МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ СЕМЕНА КУЗНЕЦА

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ И МЕТОДЫ ОПТИМИЗАЦИИ

Методические рекомендации
к практическим заданиям по разделу
"Динамическое программирование"
для иностранных студентов всех специальностей
первого (бакалаврского) уровня

Харьков
ХНЭУ им. С. Кузнеца
2019

УДК 519.8(07.034)
И88

Составители: А. К. Шевченко
А. В. Жуков

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и экономико-математических методов.
Протокол № 3 от 10.10.2018 г.

Самостоятельное электронное текстовое сетевое издание

И88 **Исследование** операций и методы оптимизации [Электронный ресурс] : методические рекомендации к практическим заданиям по разделу "Динамическое программирование" для иностранных студентов всех специальностей первого (бакалаврского) уровня / сост. А. К. Шевченко, А. В. Жуков. – Харьков : ХНЭУ им. С. Кузнеца, 2019. – 44 с. (Рус. яз.)

Изложен теоретический материал в сжатом виде с иллюстративными примерами, контрольные вопросы для самодиагностики, задания для самостоятельной работы.

Рекомендовано для иностранных студентов всех специальностей первого (бакалаврского) уровня.

УДК 519.8(07.034)

Введение

Управление любой социально-экономической системой реализуется как процесс, подчиняющийся определенным закономерностям. Их знание помогает определить условия, необходимые и достаточные для осуществления данного процесса.

В предлагаемой работе рассматриваются основные понятия исследования операций, а именно, динамического программирования, используются простые математические модели, описываются основные методы решения задач.

Основными **задачами** изучения раздела "Динамическое программирование" является повышение уровня математической подготовки студентов с усилением ее прикладной направленности, а также получение необходимой математической базы для изучения других дисциплин математического цикла.

В процессе изучения данной дисциплины студент приобретает аналитические исследовательские **компетентности**, которые необходимы современному экономисту в любых сферах его деятельности, а именно уметь:

проводить основные математические вычисления, самостоятельно применять полученные знания для решения соответствующих задач и ситуационных упражнений;

анализировать и обрабатывать полученные результаты с учетом исходных данных и делать выводы на достаточно высоком профессиональном уровне;

отслеживать основные тенденции и направления развития математической науки, самостоятельно работать с научно-методической литературой;

использовать полученные знания для дальнейшего формирования соответствующих экономико-математических моделей и их решения;

в случае сложного задания использовать метод разложения от сложного к простому, то есть приводить отдельные сложные части к более простым с последующим их решением;

строить динамические модели производственного процесса для реальных экономических ситуаций.

1. Общие понятия динамического программирования

1.1. Предмет и задачи динамического программирования

Методами линейного программирования оптимальное решение в экономике находят для некоторой одной стационарной ситуации, то есть экономический процесс рассматривается статически. Найденное оптимальное решение применяют на одном этапе планирования. Такие задачи называют одноэтапными или одношаговыми. В действительности экономика динамична. Экономический процесс зависит от времени. Поэтому интересно найти оптимальное решение не для одного момента времени, а на протяжении некоторого периода. Период разбивают на несколько этапов и решают многоэтапную задачу, последовательно на каждом из этапов, получая оптимальное решение, которое называют условно оптимальным. Такие задачи решают методом динамического программирования [2].

Итак, **динамическое программирование** – это математический аппарат, который даёт возможность принять ряд решений, обеспечивающих оптимальность развития экономического процесса. Это позволяет управлять экономическим процессом в целом: распределять и перераспределять ресурсы, объём поставок сырья; разрабатывать правила управления запасами сырья, устанавливая момент и размер пополнения запасов сырья. Метод динамического программирования применяют при: разработке календарного планирования производства и занятости в условиях колеблющегося спроса на продукцию; распределении дефицитных капиталовложений между возможными новыми направлениями их использования; составлении календарных планов текущего и капитального ремонта оборудования; решении задачи замены оборудования; разработке долгосрочных планов замены выбывающих из эксплуатации основных фондов и т.д. [4].

В реально существующих экономических системах еженедельно, ежемесячно, ежеквартально, ежегодно приходится принимать микро и макроэкономические решения. С использованием метода динамического программирования появляется возможность принять оптимальное решение, которое приводит к получению дополнительной прибыли или к минимализации затрат на производство продукции.

1.2. Общая постановка задачи динамического программирования

Предположим, что мы имеем некоторый управляемый процесс (например, экономический): процесс распределения средств между предприятиями, процесс использования ресурсов в течение ряда лет, процесс замены оборудования, процесс пополнения запасов и т.д. Обозначим S_0 как начальное состояние системы. Пусть система находится в состоянии S_0 и является управляемой. В результате управления система переходит из состояния S_0 в состояние S^*. Предположим, что управление можно разбить на n шагов, тогда решение будем принимать последовательно на каждом шаге, т.е. получим многошаговый процесс.

Обозначим X_k – управление на k-м шаге $(k = 1, 2, \ldots n)$. Переменные X_k могут быть числом, точкой в n-мерном пространстве, качественным признаком. Тогда $\overline{X}(X_1, X_2, \ldots X_n)$ – управление, переводящее систему из состояния S_0 в S^*.

Обозначим S_k – состояние системы после k-го шага. Получим последовательность состояний $S_0, S_1, S_2, \ldots, S_k, \ldots, S_n = S^*$ (рис. 1.1).

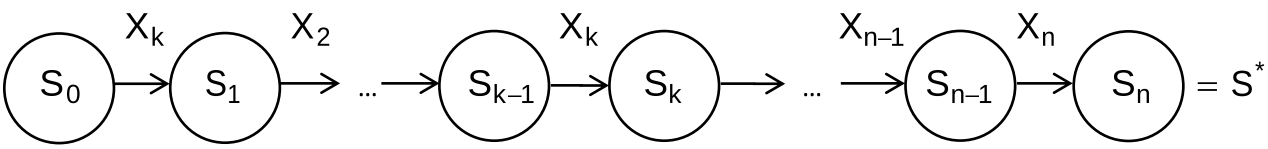

Рис. 1.1. **Состояние системы**

Показатель эффективности этой управляемой системы – функция цели Z, которая зависит от начального состояния S_0 и управления $\overline{X}$:

$$Z = F(S_0, \overline{X}). \tag{1.1}$$

Задача заключается в том, чтобы из множества возможных управлений найти такое управление $\overline{X}^*$, при котором функция цели принимает экстремальное значение (максимальное или минимальное).

1.3. Геометрическая интерпретация задачи динамического программирования

Дадим геометрическую интерпретацию этой задачи. Пусть состояние экономической системы зависит от двух факторов, т.е. это точка на плоскости. При осуществлении управления X_1 точка перемещается из состояния S_0 в S_1, при осуществлении управления X_2 точка перемещается из состояния S_1 в S_2 и т.д. пока достигнет состояния $S_n = S^*$ (рис. 1.2).

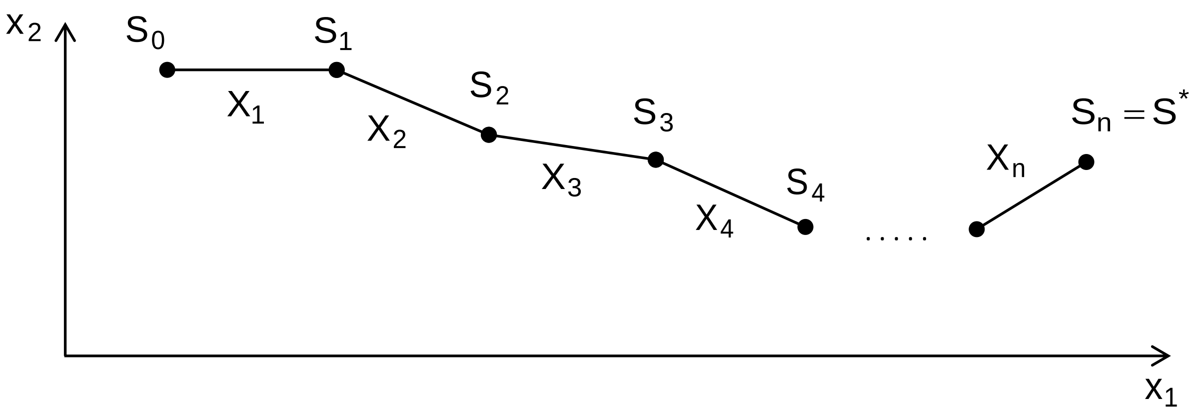

Рис. 1.2. **Геометрическая интерпретация задачи динамического программирования**

Из всех возможных траекторий требуется найти такую, которая реализует оптимальное управление $\overline{X}^*\left(X_1^*, X_2^*, \dots, X_n^*\right)$ и приводит функцию цели к экстремальному значению.

1.4. Принцип оптимальности Беллмана

Принцип оптимальности: оптимальное поведение обладает тем свойством, что, каковы бы ни были первоначальное состояние и решение в начальный момент, последующие решения должны составлять оптимальное поведение относительно состояния, получающегося в результате предыдущего решения.

На основании принципа оптимальности строим многоэтапный процесс управления. Весь процесс управления разбиваем на n этапов, и на каждом этапе принимается оптимальное управление по отношению к предыдущему этапу. Поскольку на последнем n-м этапе решение должно быть оптимальным по отношению к $(n-1)$ этапу, то задачу динамического программирования можно решать двумя способами: от начала S_0 к концу

S^* или от конца к началу, то есть от S^* к S_0. Итак, разбиваем весь процесс управления на n шагов, границы обозначим состояниями S_0, S_1, S_2, … , S_k , … , S_n, $S_n = S^*$ – конечное состояние. В качестве функции цели выбираем максимальный прирост выпуска продукции; максимальную прибыль и т.д. и решаем задачу на максимум; выбираем затраты времени или финансовые затраты на производство продукции и т.д. и решаем задачу на минимум. На каждом шаге выбираем оптимальное управление по отношению к предыдущему шагу, его называют условно оптимальное управление. Функция цели обладает условием аддитивности, т.е. характеризует совокупный доход за n этапов или совокупный расход за n этапов.

$$F_{опт}(x) = \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \sum_{k=1}^{n} F_k(x_k), \qquad (1.2)$$

где x – вложенные средства за n этапов;

x_k – средства, вложенные на k-м этапе;

$F_k(x_k)$ – функция цели на k-м этапе.

