний добуток векторів $\vec{a} = (-3; 5; -1)$ і $\vec{b} = (4; 0; 2)$. За формулою (1.5.8) маємо:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z = -3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 = -14.$$

Векторним добутком двох векторів $\vec{a}$ і $\vec{b}$ називають *вектор* $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$, що задовольняє умови:

1) модуль векторного добутку визначають за формулою:

$$|\vec{s}| = |\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi, \text{ де } \varphi = (\vec{a} \wedge \vec{b}); \quad (1.5.12)$$

2) $\vec{s} \perp \vec{a}, \vec{s} \perp \vec{b}$;

3) вектори $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{s}\}$ утворюють праву трійку векторів, тобто з кінця вектора $\vec{s}$ найкоротший поворот від $\vec{a}$ до $\vec{b}$ на найменший кут здійснюють проти руху стрілки годинника (рис. 1.5.4).

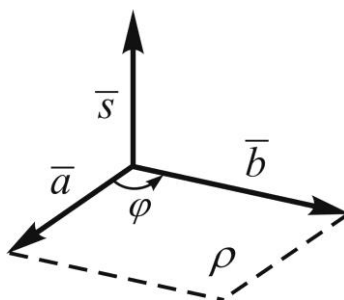


Рис. 1.5.4. Векторний добуток $\vec{s} = \vec{a} \times \vec{b}$

У декартовій системі координат векторний добуток заданих векторів $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\vec{b} = (b_x; b_y; b_z)$ обчислюють за формулою:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \quad (1.5.13)$$

Геометричний зміст векторного добутку $\vec{a} \times \vec{b}$ полягає в тому, що його модуль дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$:

$$S_{\text{пар}} = \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \text{ (кв. од.)}. \quad (1.5.14)$$

Тоді площа трикутника, побудованого на векторах $\vec{a}$ і $\vec{b}$, дорівнює:

$$S_{\Delta} = \frac{1}{2} \left| \vec{a} \times \vec{b} \right| \text{ (кв. од.)}. \quad (1.5.15)$$

Основними властивостями векторного добутку є:

1) антикомутативність:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a};$$

2) асоціативність щодо множення на число:

$$\lambda(\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda\vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda\vec{b});$$

3) дистрибутивність щодо додавання векторів:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c};$$

4) векторний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори колінеарні, тобто:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b};$$

5) $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

Мішаним добутком трьох впорядкованих векторів $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ називають число, яке визначають формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c}.$$

Якщо вектори задано своїми координатами, то мішаний добуток знаходять за формулою:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}. \quad (1.5.16)$$

З геометричної точки зору мішаний добуток $\vec{a}\vec{b}\vec{c}$ із точністю до знака дорівнює об'єму паралелепіпеда (рис. 1.5.5), побудованого на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ як на ребрах:

$$V_{\text{пар}} = \pm \vec{a}\vec{b}\vec{c} = |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \text{ (куб. од.)}. \quad (1.5.17)$$

Також за допомогою мішаного добутку знаходять об'єм піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$:

$$V_{\text{піраміди}} = \pm \frac{\vec{a}\vec{b}\vec{c}}{6} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}| \text{ (куб. од.)}. \quad (1.5.18)$$

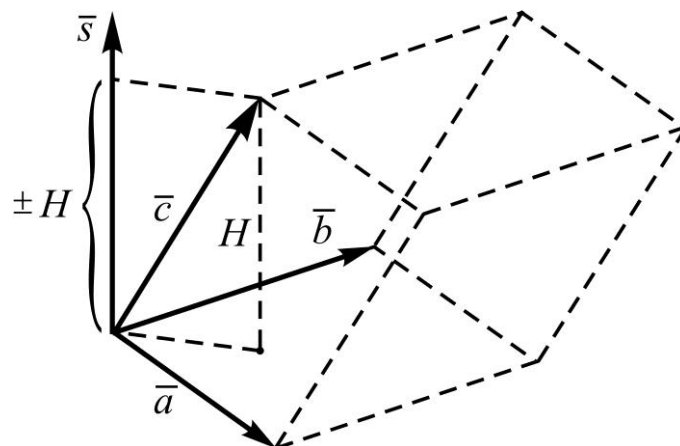


Рис. 1.5.5. Геометричний зміст мішаного добутку

За допомогою мішаного та векторного добутків можна знайти висоту піраміди, побудованої на векторах $\vec{a}$, $\vec{b}$ і $\vec{c}$ як на ребрах.

З одного боку:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} h,$$

а з іншого:

$$V_{\text{піраміди}} = \frac{1}{6} |\vec{a}\vec{b}\vec{c}|.$$

Звідки одержуємо:

$$h = \frac{3V_{\text{пір}}}{S_{\Delta}} = \frac{|\vec{a}\vec{b}\vec{c}|}{|\vec{a} \times \vec{b}|}.$$

Наслідками властивостей скалярного та векторного добутків є такі *властивості мішаного добутку*:

1) порядок векторного та скалярного добутків можна змінювати:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = [\vec{a} \times \vec{b}] \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot [\vec{b} \times \vec{c}];$$

2) мішаний добуток не змінюється в разі циклічної перестановки множників та змінює знак у всіх інших випадках:

$$\begin{aligned} \vec{a}\vec{b}\vec{c} &= \vec{c}\vec{a}\vec{b} = \vec{b}\vec{c}\vec{a}; \\ \vec{a}\vec{b}\vec{c} &= -\vec{b}\vec{a}\vec{c} = -\vec{a}\vec{c}\vec{b} = -\vec{c}\vec{b}\vec{a}; \end{aligned}$$

3) мішаний добуток ненульових векторів дорівнює нулю тоді й лише тоді, коли вектори компланарні:

$$\vec{a}\vec{b}\vec{c} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a}, \vec{b}, \vec{c} - \text{компланарні.} \quad (1.5.19)$$

1.6. Лінійні m -вимірні простори. Лінійна незалежність і залежність системи векторів. Розклад вектора за базисом

Сукупність m дійсних чисел $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, упорядкованих за номерами, називають **m -вимірним вектором**, або **m -вектором**, а числа a_i ($i = \overline{1, m}$) – його **координатами**, і позначають:

$$\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m) \quad \text{або} \quad \bar{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Таке позначення дозволяє розглядати m -вектор, як матрицю розміру $m \times 1$ (матрицю-стовпець) або матрицю розміру $1 \times m$ (матрицю-рядок). Тому над m -векторами можна виконувати ті ж самі дії, що і над матрицями.

Нехай $\bar{a} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$, тоді:

$$\bar{a} = \bar{b} \Leftrightarrow (a_i = b_i) \quad \forall i = \overline{1, m},$$

$$\bar{c} = \bar{a} + \bar{b} = (c_1, c_2, \dots, c_m) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_m + b_m),$$

$$\bar{c} = \lambda \cdot \bar{a} = (c_1, c_2, \dots, c_m) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_m), \quad \lambda - \text{const.}$$

Таким чином, розглянуті операції над m -векторами зводяться до тих самих операцій над їх координатами.

Операції додавання векторів і множення вектора на число називають **лінійними**. Як і дії над матрицями, лінійні операції над векторами підкоряються комутативному (переставному), асоціативному (сполучному) і дистрибутивному (розподільному) законам:

$$1) \bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}, \quad \lambda \bar{a} = \bar{a} \lambda \quad (\lambda - \text{const});$$

$$2) (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c} = \bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} + \bar{b} + \bar{c}, \quad \lambda(\mu \bar{a}) = (\lambda \mu) \bar{a} \quad (\lambda, \mu - \text{const});$$

$$3) \lambda(\bar{a} + \bar{b}) = \lambda \bar{a} + \lambda \bar{b}, \quad (\lambda + \mu) \bar{a} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{a}.$$

Вектор, усі координати якого дорівнюють нулю, називають **нульовим вектором**, або **нуль-вектором**: $\bar{0} = (0, 0, \dots, 0)$.

Для будь-яких вектора $\bar{a}$ і числа λ маємо: $\bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$, $\lambda \cdot \bar{0} = \bar{0}$.

Вектор $-\bar{a}$ називають **протилежним** вектору $\bar{a}$, якщо їх сума дорівнює нуль-вектору: $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$.

Сукупність усіх m -векторів із дійсними координатами, для яких визначені лінійні операції, називають **m -вимірним векторним**, або **лінійним, простором** і позначають: $\mathbf{R}^m$.

Отже, $\mathbf{R}^1$ (або просто $\mathbf{R}$) – **одновимірний** векторний простір – сукупність усіх векторів, що лежать на прямій; $\mathbf{R}^2$ – **двовимірний** векторний простір – сукупність усіх векторів, що належать площині; $\mathbf{R}^3$ – **тривимірний** векторний простір – множина всіх векторів у просторі, в якому ми перебуваємо.

Будь-яку сукупність (множину) m -векторів $\bar{a}_1 = (a_{11}, a_{21}, \dots, a_{m1})$, $\bar{a}_2 = (a_{12}, a_{22}, \dots, a_{m2})$, ..., $\bar{a}_n = (a_{1n}, a_{2n}, \dots, a_{mn})$ називають **системою векторів**, і позначають: $\{\bar{a}_j\}_1^n$, де $\bar{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, $j = \overline{1, n}$.

Лінійною комбінацією векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ називають суму добутків цих векторів з довільними дійсними числами $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$:

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n \quad (\alpha_j - \text{const}, j = \overline{1, n}). \quad (1.6.1)$$

Систему векторів $\{\bar{a}_j\}_1^n$ називають **лінійно незалежною**, якщо рівність

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0} \quad (1.6.2)$$

виконується тільки за умови, що $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$.

Якщо ж рівність (1.6.2) виконується за умови, що хоча б одне із чисел $\alpha_j \neq 0$ ($j = \overline{1, n}$), то таку систему векторів $\{\bar{a}_j\}_1^n$ називають **лінійно залежною**.

Якщо система векторів $\{\bar{a}_j\}_1^n$ лінійно залежна, то принаймні один із цих векторів можна подати у вигляді лінійної комбінації решти векторів системи. Дійсно, нехай існують деякі α_j ($j = \overline{1, n}$), відмінні від нуля, які задовольняють (1.6.2). Виберемо одне з них, наприклад, α_n . Помножимо ліву і праву частини (1.6.2) на $1/\alpha_n \neq 0$:

$$\frac{1}{\alpha_n}(\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n) = \frac{1}{\alpha_n} \bar{0} \Rightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_n} \bar{a}_1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_n} \bar{a}_2 + \dots + \bar{a}_n = \bar{0}.$$

Звідки маємо:

$$\bar{a}_n = -\frac{\alpha_1}{\alpha_n} \bar{a}_1 - \frac{\alpha_2}{\alpha_n} \bar{a}_2 - \dots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_n} \bar{a}_{n-1},$$

а це і означає, що вектор $\bar{a}_n$ є лінійною комбінацією решти векторів системи.

На площині (в $\mathbf{R}^2$) будь-які три вектори лінійно залежні, у просторі (в $\mathbf{R}^3$) – будь-які чотири вектори. Прикладом лінійно незалежної системи векторів в $\mathbf{R}^2$ є сукупність двох неколінеарних векторів, а в $\mathbf{R}^3$ – трьох некомпланарних.

З'ясування питання про лінійну залежність чи незалежність системи m -векторів $\{\bar{a}_j\}_1^n$ зводиться до дослідження векторної рівності (1.6.2). Запишемо її в координатній формі, для чого подамо вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ і $\bar{0}$ через їх координати:

$$\begin{aligned} \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_n \bar{a}_n = \bar{0} &\Rightarrow \\ \Rightarrow \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \dots + \alpha_n \cdot \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, & (1.6.3) \end{aligned}$$

Прирівнюємо відповідні координати результуючого вектора у лівій частині (1.6.3) і нуль-вектора – у правій. У результаті отримуємо однорідну СЛАР відносно невідомих α_j ($j = \overline{1, n}$):

[illegible]

Якщо система (1.6.4) має лише нульовий (тривіальний) розв'язок: $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_n = 0$, то згідно з рівністю (1.6.2) вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ *лінійно незалежні*; якщо ж крім нульового система (1.6.4) має ще й ненульові розв'язки, то вектори $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n$ *лінійно залежні*.

До того ж, якщо дослідження системи (1.6.4) проводити, виходячи з порівняння вимірності простору m з кількістю векторів системи n , то можна дістати **висновку**: *лінійно незалежна система векторів із $\mathbf{R}^m$ може містити щонайбільше m векторів, де m – вимірність лінійного простору.*

Задача 1.6.1. З'ясувати, чи є лінійно незалежною система векторів $\bar{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\bar{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\bar{a}_3 = (1, 3, -1)$.

Розв'язання. Складаємо для заданої системи векторів $\{\bar{a}_j\}_1^3$ співвідношення (1.6.2), записуємо його в координатній формі й отримуємо однорідну СЛАР відносно невідомих $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$:

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 = \bar{0} \Rightarrow \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_3 = 0 \\ 2\alpha_1 + \alpha_2 + 3\alpha_3 = 0 \\ 3\alpha_1 + 2\alpha_2 - \alpha_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ -1 & 0 & -7 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = -6.$$

Оскільки визначник цієї СЛАР Δ відмінний від нуля, то вона має єдиний розв'язок: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$. Отже, задана система векторів $\{\bar{a}_j\}_1^3$ є лінійно незалежною.

Базисом лінійного m -вимірному простору $\mathbf{R}^m$ називають будь-яку систему (множину) m лінійно незалежних m -векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$.

За результатом розв'язання задачі 1.6.1 базис $\mathbf{R}^m$ можна означити інакше: будь-яку систему m -вимірних векторів $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_m$, де $\bar{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj})$, $j = \overline{1, m}$, називають **базисом** $\mathbf{R}^m$, якщо визначник, складений із координат цих векторів відмінний від нуля, тобто:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (1.6.5)$$

Теорема 1.6.1 (про розклад вектора за базисом). Будь-який вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ із $\mathbf{R}^m$ можна подати у вигляді лінійної комбінації векторів базису $\{\bar{a}_j\}_1^m$ і до того ж єдиним чином:

$$\bar{b} = \alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \dots + \alpha_m \bar{a}_m. \quad (1.6.6)$$

Подання вектора $\bar{b}$ у вигляді лінійної комбінації векторів базису називають **розкладом вектора за базисом**, а числа α_j ($j = \overline{1, m}$) – **коефіцієнтами розкладу**, або **координатами вектора $\bar{b}$ у базисі $\{\bar{a}_j\}_1^m$** .

Прикладом базису у просторі $\mathbf{R}^m$ є система m -вимірних одиничних векторів:

$$\bar{e}_1 = (1, 0, 0, \dots, 0), \quad \bar{e}_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \quad \dots, \quad \bar{e}_m = (0, 0, 0, \dots, 1),$$

бо визначник Δ (див. формулу (1.6.5)) відмінний від нуля як визначник одиничної матриці: $\Delta = 1$. Коефіцієнти розкладу будь-якого вектора за базисом $\{\bar{e}_j\}_1^m$ співпадають із координатами самого вектора.

1.7. Пряма на площині

У аналітичній геометрії будь-яку лінію L на площині xOy можна задати геометрично як множину точок, які мають деяку спільну геометричну властивість, і аналітично – за допомогою рівняння – співвідношення, яке виходячи із цієї властивості, пов'язує змінні координати x і y точок, що належать цій лінії, і, можливо, деякі числові параметри та константи. Рівняння лінії дозволяє вивчення її геометричних властивостей звести до дослідження, власне, самого рівняння.

Рівняння $\Phi(x, y) = 0$ називають **рівнянням лінії** L , якщо координати x і y будь-якої точки лінії задовольняють це рівняння і навпаки, якщо пара чисел (x, y) задовольняє рівняння $\Phi(x, y) = 0$, то x і y є координатами точки, яка належить лінії L :

$$\Phi(x, y) = 0 \text{ – рівняння лінії } L \Leftrightarrow (x, y) \in L \Leftrightarrow \Phi(x, y) = 0, \quad (1.7.1)$$

де Φ – закон (правило), який відображає властивість точок лінії;

$\in$ – символ *належності* ($M \in L$ – точка M належить лінії L).

Змінні x і y в рівнянні $\Phi(x, y) = 0$ називають **поточними координатами** точок лінії; іншими словами, під x і y розуміють координати будь-якої точки лінії L .

Нехай на площині задано систему координат xOy і деяку пряму l . Розглянемо **різні види рівнянь** цієї прямої.

1. Канонічне рівняння прямої.

Будь-який не нульовий вектор $\vec{s} = (m, n)$, який паралельний прямій l або лежить на ній, називається **напрямним вектором** прямої.

Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (m, n)$ (рис. 1.7.1). Тоді її рівняння має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n}. \quad (1.7.2)$$

Рівняння (1.7.2) називають **канонічним рівнянням** прямої.

2. Рівняння прямої, що проходить через дві задані точки.

Рівняння прямої l , яка проходить через задані точки $M_1(x_1, y_1)$ і $M_2(x_2, y_2)$ дістанемо з (1.7.2), як рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\bar{s} = \overline{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$ (рис. 1.7.2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (1.7.3)$$

Рівняння (1.7.3) називають **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

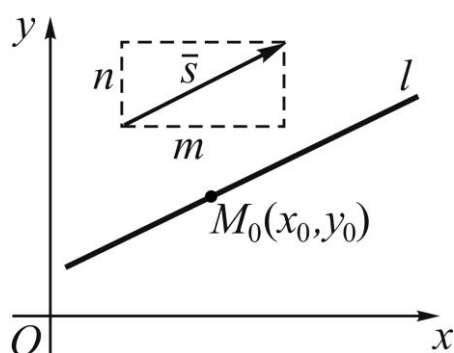


Рис. 1.7.1. Пряма та задані точка і напрямний вектор

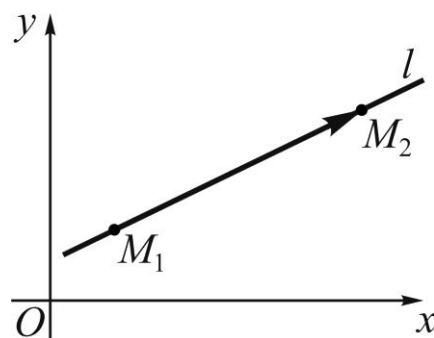


Рис. 1.7.2. Пряма та задані дві точки на ній

Якщо пряма l проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно осі Ox , то:

$$\bar{s} = (m, 0) \Rightarrow |(1.7.2)| \Rightarrow \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{0} \Rightarrow (x - x_0) \cdot 0 = (y - y_0) \cdot m \Rightarrow y = y_0.$$

Аналогічно, якщо пряма l проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ паралельно осі Oy , то:

$$\bar{s} = (0, n) \Rightarrow |(1.7.2)| \Rightarrow \frac{x - x_0}{0} = \frac{y - y_0}{n} \Rightarrow (x - x_0) \cdot n = (y - y_0) \cdot 0 \Rightarrow x = x_0.$$

3. Параметричні рівняння прямої.

Якщо в рівнянні (1.7.2) покласти коефіцієнт пропорційності рівним t , то отримаємо:

$$\left(\frac{x - x_0}{m} = t, \frac{y - y_0}{n} = t \right) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt, \quad \forall t \in \mathbf{R}. \end{cases} \quad (1.7.4)$$

Рівняння (1.7.4) називають **параметричними рівняннями прямої**.

4. Рівняння прямої, яка проходить через задану точку в заданому напрямі.

Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і нахилена до осі Ox під кутом α (рис. 1.7.3).

Якщо в якості напрямного вектора прямої одиничний вектор: $\vec{s}^0 = (m, n) = (\cos \alpha, \sin \alpha)$, то канонічне рівняння (1.7.2) набуде вигляду:

$$\frac{x - x_0}{\cos \alpha} = \frac{y - y_0}{\sin \alpha},$$

звідки одержуємо:

$$y - y_0 = k \cdot (x - x_0), \quad (1.7.5)$$

де $k = \operatorname{tg} \alpha$ – **кутовий коефіцієнт** прямої, який і визначає її напрям.

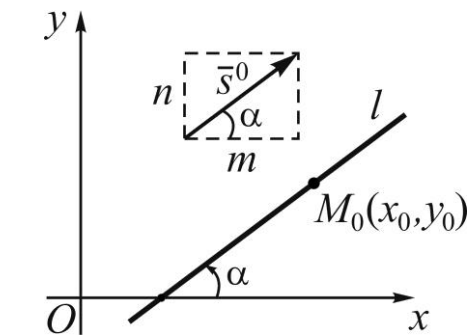


Рис. 1.7.3. Пряма та задані точка і кут нахилу

Рівняння (1.7.5) називають **рівнянням прямої, яка проходить через задану точку у заданому напрямі**.

5. Рівняння прямої з кутовим коефіцієнтом.

Нехай пряма відтинає на осі Oy відрізок величиною b і нахилена до осі Ox під кутом α (рис. 1.7.4), тобто $k = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт прямої.

Шукане рівняння отримуємо як наслідок із (1.7.5), якщо в якості точки $M_0(x_0, y_0)$ на прямій взяти точку $B(0, b)$:

$$y = k \cdot x + b. \quad (1.7.6)$$

Рівняння (1.7.6) називають **рівнянням прямої з кутовим коефіцієнтом**.