1.5. Уравнение Беллмана

Функциональные уравнения Беллмана имеют следующий вид. Для случая оптимизации от S_0 к S_n уравнение Беллмана:

$$F_k^*(S_k) = \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \left(G_k(S_k, X_k) + F_{k-1}^*(S_{k-1})\right), \qquad (1.3)$$

где $F_{k-1}^*(S_{k-1})$ – оптимальное значение функции цели при оптимальной стратегии $(k-1)$-шагового процесса;

$G_k(S_k, X_k)$ – доход, получаемый при переходе из состояния S_{k-1} в S_k с управляющим решением X_k;

$F_k^*(S_k)$ – оптимальное значение функции цели при оптимальной стратегии k-шагового процесса;

$k = 1, 2, \ldots, n$.

Для случая оптимизации от S_n к S_0 уравнение Беллмана [2]:

$$F_{k-1}^*(S_{k-1}) = \begin{matrix} \max \\ \min \end{matrix} \left(G_k(S_{k-1}, X_k) + F_k^*(S_k)\right), \qquad (1.4)$$

где $F_k^*(S_k)$ – оптимальное значение функции цели в состоянии S_k;

$G_k(S_{k-1}, X_k)$ – доход, получаемый при переходе из состояния S_k в S_{k-1} с управляющим решением X_k;

$F_{k-1}^*(S_{k-1})$ – оптимальное значение функции цели в состоянии S_{k-1};

$k = n$, $n-1$, …, 1.

2. Задача о распределении средств между предприятиями

Пусть задан возможный прирост выпуска продукции n предприятиями при дополнительных капиталовложениях. Требуется распределить их на n предприятий таким образом, чтобы общий доход фирмы был максимальным. Исходное количество средств будем распределять с дискретным интервалом Δx. Получим набор значений: x_i: x_1, x_2, … x_n, где x_i обозначает количество средств, которые надо оптимальным образом распределить между предприятиями с дискретным шагом Δx. Если одному предприятию выделили $x = c$ средств, значит всем остальным $(c - x)$ средств. Тогда уравнение Беллмана можно записать в более простой форме [1].

$$F_k(c) = \max(G_k(x) + F_{k-1}(c - x)). \qquad (2.1)$$

Рассмотрим это на конкретном примере.

Пример 2.1. Фирма объединяет четыре предприятия. Задан возможный прирост выпуска продукции для каждого предприятия при осуществлении дополнительных капиталовложений на их реконструкцию и модернизацию. Составьте план распределения капиталовложений, максимизирующий общий прирост выпуска продукции фирмы.

Исходные данные записаны в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Исходные данные

Капиталовложения x (тыс. грн)	Прирост выпуска продукции (тыс. грн) $G_k(x)$ на предприятиях			
	$G_1(x)$	$G_2(x)$	$G_3(x)$	$G_4(x)$
50	25	30	36	28
100	60	70	64	56
150	100	90	95	110
200	140	122	130	142

$G_k(x)$ – прирост выпуска продукции на k-м предприятии при капиталовложениях x тыс. грн. Итак, 200 тыс. грн с интервалом 50 тыс. грн. будем распределять между четырьмя предприятиями. Воспользуемся уравнением Беллмана (2.1).

$$F_1(x) = \max_{0 \le x \le 200} G_1(x) = G_1(x). \tag{2.2}$$

Результаты расчётов запишем в табл. 2.2. Далее распределим все средства между двумя предприятиями. Тогда уравнение Беллмана будет:

$$F_2(c) = \max_{0 \le x \le c}(G_2(x) + F_1(c - x)). \tag{2.3}$$

Вычислим условно оптимальные значения функции цели на втором этапе:

$$F_2(50) = \max\begin{Bmatrix} G_2(0) + F_1(50) \\ \underline{G_2(50) + F_1(0)} \end{Bmatrix} = \max\begin{Bmatrix} 0 + 25 \\ \underline{30 + 0} \end{Bmatrix} = 30$$

$$F_2(100) = \max_{0 \le x \le 100}(G_2(x) + F_1(100 - x))$$

$$F_2(100) = \max\begin{pmatrix} G_2(0) + F_1(100) \\ G_2(50) + F_1(50) \\ \underline{G_2(100) + F_1(0)} \end{pmatrix} = \max\begin{pmatrix} 0 + 60 \\ 30 + 25 \\ \underline{70 + 0} \end{pmatrix} = 70$$

$$F_2(150) = \max_{0 \le x \le 150}(G_2(x) + F_1(150 - x))$$

$$F_2(150) = \max\begin{pmatrix} \underline{G_2(0) + F_1(150)} \\ G_2(50) + F_1(100) \\ G_2(100) + F_1(50) \\ G_2(150) + F_1(0) \end{pmatrix} = \max\begin{pmatrix} \underline{0 + 100} \\ 30 + 60 \\ 70 + 25 \\ 90 + 0 \end{pmatrix} = 100$$

$$F_2(200) = \max_{0 \le x \le 200}(G_2(x) + F_1(200 - x))$$

$$F_2(200) = \max\begin{pmatrix} \underline{G_2(0) + F_1(200)} \\ G_2(50) + F_1(150) \\ G_2(100) + F_1(100) \\ G_2(150) + F_1(50) \\ G_2(200) + F_1(0) \end{pmatrix} = \max\begin{pmatrix} \underline{0 + 140} \\ 30 + 100 \\ 70 + 60 \\ 90 + 25 \\ 122 + 0 \end{pmatrix} = 140$$

Вывод: если 200 тыс. грн. распределить на два предприятия, то выгодно все деньги отдать второму предприятию. Прирост выпуска продукции будет наибольшим: в денежном эквиваленте – на 140 тыс. грн. Полученные значения запишем в табл. 2.2.

Далее распределим все средства на три предприятия. Уравнение Беллмана будет иметь вид:

$$F_3(c)=\max_{0\le x\le c}(G_3(x)+F_2(c-x)). \tag{2.4}$$

Вычислим:

$$F_3(50)=\max_{0\le x\le 50}(G_3(x)+F_2(50-x))$$

$$F_3(50)=\max\begin{pmatrix}G_3(0)+F_2(50)\\ \underline{G_3(50)+F_2(0)}\end{pmatrix}=\max\begin{pmatrix}0+30\\ 36+0\end{pmatrix}=36$$

$$F_3(100)=\max_{0\le x\le 100}(G_3(x)+F_2(100-x))$$

$$F_3(100)=\max\begin{pmatrix}\underline{G_3(0)+F_2(100)}\\ G_3(50)+F_2(50)\\ G_3(100)+F_2(0)\end{pmatrix}=\max\begin{pmatrix}0+70\\ 36+30\\ 64+0\end{pmatrix}=70$$

Таблица 2.2

Результаты расчётов функции $F_k(x)$

Капиталовложения x (тыс. грн)	$F_1(x)$	$F_2(x)$	$F_3(x)$	$F_4(x)$
50	25	30	36	36
100	60	70	70	70
150	100	100	106	110
200	140	140	140	146

$$F_3(150)=\max_{0\le x\le 150}(G_3(x)+F_2(150-x))$$

$$F_3(150)=\max\begin{pmatrix}G_3(0)+F_2(150)\\ \underline{G_3(50)+F_2(100)}\\ G_3(100)+F_2(50)\\ G_3(150)+F_2(0)\end{pmatrix}=\max\begin{pmatrix}0+100\\ \underline{36+70}\\ 64+30\\ 95+0\end{pmatrix}=106$$

Если бы фирма распределяла 150 тыс. грн на три предприятия, то выгодно 50 тыс. грн отдать третьему предприятию, а 100 тыс. грн двум другим, а именно, второму предприятию. Тогда прирост выпуска продукции фирмы был бы максимальным и равнялся 106 тыс. грн.

$$F_3(200) = \max_{0 \le x \le 200}(G_3(x) + F_2(200 - x))$$

$$F_3(200) = \max\begin{pmatrix} \underline{G_3(0) + F_2(200)} \\ G_3(50) + F_2(150) \\ G_3(100) + F_2(100) \\ G_3(150) + F_2(50) \\ G_3(200) + F_2(0) \end{pmatrix} = \max\begin{pmatrix} \underline{0 + 140} \\ 36 + 100 \\ 64 + 70 \\ 95 + 30 \\ 130 + 0 \end{pmatrix} = 140$$

Вывод: если 200 тыс. грн распределить на три предприятия, то выгодно все деньги отдать второму предприятию. Тогда прирост выпуска продукции фирмы будет наибольшим: в денежном эквиваленте на 140 тыс. грн. Полученные значения запишем в табл. 2.2.

Далее распределим все средства на четыре предприятия. Уравнение Беллмана будет иметь вид:

$$F_4(c) = \max_{0 \le x \le c}(G_4(x) + F_3(c - x)), \tag{2.5}$$

Вычислим:

$$F_4(50) = \max_{0 \le x \le 50}\begin{pmatrix} \underline{G_4(0) + F_3(50)} \\ G_4(50) + F_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0 + 36} \\ 28 + 0 \end{pmatrix} = 36$$

$$F_4(100) = \max_{0 \le x \le 100}\begin{pmatrix} \underline{G_4(0) + F_3(100)} \\ G_4(50) + F_3(50) \\ G_4(100) + F_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \underline{0 + 70} \\ 28 + 36 \\ 56 + 0 \end{pmatrix} = 70$$

$$F_4(150) = \max_{0 \le x \le 150}\begin{pmatrix} G_4(0) + F_3(150) \\ G_4(50) + F_3(100) \\ G_4(100) + F_3(50) \\ \underline{G_4(150) + F_3(0)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 106 \\ 28 + 70 \\ 56 + 36 \\ \underline{110 + 0} \end{pmatrix} = 110$$

$$F_4(200) = \max_{0 \le x \le 200} \begin{pmatrix} G_4(0)+F_3(200) \\ G_4(50)+F_3(150) \\ G_4(100)+F_3(100) \\ \underline{G_4(150)+F_3(50)} \\ G_4(200)+F_3(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+140 \\ 28+106 \\ 56+70 \\ \underline{110+36} \\ 142+0 \end{pmatrix} = 146$$

Полученные значения запишем в табл. 2.2.

Вывод: если 200 тыс. грн распределить на четыре предприятия, то выгодно отдать четвёртому предприятию 150 тыс. грн и 50 тыс. грн распределить на остальные три предприятия, а именно следует 50 тыс. грн отдать третьему предприятию (следует из полученных расчётов – см. $F_3(50)$). Тогда прирост выпуска продукции фирмы будет максимальным: в денежном эквиваленте на 146 тыс. грн.

Ценность метода динамического программирования заключается в том, что его можно применить к задачам, которые не могут быть решены с помощью методов стандартного классического анализа и других методов. Например, в данной задаче переменные целые, но функция цели задана таблично, поэтому её нельзя решать как задачу целочисленного программирования [3].