6. Рівняння прямої у відрізках на осях.

Нехай пряма l відтинає на осях координат Ox і Oy відрізки величиною a і b , відповідно. Тоді a (b) – абсциса (ордината) точки перетину прямої з віссю Ox (Oy) (рис. 1.7.5).

Шукане рівняння дістанемо як наслідок із (1.7.3), де в якості заданих точок M_1 і M_2 на прямій вибрані точки $A(a, 0)$ і $B(0, b)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (1.7.7)$$

Рівняння (1.7.7) називають **рівнянням прямої у відрізках на осях**.

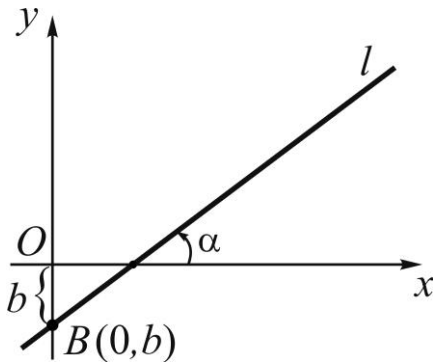


Рис. 1.7.4. Пряма та задані відрізок і кут нахилу

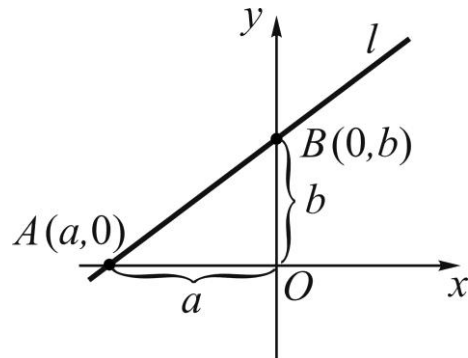


Рис. 1.7.5. Пряма та задані відрізки на осях

7. Нормальне рівняння прямої.

Якщо відома відстань p ($p > 0$) від початку координат O до прямої l , а відповідний відстані відрізок нахилений до осі Ox під кутом α (рис. 1.7.6), то рівняння прямої набуде вигляду:

$$x \cdot \cos \alpha + y \cdot \sin \alpha - p = 0. \quad (1.7.8)$$

Рівняння (1.7.8) називають **нормальним рівнянням прямої**.

8. Рівняння прямої із заданим нормальним вектором.

Будь-який не нульовий вектор $\vec{N} = (A, B)$, перпендикулярний прямій, називають **нормальним вектором** прямої.

Нехай пряма проходить через точку $M_0(x_0, y_0)$ і має нормальний вектор $\vec{N} = (A, B)$ (рис. 1.7.7). Тоді рівняння прямої має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (1.7.9)$$

Рівняння (1.7.9) називають **рівнянням прямої, яка проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор** $\vec{N} = (A, B)$.

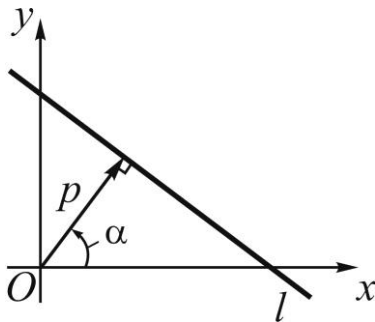


Рис. 1.7.6. Пряма та задані відстань і кут нахилу

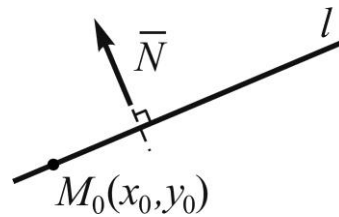


Рис. 1.7.7. Пряма та задані точка і нормальний вектор

9. Загальне рівняння прямої.

Розкриємо дужки в рівнянні (1.7.9):

$$\begin{aligned} A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0 &\Rightarrow Ax + By + (-Ax_0 - By_0) = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow Ax + By + C = 0, \end{aligned} \quad (1.7.10)$$

де $C = -Ax_0 - By_0$ – вільний член рівняння – деяке число.

Рівняння (1.7.10), лінійне відносно змінних x і y , називають **загальним рівнянням прямої** на площині.

Зауваження:

- 1) будь-яка пряма на площині описується рівнянням (1.7.10);
- 2) кожне рівняння виду (1.7.10) визначає на площині деяку пряму.

Задача 1.7.1. Скласти рівняння прямої l , що проходить через точку $M_0(3, -7)$ паралельно вектору $\overline{M_1M_2}$, якщо $M_1(2, -5)$, $M_2(-4, 2)$.

Розв'язання. За відомою точкою $M_0(3, -7)$ на прямій і відомим напрямним вектором $\vec{s} = \overline{M_1M_2} = (-6, 7)$ складаємо її канонічне рівняння

(див. формулу (1.7.2)): $\frac{x-3}{-6} = \frac{y+7}{7}$. Зводимо його до загального вигляду, використовуючи властивість членів пропорції: $7(x-3) = -6(y+7)$. Звідки й одержуємо шукане рівняння: $7x + 6y + 21 = 0$.

Розглянемо **випадки взаємного розташування** двох прямих на площині.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x-x_1}{m_1} = \frac{y-y_1}{n_1} \quad (l_1), \quad \frac{x-x_2}{m_2} = \frac{y-y_2}{n_2} \quad (l_2).$$

Під **кутом між двома прямими**, які описуються *канонічними рівняннями*, розуміють один із двох суміжних кутів між їх напрямними векторами $\bar{s}_1 = (m_1, n_1)$ і $\bar{s}_2 = (m_2, n_2)$ (рис. 1.7.8).

За формулою косинуса кута між двома векторами (1.5.10) маємо:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(l_1 \wedge l_2) = \cos(\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2) = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \arccos(\cos \varphi) = \arccos \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2}} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi). \end{aligned} \quad (1.7.11)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то вектори $\bar{s}_1 = (m_1, n_1)$ і $\bar{s}_2 = (m_2, n_2)$ колінеарні, тому їх координати пропорційні:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2}. \quad (1.7.12)$$

Співвідношення (1.7.12) є **умовою паралельності** двох прямих.

Із (1.7.11) отримуємо **умову перпендикулярності** двох прямих:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0. \quad (1.7.13)$$

Нехай прямі l_1 і l_2 задані загальними рівняннями:

$$A_1 x + B_1 y + C_1 = 0 \quad (l_1), \quad A_2 x + B_2 y + C_2 = 0 \quad (l_2).$$

Під **кутом між двома прямими**, які описуються загальними рівняннями, розуміють один із двох суміжних кутів між їх нормальними векторами $\bar{N}_1 = (A_1, B_1)$ і $\bar{N}_2 = (A_2, B_2)$ (рис. 1.7.9).

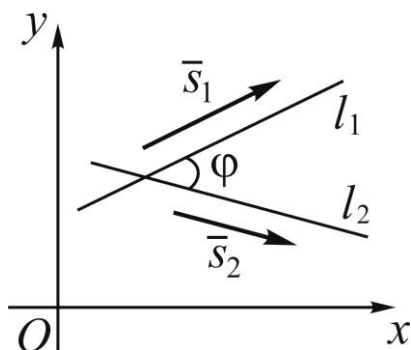


Рис. 1.7.8. Кут між прямими та їх напрямні вектори

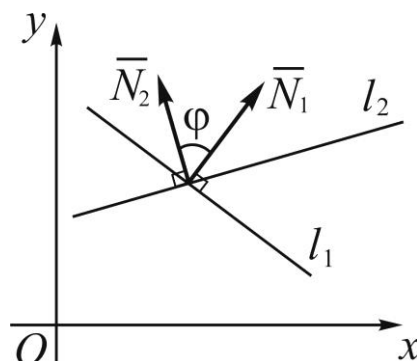


Рис. 1.7.9. Кут між прямими та їх нормальні вектори

У цьому випадку за аналогією з (7.1.11) – (7.1.13) дістанемо:

$$\cos \varphi = \cos(l_1 \wedge l_2) = \cos(\bar{N}_1 \wedge \bar{N}_2) = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \arccos \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2}} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi); \quad (1.7.14)$$

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2}. \quad (1.7.15)$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 = 0. \quad (1.7.16)$$

Якщо нормальні вектори $\bar{N}_1$ і $\bar{N}_2$ утворюють гострий кут, то і кут між прямими буде гострим; якщо ж в якості нормального вектора прямої l_1 вибрати протилежний до $\bar{N}_1$ вектор, то φ – тупий кут.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані рівняннями з кутовими коефіцієнтами:

$$y = k_1 x + b_1 \quad (l_1), \quad y = k_2 x + b_2 \quad (l_2),$$

де $k_1 = \operatorname{tg} \alpha_1$, $k_2 = \operatorname{tg} \alpha_2$ – кутові коефіцієнти прямих l_1 і l_2 , відповідно.

Під **кутом між прямими** у цьому випадку розуміють кут φ , на який треба повернути пряму l_1 проти годинникової стрілки навколо точки перетину прямих, щоб вона співпала з прямою l_2 (рис. 1.7.10).

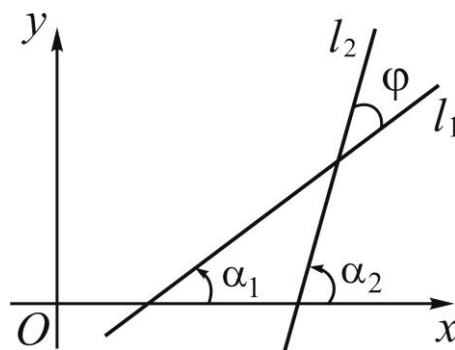


Рис. 1.7.10. Кут між прямими та кути нахилу прямих

Тоді *гострий кут* між прямими l_1 і l_2 визначається формулою:

$$\operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 k_2} \right| \Rightarrow \varphi = \operatorname{arctg} \left| \frac{k_1 - k_2}{1 + k_1 \cdot k_2} \right|. \quad (1.7.17)$$

Умови паралельності та перпендикулярності прямих, які описуються рівняннями з кутовими коефіцієнтами мають вигляд:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \varphi = 0 \Leftrightarrow k_1 = k_2, \quad (1.7.18)$$

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 \Leftrightarrow 1 + k_1 k_2 = 0 \Leftrightarrow k_2 = -1/k_1. \quad (1.7.19)$$

Відстанню від точки до прямої називають довжину відрізка перпендикуляра, опущеного із цієї точки на пряму (рис. 1.7.11).

Якщо пряма l задана загальним рівнянням $Ax + By + C = 0$, то відстань d від точки $M_0(x_0, y_0)$ до цієї прямої обчислюють за формулою:

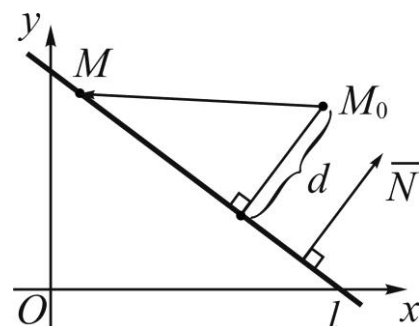


Рис. 1.7.11. Відстань d від точки до прямої

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}. \quad (1.7.20)$$

Задача 1.7.2. Знайти відстань від точки $M_0(2, -1)$ до прямої l , що проходить через точки $M_1(-2, 7)$ і $M_2(6, 1)$.

Розв'язання. Рівняння прямої l одержимо, скориставшись (1.7.3):

$$l: \frac{x - x_{M_1}}{x_{M_2} - x_{M_1}} = \frac{y - y_{M_1}}{y_{M_2} - y_{M_1}} \Rightarrow \frac{x + 2}{8} = \frac{y - 7}{-6} \Rightarrow 3x + 4y - 22 = 0.$$

Відстань від точки M_0 до прямої l дістанемо за формулою (1.7.20):

$$d = \left| \frac{3 \cdot 2 + 4 \cdot (-1) - 22}{\sqrt{3^2 + 4^2}} \right| = \frac{20}{5} = 4 \text{ (лін. од.)}.$$

1.8. Криві другого порядку (К2П)

Кривою другого порядку називають лінію, усі точки якої задовольняють рівняння:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (1.8.1)$$

де x, y – **поточні координати** точок лінії – змінні;

A, B, C, D, E – **коефіцієнти** при змінних, причому хоча б одне із чисел A, B, C відмінне від 0 ($A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$);

F – **вільний член** рівняння.

Рівняння (1.8.1) називають **загальним рівнянням К2П**.

За певних значень коефіцієнтів при змінних і вільного члена рівняння (1.8.1) описує: *коло, еліпс, гіперболу, параболу*. Крім того, зустрічаються випадки виродження: для еліпса (кола) – в точку або уявний еліпс (уявне коло); для гіперболи – в пару прямих, що перетинаються; для параболу – в пару паралельних прямих. Термін "уявна крива" означає, що не існує точок (x, y) з дійсними координатами, які задовольняють рівняння (1.8.1).

Далі будемо розглядати випадок, коли загальне рівняння К2П (1.8.1) не містить добутку змінних, тобто $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0. \quad (1.8.2)$$

Наведемо умови, за яких рівняння (1.8.2) визначає певну К2П:

1) $A \cdot C > 0 \Rightarrow$ (1.8.2) описує криву еліптичного типу: *еліпс, точку або уявну криву*, зокрема, *коло* при $A = C$;

2) $A \cdot C < 0 \Rightarrow$ (1.8.2) описує криву гіперболічного типу: *гіперболу або пару прямих, що перетинаються*;

3) $A \cdot C = 0 \Rightarrow$ (1.8.2) описує криву параболічного типу: *параболу, пару паралельних прямих або уявну криву*.

1. Коло.

Колом називають множину точок площини, відстані від яких до заданої точки площини (*центра кола*) дорівнюють сталому числу (*радіусу кола*).

Рівняння кола радіуса R із центром у точці $C(x_0, y_0)$ (рис. 1.8.1) має вигляд:

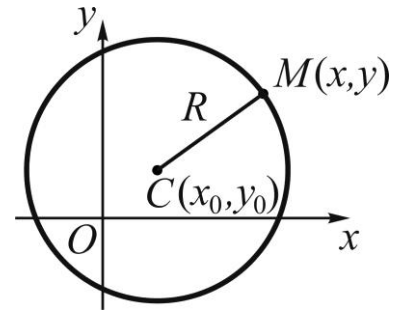


Рис. 1.8.1. Коло

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2. \quad (1.8.3)$$

Якщо центр кола лежить у початку координат $O(0,0)$, то $x_0 = y_0 = 0$, а рівняння (1.8.3) набуде вигляду:

$$x^2 + y^2 = R^2. \quad (1.8.4)$$

Рівняння (1.8.4) називають **канонічним рівнянням кола**.

2. Еліпс.

Еліпсом називають множину точок площини, сума відстаней від яких до двох заданих точок площини (*фокусів еліпса*) є величиною сталою (більшою за відстань між фокусами).

Виберемо систему координат xOy так, щоб вісь Ox проходила через фокуси еліпса від $F_1(-c, 0)$ до

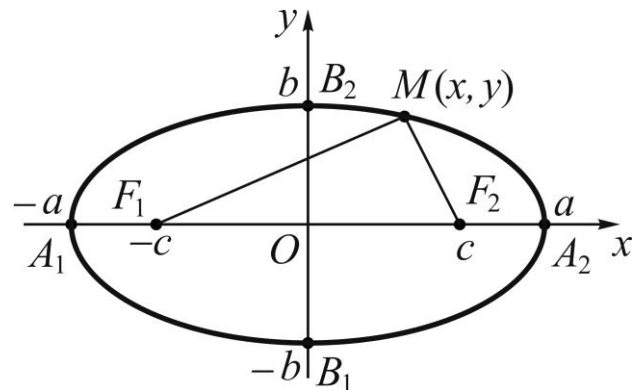


Рис. 1.8.2. Еліпс

$F_2(c, 0)$, а початок координат ділив відстань між ними навпіл (рис. 1.8.2). Тоді координати точок еліпса задовольняють рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.8.5)$$

де a (b) – велика (мала) піввісь еліпса, $a > b$.

Рівняння (1.8.5) називають **канонічним рівнянням еліпса**.

Зв'язок між півосями еліпса має вигляд: $a^2 - c^2 = b^2$, де c – півфокусна відстань: $c = OF_1 = OF_2$.

Аналіз рівняння (1.8.5) дозволяє дійти *висновків*: оскільки рівняння містить тільки квадрати змінних x і y , то еліпс симетричний відносно осей координат, а також відносно точки $O(0,0)$ – **центра** еліпса; еліпс перетинає осі координат у точках $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$, які називають **вершинами** еліпса.

Ступінь "стислості" еліпса відносно осі Ox характеризує відношення півфокусної відстані c до великої півосі a , яке називають **ексцентриситетом** еліпса і позначають e , тобто:

$$e = c/a, \quad 0 < e < 1. \quad (1.8.6)$$

Оскільки для кола $a = b$, то за співвідношенням $a^2 - c^2 = b^2$ дістанемо: $c = 0$. Отже, ексцентриситет кола дорівнює нулю: $e = 0$.

Зауваження: якщо фокуси еліпса розташовані на осі Oy , то канонічне рівняння (1.8.5) залишається без змін, але тепер: $a < b$, тому a – мала піввісь, b – велика піввісь; зв'язок між півосями: $b^2 - a^2 = c^2$; $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$ – фокуси еліпса; ексцентриситет: $e = c/b$ ($0 < e < 1$).

3. Гіпербола.

Гіперболою називають множину точок площини, модуль різниці відстаней від яких до двох заданих точок площини (*фокусів* гіперболи) є величиною сталою (меншою за відстань між фокусами).

Візьмемо систему координат xOy так, щоб вісь Ox проходила через фокуси гіперболи від $F_1(-c,0)$ до $F_2(c,0)$, а початок координат ділив відстань між ними навпіл (рис. 1.8.3). Тоді координати точок гіперболи задовольняють рівняння:

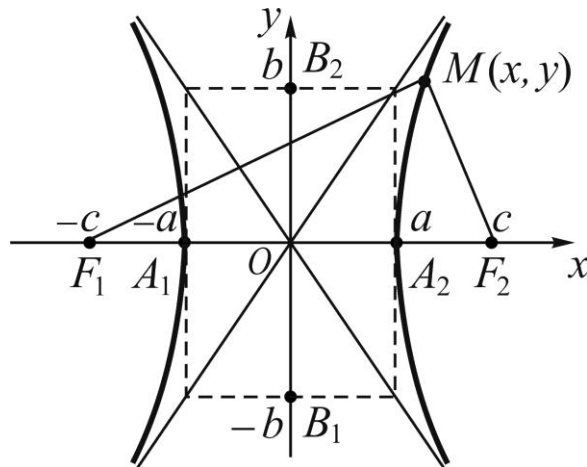


Рис. 1.8.3. Гіпербола

Тоді координати точок гіперболи задовольняють рівняння:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \quad (1.8.7)$$

де a (b) – дійсна (уявна) піввісь гіперболи.

Рівняння (1.8.7) називають **канонічним рівнянням гіперболи**.

Зв'язок між півосями гіперболи має вигляд: $c^2 - a^2 = b^2$, де c – півфокусна відстань: $c = OF_1 = OF_2$.

Аналіз рівняння (1.8.7) дозволяє дійти **висновків**: оскільки рівняння містить тільки квадрати змінних x і y , то гіпербола симетрична відносно осей координат, а також відносно точки $O(0,0)$ – **центра** гіперболи; крива перетинає вісь Ox у точках $A_1(-a,0)$, $A_2(a,0)$, які називають **вершинами** гіперболи; з віссю Oy крива спільних точок не має.

Відрізок A_1A_2 , який з'єднує вершини гіперболи, а також його довжину $2a$, називають **дійсною віссю** гіперболи; відрізок B_1B_2 , а також його довжину $2b$ – її **уявною віссю**; прямокутник зі сторонами $A_1A_2 = 2a$, $B_1B_2 = 2b$ із центром симетрії у точці $O(0,0)$ – **основним прямокутником** гіперболи; прямі з рівняннями $y = \pm \frac{b}{a}x$, на яких розташовані діагоналі основного прямокутника, – **асимптотами** гіперболи.

Побудову гіперболи доцільно починати з побудови її основного прямокутника, асимптот і вершин.

Як і для еліпса, ступінь "стислості" гіперболи відносно осі Ox характеризує її **ексцентриситет** e – відношення півфокусної відстані c до дійсної півосі a :

$$e = c/a \quad (e > 1). \quad (1.8.8)$$

Рівняння

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1 \quad (1.8.9)$$

визначає гіперболу, **спряжену** до гіперболи (1.8.7). Її фокуси розташовані на осі Oy : $F_1(0,-c)$, $F_2(0,c)$; дійсною буде вісь Oy , а уявною – вісь Ox , тому вершини лежать у точках $B_1(0,-b)$, $B_2(0,b)$; асимптоти збігаються з асимптотами гіперболи (1.8.7); зв'язок між півосями: $c^2 - b^2 = a^2$; ексцентриситет: $e = c/b$.

Гіперболи з рівняннями: $x^2 - y^2 = a^2$ і $x^2 - y^2 = -a^2$, для яких $a = b$, називають **рівнобічними**. Основним прямокутником цих гіпербол є квадрат зі стороною $2a$, а асимптоти мають рівняння $y = x$ і $y = -x$.

4. Парабола.

Параболою називають множину точок площини, рівновіддалених від заданої точки (*фокуса* параболу) і заданої прямої (*директриси* параболу).

Візьмемо систему координат xOy так, щоб вісь Oy проходила через фокус, перпендикулярно до директриси, а вісь Ox ділила відстань між фокусом і директрисою навпіл (рис. 1.8.4).

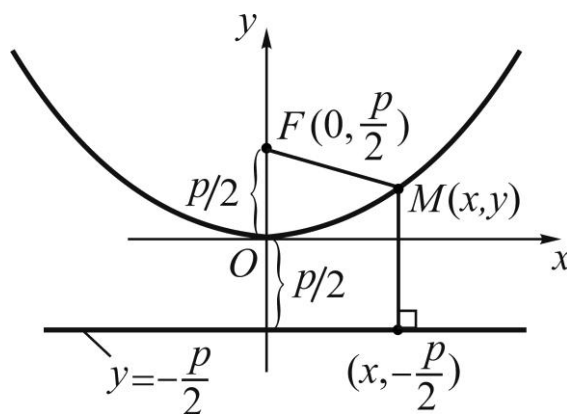


Рис. 1.8.4. Парабола

Тоді координати точок параболу задовольняють рівняння:

$$x^2 = 2py, \quad (1.8.10)$$

де p ($p > 0$) – **параметр** параболу – відстань від фокуса до директриси.

Рівняння (1.8.10) називають **канонічним рівнянням параболу**.

Аналіз рівняння (1.8.10) дозволяє дійти *висновків*: оскільки рівняння містить квадрат змінної x , то парабола симетрична відносно осі Oy , яку називають **віссю** параболу; змінна y може примати тільки невід'ємні значення ($y \geq 0$); крива проходить через початок координат $O(0,0)$ – **вершину** параболу, яка є точкою перетину параболу з її віссю.

Директриса параболу (1.8.10) – горизонтальна пряма з рівнянням $y = -p/2$.

Залежно від розташування фокуса і директриси розрізняють й інші варіанти канонічного рівняння параболу: $x^2 = -2py$, $y^2 = 2px$, $y^2 = -2px$; відповідні криві зображені на рис. 1.8.5а – в.

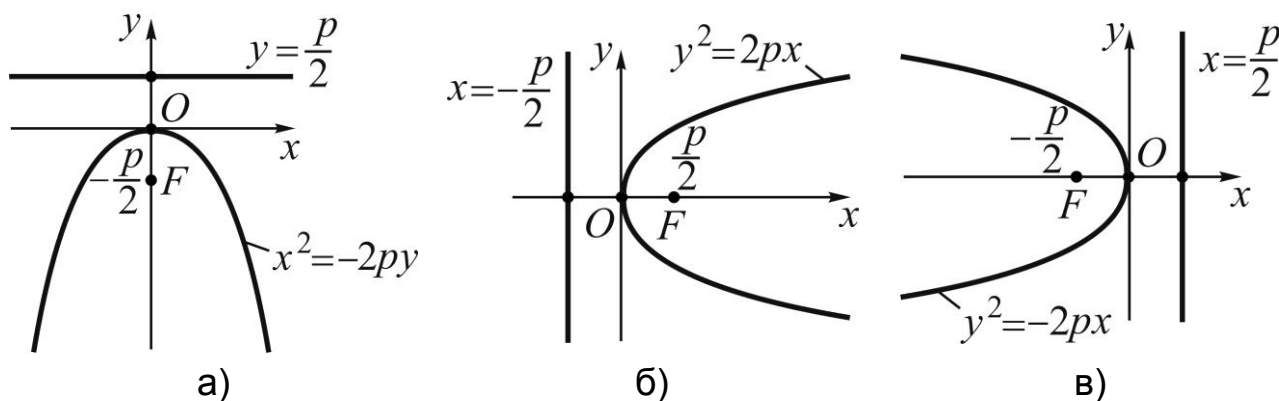


Рис. 1.8.5. Графіки парабол: а) $x^2 = -2py$; б) $y^2 = 2px$; в) $y^2 = -2px$

Задача 1.8.1. Скласти рівняння еліпса L , який проходить через точку $M_0(5, -3)$, якщо його фокуси лежать на осі Ox симетрично початку координат, а ексцентриситет дорівнює $0,8$.

Розв'язання. За умовою точка $M_0(5, -3) \in L$ і $e = c/a = 0,8$, тому параметри a і b кривої знайдемо як розв'язок системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \begin{cases} \frac{25}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \\ c/a = 0,8 \end{cases} &\Rightarrow \left| c = \sqrt{a^2 - b^2} \right| \Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \\ \sqrt{a^2 - b^2} = 0,8a \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{25}{a^2} + \frac{9}{0,36a^2} = 1 \\ b^2 = 0,36a^2 \end{cases} \Rightarrow \\ &\Rightarrow \begin{cases} \frac{50}{a^2} = 1 \\ b^2 = 0,36a^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 5\sqrt{2} \\ b = 3\sqrt{2} \end{cases} \Rightarrow \frac{x^2}{50} + \frac{y^2}{18} = 1. \end{aligned}$$

Зауваження. Для будь-якої кривої другого порядку існує прямокутна система координат, у якій її рівняння набуває найпростішого (канонічного) вигляду, завдяки якому можна легко встановити тип кривої, її параметри і, нарешті, побудувати саму криву.

Нехай у прямокутній системі координат xOy задано загальне рівняння К2П (1.8.1). Розглянемо випадок, коли це рівняння не містить добутку змінних x , y , тобто $B = 0$:

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Групуванням доданків і виділенням повних квадратів двочленів за кожною змінною останнє рівняння набуває один із наступних виглядів:

$$\begin{aligned} \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = \pm 1, \\ (x - x_0)^2 = \pm 2p(y - y_0), \quad (y - y_0)^2 = \pm 2p(x - x_0). \end{aligned}$$

Паралельним перенесенням початку координат у точку (x_0, y_0) зі збереженням напрямів координатних осей:

$$x - x_0 = X, \quad y - y_0 = Y,$$

кожне із цих рівнянь зводиться до канонічного вигляду.

Задача 1.8.2. Установити тип К2П і її розташування на площині зведенням до канонічного вигляду: $2y^2 + x - 4y + 8 = 0$.

Розв'язання.

1. *Встановлюємо* тип кривої за її рівнянням (див. стор. 44): ($A = 0$, $C = 2$) $\Rightarrow A \cdot C = 0$. Отже, задане рівняння визначає криву параболічного типу.

2. *Зводимо* задане рівняння до канонічного вигляду:

$$\begin{aligned} 2(y^2 - 2y) + x + 8 = 0 &\Rightarrow 2[(y^2 - 2y \cdot 1 + 1) - 1] + x + 8 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow 2(y - 1)^2 = -(x + 6) \Rightarrow (y - 1)^2 = -\frac{1}{2}(x + 6). \end{aligned}$$

Вводимо нові координати X, Y : $x + 6 = X$, $y - 1 = Y$, тоді в новій системі координат XO_1Y з початком у точці $O_1(-6, 1)$ рівняння набуває канонічного вигляду: $Y^2 = -\frac{1}{2}X$.

Отже, вихідне рівняння описує параболу з вершиною у точці $O_1(-6, 1)$, віссю симетрії O_1X і параметром $p = 1/4$.

1.9. Площина у просторі

Будь-яку поверхню в $\mathbf{R}^3$ будемо розглядати як множину точок простору які мають деяку спільну геометричну властивість.

Рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$ називають **рівнянням поверхні** S , якщо координати x, y, z будь-якої точки поверхні задовольняють це рівняння і навпаки, якщо трійка чисел (x, y, z) задовольняє рівняння $\Phi(x, y, z) = 0$, то x, y, z є координатами точки, яка належить поверхні S :

$$\Phi(x, y, z) = 0 - \text{рівняння } S \Leftrightarrow (x, y, z) \in S \Leftrightarrow \Phi(x, y, z) = 0, \quad (1.9.1)$$

де Φ – закон (правило), який відображає властивість точок поверхні;

x, y, z – змінні – **поточні координати** точок поверхні S .

За аналогією з рівнянням лінії на площині, якщо рівняння поверхні знайдено, то вивчення її геометричних властивостей зводиться до дослідження рівняння, яким вона описується.

Найпростішою поверхнею є площина.

Нехай у просторі (в $\mathbf{R}^3$) задано систему координат $xOyz$ і деяку площину π . Розглянемо **різні види рівнянь** цієї площини.

1. *Рівняння площини, що проходить через задану точку перпендикулярно заданому вектору.*

Будь-який не нульовий вектор $\bar{N} = (A, B, C)$, перпендикулярний до площини, називається її **нормальним вектором**.

Нехай площина π проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має нормальний вектор $\bar{N} = (A, B, C)$ (рис. 1.9.1). Тоді її рівняння має вигляд:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0. \quad (1.9.2)$$

Рівняння (1.9.2) називають **рівнянням площини, що проходить через задану точку і має заданий нормальний вектор** $\bar{N} = (A, B, C)$.

2. *Рівняння площини, що проходить через три задані точки.*

Нехай площина π проходить через три точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, які не лежать на одній прямій (рис. 1.9.2). Тоді ця площина описується рівнянням:

$$\begin{vmatrix} x - x_3 & y - y_3 & z - z_3 \\ x_1 - x_3 & y_1 - y_3 & z_1 - z_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 & z_2 - z_3 \end{vmatrix} = 0. \quad (1.9.3)$$

Після розкриття визначника (як правило, за елементами першого рядка) отримуємо лінійне рівняння відносно змінних x , y , z .

Рівняння (1.9.3) називають **рівнянням площини, що проходить через три задані точки**.

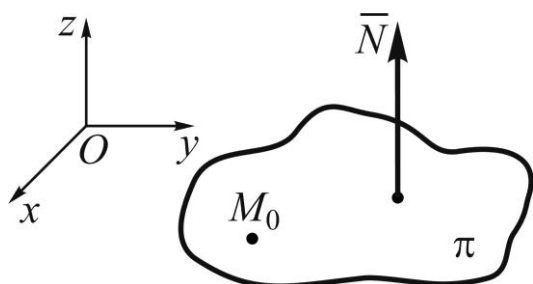


Рис. 1.9.1. Площина та задані точка і нормальний вектор

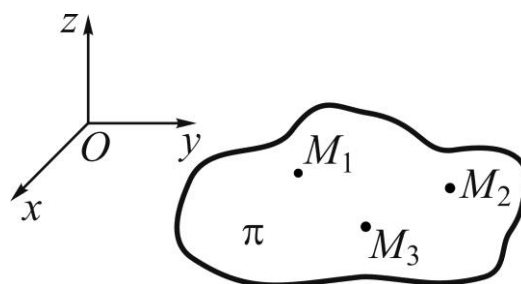


Рис. 1.9.2. Площина та три задані точки

3. Рівняння площини у відрізках на осях.

Нехай площина π відтинає на осях координат Ox , Oy і Oz відрізки величиною a , b і c , відповідно, тобто задані абсциса, ордината й апліката точок перетину площини з осями Ox , Oy і Oz (рис. 1.9.3).

Шукане рівняння площини дістанемо як наслідок із (1.9.3), де в якості заданих точок M_1 , M_2 і M_3 на площині взяті відповідно точки $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$ і $C(0,0,c)$:

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1. \quad (1.9.4)$$

Рівняння (1.9.4) називають **рівнянням площини у відрізках на осях**.

4. Нормальне рівняння площини.

Якщо відома відстань p від початку координат до площини π і кути, які утворює відповідний відстані відрізок з осями координат: α , β , γ (рис. 1.9.4), то рівняння площини набуде вигляду:

$$x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma - p = 0. \quad (1.9.5)$$

Рівняння (1.9.5) називають **нормальним рівнянням площини**.

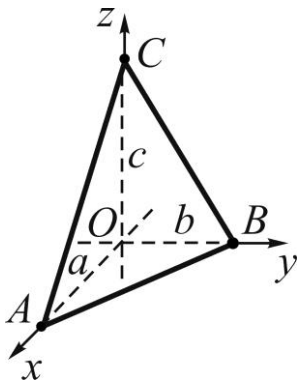


Рис. 1.9.3. Площина та відрізки, які вона відтинає на осях

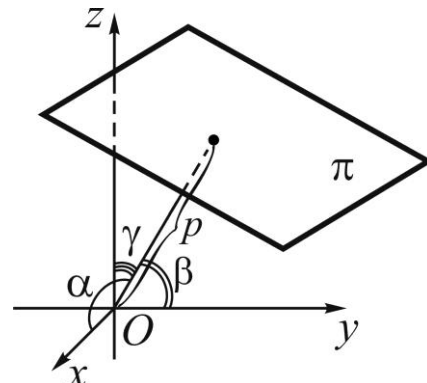


Рис. 1.9.4. Площина, відрізок p і кути α , β , γ

5. Загальне рівняння площини.

Розкриємо дужки в рівнянні (1.9.2):

$$\begin{aligned} A(x-x_0) + B(y-y_0) + C(z-z_0) &= 0 \Rightarrow Ax + By + Cz - Ax_0 - By_0 - Cz_0 = 0 \Rightarrow \\ &\Rightarrow Ax + By + Cz + D = 0, \end{aligned} \quad (1.9.6)$$

де $D = -Ax_0 - By_0 - Cz_0$ – вільний член рівняння – деяке число.

Рівняння (1.9.6), лінійне відносно змінних x , y і z , називають **загальним рівнянням** площини у просторі.

Зауваження:

- 1) будь-яка площина у просторі описується рівнянням (1.9.6);
- 2) кожне рівняння виду (1.9.6) визначає у просторі деяку площину.

Розглянемо **випадки взаємного розташування** двох площин в $\mathbf{R}^3$.

Нехай дві площини задані загальними рівняннями:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \quad (\pi_1), \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \quad (\pi_2).$$

Під **кутом між двома площинами** розуміють один із двох суміжних кутів між їх нормальними векторами $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ (рис. 1.9.5). За формулою косинуса кута між двома векторами (1.5.10) дістанемо:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(\pi_1 \wedge \pi_2) = \cos(\bar{N}_1 \wedge \bar{N}_2) = \frac{\bar{N}_1 \cdot \bar{N}_2}{|\bar{N}_1| \cdot |\bar{N}_2|} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \arccos \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \quad (0 \leq \varphi \leq \pi). \end{aligned} \quad (1.9.7)$$

Якщо площини π_1 і π_2 паралельні, то вектори $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ колінеарні, тому їх координати пропорційні:

$$\pi_1 \parallel \pi_2 \Leftrightarrow \bar{N}_1 \parallel \bar{N}_2 \Leftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}. \quad (1.9.8)$$

Співвідношення (1.9.8) є **умовою паралельності** двох площин.

Із (1.9.7) отримуємо **умову перпендикулярності** двох площин:

$$\pi_1 \perp \pi_2 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0. \quad (1.9.9)$$

Відстань d від заданої точки $M_0(x_0, y_0, z_0)$ до площини π (рис. 1.9.6), заданої загальним рівнянням $Ax + By + Cz + D = 0$, обчислюють за формулою:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad (1.9.10)$$

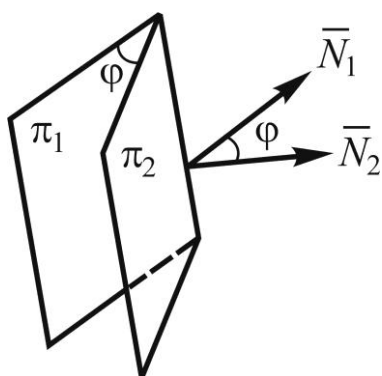


Рис. 1.9.5. Кут між площинами

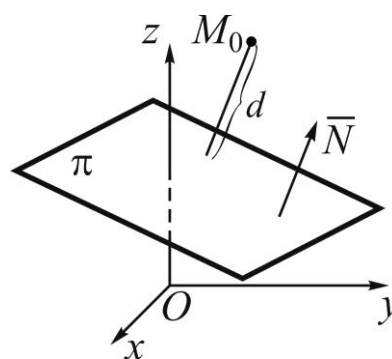


Рис. 1.9.6. Відстань від точки до площини

Задача 1.9.1. Скласти рівняння площини π , яка проходить через точку $M_0(1, 0, -1)$ паралельно векторам $\bar{a}_1 = (5, 0, 1)$ і $\bar{a}_2 = (0, 1, -1)$.

Розв'язання. За умовою вектори $\bar{a}_1$ і $\bar{a}_2$ паралельні площині, тому паралельним перенесенням їх можна пересунути так, що вони обидва лежатимуть у площині π . Тоді згідно з означенням векторний добуток $\bar{a}_1 \times \bar{a}_2$ визначає вектор, перпендикулярний площині, а значить є одним із її нормальних векторів:

$$\left. \begin{array}{l} \bar{a}_1 = (5, 0, 1) \\ \bar{a}_2 = (0, 1, -1) \end{array} \right] \Rightarrow \bar{N} = \bar{a}_1 \times \bar{a}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -\bar{i} + 5\bar{j} + 5\bar{k} = (-1, 5, 5).$$

Шукане рівняння дістанемо як рівняння площини, що проходить через задану точку (у нас це $M_0(1, 0, -1)$) і має нормальний вектор $\bar{N} = (-1, 5, 5)$ (див. рівняння (1.9.2)):

$$-1 \cdot (x - 1) + 5 \cdot (y - 0) + 5 \cdot (z + 1) = 0 \Rightarrow x - 5y - 5z - 6 = 0.$$

1.10. Пряма у просторі. Пряма і площина у просторі

Нехай у просторі задано систему координат $xOyz$ і деяку пряму l . Розглянемо **різні види рівнянь** цієї прямої.

1. Канонічне рівняння прямої.

Будь-який не нульовий вектор $\bar{s} = (m, n, p)$, який паралельний прямій l або лежить на ній, називається **напрямним вектором** прямої.

Нехай пряма l проходить через точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (m, n, p)$ (рис. 1.10.1). Тоді її рівняння має вигляд:

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}. \quad (1.10.1)$$

Рівняння (1.10.1) називають **канонічним рівнянням прямої**.

2. Рівняння прямої, яка проходить через дві задані точки.

Рівняння прямої l , яка проходить через дві задані точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ і $M_2(x_2, y_2, z_2)$, дістанемо з (1.10.1), як рівняння прямої, що проходить через точку M_1 і має напрямний вектор $\vec{s} = \overrightarrow{M_1M_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$ (рис. 1.10.2):

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}. \quad (1.10.2)$$

Рівняння (1.10.2) називають **рівнянням прямої, що проходить через дві задані точки**.

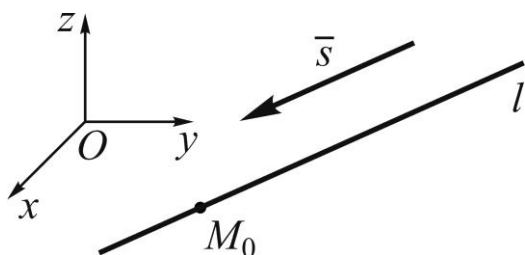


Рис. 1.10.1. Пряма та задані точка і напрямний вектор

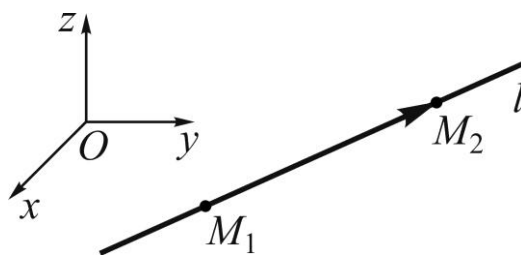


Рис. 1.10.2. Пряма і дві задані точки на ній

Зауваження. Якщо в рівняннях (1.10.1), (1.10.2) один або два знаменника рівні нулю, то з геометричної точки зору це означає, що напрямний вектор прямої перпендикулярний, відповідно, до однієї або двох осей координат.

Наприклад, якщо пряма задана рівнянням:

$$\frac{x - 1}{3} = \frac{y + 4}{0} = \frac{z - 7}{0},$$

то це означає, що вона проходить через точку $(1, -4, 7)$ і має напрямний вектор $\vec{s} = (3, 0, 0)$, тобто розташована перпендикулярно площині yOz .

3. Параметричні рівняння прямої.

Якщо в рівнянні (1.10.1) покласти коефіцієнт пропорційності рівним t , то отримаємо:

$$\left(\frac{x-x_0}{m} = t, \frac{y-y_0}{n} = t, \frac{z-z_0}{p} = t \right) \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt, \end{cases} \quad \forall t \in (-\infty, +\infty). \quad (1.10.3)$$

Рівняння (1.10.3) називають **параметричними рівняннями прямої**.

4. Загальне рівняння прямої.

Пряму у просторі можна задати як лінію перетину двох непаралельних площин (рис. 1.10.3). Таким чином, система загальних рівнянь двох площин π_1 і π_2 :

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 & (\pi_1), \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 & (\pi_2), \end{cases} \quad (1.10.4)$$

нормальні вектори яких $\bar{N}_1 = (A_1, B_1, C_1)$ і $\bar{N}_2 = (A_2, B_2, C_2)$ не колінеарні, визначає деяку пряму l у просторі.