3. Замена оборудования

3.1. Постановка задачи замены оборудования длительного пользования

В процессе управления производством возникает ряд технических задач, одной из которых является задача своевременной замены оборудования в связи с его физическим и моральным износом. Поэтому на каждом этапе работы оборудования приходится решать проблему его сохранения. То есть необходимо выделить дополнительные средства на его ремонт или заменить на новое оборудование, вложив деньги в его покупку. При этом критериями оптимальности зачастую являются суммарные затраты на эксплуатацию оборудования за плановый период (то есть задача минимизации) или суммарный доход от эксплуатации (то есть задача максимизации) [5].

Рассмотрим следующую производственную ситуацию на примере.

Задачу замены оборудования можно представить в виде динамической модели.

Введем обозначения:

$r(t)$ – стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста t лет;

$u(t)$ – ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста t лет;

$s(t)$ – остаточная стоимость оборудования возраста t лет;

P – покупная цена оборудования.

Рассмотрим период N лет, в пределах которого требуется определить оптимальный цикл замены оборудования.

Обозначим через $f_N(t)$ максимальный доход, получаемый от оборудования возраста t лет за оставшиеся N лет цикла его использования при условии оптимальной стратегии.

Возраст оборудования отсчитывается в направлении течения процесса. Так, $t=0$ соответствует случаю использования нового оборудования. Временные же шаги процесса нумеруются в обратном направлении по отношению к ходу процесса: $N=1$ относится к одной временной стадии, остающейся до завершения процесса, а $N=N$ – к началу процесса (рис. 3.1).

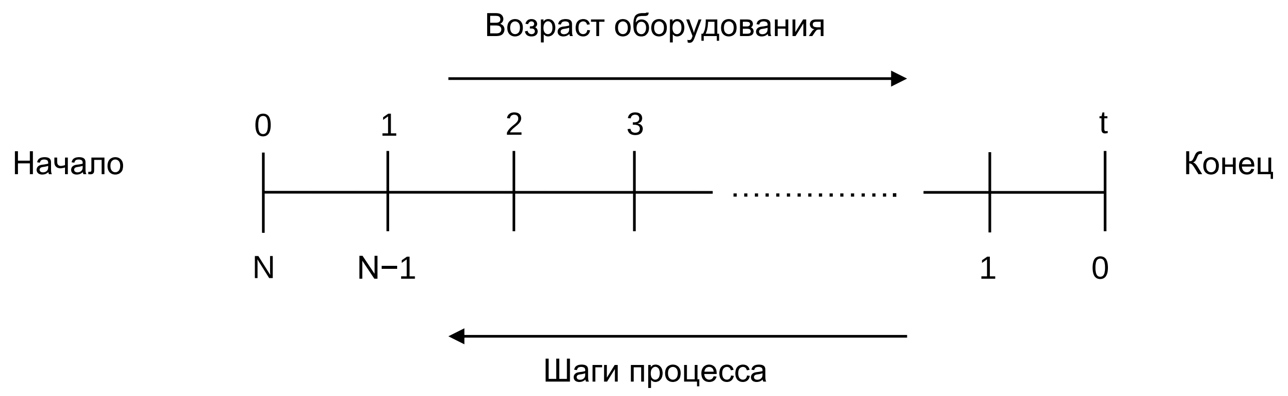

Рис. 3.1. **Цикл замены оборудования**

На каждом этапе N-шагового процесса должно быть принято решение о сохранении или замене оборудования. Выбранный вариант должен обеспечивать получение максимальной прибыли.

Шаги процесса

Функциональные уравнения, основанные на принципе оптимальности Беллмана, имеют вид:

$$f_N(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) + f_{N-1}(t+1) & \rightarrow \text{ сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - f_{N-1}(1) & \rightarrow \text{ замена,} \end{cases} \tag{3.1}$$

$$f_1(t) = \max \begin{cases} r(t) - u(t) & \rightarrow \text{ сохранение;} \\ s(t) - P + r(0) - u(0) & \rightarrow \text{ замена.} \end{cases} \tag{3.2}$$

Уравнение (3.1) описывает N-шаговый процесс, а (3.2) – одношаговый. Оба уравнения состоят из двух частей: верхняя строка определяет доход, получаемый при сохранении оборудования; нижняя – доход, получаемый при замене оборудования и продолжении процесса работы на новом оборудовании.

В уравнении (3.1) функция $r(t) - u(t)$ есть разность между стоимостью произведенной продукции и эксплуатационными издержками на N-м этапе процесса.

Функция $f_{N-1}(t+1)$ характеризует суммарную прибыль от (N − 1) оставшихся шагов для оборудования, возраст которого в начале осуществления этих этапов составляет (t + 1) лет.

Нижняя строка (3.1) характеризуется следующим образом: функция s(t) − P представляет чистые издержки по замене оборудования, возраст которого t лет.

Функция r(0) выражает доход, получаемый от нового оборудования возраста 0 лет. Предполагается, что переход от работы на оборудовании возраста t лет к работе на новом оборудовании совершается мгновенно, т.е. период замены старого оборудования и переход на работу на новом оборудовании укладываются в один и тот же этап.

Последняя функция $f_{N-1}(1)$ в (3.1) представляет собой доход от оставшихся N − 1 этапов, до начала осуществления которых возраст оборудования составляет один год.

Аналогичная интерпретация может быть дана уравнению для одношагового процесса. Здесь нет слагаемого вида $f_0(t+1)$, так как N принимает значение 1, 2,..., N.

Равенство $f_0(t)=0$ следует из определения функции $f_N(t)$.

Уравнения (3.1) и (3.2) являются рекуррентными соотношениями, которые позволяют определить величину $f_N(t)$ в зависимости от $f_{N-1}(t+1)$.

Структура этих уравнений показывает, что при переходе от одного шага процесса к следующему возраст оборудования увеличивается с t до (t + 1) лет, а число оставшихся шагов уменьшается с N до (N − 1).

Расчет начинают с использования уравнения (3.1). Уравнения (3.1) и (3.2) позволяют оценить варианты замены и сохранения оборудования, с тем чтобы принять тот из них, который предполагает больший доход. Эти соотношения дают возможность не только выбрать линию поведения при решении вопроса о сохранении или замене оборудования, но и определить прибыль, получаемую при принятии каждого из этих решений.

Пример 3.1. Определить оптимальный цикл замены оборудования при следующих исходных данных: P = 10, S(t) = 0, f(t) = r(t) − u(t), представленных в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Исходные данные

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$f_N(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0

Решение. Уравнения (3.3) и (3.4) запишем в следующем виде:

$$f_N(t)=\max\begin{cases} f(t)+f_{N-1}(t+1), \\ -P+f(0)-f_{N-1}(1), \end{cases} \tag{3.3}$$

$$f_1(t)=\max\begin{cases} f(t), \\ -P+f(0). \end{cases} \tag{3.4}$$

Для N = 1:

$$f_1(0)=\max\begin{cases} f(0), \\ -P+f(0) \end{cases}=\max\begin{cases} 10 \\ -10+10 \end{cases}=10,$$

$$f_1(1)=\max\begin{cases}f(1),\\-P+f(0)\end{cases}=\max\begin{cases}9\\-10+10\end{cases}=9,$$

………………………………………………………………

$$f_1(12)=\max\begin{cases}f(12),\\-P+f(0)\end{cases}=\max\begin{cases}0\\-10+10\end{cases}=0.$$

Для $N=2$:

$$f_2(0)=\max\begin{cases}f(0)+f_1(1),\\-P+f(0)+f_1(1)\end{cases}=\max\begin{cases}10+9\\-10+10+9\end{cases}=19,$$

$$f_2(1)=\max\begin{cases}f(1)+f_1(2),\\-P+f(0)+f_1(1)\end{cases}=\max\begin{cases}9+8\\-10+10+9\end{cases}=17,$$

……………………..……………………………………………………

Вычисления продолжаем до тех пор, пока не будет выполнено условие $f_1(1)>f_2(2)$. В данный момент оборудование необходимо заменить, так как величина прибыли, получаемая в результате замены оборудования, больше, чем в случае использования старого.

Результаты расчетов помещаем в табл. 3.2. Момент замены отмечаем звездочкой, после чего дальнейшие вычисления по строчке прекращаем.

Можно не решать каждый раз уравнение (3.3), а вычисления проводить в таблице.

Например, вычислим $f_4(t)$:

$$\begin{aligned}
&f_4(0)=f_1(0)+f_3(1)=10+24=34>f_3(1)=24,\\
&f_4(1)=f_1(1)+f_3(2)=9+21=30>f_3(1),\\
&f_4(2)=f_1(2)+f_3(3)=8+18=26>f_3(1),\\
&f_4(3)=f_1(3)+f_3(4)=7+17=24=f_3(1),\\
&f_4(4)=f_1(4)+f_3(5)=6+17=23<f_3(1).
\end{aligned}$$

Дальнейшие расчеты для $f_4(t)$ прекращаем, так как

$$f_4(4)=23<f_3(1)=24\,.$$

Таблица 3.2

Результаты расчетов

$F_N(t)$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
	N	N − 1	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$f_1(t)$	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0	0	0
$f_2(t)$	19	17	15	13	11	9	9*						
$f_3(t)$	27	24	21	18	17	17*							
$f_4(t)$	34	30	26	24	24*								
$f_5(t)$	40	35	32	31	30	30*							
$f_6(t)$	45	41	39	37	36	35	35*						
$f_7(t)$	51	48	45	43	41	41*							
$f_8(t)$	58	54	51	48	48*								
$f_9(t)$	64	60	56	55	54	54*							
$f_{10}(t)$	70	65	63	61	60	60*							
$f_{11}(t)$	75	72	69	67	66	65	65*						
$f_{12}(t)$	82	78	75	73	72	72*							

По результатам вычислений и по линии, разграничивающей области решений сохранения и замены оборудования, находим оптимальный цикл замены оборудования. Для данной задачи он составляет 4 года.

3.2. Графический метод решения задачи замены автомобиля

Вопрос замены машины практически возникает уже через несколько лет ее использования, поэтому необходимо заранее иметь план ее замены в связи с физическим или моральным износом. Такая проблема возникает у каждого автомобилиста. То есть нужно вкладывать средства в ремонт или в покупку новой машины. Для этого необходимо разработать оптимальную стратегию эксплуатации машины.

Такую задачу можно решить методом динамического программирования. Разобьем весь срок эксплуатации машины (t) на пять этапов $1 \le t \le 5$. В зависимости от интенсивности использования машины один этап можно определить в один, два или три года. Возможное управление зависит от двух показателей: X^1 – сохранить машину и X^2 – заменить на новую [3].

Пример 3.2. Пусть стоимость машины при покупке $C_0 = 600$ тыс. грн, ее ликвидная стоимость после t – этапов использования задается функцией $G_0(t) = C_0 2^{-t}$. Расходы на сохранение $f(t) = 80(t+1)$ (тыс. грн). Нужно найти оптимальную стратегию эксплуатации такую, чтобы суммарные затраты были минимальны. В суммарные затраты входит стоимость покупки, расходы на эксплуатацию, а также ликвидная стоимость.

Решение. Обозначим: $F(X_k,t)$ – функция цели, то есть суммарные расходы; функция $f_k(X_k,t)$ – показатель эффективности k-го этапа; параметр состояния – $S(k,t)$.

Тогда уравнение состояния:

$$S(k,t) = \begin{cases} 1, & \text{если } X_k = X^2 \\ t+1, & \text{если } X_k = X^1. \end{cases} \tag{3.5}$$

Показатель эффективности k-этапа:

$$f_k(X_k,t) = \begin{cases} 80(t+1), & X_k = X^1 \\ 680 - 600 \cdot 2^{-t}, & X_k = X^2. \end{cases} \tag{3.6}$$

Уравнение Беллмана:

$$F_k(X_k,t) = \begin{cases} 80(t+1) + F_{k+1}(X_k, t+1), & X_k = X^1 \\ 680 - 600 \cdot 2^{-t}, + F_{k+1}(X_k, 1), & X_k = X^2. \end{cases} \tag{3.7}$$

Решить эту задачу можно с помощью граф-модели.

На оси абсцисс отложим номер шага k, на оси ординат – этапы работы машины t. Точка (k,t) на плоскости соответствует такой ситуации: машина эксплуатируется k-этапов и имеет срок работы t-этапов. Дуга графа, которая соединяет две точки, соответствует одному этапу работы машины.

Согласно формуле (3.6) на дугах графа запишем значения показателя эффективности. Начало эксплуатации машины соответствует точке

$S(0,0)$, переход в точку $S(1,1)$ имеет следующие расходы: 680 тыс. грн (согласно формуле (3.6) 600 тыс. грн. покупка, 80 тыс. грн – расходы за первый этап эксплуатации); далее при управлении X^1 переход в точку $S(2,2)$ 160 тыс. грн, в точку $S(3,3)$ 240 тыс. грн, в точку $S(4,4)$ – 320, в точку $S(5,5)$ – 400. Если управление X^2, то тоже согласно формуле (3.6) переход в точку $S(1,2)$ стоит 380 тыс. грн $\left(680-600\cdot 2^{-1}\right)$ (покупка плюс стоимость одного этапа эксплуатации отнять ликвидную стоимость). Продолжая таким образом, заполняем все дуги графа.

Функцию цели начнем вычислять с конца, то есть с конечного шага.

Поскольку функцию цели исследуем на минимум, то ликвидную стоимость запишем к вершинам $S(5,t)$ со знаком минус (рис. 3.2).

$$[\{(-300),(-150),(-75),(-37,5),(-18,75)\}]$$

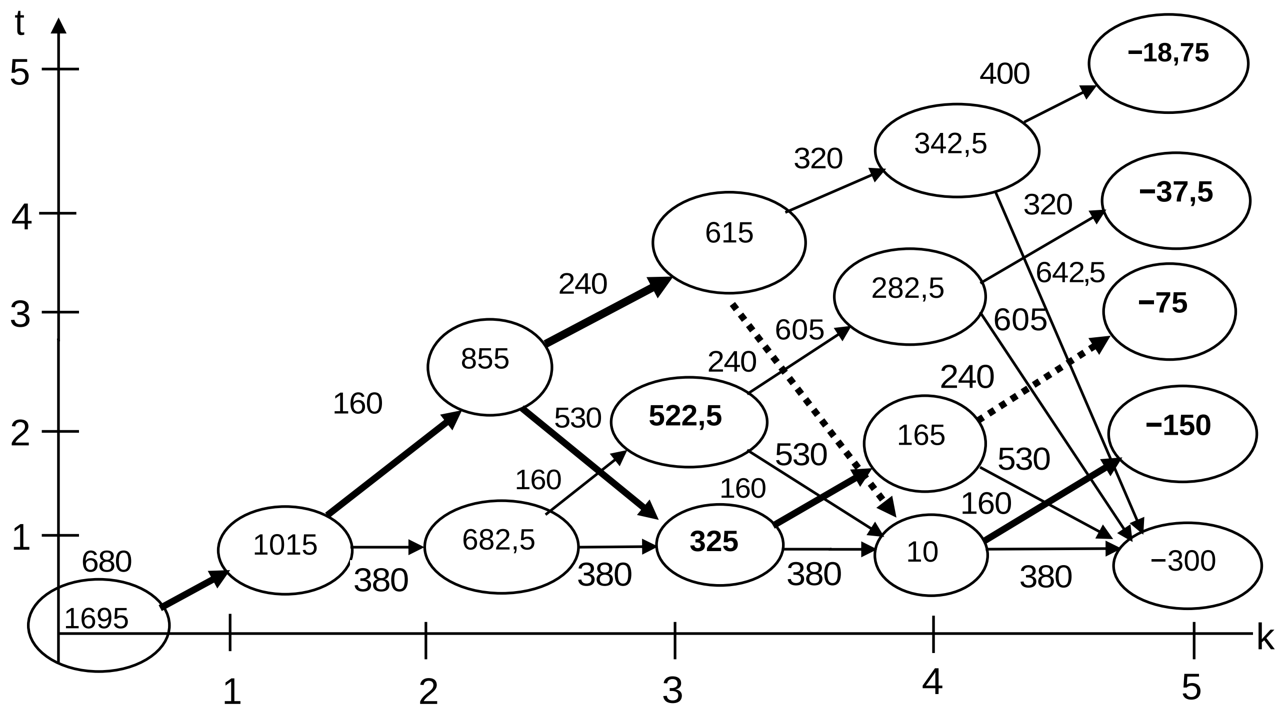

Рис. 3.2. **Граф-модель замены машины**

Значения функции цели для состояния $(4,t)$:

$$F_4(4,1)=\min\begin{Bmatrix}80\cdot 2-150=10\\ 680-600\cdot 2^{-1}-300=80\end{Bmatrix}=10$$

$$F_4(4,2)=\min\begin{Bmatrix}240-75=165\\ 530-300=230\end{Bmatrix}=165$$

$$F_4(4,3)=\min\begin{Bmatrix}320-37{,}5=282{,}5\\605-300=305\end{Bmatrix}=282{,}5$$

$$F_4(4,4)=\min\begin{Bmatrix}400-18{,}75=381{,}25\\642{,}5-300=342{,}5\end{Bmatrix}=342{,}5$$

Значения функции цели для состояния $(3,t)$:

$$F_3(3,1)=\min\begin{Bmatrix}160+165=325\\308+10=390\end{Bmatrix}=325$$

$$F_3(3,2)=\min\begin{Bmatrix}240+282{,}5=522{,}5\\530+10=540\end{Bmatrix}=522{,}5$$

$$F_3(3,3)=\min\begin{Bmatrix}320+342{,}5=662{,}5\\605+10=615\end{Bmatrix}=615$$

Значения функции цели для состояния $(2,t)$:

$$F_2(2,1)=\min\begin{Bmatrix}160+522{,}5=682{,}5\\380+325=705\end{Bmatrix}=682{,}5$$

$$F_2(2,2)=\min\begin{Bmatrix}240+615=855\\530+325=855\end{Bmatrix}=855$$

Значение функции цели для состояния $(1,1)$:

$$F_1(1,1)=\min\begin{Bmatrix}160+855=1\,015\\380+682{,}5=1\,062{,}5\end{Bmatrix}=1\,015$$

Значение функции цели для состояния $(0,0)$

Окончательно имеем:

$$F_0(0,0)=1\,015+680=1695.$$

Это и есть минимальные затраты на машину, включающие стоимость покупки, стоимость эксплуатации в течение пяти этапов (это может быть пять, десять, пятнадцать и т.д. лет в зависимости от интенсивности эксплуатации), а также стоимость продажи на конечном этапе.

На граф-модели жирными стрелками показаны возможные оптимальные пути покупки, эксплуатации, а также замены машины.

Имеем две оптимальные траектории:

1) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,1),(4,1),(5,3)\}$;

2) $\{(0,0),(1,1),(2,2),(3,3),(4,1),(5,2)\}$.

При этом минимальное значение функции цели не меняется и составляет 1 695 тыс. грн.

На первом пути машину нужно заменить на третьем этапе в состоянии (3,1), а на пятом этапе в состоянии (5,3) ее можно продать за 75 тыс. грн.

На втором пути машину нужно заменить на четвертом этапе в состоянии (4,1), а на пятом этапе в состоянии (5,2) ее можно продать за 150 тыс. грн.

Таким образом, методом динамического программирования разработана оптимальная модель замены машины. Эта методика позволяет изменить начальные условия. Например, задать различные затраты на каждом этапе. Можно рассматривать по этой же методике работу производственных машин, станков и другого оборудования.

Расходы на эксплуатацию машины на первом этапе составляли 80 тыс. грн. В связи с инфляцией расходы возросли, изменился показатель эффективности:

$$f_k(X_k,t)=\begin{cases}80+100t,\ X_k=X^1,\ k\neq 3\\ 80+100(t-1),\ k=3\\ 680-600\cdot 2^{-t},\ X_k=X^2\end{cases},$$

где первые две строки – это расходы на эксплуатацию, если на каждом этапе машину сохранять. Третья строка – общие расходы, если машину продать $\left(680-600\cdot 2^{-1}\right)$, купить новую ($600$ тыс. грн), расходы за первый этап эксплуатации (80 тыс. грн).

Тогда функция цели:

$$F_k(X_k,t)=\begin{cases}f_k(X_k,t)+F_{k+1}(X_k,t+1),X_k=X^1\\ f_k(X_k,t)+F_{k+1}(X_k,1),X_k=X^2\end{cases}.$$

Рекомендуем решить эту задачу с помощью граф-модели. Тогда оптимальный маршрут будет $\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,1)\}$, то есть на всех четырех этапах нужно машину сохранить, а на конечном этапе продать. Ее ликвидная стоимость будет 300 тыс. грн. При этом минимальная стоимость за пять этапов 1 762 тыс. грн.

Вопросы для самоконтроля

1. В чем сущность задачи замены?
2. Приведите классификацию задач замены.
3. Сформулируйте постановку задачи замены оборудования.
4. Опишите динамическое программирование как метод решения задачи замены оборудования.
5. Охарактеризуйте графический метод решения задачи замены.