Рівняння (1.10.4) називають **загальним рівнянням прямої в $\mathbb{R}^3$** .

Щоб здійснити перехід від загального рівняння прямої (1.10.4) до канонічного (1.10.1), треба знайти будь-яку точку $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на прямій і будь-який вектор, паралельний їй, – напрямний вектор $\bar{s} = (m, n, p)$:

1) координати точки $M_0 \in l$ одержуємо як розв'язок системи (1.10.4), якщо будь-якій одній з її координат надати довільне значення (наприклад, $z = 0$);

2) оскільки пряма l одночасно лежить і в площині π_1 , і в площині π_2 , то нормальні вектори $\bar{N}_1$ і $\bar{N}_2$ цих площин перпендикулярні прямій (рис. 1.10.3), отже, за напрямний вектор $\bar{s}$ прямої можна взяти векторний добуток векторів $\bar{N}_1$ і $\bar{N}_2$, тобто: $\bar{s} = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2$.

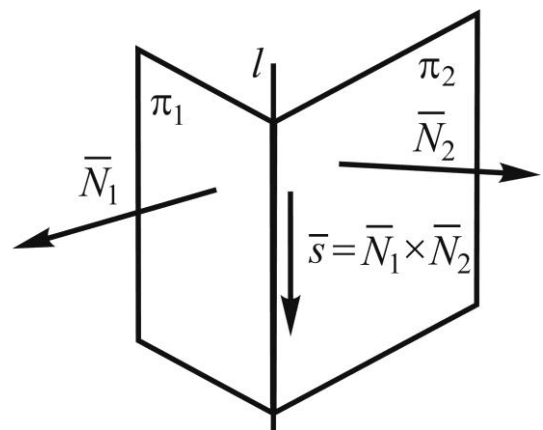


Рис. 1.10.3. Пряма як лінія перетину площин

Зауваження:

- 1) будь-яка пряма у просторі описується системою виду (1.10.4);
- 2) кожна система виду (1.10.4) визначає у просторі деяку пряму.

Задача 1.10.1. Скласти канонічне рівняння прямої l , заданої загальним рівнянням:

$$\begin{cases} x + y - z - 1 = 0 \\ 2x - y + 3z + 5 = 0 \end{cases}.$$

Розв'язання:

$$1) z_0 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x + y - 1 = 0 \\ 2x - y + 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_0 = -4/3 \\ y_0 = 7/3 \end{cases} \Rightarrow M_0(-4/3, 7/3, 0) \in l;$$

$$2) \begin{matrix} \bar{N}_1 = (1, 1, -1) \\ \bar{N}_2 = (2, -1, 3) \end{matrix} \Rightarrow \bar{s} = (m, n, p) = \bar{N}_1 \times \bar{N}_2 = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = (2, -5, -3).$$

За рівнянням (1.10.1) остаточно одержуємо:

$$l: \frac{x + 4/3}{2} = \frac{y - 7/3}{-5} = \frac{z}{-3}.$$

Розглянемо **випадки взаємного розташування** двох прямих в $\mathbf{R}^3$.

Нехай прямі l_1 і l_2 задані канонічними рівняннями:

$$\frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1} \quad (l_1), \quad \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2} \quad (l_2).$$

Як і для прямої на площині, під **кутом між двома прямими** у просторі розуміють один із двох суміжних кутів між їх напрямними векторами $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$.

За формулою косинуса кута між двома векторами (1.5.10) маємо:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \cos(l_1 \wedge l_2) = \cos(\bar{s}_1 \wedge \bar{s}_2) = \frac{\bar{s}_1 \cdot \bar{s}_2}{|\bar{s}_1| \cdot |\bar{s}_2|} \Rightarrow \\ \Rightarrow \varphi &= \arccos \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \end{aligned} \quad (1.10.5)$$

Як наслідок із (1.10.5) отримуємо **умову перпендикулярності** двох прямих:

$$l_1 \perp l_2 \Leftrightarrow \varphi = \pi/2 \Leftrightarrow \cos \varphi = 0 \Leftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0. \quad (1.10.6)$$

Якщо прямі l_1 і l_2 паралельні, то напрямні вектори $\bar{s}_1 = (m_1, n_1, p_1)$ і $\bar{s}_2 = (m_2, n_2, p_2)$ колінеарні, тому їх координати пропорційні:

$$l_1 \parallel l_2 \Leftrightarrow \bar{s}_1 \parallel \bar{s}_2 \Leftrightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2} \quad (1.10.7)$$

Співвідношення (1.10.7) є **умовою паралельності** двох прямих.

Відстань d від точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ до прямої l з напрямним вектором $\bar{s} = (m, n, p)$ и точкою $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на ній знайдемо як висоту паралелограма, побудованого на векторах $\bar{s}$ і $\overline{M_0M_1}$ як на сторонах, площа якого дорівнює, з одного боку, $|\bar{s} \times \overline{M_0M_1}|$, а з іншого – $d \cdot |\bar{s}|$ (рис. 1.10.4). Звідки:

$$d = \frac{|\bar{s} \times \overline{M_0M_1}|}{|\bar{s}|}. \quad (1.10.8)$$

Наприкінці розглянемо **випадки взаємного розташування прямої і площини** у просторі. Нехай пряма і площина задані рівняннями:

$$\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \quad (l), \quad Ax + By + Cz + D = 0 \quad (\pi).$$

Під **кутом φ між прямою і площиною** розуміють кут, який утворений прямою й її проекцією на площину (рис. 1.10.5).

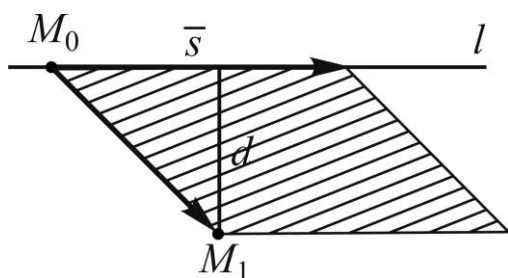


Рис. 1.10.4. Відстань від точки до прямої

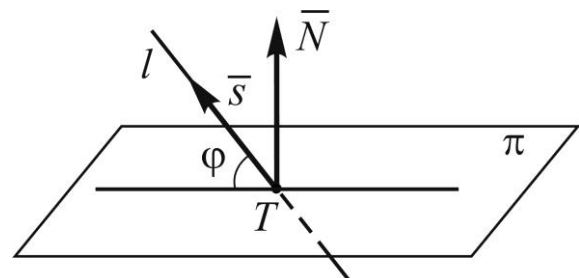


Рис. 1.10.5. Кут між прямою і площиною

Тоді $\sin \varphi = \left| \cos(\bar{N} \wedge \bar{s}) \right| = \frac{|\bar{N} \cdot \bar{s}|}{N \cdot s}$, звідки маємо:

$$\varphi = \arcsin \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}. \quad (1.10.9)$$

Умову перпендикулярності (паралельності) прямої l і площини π одержуємо із колінеарності (перпендикулярності) векторів $\bar{s} = (m, n, p)$ і $\bar{N} = (A, B, C)$ (рис. 1.10.6 (рис. 1.10.7)):

$$l \perp \pi \Leftrightarrow \bar{s} \parallel \bar{N} \Leftrightarrow \frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}, \quad (1.10.10)$$

$$l \parallel \pi \Leftrightarrow \bar{s} \perp \bar{N} \Leftrightarrow Am + Bn + Cp = 0. \quad (1.10.11)$$

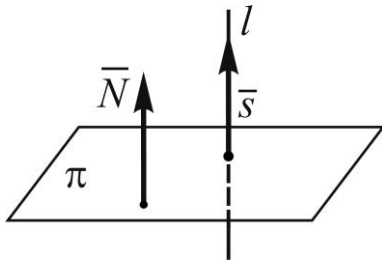


Рис. 1.10.6. Перпендикулярні
пряма та площина

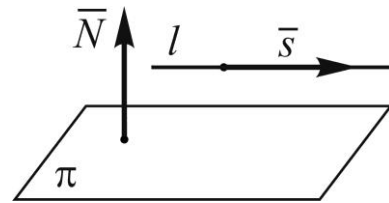


Рис. 1.10.7. Паралельні пряма
та площина

Знайдемо точку перетину прямої l і площини π (див. рис. 1.10.5). Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \text{запишемо рівняння} \\ \text{прямої у параметричній} \\ \text{формі} \end{array} \right| \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + mt \\ y = y_0 + nt \\ z = z_0 + pt \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A(x_0 + mt) + B(y_0 + nt) + C(z_0 + pt) + D = 0. \quad (1.10.12)$$

Якщо рівняння (1.10.12) має єдиний розв'язок t^* , то він є значенням параметра t , який відповідає точці T перетину прямої l з площиною π : $T(x_0 + mt^*, y_0 + nt^*, z_0 + pt^*)$; якщо це рівняння має безліч розв'язків, то пряма лежить в площині ($l \subset \pi$); якщо ж рівняння (1.10.12) не має розв'язків, то пряма паралельна площині ($l \parallel \pi$).

2. Зразок виконання варіанта контрольної роботи

Задача 1. Задано матриці A, B і C . Знайти $B^2 - 2CA^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Виконуємо дії над матрицями з урахуванням пріоритету операцій.

1. Транспонуємо матрицю A розміру 2×4 . Ця операція визначена формулою (1.1.8) для матриць будь-якого розміру. Транспонована матриця A^T має розмір 4×2 :

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Добуток CA^T визначено, оскільки матриці C та A^T мають узгоджені розміри: 2×4 та 4×2 відповідно (кількість стовпців лівої матриці співпадає з кількістю рядків правої). За формулою (1.1.5) знаходимо добуток – матрицю розміру 2×2 :

$$\begin{aligned} CA^T &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \\ 0 & 4 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 1 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-3) & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) + 2 \cdot 4 + 0 \cdot 1 \\ 5 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-3) & 5 \cdot 0 + 3 \cdot (-2) + 0 \cdot 4 + 4 \cdot 1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

3. Множення на число матриць визначено формулою (1.1.3), виконуємо поелементно і отримаємо:

$$2CA^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 12 & -4 \end{pmatrix}.$$

4. Підводимо матрицю B до квадрату згідно з формулою (1.1.7). Це можливо, оскільки B є квадратною матрицею розміру 2×2 . У результаті отримаємо матрицю 2×2 :

$$\begin{aligned} B^2 = BB &= \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 2 + (-1) \cdot 3 & 2 \cdot (-1) + (-1) \cdot 4 \\ 3 \cdot 2 + 4 \cdot 3 & 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 4 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

5. Нарешті обчислимо різницю $2CA^T - B^2$ знайдених вище матриць. Ця операція визначена формулою (1.1.4) для матриць однакового розміру та виконується поелементно:

$$2CA^T - B^2 = \begin{pmatrix} 4 & 20 \\ 12 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -6 \\ 18 & 13 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 26 \\ -6 & -17 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Відповідь: } 2CA^T - B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 26 \\ -6 & -17 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Розв'язати матричні рівняння $AX = B$ та $YA = C$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Для розв'язання заданих матричних рівнянь застосовують формулами (1.2.12), (1.2.13). Щоб ними скористатись, необхідно знайти обернену матрицю A^{-1} для квадратної матриці A . По-перше, згідно з формулою (1.2.1), *обчислюємо* визначник матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - (-3) \cdot 2 = 10 \neq 0.$$

Оскільки матриця A не вироджена ($\det A \neq 0$), то для неї існує обернена матриця, та її можна знайти за формулою (1.2.9).

Обчислюємо алгебраїчні доповнення, що визначені формулою (1.2.4):

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot 4 = 4; \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot 2 = -2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot (-3) = 3; \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot 1 = 1.$$

За цими величинами *складаємо* приєднану (союзну) матрицю за означенням (1.2.8):

$$A^* = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Нарешті, згідно з формулою (1.2.9), *одержуємо обернену матрицю*:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^* = \frac{1}{10} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,2 & 0,1 \end{pmatrix}.$$

Правильність розрахунків *можна перевірити* за означенням оберненої матриці:

$$\begin{aligned} AA^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,2 & 0,1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 \cdot 0,4 + (-3) \cdot (-0,2) & 1 \cdot 0,3 + (-3) \cdot 0,1 \\ 2 \cdot 0,4 + 4 \cdot (-0,2) & 2 \cdot 0,3 + 4 \cdot 0,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E. \end{aligned}$$

Тепер знаходимо розв'язки матричних рівнянь $AX = B$ та $YA = C$:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,2 & 0,1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4 \cdot 5 + 0,3 \cdot (-1) \\ -0,2 \cdot 5 + 0,1 \cdot (-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,7 \\ -1,1 \end{pmatrix};$$

$$Y = CA^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,4 & 0,3 \\ -0,2 & 0,1 \end{pmatrix} = \\ = ((-2) \cdot 0,4 + 6 \cdot (-0,2) \quad (-2) \cdot 0,3 + 6 \cdot 0,1) = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Перевірка:

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1,7 \\ -1,1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1,7 + (-3) \cdot (-1,1) \\ 2 \cdot 1,7 + 4 \cdot (-1,1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \end{pmatrix} = B;$$

$$YA = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = ((-2) \cdot 1 + 0 \cdot 2 \quad (-2) \cdot (-3) + 0 \cdot 4) = C.$$

Відповідь: $X = \begin{pmatrix} 1,7 \\ -1,1 \end{pmatrix}, Y = \begin{pmatrix} -2 & 0 \end{pmatrix}.$

Задача 3. Обчислити визначники двома способами: а) за методом Саррюса та за теоремою Лапласа; б) розкладаючи за елементами рядка (стовпця).

$$\text{а) } \begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & 9 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{б) } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

а) Обчислення визначника третього порядку за методом Саррюса (правилом трикутника) здійснюють за формулою (1.2.3):

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & 9 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 3 \cdot 0 \cdot 6 + (-7) \cdot (-1) \cdot (-4) + 5 \cdot 9 \cdot 2 - 7 \cdot 0 \cdot 2 - 5 \cdot (-1) \cdot 6 - 3 \cdot 9 \cdot (-4) =$$

$$= 0 - 28 + 90 - 0 + 30 + 108 = 200.$$

Теорема 1.2.1. Лапласа дозволяє обчислити визначник будь-якого порядку шляхом розкладання за елементами деякого рядка або стовпця. У даному випадку для спрощення розрахунків доцільно для розкладу обрати рядок або стовець, що містить нульовий елемент $a_{22} = 0$. Скористаємось формулою (1.2.5) для розкладання за елементами другого стовпця:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & -7 \\ -1 & 0 & 9 \\ 2 & -4 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= 5 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -1 & 9 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -1 & 9 \end{vmatrix} =$$

$$= -5 \cdot ((-1) \cdot 6 - 9 \cdot 2) + 4 \cdot (3 \cdot 9 - (-7) \cdot (-1)) = 120 + 80 = 200.$$

Результати обчислень визначника двома способами співпали.

б) Обчислення заданого визначника четвертого порядку *здійснимо розкладанням* за третім рядком, оскільки він містить два нульових елементи. В подальшому, розкладаючи визначники третього порядку обираємо для розкладу перший рядок, оскільки в ньому є нульовий елемент.

За формулою (1.2.5) маємо:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 3 & 5 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & 0 \\ 6 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -2 & 5 & -1 \\ 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \\ 6 & -1 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{aligned}
&= -4 \cdot \left(1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \right) + \\
&\quad + 3 \cdot \left(1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} \right) = \\
&= -4 \cdot (11 - 6) + 3 \cdot (5 - 2) = -20 + 9 = -11.
\end{aligned}$$

Відповідь: а) 200; б) 11.

Задача 4. Для заданих систем знайти: а) розв'язок трьома способами (методом оберненої матриці, за формулами Крамера та методом Жордана – Гаусса); б) загальний, базисний та деякий частинний розв'язки.

$$\begin{aligned}
\text{а)} \quad &\begin{cases} 5x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 5; \\ 2x_1 + 3x_2 = 8 \end{cases} & \text{б)} \quad &\begin{cases} 5x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \\ 4x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$

Розв'язання.

а) Маємо квадратну неоднорідну систему лінійних алгебраїчних рівнянь (1.3.1). Її можна подати у матричному вигляді (1.3.7). У нашому випадку матриця коефіцієнтів A , стовпець вільних членів (правих частин) B та стовпець невідомих X системи мають вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Спочатку *обчислюємо* головний визначник системи (1.3.3), розкладаючи його за третім рядком:

$$\begin{aligned}
\det A &= \begin{vmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = \\
&= 2 \cdot (2 - 1) - 3 \cdot (10 + 1) = -31 \neq 0.
\end{aligned}$$

Оскільки головний визначник не дорівнює нулю, дана система є визначеною, тобто має єдиний розв'язок, що може бути знайдений і методом оберненої матриці, і за формулами Крамера. До того ж, як будь-яку систему, її можна розв'язати методом Жордана – Гаусса.

Метод оберненої матриці полягає у розв'язанні системи як матричного рівняння, тобто за формулою (1.3.9).

Спочатку *знаходимо* алгебраїчні доповнення матриці A за формулою (1.2.4):

$$\begin{aligned} A_{11} &= (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -6; & A_{12} &= (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4; \\ A_{13} &= (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5; & A_{21} &= (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3; \\ A_{22} &= (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2; & A_{23} &= (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -13; \\ A_{31} &= (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1; & A_{32} &= (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -11; \\ A_{33} &= (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -6. \end{aligned}$$

З алгебраїчних доповнень *складаємо* приєднану матрицю згідно з формулою (1.2.8)

$$A^* = \begin{pmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -11 \\ 5 & -13 & -6 \end{pmatrix}.$$

Звідси за формулою (1.2.9) *знаходимо* обернену матрицю до матриці A :

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^* = \frac{1}{-31} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -11 \\ 5 & -13 & -6 \end{pmatrix}.$$

Зауважимо, що внесення коефіцієнту тут недоречно, оскільки такий вигляд більш зручний для подальших розрахунків.

Тепер можна скористатись формулою (1.2.12), щоб знайти *стовпець невідомих*:

$$\begin{aligned} X = A^{-1}B &= \frac{1}{-31} \cdot \begin{pmatrix} -6 & -3 & 1 \\ 4 & 2 & -11 \\ 5 & -13 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{1}{-31} \cdot \begin{pmatrix} (-6) \cdot 4 + (-3) \cdot 5 + 1 \cdot 8 \\ 4 \cdot 4 + 2 \cdot 5 + (-11) \cdot 8 \\ 5 \cdot 4 + (-13) \cdot 5 + (-6) \cdot 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{-31} \cdot \begin{pmatrix} -31 \\ -62 \\ -93 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

тобто $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$. Правильність розв'язку *перевіряємо* підстановкою отриманих значень у вихідну систему:

$$\begin{cases} 5 \cdot 1 + 2 - 3 = 4 \\ 1 - 2 + 2 \cdot 3 = 5 \\ 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8 \end{cases}$$

Щоб розв'язати системи за формулами Крамера (1.3.6), *складаємо* допоміжні визначники Δ_i ($i = \overline{1,3}$). Для цього *заміняємо* послідовно стовпці в головному визначнику $\Delta = \det A$ на стовбець правих частин B . *Обчислюємо* Δ_i ($i = \overline{1,3}$) розкладанням за третім стовпцем:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 5 & -1 & 2 \\ 8 & 3 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -31;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & 2 \\ 2 & 8 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} = -62;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \end{vmatrix} =$$

$$= 4 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + 8 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -93.$$

Звідси за формулами (1.3.6) маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-31}{-31} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-62}{-31} = 2, \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-9}{-31} = 3.$$

Результат співпадає з отриманим вище за допомогою методу оберненої матриці.

Для застосування методу Жордана – Гаусса *складаємо* розширену матрицю даної системи (1.3.4):

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array} \right).$$

Згідно з теоремою 1.4.1 елементарні перетворення системи не змінюють множини її розв'язків. Наша мета: звести матрицю коефіцієнтів (зліва від риски) до одиничної, тоді справа отримаємо шуканий розв'язок. Для зручності дії над рядками матриці $(A|B)$ будемо писати під знаком $\sim$, що позначає перехід до еквівалентної системи рівнянь.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 1 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array} \right) \xrightarrow{p1 \leftrightarrow p2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 5 & 1 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 0 & 8 \end{array} \right) \sim$$

$$\xrightarrow{\substack{p2 = p2 - 5 \cdot p1 \\ p3 = p3 - 2 \cdot p1}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 6 & -11 & -21 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \end{array} \right) \xrightarrow{p2 = \frac{1}{6} \cdot p2} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -11/6 & -21/6 \\ 0 & 5 & -4 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{matrix} \sim \\ p1=p1+p2 \\ p3=p3-5 \cdot p2 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/6 & 9/6 \\ 0 & 1 & -11/6 & -21/6 \\ 0 & 0 & -31/6 & -93/6 \end{array} \right) \begin{matrix} \sim \\ p3=-\frac{6}{31} \cdot p3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1/6 & 9/6 \\ 0 & 1 & -11/6 & -21/6 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{matrix} \sim \\ p1=p1-\frac{1}{6} \cdot p3 \\ p2=p2+\frac{11}{6} \cdot p3 \end{matrix} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array} \right).$$

Таким чином, знову отримали стовпець невідомих $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$

б) Маємо однорідну СЛАР, яка завжди є сумісною. Коли головний визначник не дорівнює нулю, існує лише тривіальний розв'язок цієї системи, в протилежному випадку – нескінченна множина розв'язків.