4. Некоторые дополнительные задачи динамического программирования

4.1. Оптимизационная модель распределения контейнеров по складам

Сформулируем распределительную задачу на примере планирования деятельности предприятия на n лет. Пусть предприятие имеет ресурс в размере Y единиц, который можно вложить в производство в течении n лет. Функции $f_t(x)$ отражают эффективность использования x единиц ресурса в год t. Требуется определить план расхода имеющегося ресурса по годам, чтобы максимизировать суммарную эффективность.

Обозначим через x_t искомую величину ресурса, вкладываемого в развитие производства в год $t=1,\ldots,n$. Тогда математическая модель может быть записана в виде:

$$S(y)=\sum_{t=1}^{n} f_t(x_t)\to \max_{\{x_t\}}, \tag{4.1}$$

$$\sum_{t=1}^{n} x_t = Y,$$

$$x_t \ge 0,\ t=1,\ldots,n.$$

Алгоритм динамического программирования состоит из прямого хода (процесс последовательного вычисления величины $S_k(y)$, $k=1,\ldots,n$; $0 \le y \le Y$) и обратного хода (восстановление оптимального решения). На последнем шаге прямого хода получаем оптимальное значение последней переменной $x_n^* = x_n(Y)$. Пусть уже найдены оптимальные значения $x_n^*,\ldots,x_{k+1}^*$. Тогда $x_k^* = x_k\left(y_k^*\right)$, где $y_k^* = y_{k+1}^* - x_{k+1}^*$.

Пример 4.1. На железнодорожную станцию прибыло восемь контейнеров, которые необходимо развести по пяти складам. Емкость i-го склада – v_i контейнеров, затраты на транспортировку одного контейнера на этот склад – g_i, а стоимость хранения x контейнеров – $c_i(x)$. Требуется развести все прибывшие контейнеры по складам, чтобы суммарные затраты на транспортировку и хранение были минимальны.

Исходные данные задачи приведены в табл. 4.1 и 4.2.

Таблица 4.1

Затраты на транспортировку контейнеров и ёмкости складов

v_i / g_i	Склады				
	1	2	3	4	5
g_i	0,5	1	1,2	1,5	2
v_i	2	3	3	5	5

Таблица 4.2

Стоимости хранения x-контейнеров

x	$c_1(x)$	$c_2(x)$	$c_3(x)$	$c_4(x)$	$c_5(x)$
1	2	1,5	1	0,5	0,3
2	4	2	2	1	0,5
3	–	3	3	1,5	1
4	–	–	–	2	1,5
5	–	–	–	2,5	2

Решение. Для записи математической постановки задачи введём функции $h_i(x) = g_i x + c_i(x)$, $i = 1,\ldots,5$, которые заданы в табл. 4.3.

$h_i(x)$ – затраты на транспортировку и хранение x-контейнеров.

Тогда математическая модель имеет следующий вид:

$$\sum_{i=1}^{5} h_i(x_i) \to \min_{x_i \in \{0,1,\ldots,v_i\}}; \qquad (4.2)$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 8.$$

Таблица 4.3

Затраты на транспортировку и хранение x-контейнеров

x	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$	$h_5(x)$
1	2,5	2,5	2,2	2	2,3
2	5	4	4,4	4	4,5
3	–	6	6,6	6	7
4	–	–	–	8	9,5
5	–	–	–	10	12

Это распределительная задача, и для неё рекуррентные соотношения:

$$S_1(y) = h_1(y),\ y = 0, 1,\ldots,8;$$
$$S_k(y) = \min_{0 \le x \le \min\{y, v_k\}} [h_k(x) + S_{k-1}(y - x)], \qquad (4.3)$$
$$k = 2,\ldots,5;\ y = 0, 1,\ldots,8.$$

Прямой ход. В результате прямого хода заполняем табл. 4.4, в которую помещены значения $S_k(y)$, а через дробь (/) указаны условно-оптимальные значения, которые помогут восстановить оптимальное решение на этапе обратного хода.

Таблица 4.4

Значения функции $S_k(y)$ и условно-оптимальные решения

y	$S_1(y)$	$S_2(y)$	$S_3(y)$	$S_4(y)$	$S_5(y)$
0	**0**	0	0	0	
1	2,5/1	2,5/0	2,2/1	2/1	
2	5/2	4/2	4/0	4/0	
3	–	**6/3**	**6/0**	6/0	
4	–	8,5/3	8,2/1	8/1	
5	–	11/3	10,4/2	10/2	
6	–	–	12,6/3	12/3	
7	–	–	15,1/3	14/4	
8	–	–	17,6/3	**16/5**	**16/0**

Вычисление значений, приведенных в таблице, будет показано ниже.

Несколько замечаний:

1) прочерк в клетке таблицы означает, что допустимого решения не существует;

2) условно-оптимальных решений (как и оптимальных) может быть несколько. Для получения одного из оптимальных решений достаточно сохранить любое условно-оптимальное решение;

3) значения функции $S_5(y)$ для $y = 0, 1, \ldots, 7$ вычислять не требуется. Эти значения понадобились бы при вычислении $S_6(y)$, но в этом нет необходимости, поскольку имеется всего пять складов.

Вычислим значения функции цели $S_k(y)$ и поместим в табл. 4.4.

$$S_1(y) = h_1(y),\ y = \overline{0{,}8}\ .$$

Формула для вычисления $S_2(y)$.

$$S_2(y) = \min(h_2(x) + S_1(y - x)),\ y = \overline{1{,}8}\ .$$

Прямой ход:

$$S_2(1) = \min(h_2(x) + S_1(1 - x))$$

$$S_2(1) = \min\begin{pmatrix} h_2(0) + S_1(1) \\ h_2(1) + S_1(0) \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} 0 + 2{,}5 \\ 2{,}5 + 0 \end{pmatrix} = 2{,}5 \qquad x = 0;\ 1.$$

$$S_2(2)=\min(h_2(x)+S_1(2-x))$$

$$S_2(2)=\min\begin{pmatrix} h_2(0)+S_1(2) \\ h_2(1)+S_1(1) \\ \underline{h_2(2)+S_1(0)} \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} 0+5 \\ 2{,}5+2{,}5 \\ \underline{4+0} \end{pmatrix}=4 \qquad x=2.$$

$$S_2(3)=\min\left(h_2(x)+S_1(3-x)\right)$$

$$S_2(3)=\min\begin{pmatrix} h_2(0)+S_1(3) \\ h_2(1)+S_1(2) \\ h_2(2)+S_1(1) \\ \underline{h_2(3)+S_1(0)} \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} 0+- \\ 2{,}5+5 \\ 4+2{,}5 \\ \underline{6+0} \end{pmatrix}=6 \qquad x=3.$$

$$S_2(4)=\min(h_2(x)+S_1(4-x))$$

$$S_2(4)=\min\begin{pmatrix} h_2(0)+S_1(4) \\ \underline{h_2(1)+S_1(3)} \\ h_2(2)+S_1(2) \\ h_2(3)+S_1(1) \\ -\;+S_1(0) \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} 0+- \\ 2{,}5+- \\ 4+5 \\ \underline{6+2{,}5} \\ -+0 \end{pmatrix}=8{,}5 \qquad x=3.$$

$$S_2(5)=\min(h_2(x)+S_1(5-x))$$

$$S_2(5)=\min\begin{pmatrix} h_2(0)+S_1(5) \\ h_2(1)+S_1(4) \\ h_2(2)+S_1(3) \\ \underline{h_2(3)+S_1(2)} \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} 0+- \\ 2{,}5+- \\ 4+- \\ \underline{6+5} \end{pmatrix}=11 \qquad x=3.$$

Формула для вычисления $S_3(y)$.

$$S_3(y)=\min(h_3(x)+S_2(y-x)),\ y=\overline{1{,}8}.$$

$$S_3(1)=\min(h_3(x)+S_2(1-x))$$

$$S_3(1)=\min\begin{pmatrix} h_3(0)+S_2(1) \\ \underline{h_3(1)+S_2(0)} \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} 0+2{,}5 \\ \underline{2{,}2+0} \end{pmatrix}=2{,}2 \qquad x=1.$$

$$S_3(2)=\min(h_3(x)+S_2(2-x))$$

$$S_3(2)=\min\begin{pmatrix} \underline{h_3(0)+S_2(2)} \\ h_3(1)+S_2(1) \\ h_3(2)+S_2(0) \end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix} \underline{0+4} \\ 2{,}2+2{,}5 \\ 4{,}4+0 \end{pmatrix}=4 \qquad x=0.$$

$$S_3(3)=\min(h_3(x)+S_2(3-x))$$

$$S_3(3)=\min\begin{pmatrix}\underline{h_3(0)+S_2(3)}\\ h_3(1)+S_2(2)\\ h_3(2)+S_2(1)\\ h_3(3)+S_2(0)\end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix}\underline{0+6}\\ 2{,}2+4\\ 4{,}4+2{,}5\\ 6{,}6+0\end{pmatrix}=6 \qquad x=0.$$

$$S_3(4)=\min(h_3(x)+S_2(4-x))$$

$$S_3(4)=\min\begin{pmatrix}h_3(0)+S_2(4)\\ \underline{h_3(1)+S_2(3)}\\ h_3(2)+S_2(2)\\ h_3(3)+S_2(1)\\ -\ +\ 0\end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix}0+8{,}5\\ \underline{2{,}2+6}\\ 4{,}4+4\\ 6{,}6+2{,}5\end{pmatrix}=8{,}2 \qquad x=1.$$

$$S_3(5)=\min(h_3(x)+S_2(5-x))$$

$$S_3(5)=\min\begin{pmatrix}h_3(0)+S_2(5)\\ h_3(1)+S_2(4)\\ \underline{h_3(2)+S_2(3)}\\ \underline{h_3(3)+S_2(2)}\end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix}0+11\\ 2{,}2+8{,}5\\ \underline{4{,}4+6}\\ \underline{6{,}6+4}\end{pmatrix}=10{,}4 \qquad x=2.$$

$$S_3(6)=\min(h_3(x)+S_2(6-x))$$

$$S_3(6)=\min\begin{pmatrix}h_3(0)+S_2(6)\\ h_3(1)+S_2(5)\\ h_3(2)+S_2(4)\\ \underline{h_3(3)+S_2(3)}\end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix}0+-\\ 2{,}2+11\\ 4{,}4+8{,}5\\ \underline{6{,}6+6}\end{pmatrix}=12{,}6 \qquad x=3.$$

$$S_3(7)=\min(h_3(x)+S_2(7-x))$$

$$S_3(7)=\min\begin{pmatrix}h_3(0)+S_2(7)\\ h_3(1)+S_2(6)\\ h_3(2)+S_2(5)\\ \underline{h_3(3)+S_2(4)}\end{pmatrix}=\min\begin{pmatrix}0+-\\ 2{,}2+-\\ 4{,}4+11\\ \underline{6{,}6+8{,}5}\end{pmatrix}=15{,}1 \qquad x=3.$$

$$S_3(8)=\min(h_3(x)+S_2(8-x))$$

$$S_3(8)=\min\begin{pmatrix}h_3(0)+\ -\\ h_3(1)+\ -\\ h_3(2)+\ -\\ \underline{h_3(3)+S_2(5)}\end{pmatrix}=\min(6{,}6+11)=17{,}6 \qquad x=3.$$

Формула для вычисления $S_4(y)$:

$$S_4(y) = \min(h_4(x) + S_3(y - x)),\ y = \overline{1,8}\ .$$

$$S_4(1) = \min(h_4(x) + S_3(1 - x))$$

$$S_4(1) = \min\begin{pmatrix} h_4(0) + S_3(1) \\ \underline{h_4(1) + S_3(0)} \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} 0 + 2{,}2 \\ \underline{2 + 0} \end{pmatrix} = 2 \qquad x = 1.$$

$$S_4(2) = \min(h_4(x) + S_3(2 - x))$$

$$S_4(2) = \min\begin{pmatrix} \underline{h_4(0) + S_3(2)} \\ h_4(1) + S_3(1) \\ \underline{h_4(2) + S_3(0)} \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} \underline{0 + 4} \\ 2 + 2{,}2 \\ \underline{4 + 0} \end{pmatrix} = 4 \qquad x = 0;\ 2.$$

$$S_4(3) = \min(h_4(x) + S_3(3 - x))$$

$$S_4(3) = \min\begin{pmatrix} \underline{h_4(0) + S_3(3)} \\ \underline{h_4(1) + S_3(2)} \\ h_4(2) + S_3(1) \\ \underline{h_4(3) + S_3(0)} \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} \underline{0 + 6} \\ \underline{2 + 4} \\ 4 + 2{,}2 \\ \underline{6 + 0} \end{pmatrix} = 6 \qquad x = 0;\ 1;\ 3.$$

$$S_4(4) = \min(h_4(x) + S_3(4 - x))$$

$$S_4(4) = \min\begin{pmatrix} h_4(0) + S_3(4) \\ \underline{h_4(1) + S_3(3)} \\ \underline{h_4(2) + S_3(2)} \\ h_4(3) + S_3(1) \\ \underline{h_4(4) + S_3(0)} \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} 0 + 8{,}2 \\ \underline{2 + 6} \\ \underline{4 + 4} \\ 6 + 2{,}2 \\ \underline{8 + 0} \end{pmatrix} = 8 \qquad x = 1;\ 2;\ 4.$$

$$S_4(5) = \min(h_4(x) + S_3(5 - x))$$

$$S_4(5) = \min\begin{pmatrix} h_4(0) + S_3(5) \\ h_4(1) + S_3(4) \\ \underline{h_4(2) + S_3(3)} \\ \underline{h_4(3) + S_3(2)} \\ h_4(4) + S_3(1) \\ \underline{h_4(5) + S_3(0)} \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} 0 + 10{,}4 \\ 2 + 8{,}2 \\ \underline{4 + 6} \\ \underline{6 + 4} \\ 8 + 2{,}2 \\ \underline{10 + 0} \end{pmatrix} = 10 \qquad x = 2;\ 3;\ 5.$$

$$S_4(6) = \min(h_4(x) + S_3(6-x))$$

$$S_4(6) = \min\begin{pmatrix} h_4(0)+S_3(6) \\ h_4(1)+S_3(5) \\ h_4(2)+S_3(4) \\ \underline{h_4(3)+S_3(3)} \\ \underline{h_4(4)+S_3(2)} \\ h_4(5)+S_3(1) \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} 0 + 12{,}6 \\ 2 + 10{,}4 \\ 4 + 8{,}2 \\ \underline{6 + 6} \\ \underline{8 + 4} \\ 10 + 2{,}2 \end{pmatrix} = 12 \qquad x = 3;\ 4.$$

$$S_4(7) = \min(h_4(x) + S_3(7-x))$$

$$S_4(7) = \min\begin{pmatrix} h_4(0)+S_3(7) \\ h_4(1)+S_3(6) \\ h_4(2)+S_3(5) \\ h_4(3)+S_3(4) \\ \underline{h_4(4)+S_3(3)} \\ \underline{h_4(5)+S_3(2)} \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} 0 + 15{,}1 \\ 2 + 12{,}6 \\ 4 + 10{,}4 \\ 6 + 8{,}2 \\ \underline{8 + 6} \\ \underline{10 + 4} \end{pmatrix} = 14 \qquad x = 4;\ 5.$$

$$S_4(8) = \min(h_4(x) + S_3(8-x))$$

$$S_4(8) = \min\begin{pmatrix} h_4(0)+S_3(8) \\ h_4(1)+S_3(7) \\ h_4(2)+S_3(6) \\ h_4(3)+S_3(5) \\ h_4(4)+S_3(4) \\ \underline{h_4(5)+S_3(3)} \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} 0 + 17{,}6 \\ 2 + 15{,}1 \\ 4 + 12{,}6 \\ 6 + 10{,}4 \\ 8 + 8{,}2 \\ \underline{10 + 6} \end{pmatrix} = 16 \qquad x = 5.$$

Формула для вычисления $S_5(y)$:

$$S_5(y) = \min(h_5(x) + S_4(y-x)),\ y = \overline{1{,}8}\ .$$

Для оптимального плана достаточно вычислить $S_5(8)$:

$$S_5(8) = \min(h_5(x) + S_4(8-x))$$

$$S_5(8) = \min\begin{pmatrix} \underline{h_4(0)+S_3(8)} \\ h_4(1)+S_3(7) \\ h_4(2)+S_3(6) \\ h_4(3)+S_3(5) \\ h_4(4)+S_3(4) \\ h_4(5)+S_3(3) \end{pmatrix} = \min\begin{pmatrix} \underline{0 + 16} \\ 2{,}3 + 14 \\ 4{,}5 + 12 \\ 7 + 10 \\ 9{,}5 + 8 \\ 12 + 6 \end{pmatrix} = 16 \qquad x = 0.$$

Итак, в результате работы прямого хода алгоритма найдено оптимальное значение целевой функции $S^* = S_5(8) = 16$ и оптимальное значение последней переменной $x_5^* = x_5(8) = 0$.

Обратный ход. Так как на пятый склад в оптимальном решении не надо везти ни одного контейнера $\left(x_5^* = 0\right)$, то их нужно развести по первым четырём складам. Следовательно, $y_4^* = 8 - x_5^* = 8$. Значит, для определения оптимального значения предпоследней переменной достаточно обратиться к клетке табл. 4.4 со значением $S_4(8)$. В этой клетке хранится условно-оптимальное значение $S_4(8)$. Имеем $y_4^* = x_4(8) = 5$. Значит, на склад четыре будет отправлено пять контейнеров. Следовательно, ещё три нужно развести по первым трём складам, т. е. $y_3^* = 8 - x_4^* = 3$. Клетка $S_3(3)$ табл. 4.4 хранит условно-оптимальное значение $x_3(3) = 0$. Поэтому $x_3^* = 0$ и $y_2^* = 3 - x_3^* = 3$. В клетке табл. 4.4 со значением $S_2\left(y_2^*\right) = S_2(3)$ находится также значение условно-оптимальной переменной $x_2(3) = 3$. Значит, $x_2^* = 3$ и $y_1^* = 3 - x_2^* = 0$, т.е. все контейнеры распределены и на первый склад ни один из них не повезут.

Окончательно имеем: оптимальный вектор рассматриваемой задачи $\overline{X^*} = (0, 3, 0, 5, 0)$ приводит к минимальным затратам $S^* = 16$, связанным с перевозкой и хранением восьми контейнеров.

В табл. 4.4 помечены ячейки, по значениям которых было восстановлено оптимальное решение на этапе обратного хода алгоритма.

4.2. Задача о ранце

Имеется n предметов, каждый из которых имеет объём (или вес) $a_k \geq 0$ и ценность $f_k(x_k)$, $k = \overline{1, n}$. Требуется заполнить ранец предметами, суммарная ценность которых максимальна, а суммарный объём не превосходит ёмкости ранца. Составим математическую модель этой задачи.

$$\sum_{k=1}^{n} f_k(x_k) \to \max \tag{4.4}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k \leq A,$$

где $x_k = \begin{cases} 1, & \text{если предмет помещаем в ранец} \\ 0, & \text{если предмет не помещаем в ранец} \end{cases}$

A – объём ранца.

Проиллюстрируем решение на линейной булевой задаче о ранце.

Запишем две задачи – прямую и обратную.

Прямая задача:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \to \max \\ \sum_{i=1}^{n} h_i x_i \le b \\ x_i \in \{0,1\},\ i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{4.5}$$

Обратная задача:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} h_i x_i \to \min \\ \sum_{i=1}^{n} r_i x_i \ge d \\ x_i \in \{0,1\},\ i = \overline{1,n} \end{cases} \tag{4.6}$$

Обозначим $r_i x_i = y_i$, $h_i x_i = G_i(y_i)$. Тогда $\sum_{i=1}^{n} G_i(y) \to \min$.

Так как переменные x_i принимают два значения, рекуррентные соотношения для обратной задачи (4.6) запишем в виде:

$$G_i(y) = \begin{cases} 0, & y = 0 \\ h_i & 0 < y \le r_i \\ +\infty, & y > r_i \end{cases};$$

$$G_k(y) \to \min \begin{pmatrix} G_{k-1}(y),\ x_k = 0 \\ h_i + G_{k-1}(\max\{0,\ y - r_k\}),\ x_k = 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} k = 2,\ldots,n \\ y = 0,\ldots,d \end{matrix}$$

$G_k(y)$ вычисляем для всех $y = 0,1,2,\ldots$ до тех пор, пока не будет выполнено неравенство $A < G_k(y^* + 1)$. Тогда оптимальное значение функционала в прямой задаче 4.5, будет равно y^*, и решение обратной задачи 4.6 с $d = y^*$ будет оптимальным и для прямой задачи 4.5.

Рассмотрим это на примере.

Пример 4.1. Параметры прямой задачи заданы в табл. 4.5.

Таблица 4.5

Параметры прямой задачи

i	1	2	3	4	5	6
r_i	6	5	4	3	2	1
h_i	45	33	28	16	13	9

Пусть объём ранца $b = 110$.