Складаємо за коефіцієнтами та обчислюємо головний визначник системи (розкладаючи за другим рядком):

$$\begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \end{vmatrix} =$$

$$= 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} =$$

$$= -(-2-5) + (10+4) + (-25+4) = 0.$$

Тобто дана система – невизначеною. Розв'язуємо систему за допомогою методу Жордана – Гаусса. Оскільки матриця коефіцієнтів є виродженою,

елементарні перетворення призведуть до трапеціїдної прямокутної матриці:

$$\begin{aligned}
 (A|B) &= \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{p1 \leftrightarrow p2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -1 & -1 & 0 \\ 4 & -5 & 2 & 0 \end{array} \right) \sim \\
 &\xrightarrow[p3=p3-4 \cdot p1]{p2=p2-5 \cdot p1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -6 & 4 & 0 \\ 0 & -9 & 6 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[p3=-\frac{1}{9} \cdot p3]{p2=-\frac{1}{6} \cdot p2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \end{array} \right) \sim \\
 &\xrightarrow{p3=\emptyset} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{p1=p1-p2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Отримана розширена матриця відповідає системі рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - \frac{1}{3} x_3 = 0 \\ x_2 - \frac{2}{3} x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{1}{3} x_3 \\ x_2 = \frac{2}{3} x_3 \end{cases}.$$

Покладаємо $x_3 = 3t, t \in \mathbf{R}$, тоді

$$\begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = 2t \end{cases},$$

тобто загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \\ 3t \end{pmatrix}, \forall t \in \mathbf{R}.$$

Підставимо отримані вирази для невідомих із загального розв'язку у вихідну систему, щоб впевнитись у правильності одержаного результату:

$$\begin{cases} 5t - 2t - 3t \equiv 0 \\ t + 2t - 3t \equiv 0 \\ 4t - 5 \cdot 2t + 2 \cdot 3t \equiv 0 \end{cases}$$

Щоб знайти базисний розв'язок покладемо $t = 0$:

$$X_o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Наведемо також частинний розв'язок, що відповідає $t = -1$:

$$\hat{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: а) $x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = 3$; б) $x_1 = t, x_2 = 2t, x_3 = 3t$ ($t \in \mathbf{R}$).

Задача 5. Дослідити системи на сумісність; для сумісних знайти розв'язок.

$$\text{а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 8x_4 = 4 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 - x_2 - x_3 - 5x_4 = 3 \end{cases}; \quad \text{б) } \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 9x_3 + 4x_4 = 0 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -5 \end{cases}.$$

Розв'язання.

а) Дослідження систем будемо проводити із застосуванням теореми Кронекера – Капеллі 1.3.1. Для цього слід знайти та порівняти ранги основної та розширеної матриць системи. У випадку, коли вони співпадають, система є сумісною і можна знайти множину її розв'язків.

Ранг матриці (тобто максимальний порядок ненульових мінорів, що містить у собі матриця) легко визначити, якщо звести її до трапецієдного вигляду. Зазначимо, що оскільки матриця коефіцієнтів A входить до складу розширеної матриці системи $(A|B)$, достатньо виконати перетворення для останньої та проаналізувати отриманий результат.

Складаємо розширену матрицю системи та застосовуємо до неї елементарні перетворення матриць, які за теоремою 1.2.3 не змінюють її рангу:

$$\begin{aligned}
 (A|B) &= \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & -8 & 4 \\ 1 & 2 & -4 & 1 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & -5 & 3 \end{array} \right) \xrightarrow[p4=p4-p1]{p2=p2-2 \cdot p1, p3=p3-p1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 & -6 & 6 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & 4 \end{array} \right) \sim \\
 &\xrightarrow[p4=p4+2 \cdot p3]{p2=p2+3 \cdot p3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[p4=\emptyset]{p1=p1-p3, p2=\emptyset} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \end{array} \right).
 \end{aligned}$$

Бачимо, що максимальний порядок ненульового мінору матриці $(A|B)$ дорівнює двом: $\text{rang}(A|B) = 2$. Зліва від риски знаходиться перетворена матриця A , її ранг також дорівнює двом: $\text{rang}(A) = 2$.

Застосовуємо теорему Кронекера – Капеллі 1.3.1. Оскільки $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B)$, система є сумісною. Вона має нескінченну множину розв'язків, тому що ранги менші за кількість змінних: $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < 4 = n$.

Зазначимо, що елементарні перетворення матриць, які ми застосовували, співпадають з елементарними перетвореннями систем. Тому фактично ми виконували розв'язання системи методом Жордана – Гаусса. Переходимо від спрощеної розширеної матриці до відповідної системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 - 3x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + 2x_4 = -2 \end{cases}$$

Невідомі x_1, x_2 є базисними, виражаємо їх через вільні невідомі x_3, x_4 і отримаємо:

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 + 3x_4 + 1 \\ x_2 = x_3 - 2x_4 - 2 \end{cases}$$

Покладаємо $x_3 = p, x_4 = q; \quad p, q \in \mathbf{R}$, тоді

$$\begin{cases} x_1 = 2p + 3q + 1 \\ x_2 = p - 2q - 2 \end{cases}$$

тобто загальний розв'язок системи має вигляд:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2p + 3q + 1 \\ p - 2q - 2 \\ p \\ q \end{pmatrix}, \quad \forall p, q \in \mathbf{R}.$$

Зробимо перевірку підстановкою результату у вихідну систему:

$$\begin{cases} 2p + 3q + 1 + p - 2q - 2 - 3p - q \equiv -1 \\ 2 \cdot (2p + 3q + 1) - (p - 2q - 2) - 3p - 8q \equiv 4 \\ 2p + 3q + 1 + 2 \cdot (p - 2q - 2) - 4p + q \equiv -3 \\ 2p + 3q + 1 - (p - 2q - 2) - p - 5q \equiv 3 \end{cases}$$

Оскільки отримано тотожності при будь-яких значеннях параметрів p і q , заключаємо, що загальний розв'язок знайдено вірно.

б) Складаємо розширену матрицю $(A|B)$ заданої системи та здійснюємо елементарні перетворення для відшукування її рангу:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & -9 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -5 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & -5 \end{array} \right) \xrightarrow{p1 \leftrightarrow p3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -5 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & -9 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -3 & -5 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{array}{l} \sim \\ p_2 = p_2 - p_1 \\ p_3 = p_3 - 2 \cdot p_1 \\ p_4 = p_4 - p_1 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -4 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & -4 & -6 \end{array} \right) \begin{array}{l} \sim \\ p_3 = p_3 - p_2 \\ p_4 = p_4 + 2 \cdot p_3 \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\begin{array}{l} \sim \\ p_1 = p_1 - p_2 \\ p_3 = -\frac{1}{5} \cdot p_3 \\ p_4 = \emptyset \end{array} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

Отримали спрощену розширену матрицю системи $(A|B)$. Аналіз її вигляду дозволяє визначити як її ранг $\text{rang}(A|B)$, та і ранг основної матриці системи $\text{rang}A$.

Зліва від риски знаходиться перетворена матриця коефіцієнтів A заданої системи. Оскільки її третій рядок складається із нулів, максимальний порядок ненульового мінору матриці A дорівнює двом: $\text{rang}(A) = 2$.

Також бачимо, що в перетвореній розширеній матриці $(A|B)$ мінор, отриманий викресленням третього та четвертого стовпців, є визначником трикутної матриці. Його величина дорівнює добутку діагональних елементів:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1 \neq 0,$$

звідки $\text{rang}(A|B) = 3$.

Застосування теореми Кронекера – Капеллі 1.3.1 дозволяє дійти висновку: задана система є несумісною, оскільки $\text{rang}A \neq \text{rang}(A|B)$.

Відповідь: а) система сумісна, невизначена; загальний розв'язок: $x_1 = 2p + 3q + 1$; $x_2 = p - q - 2$; $x_3 = p$; $x_4 = q$; $\forall p, q \in \mathbf{R}$; б) система несумісна.

Задача 6. Задано координати точок A, B, C і D :

$$A(-1; 3; 2), B(3; 5; 2), C(1; 3; 1), D(2; 2; 4).$$

Необхідно:

- а) довести, що точки A, B, C утворюють трикутник, а на A, B, C і D можна побудувати піраміду;
- б) обчислити довжини сторін та кути трикутника ABC ;
- в) знайти площу трикутника ABC ;
- г) знайти об'єм піраміди $ABCD$ та висоту, опущену з вершини D на основу ABC .

Розв'язання.

- а) Спочатку *знаходимо* координати векторів за формулою (1.5.2):

$$\overline{AB} = (3 - (-1); 5 - 3; 2 - 2) = (4; 2; 0);$$

$$\overline{AC} = (1 - (-1); 3 - 3; 1 - 2) = (2; 0; -1);$$

$$\overline{AD} = (2 - (-1); 2 - 3; 4 - 2) = (3; -1; 2).$$

Для того щоб точки A, B, C утворювали трикутник, необхідно, щоб вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ не були колінеарними. Умовою колінеарності векторів є пропорційність їх координат (6). Легко бачити, що це не так:

$$\frac{4}{2} \neq \frac{2}{0} \neq \frac{0}{-1}.$$

Для того щоб на точках A, B, C і D можна було побудувати піраміду, необхідно, щоб вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$ не належали одній площині. *Перевіримо* умову компланарності (1.5.19):

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} &= 4 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = \\ &= 4 \cdot (0 \cdot 2 - (-1) \cdot (-1)) - 2 \cdot (2 \cdot 2 - 3 \cdot (-1)) = -18 \neq 0. \end{aligned}$$

Оскільки вектори $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$ не є колінеарними, точки A, B, C утворюють трикутник. Оскільки вектори $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$ не є компланарними, точки A, B, C і D утворюють піраміду у просторі.

б) Знайдемо довжини сторін трикутника ABC як модулі векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{BC}$ за формулою (1.5.3):

$$AB = |\overline{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2 + 0^2} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \text{ (од.)};$$

$$AC = |\overline{AC}| = \sqrt{2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{5} \text{ (од.)};$$

$$BC = |\overline{BC}| = \sqrt{(1-3)^2 + (3-5)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+4+1} = 3 \text{ (од.)}.$$

Для того щоб знайти кути трикутника ABC , слід скористатися формулою (1.5.10). По-перше, необхідно обчислити скалярні добутки векторів, що утворюють $\angle A, \angle B$ та $\angle C$, відповідно. Враховуючи, що

$$\overline{BA} = -\overline{AB} = (-4; -2; 0);$$

$$\overline{CA} = -\overline{AC} = (-2; 0; 1);$$

$$\overline{CB} = -\overline{BC} = (2; 2; 1),$$

за формулою (1.5.8) знаходимо:

$$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = 4 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot (-1) = 8;$$

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = (-4) \cdot (-2) + (-2) \cdot (-2) + 0 \cdot (-1) = 12;$$

$$\overline{CA} \cdot \overline{CB} = (-2) \cdot 2 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -3.$$

Слід зауважити, що використання властивості асоціативності скалярного добутку щодо множення на число дозволяє уникнути відшукування

координат протилежних векторів під час знаходження скалярних добутоків:

$$\overline{BA} \cdot \overline{BC} = -\overline{AB} \cdot \overline{BC}; \quad \overline{CA} \cdot \overline{CB} = (-\overline{AC}) \cdot (-\overline{BC}) = \overline{AC} \cdot \overline{BC}.$$

Ураховуючи, що $|\overline{BA}| = |\overline{AB}| = 2\sqrt{5}$, $|\overline{CA}| = |\overline{AC}| = \sqrt{5}$, $|\overline{CB}| = |\overline{BC}| = 3$, обчислюємо косинуси кутів трикутника ABC за формулою (1.5.10):

$$\cos A = \cos(\overline{AB} \wedge \overline{AC}) = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AC}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AC}|} = \frac{8}{2\sqrt{5}\sqrt{5}} = \frac{4}{5};$$

$$\cos B = \cos(\overline{BA} \wedge \overline{BC}) = \frac{\overline{BA} \cdot \overline{BC}}{|\overline{BA}| \cdot |\overline{BC}|} = \frac{12}{2\sqrt{5} \cdot 3} = \frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\cos C = \cos(\overline{CA} \wedge \overline{CB}) = \frac{\overline{CA} \cdot \overline{CB}}{|\overline{CA}| \cdot |\overline{CB}|} = \frac{-3}{\sqrt{5} \cdot 3} = -\frac{\sqrt{5}}{5}.$$

Звідси:

$$\angle A = \arccos \frac{4}{5} \approx 36^\circ 52', \quad \angle B = \arccos \frac{2\sqrt{5}}{5} \approx 26^\circ 34',$$

$$\angle C = \pi - \arccos \frac{\sqrt{5}}{5} \approx 116^\circ 34'.$$

Кути $\angle A, \angle B$ є гострими, а $\angle C$ – тупим.

в) Для знаходження площі трикутника ABC слід скористатися геометричним змістом векторного добутку. Спочатку за формулою (1.5.13) обчислюємо векторний добуток векторів $\overline{AB}$ та $\overline{AC}$, що утворюють цей трикутник:

$$\begin{aligned} \overline{AB} \times \overline{AC} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = \\ &= -2\vec{i} + 4\vec{j} - 4\vec{k} = (-2; 4; -4). \end{aligned}$$

За формулою (1.5.15)

$$S_{\Delta ABC} = \frac{|\overline{AB} \times \overline{AC}|}{2} = \frac{1}{2} \sqrt{(-2)^2 + 4^2 + (-4)^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3 \text{ (кв. од.)}.$$

г) Об'єм піраміди $ABCD$ знаходимо за допомогою мішаного добутку векторів $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ та $\overline{AD}$, що її утворюють. За формулою (1.5.16) одержуємо:

$$\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD} = \overline{AB} \cdot (\overline{AC} \times \overline{AD}) = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -18,$$

звідки, згідно з (1.5.18)

$$V_{nip} = \frac{|\overline{AB} \overline{AC} \overline{AD}|}{6} = \frac{1}{6} \cdot |-18| = 3 \text{ (куб. од.)}.$$

Враховуючи знайдені площу ABC та об'єм $ABCD$, можна знайти висоту h , опущену з вершини D на основу ABC :

$$h = \frac{3V_{nip}}{S_{ABC}} = \frac{3 \cdot 3}{3} = 3 \text{ (од.)}.$$

Відповідь: б) $AB = 2\sqrt{5}$, $AC = \sqrt{5}$, $BC = 3$, $\angle A \approx 36^\circ 52'$, $\angle B \approx 26^\circ 34'$, $\angle C \approx 116^\circ 34'$; в) $S_{\Delta ABC} = 3$ (кв. од.); г) $V_{nip} = 3$ (куб. од.); $h = 3$ (од.).

Задача 7. Вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ подані у координатній формі:

$$\vec{a} = (6; -2; 4), \quad \vec{b} = (2; 0; -5), \quad \vec{c} = (-1; 4; -2).$$

Знайти: а) напрямні косинуси вектора $\vec{p}$; б) проекцію вектора $\vec{q}$ на вектор $\vec{r}$; в) скалярний та векторний добутки векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$; г) значення параметра m , для якого вектори $\vec{r} - m\vec{i}$ та $\vec{q}$ ортогональні, якщо:

$$\vec{p} = 2\vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{r} = \vec{a} + 3\vec{c}.$$

Розв'язання.

а) Спочатку обчислюємо координати вектора $\vec{p}$ згідно з властивостями (1.5.4), (1.5.5) лінійних операцій над векторами:

$$\vec{p} = 2\vec{b} + \vec{c} = 2 \cdot (2; 0; -5) + (-1; 4; -2) = (4 - 1; 0 + 4; -10 - 2) = (3; 4; -12).$$

Знаходимо модуль вектора $\vec{p}$ за формулою (1.5.3)

$$|\vec{p}| = \sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2} = \sqrt{169} = 13$$

та його напрямні косинуси вектора згідно з (1.5.7):

$$\cos \alpha = \frac{3}{13}; \quad \cos \beta = \frac{4}{13}; \quad \cos \gamma = -\frac{12}{13}.$$

б) Для відшукування проекції використовують формулу (1.5.9). Знаходимо координати векторів $\vec{q}$ та $\vec{r}$ за формулами (1.5.4), (1.5.5) лінійних операцій у координатній формі:

$$\vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b} = \frac{1}{2} \cdot (6; -2; 4) - (2; 0; -5) = (3 - 2; -1 - 0; 2 + 5) = (1; -1; 7).$$

$$\vec{r} = \vec{a} + 3\vec{c} = (6; -2; 4) + 3 \cdot (-1; 4; -2) = (6 - 3; -2 + 12; 4 - 6) = (3; 10; -2)$$

Далі обчислюємо скалярний добуток векторів $\vec{q}$ та $\vec{r}$ за їх координатами згідно з формулою (1.5.8):

$$\vec{q} \cdot \vec{r} = 1 \cdot 3 + (-1) \cdot 10 + 7 \cdot (-2) = 3 - 10 - 14 = -21.$$

Тоді згідно з (1.5.9)

$$\text{Пр}_{\vec{r}} \vec{q} = \frac{\vec{q} \cdot \vec{r}}{|\vec{r}|} = \frac{-21}{\sqrt{3^2 + 10^2 + (-2)^2}} = -\frac{21}{\sqrt{113}} \text{ (од.)}$$

в) Скалярний добуток векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$ обчислюємо за допомогою формули (1.5.8):

$$\vec{p} \cdot \vec{q} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) + (-12) \cdot 7 = -85,$$

а векторний – за формулою (1.5.13):

$$\begin{aligned} \vec{p} \times \vec{q} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 3 & 4 & -12 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = \vec{i} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -12 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} - \vec{j} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -12 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + \vec{k} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = \\ &= 16\vec{i} - 33\vec{j} - 7\vec{k} = (16; -33; -7). \end{aligned}$$

г) Для ортогональних векторів виконується умова (1.5.11), тобто їхній скалярний добуток дорівнює нулю. Обчислимо координати вектора $\vec{r} - m\vec{i}$:

$$\vec{r} - m\vec{i} = (3; 10; -2) - m \cdot (1; 0; 0) = (3 - m; 10; -2) = (3 - m; 10; -2).$$

Знаходимо скалярний добуток векторів $\vec{r} - m\vec{i}$ та $\vec{q}$ за формулою (1.5.8)

$$(\vec{r} - m\vec{i}) \cdot \vec{q} = (3 - m) \cdot 1 + 10 \cdot (-1) + (-2) \cdot 7 = -21 - m.$$

Прирівнюючи отриманий вираз до нуля отримуємо умову на параметр m :

$$(\vec{r} - m\vec{i}) \perp \vec{q} \Leftrightarrow -m - 21 = 0 \Leftrightarrow m = -21.$$

Таким чином, вектори $\vec{r} - m\vec{i}$ і $\vec{q}$ ортогональними, коли параметр $m = -21$.

Відповідь: а) $\cos \alpha = \frac{3}{13}$; $\cos \beta = \frac{4}{13}$; $\cos \gamma = -\frac{12}{13}$; б) $\text{Pr}_{\vec{r}} \vec{q} = -\frac{21}{\sqrt{113}}$ (од.); в) $\vec{p} \cdot \vec{q} = -85$; $\vec{p} \times \vec{q} = (16; -33; -7)$; г) $m = -21$.

Задача 8. Переконатися, що вектори $\bar{a}_1 = (3, 1, -1)$, $\bar{a}_2 = (2, 4, 3)$, $\bar{a}_3 = (5, 2, 1)$ утворюють базис в $\mathbf{R}^3$ і знайти розклад вектора $\bar{a}_4 = (-7, 0, -2)$ за цим базисом.

Розв'язання.

1. *Переконуємося*, що вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ утворюють базис в $\mathbf{R}^3$, для чого обчислюємо визначник, складений із координат цих векторів:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -10 & -1 \\ 1 & 4 & 2 \\ 0 & 7 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{21} = - \begin{vmatrix} -10 & -1 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} = 23 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\} \text{ утворюють базис в } \mathbf{R}^3.$$

2. *Знаходимо* коефіцієнти розкладу вектора $\bar{a}_4$ за базисом, для чого складаємо векторну рівність (1.6.6) і розв'язуємо відповідну неоднорідну СЛАР:

$$\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3 = \bar{a}_4 \Rightarrow \alpha_1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \alpha_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} + \alpha_3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3\alpha_1 + 2\alpha_2 + 5\alpha_3 = -7 \\ \alpha_1 + 4\alpha_2 + 2\alpha_3 = 0 \\ -\alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 = -2 \end{cases} \Rightarrow (A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 5 & -7 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & -2 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -10 & -1 & -7 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & 1 & 7 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & 7 & 3 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & 1 & 7 \\ 1 & -16 & 0 & -14 \\ 0 & -23 & 0 & -23 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 10 & 1 & 7 \\ 1 & -16 & 0 & -14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{cases} \alpha_3 = -3 \\ \alpha_1 = 2 \\ \alpha_2 = 1 \end{cases}.$$

Таким чином, $\bar{a}_4 = 2 \cdot \bar{a}_1 + 1 \cdot \bar{a}_2 - 3 \cdot \bar{a}_3 = (2, 1, -3)$.

3. *Виконуємо* перевірку, для чого складаємо лінійну комбінацію $\alpha_1 \bar{a}_1 + \alpha_2 \bar{a}_2 + \alpha_3 \bar{a}_3$ і зіставляємо її з вектором $\bar{a}_4$:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6+2-15 \\ 2+4-6 \\ -2+3-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = \bar{a}_4.$$

Відповідь: $\bar{a}_4 = 2 \cdot \bar{a}_1 + 1 \cdot \bar{a}_2 - 3 \cdot \bar{a}_3$; отже, $(2, 1, -3)$ – координати вектора $\bar{a}_4$ в базисі $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \bar{a}_3\}$.

Задача 9. Трикутник $A_1A_2A_3$ задано координатами його вершин: $A_1(-4; 2)$, $A_2(5; 0)$, $A_3(-1; -5)$. Знайти: 1) рівняння сторони A_1A_2 ; 2) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини A_1 ; 3) рівняння і довжину медіани, проведеної з вершини A_2 ; 4) рівняння і довжину бісектриси, проведеної з вершини A_3 ; 5) кут між проведеними висотою і медіаною; 6) рівняння прямої l , яка проходить через точку A_1 паралельно протилежній стороні трикутника; 7) координати точки P , симетричної точці A_3 відносно сторони A_1A_2 . Зробити рисунок.

Розв'язання.

1. Під рівнянням сторони трикутника будемо розуміти рівняння прямої, що містить її. Виходячи із цього, рівняння сторони A_1A_2 знайдемо як рівняння прямої (A_1A_2) , що проходить через дві задані точки (див. рівняння (1.7.3)):

$$\left. \begin{matrix} x_1 & y_1 \\ A_1(-4; 2) \\ x_2 & y_2 \\ A_2(5; 0) \end{matrix} \right] \Rightarrow | (1.7.3) | \Rightarrow (A_1A_2): \frac{x - (-4)}{5 - (-4)} = \frac{y - 2}{0 - 2} \Rightarrow \frac{x + 4}{9} = \frac{y - 2}{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mid \text{зводимо до загального рівняння} \mid \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -2(x + 4) = 9(y - 2) \Rightarrow 2x + 9y - 10 = 0.$$

Довжину сторони A_1A_2 знайдемо за формулою (1.5.3) як довжину вектора $\overline{A_1A_2}$, попередньо визначивши його координати:

$$\overline{A_1A_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1) = (9, -2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_1A_2 = |\overline{A_1A_2}| = \sqrt{9^2 + (-2)^2} = \sqrt{85} \approx 9,2.$$

2. Висота трикутника, опущена з вершини A_1 (позначимо її A_1K), за означенням перпендикулярна прямій, що містить протилежну сторону трикутника (у нас це (A_2A_3)). Тоді вектор $\overline{A_2A_3}$ (або $\overline{A_3A_2}$) є перпендикулярним висоті, а значить може слугувати її нормальним вектором (рис. 4.1.1).

Отже, рівняння прямої (A_1K) знайдемо за відомою точкою A_1 на ній та відомим нормальним вектором $\overline{N} = \overline{A_2A_3}$ (див. рівняння (1.7.9)):

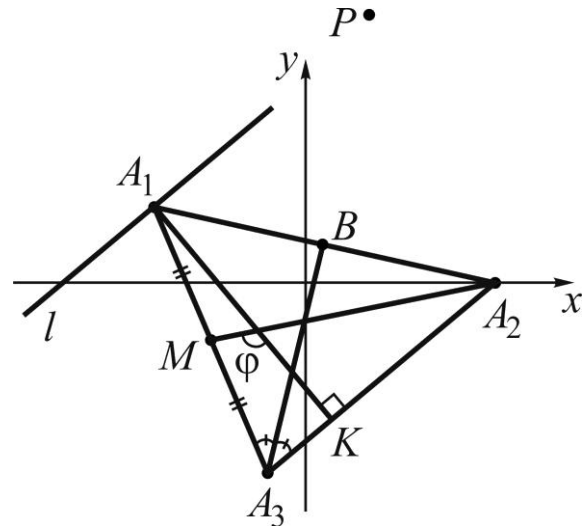


Рис. 4.1.1. Рисунок до задачі 9

$$\left. \begin{array}{l} A_1(-4; 2) \\ \overline{N} = \overline{A_2A_3} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \right] \Rightarrow |(1.7.9)| \Rightarrow (A_1K): -6(x - (-4)) + (-5)(y - 2) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow -6x - 24 - 5y + 10 = 0 \Rightarrow 6x + 5y + 14 = 0.$$

Побудову висоти A_1K здійснимо за двома будь-якими точками на ній: однією буде вже відома точка $A_1(-4; 2)$, а другу знайдемо за рівнянням висоти: $x = 1 \Rightarrow y = -4$, отже, $(1; -4) \in A_1K$ (див. рис. 4.1.1).

Довжину висоти A_1K обчислимо як відстань від точки A_1 до прямої (A_2A_3) за формулою (1.7.20), яку зможемо застосувати, якщо разом із координатами точки A_1 будемо знати загальне рівняння прямої (A_2A_3) :

$$\left. \begin{array}{l} A_2(5; 0) \\ A_3(-1; -5) \end{array} \right] \Rightarrow |(1.7.3)| \Rightarrow (A_2A_3): \frac{x-5}{-1-5} = \frac{y-0}{-5-0} \Rightarrow \frac{x-5}{-6} = \frac{y}{-5} \Rightarrow \\ \Rightarrow -5(x-5) = -6y \Rightarrow 5x - 6y - 25 = 0.$$

Обчислюємо довжину висоти A_1K :

$$\left. \begin{array}{l} A_1(-4; 2) \\ (A_2A_3): 5x - 6y - 25 = 0 \\ (\overline{N} = \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ -1 & -5 \end{pmatrix}) \end{array} \right] \Rightarrow |(1.7.20)| \Rightarrow A_1K = \frac{|5 \cdot (-4) - 6 \cdot 2 - 25|}{\sqrt{5^2 + (-6)^2}} = \frac{57}{\sqrt{61}} \approx 7,3.$$

3. Медіана трикутника, проведена з вершини A_2 (позначимо її A_2M), за означенням з'єднує цю вершину із серединою протилежної сторони A_1A_3 – точкою M (див. рис. 4.1.1), координати якої визначимо за формулами координат середини відрізка:

$$x_M = \frac{x_1 + x_3}{2} = \frac{-4 + (-1)}{2} = -\frac{5}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_3}{2} = \frac{2 + (-5)}{2} = -\frac{3}{2}.$$

Рівняння медіани A_2M дістанемо як рівняння прямої, що проходить через дві задані точки $A_2(5;0)$ і $M(-5/2; -3/2)$ (див. рівняння (1.7.3)):

$$\left[\begin{array}{c} A_2(x_1, y_1) \\ A_2(5; 0) \\ M(x_2, y_2) \\ M(-5/2; -3/2) \end{array} \right] \Rightarrow | (1.7.3) | \Rightarrow (A_2M): \frac{x-5}{-5/2-5} = \frac{y-0}{-3/2-0} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x-5}{-15/2} = \frac{y}{-3/2} \Rightarrow -\frac{3}{2}(x-5) = -\frac{15}{2}y \Rightarrow x-5 = 5y \Rightarrow x-5y-5 = 0.$$

Для побудови медіани A_2M сполучимо точки A_2 і M відрізком прямої (див. рис. 4.1.1).

Довжину медіани A_2M знайдемо як довжину вектора $\overline{A_2M}$:

$$\overline{A_2M} = (x_M - x_2, y_M - y_2) = (-15/2, -3/2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow A_2M = |\overline{A_2M}| = \sqrt{\left(-\frac{15}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{234}{4}} \approx 7,6.$$

4. Бісектриса трикутника, проведена з вершини A_3 (позначимо її A_3B), за означенням є відрізком бісектриси відповідного кута і з'єднує вершину A_3 з точкою B на протилежній стороні A_1A_2 (див. рис. 4.1.1).

Зі шкільного курсу математики відомо, що бісектриса трикутника поділяє протилежну сторону на відрізки, відношення довжин яких λ дорівнює відношенню довжин прилеглих до них двох інших сторін трикутника, тобто у нашому випадку:

$$\frac{A_1B}{BA_2} = \frac{A_1A_3}{A_2A_3} = \lambda.$$

Обчислимо число λ :

$$\left. \begin{aligned} \overline{A_1 A_3} = (3; -7) &\Rightarrow A_1 A_3 = |\overline{A_1 A_3}| = \sqrt{3^2 + (-7)^2} = \sqrt{58} \\ \overline{A_2 A_3} = (-6; -5) &\Rightarrow A_2 A_3 = |\overline{A_2 A_3}| = \sqrt{(-6)^2 + (-5)^2} = \sqrt{61} \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{A_1 A_3}{A_2 A_3} = \frac{\sqrt{58}}{\sqrt{61}} \approx 0,975.$$

Знайдемо координати точки B , для чого скористаємось формулами визначення координат точки, яка поділяє напрямлений відрізок у заданому відношенні λ , якщо відомі координати кінців відрізка. Отже:

$$\left. \begin{aligned} x_B &= \frac{x_{A_1} + \lambda x_{A_2}}{1 + \lambda} = \frac{-4 + 0,975 \cdot 5}{1 + 0,975} \approx 0,44 \\ y_B &= \frac{y_{A_1} + \lambda y_{A_2}}{1 + \lambda} = \frac{2 + 0,975 \cdot 0}{1 + 0,975} \approx 1,01 \end{aligned} \right\} \Rightarrow B(0,44; 1,01).$$

Рівняння бісектриси $A_3 B$ одержимо за двома відомими точками на ній: A_3 і B , в котре залучаючи рівняння (1.7.3):

$$\left. \begin{aligned} A_3(-1; -5) \\ B(0,44; 1,01) \end{aligned} \right\} \Rightarrow |(1.7.3)| \Rightarrow (A_3 B): \frac{x - (-1)}{0,44 - (-1)} = \frac{y - (-5)}{1,01 - (-5)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{1,44} = \frac{y+5}{6,01} \Rightarrow 6,01(x+1) = 1,44(y+5) \Rightarrow 6,01x - 1,45y - 1,19 = 0.$$

Визначимо довжину бісектриси $A_3 B$:

$$\overline{A_3 B} = (1,44; 6,01) \Rightarrow A_3 B = |\overline{A_3 B}| = \sqrt{(1,44)^2 + (6,01)^2} = \sqrt{38,22} \approx 6,18.$$

Зобразимо бісектрису $A_3 B$, для чого з'єднаємо точки A_3 і B відрізком прямої (див. рис. 4.1.1).

5. Відшукування кута φ між висотою $A_1 K$ і медіаною $A_2 M$ зводиться до відшукування кута між відповідними прямими, на яких вони лежать. Оскільки обидві прямі задані загальними рівняннями, то шуканий кут знайдемо як кут між їх нормальними векторами за формулою (1.7.14)):

$$\left. \begin{array}{l} \overline{N}_{A_1K} = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} \\ \overline{N}_{A_2M} = \begin{pmatrix} A_2 & B_2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \right] \Rightarrow |(1.7.14)| \Rightarrow \varphi = \arccos \frac{6 \cdot 1 + 5 \cdot (-5)}{\sqrt{6^2 + 5^2} \cdot \sqrt{1^2 + (-5)^2}} =$$

$$= \arccos \frac{-19}{\sqrt{61} \cdot \sqrt{26}} = \arccos(-0,4771) \approx 118^\circ 5'.$$

Отже, кут φ вийшов тупий. Для відшукування саме гострого кута між прямими чисельник у формулі (1.7.14) треба взяти за модулем.

6. Рівняння прямої l , проведеної через точку A_1 паралельно протилежній стороні трикутника A_2A_3 , одержимо як рівняння прямої, яка проходить через задану точку A_1 , а її напрямним вектором є вектор $\overline{A_2A_3}$ (або $\overline{A_3A_2}$) (див. рівняння (1.7.2)):

$$\left. \begin{array}{l} A_1 \begin{pmatrix} x_0 & y_0 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \\ \overline{s} = \overline{A_2A_3} = \begin{pmatrix} m & n \\ -6 & -5 \end{pmatrix} \end{array} \right] \Rightarrow |(1.7.2)| \Rightarrow l: \frac{x - (-4)}{-6} = \frac{y - 2}{-5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5(x + 4) = 6(y - 2) \Rightarrow 5x - 6y + 32 = 0.$$

Для побудови прямої l за її рівнянням знаходимо ще одну точку на ній: $x = 2 \Rightarrow y = 7$, отже, $(2; 7) \in l$, і проводимо пряму через знайдену точку і точку A_1 (див. рис. 4.1.1).

7. Точку P , симетричну точці A_3 відносно сторони A_1A_2 , знайдемо із тих міркувань, що вона лежить на прямій l_0 , проведеної через точку A_3 перпендикулярно осі симетрії – прямій A_1A_2 , а вісь симетрії поділяє відстань між точками P і A_3 навпіл (рис. 4.1.2).

Рівняння прямої l_0 складаємо за відомою точкою A_3 на ній і відомим нормальним вектором – $\overline{A_1A_2}$ (або $\overline{A_2A_1}$) (див. рівняння (1.7.9)):

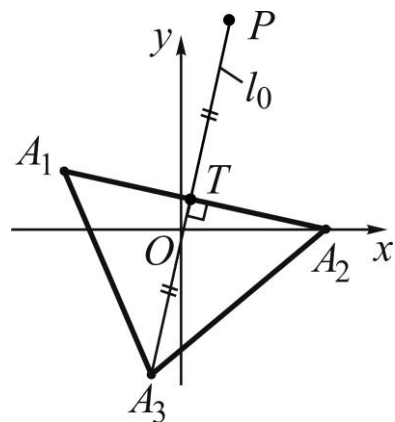


Рис. 4.1.2. До відшукування симетричної точки

$$\left. \overline{N} = \frac{A_3(-1;-5)}{A_1A_2} = (9;-2) \right] \Rightarrow |(1.7.9)| \Rightarrow l_0 : 9(x - (-1)) + (-2)(y - (-5)) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 9x + 9 - 2y - 10 = 0 \Rightarrow 9x - 2y - 1 = 0.$$

Знаходимо точку перетину перпендикуляра l_0 і прямої (A_1A_2) – проекцію точки A_3 на пряму (A_1A_2) : $T = l_0 \cap (A_1A_2)$, для чого складаємо відповідну СЛАР і розв'язуємо її (наприклад, за методом Крамера):

$$\begin{aligned} l_0 : \begin{cases} 9x - 2y - 1 = 0 \\ 2x + 9y - 10 = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} 9x - 2y = 1 \\ 2x + 9y = 10 \end{cases} \Rightarrow \\ \Rightarrow \left(\Delta = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 85, \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 10 & 9 \end{vmatrix} = 29, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 9 & 1 \\ 2 & 10 \end{vmatrix} = 88 \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{29}{85} \\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{88}{85} \end{cases} \Rightarrow T\left(\frac{29}{85}; \frac{88}{85}\right). \end{aligned}$$

Шукані координати точки P обчислимо за формулами координат середини відрізка з урахуванням того, що тепер нам відомі координати середини – точки T і координати одного кінця відрізка – точки A_3 :

$$\begin{cases} x_T = \frac{x_3 + x_P}{2} \\ y_T = \frac{y_3 + y_P}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_P = 2x_T - x_3 = 2 \cdot \frac{29}{85} - (-1) = \frac{143}{85} \approx 1,68 \\ y_P = 2y_T - y_3 = 2 \cdot \frac{88}{85} - (-5) = \frac{601}{85} \approx 7,07 \end{cases} \Rightarrow P(1,68; 7,07).$$

Відповідь:

- 1) $(A_1A_2) : 2x + 9y - 10 = 0, A_1A_2 = 9,2;$
- 2) $(A_1K) : 6x + 5y + 14 = 0, A_1K = 7,3;$
- 3) $(A_2M) : x - 5y - 5 = 0, A_2M = 7,6;$
- 4) $(A_3S) : 6,01x - 1,45y - 1,24 = 0, A_3S = 6,18;$
- 5) $\varphi = \arccos(-0,4771) \approx 118^\circ 5';$
- 6) $l : 5x - 6y + 32 = 0;$
- 7) $P(1,68; 7,07).$

Задача 10. Скласти рівняння параболи з фокусом у точці $F(0;-3)$ і вершиною у початку координат.

Розв'язання.

За відомими координатами фокуса $(0;-3)$ встановлюємо, що: $F \in Oy$, тому Oy – вісь симетрії параболи, адже фокус параболи завжди лежить на її осі симетрії, отже, рівняння міститиме змінну y в першому степені; друга координата фокуса від'ємна, тому рівняння матиме вигляд: $x^2 = -2py$. Залишилося знайти параметр p : відстань від фокуса параболи до її вершини завжди дорівнює $p/2$, де p – параметр параболи, тому у нас: $p/2 = 3$, звідки $p = 6$. Таким чином, $x^2 = -12y$ – шукане рівняння параболи.

Зображуємо криву в системі координат xOy (рис. 4.1.3) за відомою вершиною $O(0;0)$ і кількома додатковими точками, які знайдемо за рівнянням $x^2 = -12y$:

$$y = -1/3 \Rightarrow x = \pm 2 \Rightarrow \begin{bmatrix} (2;-1/3) \\ (-2;-1/3) \end{bmatrix};$$

$$y = -3 \Rightarrow x = \pm 6 \Rightarrow \begin{bmatrix} (6;-3) \\ (-6;-3) \end{bmatrix}.$$

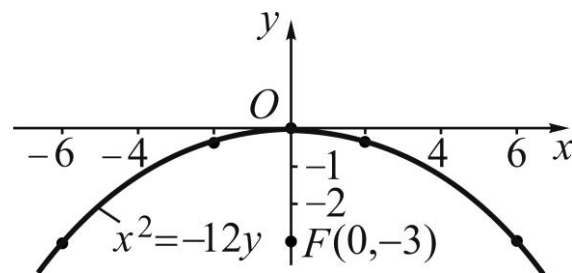


Рис. 4.1.3. Парабола до задачі 8

Відповідь: $x^2 = -12y$.

Задача 11. Визначити тип кривої другого порядку, звести її рівняння до канонічного вигляду, побудувати криву та вказати: для кола – координати центра і радіус; для еліпса – велику та малу півосі, координати фокусів, ексцентриситет; для гіперболи – дійсну та уявну півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот; для параболи – координати вершини і фокуса, величину параметра, рівняння директриси:

а) $25x^2 + 4y^2 = 100$; б) $4x^2 - 25y^2 - 24x - 50y - 89 = 0$.

Розв'язання.

а) 1. Встановлюємо тип кривої за її рівнянням (див. стор. 44): $(A = 25, C = 4) \Rightarrow A \cdot C > 0$. Отже, задане рівняння визначає криву еліптичного типу.

2. Зводимо задане рівняння до канонічного вигляду (1.8.5):

$$25x^2 + 4y^2 = 100 \Rightarrow \left| \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right| \Rightarrow \frac{25x^2}{100} + \frac{4y^2}{100} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1 - \text{канонічне рівняння еліпса.}$$

3. Визначаємо параметри еліпса (a і b), координати фокусів (F_1 , F_2) та ексцентриситет (e) за його канонічним рівнянням:

$$\begin{cases} a = 2 - \text{мала піввісь} \\ b = 5 - \text{велика піввісь} \end{cases} (a < b) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{25 - 4} = \sqrt{21} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1(0; -\sqrt{21}), F_2(0; \sqrt{21}); \\ e = \frac{c}{b} = \frac{\sqrt{21}}{5} \approx 0,92 < 1. \end{cases}$$

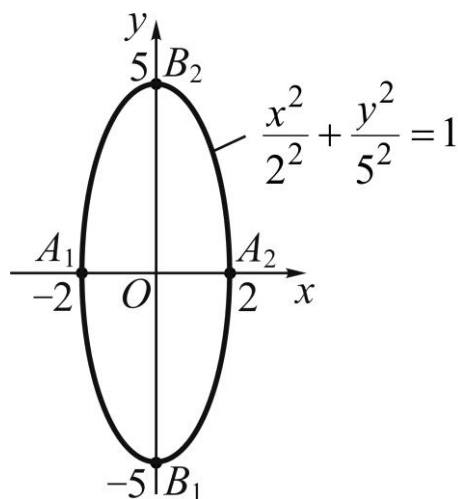


Рис. 4.1.4. Еліпс
до задачі 11а

4. Зображуємо еліпс, для чого будемо його вершини: $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$, $B_1(0;-5)$, $B_2(0;5)$, і з'єднаємо їх овальною лінією (рис. 4.1.4).

б) 1. Встановлюємо тип кривої за її рівнянням: ($A = 4$, $C = -25$) $\Rightarrow \Rightarrow A \cdot C < 0$. Отже, задане рівняння описує криву гіперболічного типу.