Решение. Поскольку решение прямой задачи будет громоздким, а оптимальные планы прямой и обратной задач совпадают, начнём решение с обратной задачи.

В процессе работы прямого хода вычислим $G_k(y)$, $k = 1,2,\ldots,6$ для тех $y = 0,1,2,\ldots$, для которых выполняется неравенство $G_k(y) \le 110$, прочерками в табл. 4.6 обозначены бесконечно большие величины (когда нет допустимых решений). В столбцах G_4, G_5, G_6 вычисления прекращают, как только соответствующие величины становятся больше $b = 110$. В табл. 4.6 через дробь указано значение условно-оптимального решения. Если условно-оптимальных решений несколько, то запоминаем одно из них.

Выполним просчёты и запишем в табл. 4.6

$$G_1(y) = \begin{cases} 0, \ y = 0 & y = 0, 1, \ldots, d \\ h_1 \ \ 0 < y \le r_1 \\ \infty \ \ y > r_1 \end{cases}$$

$$G_k(y) = \min \left. \begin{cases} G_{k-1}(y), \ x_k = 0 \\ h_k + G_{k-1}(\max(0; y - r_k)), \ x_k = 1 \end{cases} \right\} \begin{array}{l} k = 2,3,\ldots,6 \\ y = 0,1,\ldots,d \end{array}$$

Итак, $G_1(y) = h_1 = 45$, $1 \le y \le 6$; $G_1(6) = h_1 + G_0(6-6) = 45$

Заполняем первый столбец $G_1(7)=\infty$, $y>6$

$G_2(y)=h_2=33$, $1\le y\le 4$;

$$G_2(5)=\min\begin{cases}G_1(5),\ x_2=0\\ h_2+G_1(\max(0;5-5)),\ x_2=1\end{cases}=\min\begin{cases}45\\ 33+0\end{cases}=33/1;$$

$$G_2(6)=\min\begin{cases}G_1(6),\ x_2=0\\ h_2+G_1(\max(0;6-5)),\ x_2=1\end{cases}=\min\begin{cases}45\\ 33+45\end{cases}=45/0;$$

$$G_2(7)=\min\begin{cases}G_1(7),\ x_2=0\\ h_2+G_1(\max(0;7-5)),\ x_2=1\end{cases}=\min\begin{cases}\infty\\ 33+45\end{cases}=78/1;$$

$$G_2(8)=\min\begin{cases}G_1(8),\ x_2=0\\ h_2+G_1(\max(0;8-5)),\ x_2=1\end{cases}=\min\begin{cases}\infty\\ 33+45\end{cases}=78/1;$$

$G_2(y)=78/1$, $7\le y\le 11$;

$$G_2(11)=\min\begin{cases}G_1(11),\ x_2=0\\ h_2+G_1(11-5),\ x_2=1\end{cases}=\min\begin{cases}\infty\\ 33+45\end{cases}=78/1;$$

$$G_2(12)=\min\begin{cases}G_1(12),\ x_2=0\\ h_2+G_1(12-5),\ x_2=1\end{cases}=\min\begin{cases}\infty\\ 33+\infty\end{cases}=\infty;$$

$$G_3(1)=\min\begin{cases}G_2(1),\ x_3=0\\ h_3+G_2(\max(0;1-4)),x_3=1\end{cases}=\min\begin{cases}33\\ 28+G_2(0)\end{cases}=28/1;$$

$G_3(2)=G_3(3)=G_3(4)=28/1$;

$$G_3(5)=\min\begin{cases}G_2(5),\ x_3=0\\ h_3+G_2(\max(0;5-4)),\ x_3=1\end{cases}=\min\begin{cases}33\\ 28+33\end{cases}=33/0;$$

$$G_3(6)=\min\begin{cases}G_2(6),\ x_3=0\\ h_3+G_2(6-4),\ x_3=1\end{cases}=\min\begin{cases}45\\ 28+33\end{cases}=45/0;$$

$G_3(y)=61/1$, если $7\le y\le 9$;

$$G_3(9)=\min\begin{cases}G_2(9),\ x_3=0\\ h_3+G_2(\max(0;9-4)),\ x_3=1\end{cases}=\min\begin{cases}78\\ 28+33\end{cases}=61/1;$$

$$G_3(10)=\min\begin{cases}G_2(10),\ x_3=0\\ h_3+G_2(\max(0;10-4)),\ x_3=1\end{cases}=\min\begin{cases}78\\ 28+45\end{cases}=73/1;$$

$$G_3(11)=\min\begin{cases}G_2(11),\ x_3=0\\ h_3+G_2(\max(0;11-4)),\ x_3=1\end{cases}=\min\begin{cases}78\\ 28+78\end{cases}=78/0;$$

$$G_3(12)=\min\begin{cases}G_2(12),\ x_3=0\\ h_3+G_2(12-4),\ x_3=1\end{cases}=\min\begin{cases}\infty\\ 28+78\end{cases}=106/1;$$

$G_3(13)=G_3(14)=G_3(15)=106/1$;

$$G_3(15)=\min\begin{cases}G_2(15),\ x_3=0\\ h_3+G_2(15-4),\ x_3=1\end{cases}=\min\begin{cases}\infty\\ 28+78\end{cases}=106/1;$$

$$G_3(16)=\min\begin{cases}G_2(16),\ x_3=0\\ h_3+G_2(16-4),\ x_3=1\end{cases}=\min\begin{cases}\infty\\ 28+\infty\end{cases}=\infty;$$

$$G_4(1)=\min\begin{cases}G_3(1),\ x_4=0\\ h_4+G_3(\max(0;1-3)),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}28\\ 16+0\end{cases}=16;$$

$G_4(2)=G_4(3)=16$;

$$G_4(4)=\min\begin{cases}G_3(4),\ x_4=0\\ h_4+G_3(\max(0;\ 4-3)),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}28\\ 16+28\end{cases}=28/0;$$

$$G_4(5)=\min\begin{cases}G_3(5),\ x_4=0\\ h_4+G_3(5-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}33\\ 16+28\end{cases}=33/0;$$

$$G_4(6)=\min\begin{cases}G_3(6),\ x_4=0\\ h_4+G_3(6-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}45\\ 16+28\end{cases}=44/1;$$

$G_4(7)=44/1$;

$$G_4(8)=\min\begin{cases}G_3(8),\ x_4=0\\ h_4+G_3(8-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}61\\ 16+33\end{cases}=49/1;$$

$$G_4(9)=\min\begin{cases}G_3(9),\ x_4=0\\ h_4+G_3(9-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}61\\ 16+45\end{cases}=61/0;$$

$$G_4(10)=\min\begin{cases}G_3(10),\ x_4=0\\ h_4+G_3(10-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}73\\ 16+61\end{cases}=73/0;$$

$$G_4(11)=\min\begin{cases}G_3(11),\ x_4=0\\ h_4+G_3(11-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}78\\ 16+61\end{cases}=77/1;$$

$G_4(12)=77/1$;

$$G_4(13)=\min\begin{cases}G_3(13),\ x_4=0\\ h_4+G_3(13-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}106\\ 16+73\end{cases}=89/1;$$

$$G_4(14)=\min\begin{cases}G_3(14),\ x_4=0\\ h_4+G_3(14-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}106\\ 16+78\end{cases}=94/1;$$

$$G_4(15)=\min\begin{cases}G_3(15),\ x_4=0\\ h_4+G_3(15-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}106\\ 16+106\end{cases}=106/0;$$

$$G_4(16)=\min\begin{cases}G_3(16),\ x_4=0\\ h_4+G_3(16-3),\ x_4=1\end{cases}=\min\begin{cases}\infty\\ 16+106\end{cases}=122/1;$$

$122>110$, счёт прекращён.

Вычислим $G_5(y)=\min\begin{cases} G_4(y),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(y-2),\ x_5=1 \end{cases}$

$G_5(1)=h_5=13$;

$$G_5(2)=\min\begin{cases} G_4(2),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(2-2),\ x_5=1 \end{cases}=\min\begin{cases} 16 \\ 13 \end{cases}=13/1;$$

$$G_5(3)=\min\begin{cases} G_4(3),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(3-2),\ x_5=1 \end{cases}=\min\begin{cases} 16 \\ 13+16 \end{cases}=16/0;$$

$$G_5(4)=\min\begin{cases} G_4(4),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(4-2),\ x_5=1 \end{cases}=\min\begin{cases} 28 \\ 13+16 \end{cases}=28/0;$$

$$G_5(5)=\min\begin{cases} G_4(5),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(5-2),\ x_5=1 \end{cases}=\min\begin{cases} 33 \\ 13+16 \end{cases}=29/1;$$

$$G_5(6)=\min\begin{cases} G_4(6),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(6-2),\ x_5=1 \end{cases}=\min\begin{cases} 44 \\ 13+28 \end{cases}=41/1;$$

$$G_5(7)=\min\begin{cases} G_4(7),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(7-2),\ x_5=1 \end{cases}=\min\begin{cases} 44 \\ 13+33 \end{cases}=44/0;$$

$$G_5(8)=\min\begin{cases} G_4(8),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(8-2),\ x_5=1 \end{cases}=\min\begin{cases} 49 \\ 13+44 \end{cases}=47/1;$$

Продолжая аналогично заполнять всю таблицу, просчитаем только последние элементы значений $G_5(y)$ и $G_6(y)$.

$$G_5(16)=\min\begin{cases} G_4(16),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(16-2),\ x_5=1 \end{cases}=\min\begin{cases} 122 \\ 13+94 \end{cases}=107/1;$$

$$G_5(17)=\min\begin{cases} G_4(17),\ x_5=0 \\ h_5+G_4(17-2),\ x_5=1 \end{cases}=\min\begin{cases} \infty \\ 13+106 \end{cases}=119/1;$$

$G_5(17)=119>110$.

Счёт прекращён.

Вычислим $G_6(y)$.

$$G_6(y)=\min\begin{cases} G_5(y),\ x_6=0 \\ h_6+G_5(y-1),\ x_6=1 \end{cases};$$

Вычислим для $y = 16;\ 17$.

$$G_6(16) = \min\begin{cases} G_5(16),\ x_6 = 0 \\ h_6 + G_5(16-1),\ x_6 = 1 \end{cases} = \min\begin{cases} 107 \\ 9+101 \end{cases} = 107/0;$$

$$G_6(17) = \min\begin{cases} G_5(17),\ x_6 = 0 \\ h_6 + G_5(17-1),\ x_6 = 1 \end{cases} = \min\begin{cases} 119 \\ 9+107 \end{cases} = 116/1;$$

$$G_6(17) = 116 > 110.$$

Счёт прекращён.