2. Зводимо задане рівняння до канонічного вигляду (1.8.7), для чого виділенням повних квадратів позбуваємось доданків із першими степенями змінних x , y у лівій частині рівняння:

$$4x^2 - 25y^2 - 24x - 50y - 89 = 0 \Rightarrow 4(x^2 - 6x) - 25(y^2 + 2y) - 89 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4[(x^2 - 2x \cdot 3 + 9) - 9] - 25[(y^2 + 2y \cdot 1 + 1) - 1] - 89 = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(x-3)^2 - 25(y+1)^2 = 100 \Rightarrow \frac{(x-3)^2}{25} - \frac{(y+1)^2}{4} = 1.$$

Вводимо нові координати X , Y заміною: $x-3=X$, $y+1=Y$, які є формулами паралельного перенесення системи координат xOy , за якими її початок – точка $O(0;0)$ – переміщується у точку $O_1(3;-1)$, а напрямки координатних осей зберігаються. У цій, "новій", системі координат XO_1Y рівняння гіперболи набуває канонічного вигляду:

$$\frac{X^2}{5^2} - \frac{Y^2}{2^2} = 1.$$

3. *Визначаємо* параметри гіперболи (a і b), координати фокусів (F_1 , F_2) та ексцентриситет (e) за її канонічним рівнянням:

$$\begin{cases} a = 5 - \text{дійсна піввісь} \\ b = 2 - \text{уявна піввісь} \end{cases} \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} F_1(-\sqrt{29}; 0), F_2(\sqrt{29}; 0); \\ e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{29}}{5} \approx 1,08 > 1. \end{cases}$$

4. *Зображуємо* криву в системі координат XO_1Y , для чого будуємо її основний прямокутник, асимптоти:

$$Y = \pm \frac{b}{a} X \Rightarrow Y = \pm \frac{2}{5} X,$$

вершини $A_1(-5;0)$, $A_2(5;0)$ і, насамкінець, гілки гіперболи (рис. 4.1.5).

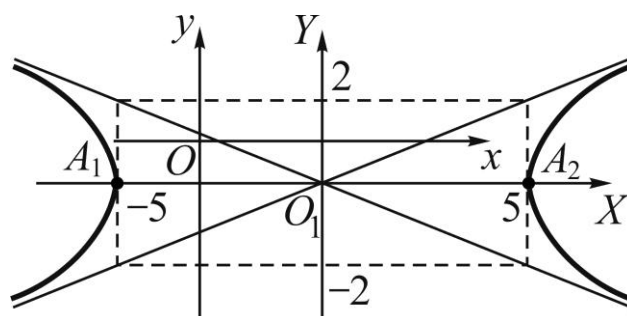


Рис. 4.1.5. Гіпербола до задачі 116

Відповідь:

а) $\frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{5^2} = 1$; $a = 2$, $b = 5$; $F_1(0; -\sqrt{21})$, $F_2(0; \sqrt{21})$; $e = 0,92$;

б) $\frac{X^2}{5^2} - \frac{Y^2}{2^2} = 1$, $X = x - 3$, $Y = y + 1$; $a = 5$, $b = 2$; $F_1(-\sqrt{29}; 0)$, $F_2(\sqrt{29}; 0)$; $e = 1,08$.

Задача 12. Задано координати точок $A(-1; 2; 1)$, $B(3; 2; 2)$, $C(-2; 0; 1)$, $D(3; -5; 4)$. Знайти: 1) рівняння площини π_1 , що проходить

через точки A, B, C ; 2) рівняння площини π_2 , що проходить через точку D перпендикулярно вектору $\overline{AC}$; 3) рівняння площини π_3 , що проходить через точку D паралельно площині π_1 ; 4) відстань від точки D до площини π_1 ; 5) рівняння прямої l_1 , що проходить через точки A і B ; 6) параметричні рівняння прямої l_2 , що проходить через точку D паралельно прямій l_1 ; 7) рівняння прямої l_3 , що проходить через точку D перпендикулярно площині π_1 ; 8) відстань від точки D до прямої l_1 ; 9) точку перетину прямої l_3 і площини π_1 ; 10) кут між прямою l_1 і площиною π_2 .

Розв'язання.

1. Рівняння площини π_1 складаємо за трьома відомими точками, що належать їй, для чого скористаємося формулою (1.9.3):

$$\left[\begin{array}{ccc} x_1 & y_1 & z_1 \\ A(-1; 2; 1) \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ B(3; 2; 2) \\ x_3 & y_3 & z_3 \\ C(-2; 0; 1) \end{array} \right] \Rightarrow |(1.9.3)| \Rightarrow \pi_1: \begin{vmatrix} x+1 & y-2 & z-1 \\ 4 & 0 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} \text{розкриваємо визначник за елементами першого рядка} \end{array} \right| \Rightarrow \\ \Rightarrow (x+1) \cdot 2 - (y-2) \cdot 1 + (z-1) \cdot (-8) = 0 \Rightarrow 2x - y - 8z + 12 = 0.$$

2. За умовою вектор $\overline{AB}$ перпендикулярний площині π_2 і тому є (за означенням) одним із безлічі її нормальних векторів: $\overline{N}_{\pi_2} = \overline{AB}$.

Оскільки відома точка, через яку проходить площина π_2 (точка D), і відомий її вектор нормалі:

$$\overline{N}_{\pi_2} = \overline{AB} = (x_3 - x_1; y_3 - y_1; z_3 - z_1) = (-1; -2; 0),$$

то за рівнянням (1.9.2) дістанемо:

$$\left[\begin{array}{ccc} x_0 & y_0 & z_0 \\ D(3; -5; 4) \\ A & B & C \\ \overline{N}_{\pi_2} = (-1; -2; 0) \end{array} \right] \Rightarrow |(1.9.2)| \Rightarrow \pi_2: -1 \cdot (x-3) + (-2) \cdot (y-(-5)) + 0 \cdot (z-4) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow x + 2y + 7 = 0.$$

Останнє рівняння не містить змінну z , бо третя координата вектора $\bar{N}_{\pi_2}$ дорівнює нулю. З геометричної точки зору це означає, що площина π_2 паралельна осі Oz .

3. Коефіцієнти при змінних x , y , z у рівнянні площини π_1 визначають координати її нормального вектора: $\bar{N}_{\pi_1} = (2; -1; -8)$. За умовою площини π_1 і π_3 паралельні, тому нормальний вектор площини π_1 буде одночасно перпендикулярним і площині π_3 , а значить, може слугувати для неї нормальним вектором: $\bar{N}_{\pi_3} = \bar{N}_{\pi_1}$. Шукане рівняння площини π_3 одержимо із (1.9.2) як рівняння площини, що проходить через задану точку (у нас це точка D) і має заданий нормальний вектор $\bar{N}_{\pi_3} = (2; -1; -8)$:

$$\left[\begin{array}{c} x_0 \quad y_0 \quad z_0 \\ D(3; -5; 4) \\ A \quad B \quad C \\ \bar{N}_{\pi_3} = (2; -1; -8) \end{array} \right] \Rightarrow | (1.9.2) | \Rightarrow \pi_3: 2 \cdot (x-3) - 1 \cdot (y-(-5)) - 8 \cdot (z-4) = 0 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x - y - 8z + 21 = 0.$$

4. Відстань d від точки D до площини π_1 обчислюємо за формулою (1.9.10):

$$\left[\begin{array}{c} x_0 \quad y_0 \quad z_0 \\ D(3; -5; 4) \\ A \quad B \quad C \\ \bar{N}_{\pi_1} = (2; -1; -8) \end{array} \right] \Rightarrow | (1.9.10) | \Rightarrow d = \frac{|2 \cdot 3 - (-5) - 8 \cdot 4 + 12|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + (-8)^2}} = \frac{9}{\sqrt{69}} \approx 1,08.$$

5. Рівняння прямої l_1 складемо за двома відомими точками A і B , через які вона проходить, скориставшись рівнянням (1.10.2):

$$\left[\begin{array}{c} x_1 \quad y_1 \quad z_1 \\ A(-1; 2; 1) \\ x_2 \quad y_2 \quad z_2 \\ B(3; 2; 2) \end{array} \right] \Rightarrow | (1.10.2) | \Rightarrow l_1: \frac{x-(-1)}{3-(-1)} = \frac{y-2}{2-2} = \frac{z-1}{2-1} \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}.$$

Нуль у знаменнику другого дробу означає, що друга координата напрямного вектора прямої дорівнює нулю: $\bar{s}_1 = (4; 0; 1)$; отже, робимо висновок, що пряма l_1 розташована перпендикулярно осі Oy .

6. Координати напрямного вектора прямої l_1 визначаємо за знаменниками дробів у її рівнянні: $\bar{s}_1 = (4; 0; 1)$. Оскільки за умовою пряма l_2 паралельна прямій l_1 , то напрямний вектор прямої l_1 буде одночасно паралельним і прямій l_2 , отже може слугувати для неї напрямним вектором: $\bar{s}_2 = \bar{s}_1$. Тоді за відомою точкою D на прямій і відомим напрямним вектором: $\bar{s}_2 = (4; 0; 1)$, складаємо параметричні рівняння прямої l_2 (див. рівняння (1.10.3)):

$$\left[\begin{array}{c} x_0 \quad y_0 \quad z_0 \\ D(3; -5; 4) \\ \bar{s}_2 = (4; 0; 1) \end{array} \right] \Rightarrow | (1.10.3) | \Rightarrow l_2 : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -5 + 0 \cdot t \\ z = 4 + 1 \cdot t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -5 \\ z = 4 + t \end{cases}, \forall t \in (-\infty, +\infty).$$

7. Рівняння прямої l_3 знайдемо, враховуючи, що і пряма l_3 , і нормальний вектор $\bar{N}_{\pi_1}$ перпендикулярні площини π_1 , тому вектор $\bar{N}_{\pi_1}$ буде паралельним прямій l_3 , отже, його можна взяти в якості напрямного вектора $\bar{s}_3$ цієї прямої: $\bar{s}_3 = \bar{N}_{\pi_1}$. Оскільки вектор $\bar{N}_{\pi_1}$ нам вже відомий за рівнянням площини π_1 , то шукане рівняння прямої l_3 дістанемо за відомою точкою на ній (точкою D) і відомим напрямним вектором $\bar{s}_3 = (2; -1; -8)$, тобто складаємо її канонічне рівняння (1.10.1):

$$\left[\begin{array}{c} x_0 \quad y_0 \quad z_0 \\ D(3; -5; 4) \\ \bar{s}_3 = (2; -1; -8) \end{array} \right] \Rightarrow | (1.10.1) | \Rightarrow l_3 : \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-4}{-8}.$$

8. Відстань d_1 від точки D до прямої l_1 обчислимо, залучаючи формулу (1.10.8), яка для нашого випадку набуде вигляду:

$$d_1 = \frac{|\bar{s}_1 \times \overline{M_0 D}|}{|\bar{s}_1|},$$

у якій $\bar{s}_1$ – напрямний вектор прямої l_1 , а M_0 – точка на ній ($M_0 \in l_1$).

Координати вектора $\bar{s}_1$ нам вже відомі: $\bar{s}_1 = (4; 0; 1)$, а координати точки $M_0(x_0; y_0; z_0)$ визначимо за рівнянням прямої l_1 :

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1} \Rightarrow \left(\frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{n} = \frac{z-z_0}{p} \right) \Rightarrow M_0(-1; 2; 1).$$

Послідовно проводимо всі необхідні розрахунки:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{matrix} M_0(-1; 2; 1) \\ D(3; -5; 4) \end{matrix} \right] \Rightarrow \overline{M_0 D} = (4; -7; 3); \\ & \bar{s}_1 \times \overline{M_0 D} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 4 & 0 & 1 \\ 4 & -7 & 3 \end{vmatrix} = 7\bar{i} - 8\bar{j} - 28\bar{k} = (7; -8; -28); \\ & |\bar{s}_1 \times \overline{M_0 D}| = \sqrt{7^2 + (-8)^2 + (-28)^2} = \sqrt{897}; \\ & |\bar{s}_1| = \sqrt{4^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{17}; \\ & d_1 = \frac{|\bar{s}_1 \times \overline{M_0 D}|}{|\bar{s}_1|} = \frac{\sqrt{897}}{\sqrt{17}} \approx 7,26. \end{aligned}$$

9. Для відшукування точки перетину T прямої l_3 з площиною π_1 розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{matrix} \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-4}{-8} \\ 2x - y - 8z + 12 = 0 \end{matrix} \right. (l_3) \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \text{запишемо рівняння} \\ \text{прямої у параметричній} \\ \text{формі} \end{matrix} \right. \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 3 + 2t \\ y = -5 - t \\ z = 4 - 8t \\ 2x - y - 8z + 12 = 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 3 + 2t \\ y = -5 - t \\ z = 4 - 8t \\ 2(3 + 2t) - (-5 - t) - 8(4 - 8t) + 12 = 0 \end{matrix} \right. \Rightarrow \\ & \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 3 + 2t \\ y = -5 - t \\ z = 4 - 8t \\ t = 3/23 \end{matrix} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} x = 75/23 \\ y = -118/23 \\ z = 68/23 \\ t = 3/23 \end{matrix} \right. \Rightarrow T\left(\frac{75}{23}; -\frac{118}{23}; \frac{68}{23}\right). \end{aligned}$$

Якщо система рівнянь виявиться невизначеною, то це означає, що пряма лежить у площині, якщо ж несумісною, то пряма і площина паралельні і точки перетину не існує.

10. Кут φ між прямою l_1 і площиною π_2 знаходимо за формулою (1.10.9):

$$\varphi = \arcsin \frac{|Am + Bn + Cp|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

де m, n, p – координати напрямного вектора $\bar{s}_1$ прямої l_1 ;

A, B, C – координати нормального вектора $\bar{N}_{\pi_2}$ площини π_2 .

Координати вектора $\bar{s}_1$ нам відомі: $\bar{s}_1 = (m; n; p) = (4; 0; 1)$, а коефіцієнти при змінних x, y, z у загальному рівнянні площини π_2 дають координати вектора $\bar{N}_{\pi_2}$: $\bar{N}_{\pi_2} = (A; B; C) = (1; 2; 0)$. Отже, залишилося провести обчислення за наведеною формулою:

$$\varphi = \arcsin \frac{|1 \cdot 4 + 2 \cdot 0 + 0 \cdot 1|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2} \cdot \sqrt{4^2 + 0^2 + 1^2}} = \arcsin \frac{4}{\sqrt{85}} = \arcsin 0,4339 \approx 25^\circ 72'.$$

Відповідь:

1) $\pi_1: 2x - y - 8z + 12 = 0$;

2) $\pi_2: x + 2y + 7 = 0$;

3) $\pi_3: 2x - y - 8z + 21 = 0$;

4) $d \approx 1,08$;

5) $l_1: \frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{1}$;

6) $l_2: \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -5 \\ z = 4 + t \end{cases}, \forall t \in (-\infty, +\infty)$;

7) $l_3: \frac{x-3}{2} = \frac{y+5}{-1} = \frac{z-4}{-8}$;

8) $d_1 \approx 7,26$;

9) $T\left(\frac{75}{23}; -\frac{118}{23}; \frac{68}{23}\right)$;

10) $\varphi = \arcsin 0,4339 \approx 25^\circ 72'$.

3. Зміст задач контрольної роботи

Задача 1. Задано матриці A, B і C . Виконати дії над ними.

1.0. Знайти $(C + 3B^2)A^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 7 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.1. Знайти $AC^T - 3B^2$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Знайти $A^2B + 2C^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

1.3. Знайти $(BA)^2 - 5C^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

1.4. Знайти $(4B - 5A^T)C$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 10 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

1.5. Знайти $(C^2 - 2B)A^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.6. Знайти $C^2 - 2AB^T$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.7. Знайти $4C^T - B^2A$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 5 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

1.8. Знайти $2C^T + (BA)^2$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 2 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 & -1 \\ 11 & 3 \end{pmatrix}.$$

1.9. Знайти $(3A - 2B^T)C$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ -2 & 0 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 9 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Задача 2. Розв'язати матричні рівняння $AX = B$ та $YA = C$, якщо:

2.0. $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} -1 & 7 \end{pmatrix}.$

2.1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 9 \end{pmatrix}.$

$$2.2. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad C = (5 \quad -4).$$

$$2.3. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = (-2 \quad -1).$$

$$2.4. \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C = (8 \quad 2).$$

$$2.5. \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad -9).$$

$$2.6. \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \end{pmatrix}, \quad C = (-3 \quad -1).$$

$$2.7. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad C = (4 \quad -7).$$

$$2.8. \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad C = (-1 \quad 5).$$

$$2.9. \quad A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -7 \\ 6 \end{pmatrix}, \quad C = (2 \quad 10).$$

Задача 3. Обчислити визначники двома способами: а) за методом Саррюса та за теоремою Лапласа; б) розкладаючи за елементами рядка (стовпця).

$$3.0. \quad \text{а)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ -1 & 0 & 2 \\ 4 & 7 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 3 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 & -3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$3.1. \quad \text{а)} \quad \begin{vmatrix} 0 & 7 & 2 \\ 3 & -6 & -3 \\ 13 & 1 & -1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 5 & 0 & 8 \\ -3 & 2 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$3.2. \quad \text{а)} \quad \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ -5 & 9 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} -2 & 1 & 5 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$3.3. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} -2 & 4 & 8 \\ 3 & -7 & 9 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 7 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 4 \\ 0 & -5 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$3.4. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 5 & -7 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$3.5. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -3 & 0 & 7 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 & 6 \\ 7 & 4 & 0 & 2 \\ -1 & 5 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$3.6. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ -4 & 6 & 0 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$3.7. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} -1 & 5 & 2 \\ 4 & -3 & 6 \\ 0 & 1 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 6 & -1 & 1 & -2 \\ -2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 5 & -4 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$3.8. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} 4 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & 7 \\ -5 & -3 & 12 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & 6 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$3.9. \quad \text{a)} \quad \begin{vmatrix} -6 & 0 & -3 \\ -1 & 7 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{vmatrix};$$

$$\text{б)} \quad \begin{vmatrix} -3 & -2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & -2 \\ 7 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 6 \end{vmatrix}.$$

Задача 4. Для заданих систем знайти: а) розв'язок трьома способами (за формулами Крамера, методом оберненої матриці та методом Жордана – Гаусса); б) загальний, опорний та деякий частинний розв'язки.

$$4.0. \quad \text{а)} \quad \begin{cases} -x_1 + x_2 - 7x_3 = 5 \\ 2x_2 + 5x_3 = 6 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -3 \end{cases}; \quad \text{б)} \quad \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ 7x_1 - x_2 = 0 \\ 6x_1 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{array}{ll}
4.1. \text{ a)} \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + x_2 + x_3 = -1 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 7 \\ 4x_1 - 3x_2 = 7 \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_3 = 0 \\ 2x_1 + 7x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right. \\
4.2. \text{ a)} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = -7 \\ -x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 - x_2 - 11x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right. \\
4.3. \text{ a)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + x_3 = 7 \\ x_2 - 5x_3 = 9 \\ -x_1 - x_2 + 3x_3 = -7 \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 3x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \end{array} \right. \\
4.4. \text{ a)} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 - x_2 + x_3 = 9 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 = -6 \\ x_1 - 3x_3 = 1 \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 - 4x_3 = 0 \end{array} \right. \\
4.5. \text{ a)} \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 7x_3 = -3 \\ x_2 - 4x_3 = 6 \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 5x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 + x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. \\
4.6. \text{ a)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 4x_2 - x_3 = -5 \\ 5x_1 + 2x_3 = 4 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_3 = 0 \end{array} \right. \\
4.7. \text{ a)} \left\{ \begin{array}{l} -5x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 = -2 \\ x_1 + 2x_2 = -6 \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 = 0 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \end{array} \right. \\
4.8. \text{ a)} \left\{ \begin{array}{l} 3x_2 + x_3 = -1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 = -3 \\ 2x_1 + 6x_2 - 3x_3 = 0 \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 0 \\ x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right. \\
4.9. \text{ a)} \left\{ \begin{array}{l} -x_1 + 9x_2 - x_3 = 3 \\ 8x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 5x_1 + 2x_3 = -3 \end{array} \right. & \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 3x_3 = 0 \\ -x_1 + 5x_2 + 7x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right.
\end{array}$$

Задача 5. Дослідити системи на сумісність і у випадку сумісності знайти розв'язок.

$$5.0. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 3 \end{array} \right. ; \quad \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1 \end{array} \right. . \end{array}$$

$$5.1. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -6 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 6x_4 = -16 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -11 \end{array} \right. ; \quad \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - 9x_3 + 6x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 1 \end{array} \right. . \end{array}$$

$$5.2. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 4 \end{array} \right. ; \quad \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 9 \end{array} \right. . \end{array}$$

$$5.3. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 4 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 5 \\ 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 14x_4 = 9 \end{array} \right. ; \quad \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 2x_4 = 5 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - x_4 = 3 \\ 4x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 3 \end{array} \right. . \end{array}$$

$$5.4. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 = 12 \\ x_1 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 16 \end{array} \right. ; \quad \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 4x_1 + x_2 - 13x_3 - 7x_4 = -3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 3 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = -9 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 0 \end{array} \right. . \end{array}$$

$$5.5. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + x_2 - 3x_3 + 3x_4 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 7 \\ 4x_1 + x_2 - 9x_3 + 6x_4 = 11 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 1 \end{array} \right. ; \quad \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 - 11x_3 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{array} \right. . \end{array}$$

$$5.6. \quad \begin{array}{l} \text{a)} \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -2 \\ x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 9 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 - 3x_4 = 4 \end{array} \right. ; \quad \text{б)} \left\{ \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 - 5x_3 + 4x_4 = 3 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 - x_4 = 1 \\ x_2 - x_3 - 2x_4 = -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = 4 \end{array} \right. . \end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
5.7. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 = 4 \\ x_1 + 3x_2 - 7x_3 - 2x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + x_4 = 3 \end{cases} & \text{ б) } \begin{cases} x_1 - x_3 + 3x_4 = 7 \\ x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 = -2 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 10x_4 = 12 \\ x_1 + x_2 - 5x_3 + 2x_4 = 1 \end{cases} \\
5.8. \text{ а) } \begin{cases} x_1 + x_2 - 4x_3 - 4x_4 = 3 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 + 5x_4 = -12 \\ 4x_1 + x_2 - 13x_3 - 7x_4 = -3 \\ 2x_1 - x_2 - 5x_3 + x_4 = -9 \end{cases} & \text{ б) } \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - 7x_3 - 14x_4 = -1 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 - 5x_4 = 4 \\ 3x_2 - x_3 + 4x_4 = -1 \\ x_1 - 4x_2 - 3x_3 - 9x_4 = 5 \end{cases} \\
5.9. \text{ а) } \begin{cases} x_1 - x_2 - 4x_3 + 3x_4 = -6 \\ x_1 + 3x_2 - 8x_3 - 5x_4 = 6 \\ 2x_1 + x_2 - 11x_3 = -3 \\ x_1 + 2x_2 - 7x_3 - 3x_4 = 3 \end{cases} & \text{ б) } \begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 - 4x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 = 5 \\ x_1 - 5x_2 + 9x_3 - 6x_4 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - 5x_4 = -11 \end{cases}
\end{array}$$

Задача 6. Задано координати точок $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$. Необхідно: 1) довести, що точки A, B, C утворюють трикутник, а на A, B, C і D можна побудувати піраміду; 2) обчислити довжини сторін та кути трикутника ABC ; 3) знайти площу трикутника ABC ; 4) знайти об'єм піраміди $ABCD$ та висоту, опущену з вершини D на основу ABC .

6.0. $A(5; 2; 0), B(2; 5; 0), C(1; 2; 4), D(-1; 1; 1)$.

6.1. $A(1; 3; 0), B(1; -1; 2), C(0; 1; -1), D(-3; 0; 1)$.

6.2. $A(1; 0; 2), B(1; 2; -1), C(2; -2; 1), D(2; 1; 0)$.

6.3. $A(1; 2; -3), B(1; 0; 1), C(-2; -1; 6), D(0; -5; -4)$.

6.4. $A(3; 10; -1), B(-2; 3; -5), C(-6; 0; -3), D(1; -1; 2)$.

6.5. $A(-1; 2; 4), B(-1; -2; -4), C(3; 0; -1), D(7; -3; 1)$.

6.6. $A(0; -3; 1), B(-4; 1; 2), C(2; -1; 5), D(3; 1; -4)$.

6.7. $A(1; 3; 0), B(4; -1; 2), C(3; 0; 1), D(-4; 3; 5)$.

6.8. $A(-2; -1; -1), B(0; 3; 2), C(3; 1; -4), D(-4; 7; 3)$.

6.9. $A(2; -4; -3), B(5; -6; 0), C(-1; 3; -3), D(-5; 2; 8)$.

Задача 7. Вектори $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\vec{c} = (c_x, c_y, c_z)$ подані у координатній формі. Знайти: 1) напрямні косинуси вектора $\vec{p}$; 2) проекцію вектора $\vec{q}$ на вектор $\vec{r}$; 3) скалярний і векторний добутки векторів $\vec{p}$ і $\vec{q}$; 4) значення параметра m , для якого вектори $\vec{r} - m\vec{i}$ та $\vec{q}$ ортогональні, якщо:

7.0. $\vec{a} = (2, -2, 4)$, $\vec{b} = (5, 0, -1)$, $\vec{c} = (2, 3, 1)$;

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{b}, \quad \vec{q} = \vec{a} - 2\vec{c}, \quad \vec{r} = 2\vec{b} + \vec{c}.$$

7.1. $\vec{a} = (2, -6, 4)$, $\vec{b} = (-1, 1, 3)$, $\vec{c} = (3, 0, -2)$;

$$\vec{p} = 2\vec{a} - 4\vec{b}, \quad \vec{q} = \frac{1}{2}\vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{r} = 3\vec{b} + 2\vec{c}.$$

7.2. $\vec{a} = (-1, 3, 4)$, $\vec{b} = (2, 4, -6)$, $\vec{c} = (-5, 1, 2)$;

$$\vec{p} = 2\vec{a} + \vec{b}, \quad \vec{q} = 3\vec{a} - 2\vec{c}, \quad \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{b} - \vec{c}.$$

7.3. $\vec{a} = (2, -2, 0)$, $\vec{b} = (-4, 3, 1)$, $\vec{c} = (0, 5, -2)$;

$$\vec{p} = \frac{1}{2}\vec{a} - \vec{c}, \quad \vec{q} = 3\vec{a} + 2\vec{b}, \quad \vec{r} = 2\vec{a} - \vec{c}.$$

7.4. $\vec{a} = (-4, 3, 2)$, $\vec{b} = (-2, 1, 5)$, $\vec{c} = (4, 0, -2)$;

$$\vec{p} = 2\vec{a} - 3\vec{b}, \quad \vec{q} = -\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \vec{r} = \vec{a} + 2\vec{c}.$$

7.5. $\vec{a} = (3, 3, -1)$, $\vec{b} = (-2, -4, 2)$, $\vec{c} = (0, 5, 1)$;

$$\vec{p} = -\vec{a} - 3\vec{b}, \quad \vec{q} = \vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{r} = \frac{1}{2}\vec{b} + 2\vec{c}.$$

7.6. $\vec{a} = (5, -5, 0)$, $\vec{b} = (-1, 1, -2)$, $\vec{c} = (4, -3, 0)$;

$$\vec{p} = \frac{1}{5}\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{q} = 3\vec{b} + \vec{c}, \quad \vec{r} = \vec{a} - 2\vec{c}.$$

7.7. $\vec{a} = (-1, 0, 4)$, $\vec{b} = (-3, -6, 9)$, $\vec{c} = (-2, 3, 0)$;

$$\vec{p} = -3\vec{a} + \frac{1}{3}\vec{b}, \quad \vec{q} = 2\vec{a} - \vec{c}, \quad \vec{r} = \vec{b} + 3\vec{c}.$$

7.8. $\vec{a} = (3, 2, -1)$, $\vec{b} = (-1, 0, -2)$, $\vec{c} = (-4, 4, 0)$;

$$\vec{p} = -3\vec{a} - 2\vec{b}, \quad \vec{q} = 2\vec{a} + \vec{c}, \quad \vec{r} = \vec{b} + \frac{1}{4}\vec{c}.$$

7.9. $\vec{a} = (2, 1, 0)$, $\vec{b} = (-2, -3, 3)$, $\vec{c} = (0, -4, 4)$;

$$\vec{p} = \vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}, \quad \vec{q} = 5\vec{a} + 3\vec{b}, \quad \vec{r} = \vec{a} + 2\vec{c}.$$

Задача 8. Переконатися, що вектори $\bar{a}_1$, $\bar{a}_2$, $\bar{a}_3$ утворюють базис в $\mathbb{R}^3$ і знайти розклад вектора $\bar{a}_4$ за цим базисом.

8.0. $\bar{a}_1 = (3, -2, 1)$, $\bar{a}_2 = (-1, 1, -2)$, $\bar{a}_3 = (2, 1, -3)$, $\bar{a}_4 = (11, -6, 5)$.

8.1. $\bar{a}_1 = (2, 1, 0)$, $\bar{a}_2 = (1, -1, 2)$, $\bar{a}_3 = (2, 2, -1)$, $\bar{a}_4 = (3, 7, -7)$.

8.2. $\bar{a}_1 = (3, 1, -1)$, $\bar{a}_2 = (2, 4, 3)$, $\bar{a}_3 = (5, 2, 1)$, $\bar{a}_4 = (-7, 0, -2)$.

8.3. $\bar{a}_1 = (1, -1, 2)$, $\bar{a}_2 = (3, 5, 4)$, $\bar{a}_3 = (0, 2, 7)$, $\bar{a}_4 = (-5, -5, 15)$.

8.4. $\bar{a}_1 = (4, 2, 1)$, $\bar{a}_2 = (0, 2, 3)$, $\bar{a}_3 = (2, -1, 1)$, $\bar{a}_4 = (-24, 8, 0)$.

8.5. $\bar{a}_1 = (1, 2, 3)$, $\bar{a}_2 = (-1, 4, 7)$, $\bar{a}_3 = (8, 9, 5)$, $\bar{a}_4 = (13, 1, -10)$.

8.6. $\bar{a}_1 = (-2, 2, 3)$, $\bar{a}_2 = (4, -5, 1)$, $\bar{a}_3 = (8, 2, -1)$, $\bar{a}_4 = (-18, -3, 12)$.

8.7. $\bar{a}_1 = (1, -2, 1)$, $\bar{a}_2 = (0, 2, 1)$, $\bar{a}_3 = (3, 0, -1)$, $\bar{a}_4 = (0, -1, 1)$.

8.8. $\bar{a}_1 = (-2, 1, 1)$, $\bar{a}_2 = (0, 1, 2)$, $\bar{a}_3 = (-1, 0, 1)$, $\bar{a}_4 = (0, -1, 3)$.

8.9. $\bar{a}_1 = (2, 0, 1)$, $\bar{a}_2 = (0, -1, 2)$, $\bar{a}_3 = (2, -1, 1)$, $\bar{a}_4 = (0, 1, -3)$.

Задача 9. Трикутник $A_1A_2A_3$ задано координатами його вершин: $A_1(x_1; y_1)$, $A_2(x_2; y_2)$, $A_3(x_3; y_3)$. Знайти: 1) рівняння сторони A_1A_2 ; 2) рівняння і довжину висоти, проведеної з вершини A_1 ; 3) рівняння і довжину медіани, проведеної з вершини A_2 ; 4) рівняння і довжину бісектриси, проведеної з вершини A_3 ; 5) кут між проведеними висотою і медіаною; 6) рівняння прямої l , яка проходить через точку A_1 паралельно протилежній стороні трикутника; 7) координати точки P , симетричної точці A_3 відносно сторони A_1A_2 . Зробити рисунок.

9.0. $A_1(-2; -3)$, $A_2(2; 7)$, $A_3(6; -1)$.

9.1. $A_1(-5; 1)$, $A_2(6; 3)$, $A_3(-1; -3)$.

9.2. $A_1(3; -3)$, $A_2(-4; 1)$, $A_3(-1; 5)$.

9.3. $A_1(3; 5)$, $A_2(-2; 2)$, $A_3(2; -4)$.

9.4. $A_1(3; 5)$, $A_2(-3; 2)$, $A_3(5; -4)$.

9.5. $A_1(-2; 4)$, $A_2(5; 6)$, $A_3(3; -4)$.

9.6. $A_1(7; -7)$, $A_2(1; 2)$, $A_3(-5; -4)$.

9.7. $A_1(-3; 4)$, $A_2(4; 5)$, $A_3(8; -3)$.

9.8. $A_1(4; 3)$, $A_2(-3; -2)$, $A_3(2; -6)$.

9.9. $A_1(-2; 4)$, $A_2(5; 6)$, $A_3(3; -4)$.

Задача 10. Скласти рівняння відповідної кривої другого порядку та побудувати її.

10.0. Скласти рівняння еліпса, фокуси якого лежать на осі абсцис симетрично відносно початку координат, велика піввісь дорівнює 10, а ексцентриситет – 0,8.

10.1. Скласти рівняння параболи з фокусом у точці $F(-2; 0)$ і директрисою $x - 2 = 0$.

10.2. Скласти рівняння гіперболи з фокусами у точках $F_1(-3; 0)$ і $F_2(3; 0)$, якщо її ексцентриситет дорівнює 1,5.

10.3. Скласти рівняння параболи з фокусом у точці $F(5; 0)$ і вершиною у початку координат.

10.4. Скласти рівняння гіперболи з фокусами у точках $F_1(-10; 0)$ і $F_2(10; 0)$, якщо рівняння її асимптот: $y = \pm \frac{4}{3}x$.

10.5. Скласти рівняння еліпса з фокусами у точках $F_1(0; -12)$ і $F_2(0; 12)$, якщо його ексцентриситет дорівнює $12/13$.

10.6. Скласти рівняння параболи з фокусом у точці $F(0; 4)$ і директрисою з рівнянням $y + 4 = 0$.

10.7. Скласти рівняння гіперболи з фокусами у точках $F_1(0; -5)$ і $F_2(0; 5)$, якщо її ексцентриситет дорівнює $5/3$.

10.8. Скласти рівняння параболи з фокусом у точці $F(-6; 0)$ і вершиною у початку координат.

10.9. Скласти рівняння еліпса з фокусами у точках $F_1(0; -3)$ і $F_2(0; 3)$, якщо його мала піввісь дорівнює 4.

Задача 11. Визначити тип кривої другого порядку, звести її рівняння до канонічного вигляду, побудувати криву та вказати: для кола – координати центра і радіус; для еліпса – велику та малу півосі, координати фокусів, ексцентриситет; для гіперболи – дійсну та уявну півосі, координати фокусів, ексцентриситет, рівняння асимптот; для параболи – координати вершини і фокуса, величину параметра, рівняння директриси.

11.0. а) $9x^2 - 36y^2 = 324$; б) $y^2 - 8x + 4y + 36 = 0$.

11.1. а) $25x^2 + 4y^2 = 100$; б) $16x^2 - 25y^2 + 64x + 150y - 561 = 0$.

11.2. а) $x^2 = 2(y + 1)$; б) $4x^2 + 25y^2 + 24x - 200y + 336 = 0$.

11.3. а) $16x^2 - 25y^2 = 400$; б) $4x^2 + 4y^2 + 16x - 24y + 27 = 0$.

11.4. а) $9x^2 + 16y^2 = 144$; б) $x^2 + 6x - 4y + 29 = 0$.

11.5. а) $y^2 = 3(x + 1)$; б) $4x^2 - 9y^2 - 16x - 90y - 245 = 0$.

11.6. а) $4x^2 - 49y^2 = 196$; б) $9x^2 + 16y^2 - 54x + 128y + 193 = 0$.

11.7. а) $x^2 = -5(y + 3)$; б) $9x^2 + 25y^2 + 36x - 50y - 164 = 0$.

11.8. а) $4x^2 + 9y^2 = 36$; б) $25x^2 - 36y^2 - 50x - 216y - 1199 = 0$.

11.9. а) $25x^2 - 9y^2 = 225$; б) $-3x^2 - 3y^2 + 6x + 24y - 39 = 0$.

Задача 12. Задано координати точок $A(x_1; y_1; z_1)$, $B(x_2; y_2; z_2)$, $C(x_3; y_3; z_3)$, $D(x_4; y_4; z_4)$. (див. задачу 6). Знайти: 1) рівняння площини π_1 , що проходить через точки A , B , C ; 2) рівняння площини π_2 , що проходить через точку D перпендикулярно вектору $\overline{AC}$; 3) рівняння площини π_3 , що проходить через точку D паралельно площині π_1 ; 4) відстань від точки D до площини π_1 ; 5) рівняння прямої l_1 , що проходить через точки A і B ; 6) параметричні рівняння прямої l_2 , що проходить через точку D паралельно прямій l_1 ; 7) рівняння прямої l_3 , що проходить через точку D перпендикулярно площині π_1 ; 8) відстань від точки D до прямої l_1 ; 9) точку перетину прямої l_3 і площини π_1 ; 10) кут між прямою l_1 і площиною π_2 .

4. Рекомендована література

4.1. Основна

1. Александров П. С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / П. С. Александров. – Москва : Наука, 1979. – 512 с.
2. Виноградов И. И. Аналитическая геометрия : учебник / И. И. Виноградов. – Москва : Наука, 1986. – 176 с.
3. Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін. ; заг. ред. д.е.н. Л. М. Малярець. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. – 772 с.
4. Вища математика : підручник для студентів економічних напрямів підготовки / В. С. Пономаренко, Л. М. Малярець, А. В. Бойко та ін. ; за ред. д.е.н. В. С. Пономаренка. – Харків : Фоліо, 2014. – 670 с.
5. Высшая математика для экономистов / под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – Москва : Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 440 с.
6. Игнатьева А. В. Курс высшей математики / А. В. Игнатьева, Т. И. Краснощекова, В. Ф. Смирнов. – Москва : Высшая школа, 1968. – 692 с.
7. Клетеник Д. В. Сборник задач по аналитической геометрии / Д. В. Клетеник. – Москва : Наука, 1986. – 324 с.
8. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – Москва : Наука, 1971. – 352 с.
9. Привалов И. И. Аналитическая геометрия : учебник / И. И. Привалов. – Москва : Наука, 1966. – 272 с.
10. Сенчуков В. Ф. Вища математика. Загальні розділи : навч. посіб. Ч. 1 / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2013. – 444 с.
11. Сенчуков В. Ф. Вища математика. Загальні розділи : навч. посіб. Ч. 3 / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 354 с.
12. Сенчуков В. Ф. Зображення просторових фігур : навч.-метод. посіб. / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2008. – 76 с.
13. Травкін Ю. І. Лінійна алгебра і аналітична геометрія : навч. посіб. / Ю. І. Травкін. – Харків : Майдан, 2009. – 416 с.
14. Четверухин Н. Ф. Проективная геометрия : учебник / Н. Ф. Четверухин. – Москва : Просвещение, 1969. – 370 с.

4.2. Додаткова

15. Александров П. С. Лекции по аналитической геометрии / П. С. Александров. – Москва : Наука, 1968. – 912 с.
16. Бугров Я. С. Высшая математика : учебник для вузов : В 3-х т. Т. 1 : Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии / Я. С. Бугров, С. М. Никольский ; под ред. В. А. Садовниченко. – 6-е изд., стереотип. – Москва : Дрофа, 2004. – 288 с.
17. Головина Л. И. Линейная алгебра и некоторые ее приложения / Л. И. Головина. – Москва : Наука, 1971. – 288 с.
18. Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Наука, 1984. – 294 с.
19. Ильин В. А. Аналитическая геометрия / В. А. Ильин, Э. Г. Позняк. – Москва : Наука, 1988. – 223 с.
20. Роджерс Д. Математические основы машинной графики / Д. Роджерс, Дж. Адамс. – Москва : Мир, 2001. – 604 с.

4.3. Інформаційні ресурси

21. Афінні перетворення – Вікіпідручник [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://ru.wikibooks.org>.
22. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект лекций : учеб. пособ. [Электронный ресурс] / В. И. Антонов, М. В. Лагунова, Н. И. Лобкова и др. – Москва : Проспект, 2011. – 144 с. – Режим доступа : <http://www.vixri.ru/?p=1077>.
23. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике: полный курс [Электронный ресурс] / Д. Т. Письменный. – 9-е изд. – Москва : Айрис-пресс, 2009. – 608 с. – Режим доступа : <http://www.alleng.ru/d/math/math152.htm>.
24. Протасов Ю. М. Линейная алгебра и аналитическая геометрия: курс лекций для студентов заочного отделения [Электронный ресурс] / Ю. М. Протасов. – Москва : Наука, 2010. – 168 с. – Режим доступа : <http://rucont.ru/file.ashx?guid=c5732b5f-b0d0-4957-8b3a-2c96f36abcb8>.
25. Сенчуков В. Ф. Вища математика. Загальні розділи : навч. посіб. Ч. 1 [Електронний ресурс] / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2013. – 444 с. – Режим доступу : <http://www.repository.hneu.edu.ua/Сенчуков>.

Зміст

Вступ.....	3
1. Теоретичні відомості.....	5
1.1. Матриці та дії над ними	5
1.2. Визначники. Обернена матриця. Ранг матриці.....	11
1.3. Системи n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $n \times n$)	17
1.4. Системи m лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими (СЛАР $m \times n$)	21
1.5. Векторна алгебра.....	23
1.6. Лінійні m -вимірні простори. Лінійна незалежність і залежність системи векторів. Розклад вектора за базисом.....	33
1.7. Пряма на площині	38
1.8. Криві другого порядку (К2П)	46
1.9. Площина у просторі	52
1.10. Пряма у просторі. Пряма і площина у просторі.....	56
2. Зразок виконання варіанта контрольної роботи.....	62
3. Зміст задач контрольної роботи.....	98
4. Рекомендована література.....	109
4.1. Основна	109
4.2. Додаткова	110
4.3. Інформаційні ресурси.....	110

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ЛІНІЙНА АЛГЕБРА ТА АНАЛІТИЧНА ГЕОМЕТРІЯ

**Методичні рекомендації та завдання
до виконання контрольних робіт
для студентів спеціальності
122 "Комп'ютерні науки та інформаційні технології"
першого (бакалаврського) рівня**

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Денисова** Тетяна Володимирівна
Рибалко Антоніна Павлівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. В. Анацька*

Коректор *О. В. Анацька*

План 2017 р. Поз. № 237 ЕВ. Обсяг 112 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.*