Закончен прямой ход. Запишем все полученные результаты в табл. 4.6.

Таблица 4.6

Значения $G_k(y)$ на шести этапах

y	$G_1(y)$	$G_2(y)$	$G_3(y)$	$G_4(y)$	$G_5(y)$	$G_6(y)$
0	0	0	0	0	0	0
1	45/1	33/1	28/1	16/1	13/1	9/1
2	45/1	33/1	28/1	16/1	13/1	13/0
3	45/1	33/1	28/1	16/1	16/0	16/0
4	45/1	33/1	28/1	28/1	28/0	25/1
5	45/1	33/1	33/0	33/1	29/1	29/0
6	**45/1**	45/0	45/0	44/1	41/1	38/1
7	–	78/1	61/1	44/1	44/0	44/0
8	–	78/1	61/1	49/1	47/1	49/0
9	–	78/1	61/1	61/0	57/1	57/0
10	–	78/1	73/1	73/0	62/1	62/0
11	–	**78/1**	**78/0**	77/1	74/1	71/1
12	–	–	106/1	77/1	77/0	77/0
13	–	–	106/1	89/1	89/0	86/1
14	–	–	106/1	**94/1**	90/1	90/0
15	–	–	106/1	106/0	101/1	99/1
16	–	–	–	122/1	**107/1**	**107/0**
17	–	–	–	–	119/1	116/0

Обратный ход. Максимальное значение y, при котором $G_6(y) = 107 < b = 110$, равно 16. Следовательно, оптимальное значение целевой функции прямой задачи равно 16. При этом условно-оптимальное решение $x_6^*(16) = 0$. Отсюда следует, что $\sum_{i=1}^{5} r_i x_i \geq 16$. Значит, для определения x_5^* следует воспользоваться ячейкой $G_5(16)$, в которой условно-оптимальное решение $x_5^* = 1$ (см. табл. 4.6). Следовательно, $\sum_{i=1}^{4} r_i x_i \geq 16 - r_5 = 16 - 2 = 14$. В ячейке $G_4(14)$ табл. 4.6 находим $x_4^* = 1$. Значит, $\sum_{i=1}^{3} r_i x_i \geq 14 - r_4 = 14 - 3 = 11$. В строке $y = 11$ находим $G_3(11)$ и условно-оптимальное значение $x_3^* = 0$. В этой же строке находим $G_2(11)$ и $x_2^* = 1$. Значит $r_1 x_1 \geq 11 - r_2 = 11 - 5 = 6$. Шестая строка столбца $G_1(y)$ определяет первую компоненту вектора оптимального решения $x_1^* = 1$. Итак, оптимальное решение задачи $\overline{X^*}(1, 1, 0, 1, 1, 0)$.

Проверяем условия прямой задачи:

$$\sum_{i=1}^{6} r_i x_i = 6 \cdot 1 + 5 \cdot 1 + 4 \cdot 0 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 = 16;$$

$$\sum_{i=1}^{6} h_i x_i = 45 \cdot 1 + 33 \cdot 1 + 28 \cdot 0 + 16 \cdot 1 + 13 \cdot 1 + 9 \cdot 0 = 107;$$

$$107 < 110 = b.$$

Таким образом, для того, чтобы стоимость предметов в ранце была максимальной (16 ед.), в него следует поместить первый, второй, четвёртый и пятый предметы, при этом будет занят минимальный объём 107 единиц из 110. Таким же способом можно решать задачи при заполнении любых ёмкостей.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 1. Необходимо найти оптимальное распределение средств между тремя предприятиями при условии, что прибыль $f(x)$, полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств x. Вложения кратны Δx, а функции $f(x)$ заданы в табл. 1 [3].

Таблица 1

Исходные данные

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	4	8	12	14	15	17	20	24	26
$f_2(x)$	7	9	11	13	16	18	21	22	25
$f_3(x)$	8	10	14	16	17	19	21	23	25

$s_0 = 9$, $n = 3$, $\Delta x = 1$.

Задача 2. Необходимо найти оптимальное распределение средств между тремя предприятиями при условии, что прибыль $f(x)$, полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств x. Вложения кратны Δx, а функции $f(x)$ заданы в табл. 2.

Таблица 2

Исходные данные

x	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,2	0,9	1,0	1,2	2,0
$f_2(x)$	1,0	1,1	1,3	1,4	1,8
$f_3(x)$	2,1	2,5	2,9	3,9	4,9

$s_0 = 5$, $n = 3$, $\Delta x = 1$.

Задача 3. Необходимо найти оптимальное распределение средств между тремя предприятиями при условии, что прибыль $f(x)$, полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств x. Вложения кратны Δx, а функции $f(x)$ заданы в табл. 3.

Таблица 3

Исходные данные

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	5	9	12	14	15	18	20	24	27
$f_2(x)$	7	9	11	13	16	17	21	22	25
$f_3(x)$	6	10	13	15	18	19	21	22	25

$s_0 = 8$, $n = 3$, $\Delta x = 1$.

Задача 4. Необходимо найти оптимальное распределение средств между тремя предприятиями при условии, что прибыль $f(x)$, полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств x. Вложения кратны Δx, а функции $f(x)$ заданы в табл. 4 [1].

Таблица 4

Исходные данные

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	5	9	12	14	15	18	20	23	26
$f_2(x)$	7	9	10	13	16	19	21	22	25
$f_3(x)$	6	10	13	15	16	18	21	22	25

$s_0 = 9$, $n = 3$, $\Delta x = 1$.

Задача 5. Необходимо найти оптимальное распределение средств между четырьмя предприятиями при условии, что прибыль $f(x)$, полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств x. Вложения кратны Δx, а функции $f(x)$ заданы в табл. 5.

Таблица 5

Исходные данные

x	1	2	3	4	5
$f_1(x)$	0,2	0,9	1,0	1,2	2,0
$f_2(x)$	1,0	1,1	1,3	1,4	1,8
$f_3(x)$	2,1	2,5	2,9	3,9	4,9
$f_4(x)$	0	2,0	2,5	3,0	4,0

$s_0 = 6$, $n = 4$, $\Delta x = 1$.

Задача 6. Необходимо найти оптимальное распределение средств между четырьмя предприятиями при условии, что прибыль $f(x)$, полученная от каждого предприятия, является функцией от вложенных в него средств x. Вложения кратны Δx, а функции $f(x)$ заданы в табл. 6.

Таблица 6

Исходные данные

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f_1(x)$	5	9	12	14	15	18	20	24	27
$f_2(x)$	7	9	11	13	16	19	21	22	25
$f_3(x)$	6	10	13	15	16	18	21	22	25
$f_4(x)$	3	5	7	11	13	15	20	22	24

$s_0 = 9$, $n = 4$, $\Delta x = 1$.

Задача 7. Необходимо определить оптимальные сроки замены оборудования на предприятии, если известны: первоначальная стоимость оборудования p_0; его ликвидная стоимость $\varphi(t)$; стоимость содержания $r(t)$ в течение года оборудования возраста t лет; n – срок эксплуатации, в конце которого оборудование продается. Критерий оптимальности – суммарные затраты на эксплуатацию оборудования в течение n лет с учётом первоначальной покупки и последующей продажи. Необходимо составить математическую модель, записать уравнение Беллмана и решить задачу графически на основании показателей: $p_0 = 8\,000$; $\varphi(t) = p_0 2^{-t}$; $r(t) = 0{,}1 p_0 \cdot (t+1)$; $n = 5$.

Задача 8. Необходимо определить оптимальные сроки замены оборудования на предприятии, если первоначальная стоимость нового оборудования зависит от года покупки p_k; его ликвидная стоимость $\varphi(t)$; стоимость содержания $r_k(t)$ в течение года оборудования возраста t лет; n – срок эксплуатации, в конце которого оборудование продается. Критерий оптимальности – суммарные затраты на эксплуатацию оборудования в течение n лет с учётом первоначальной покупки и последующей продажи. Необходимо составить математическую модель, записать уравнение Беллмана и решить задачу графически на основании показателей: $p_k = 5\,000 + 500(k-1)$; $(k = 1, 2, \ldots, 5)$; $\varphi(t) = p_k 2^{-t}$; $r_k(t) = 0{,}1 p_k \cdot (t+1)$; $n = 5$.

Задача 9. Необходимо определить оптимальные сроки замены оборудования на предприятии, если известны: первоначальная стоимость оборудования p_0; его ликвидная стоимость $\varphi(t)$; стоимость содержания $r(t)$ в течение года оборудования возраста t лет; n – срок эксплуатации, в конце которого оборудование продается. Критерий оптимальности – суммарные затраты на эксплуатацию оборудования в течение n лет с учётом первоначальной покупки и последующей продажи. Необходимо: составить математическую модель, записать уравнение Беллмана и решить задачу графически на основании показателей: $p_0 = 8\,000$; $n = 5$; $\varphi(t)$ и $r(t)$ (табл. 7).

Таблица 7

Исходные данные

t	0	1	2	3	4	5
$\varphi(t)$	–	6 000	5 000	3 000	1 000	500
$r(t)$	600	800	1 100	1 500	2 000	–

Задача 10. Необходимо составить оптимальный план распределения капиталовложений между четырьмя предприятиями при исходных данных относительно x_i и $f_i(x_i)$, приведённых в табл. 8, а также с учётом того, что $S = 100$ тыс. грн.

Таблица 8

Исходные данные

Объём капиталовложений x_i (тыс. грн)	Прирост выпуска продукции $f_i(x_i)$ в зависимости от объёма капиталовложений (тыс. грн)			
	Предприятие 1	Предприятие 2	Предприятие 3	Предприятие 4
0	0	0	0	0
20	12	14	13	18
40	33	28	38	39
60	44	38	47	48
80	64	56	62	65
100	78	80	79	82

Задача 11. В склад ёмкостью W м^3 требуется поместить n различных товаров оборудования. Объём одной единицы i-го типа оборудования

($i=\overline{1,n}$) равен V_i м^3, а стоимость единицы данного типа оборудования равна C_i грн. Необходимо определить, сколько оборудования каждого типа следует поместить в склад так, чтобы общая стоимость складированного оборудования была максимальной.

Найдите оптимальный план загрузки склада при $W=90$ м^3, $V_1=24$ м^3, $V_2=19$ м^3, $V_3=16$ м^3, $C_1=960$ грн, $C_2=500$ грн, $C_3=250$ грн.

Задача 12. Необходимо найти оптимальный план производства предприятием продукции в течении четырёх месяцев, если потребности в каждом из месяцев, соответственно, составляют 2 000, 3 000, 3 000 и 2 000 изделий, а запасы к началу планируемого периода равны 2 000 изделий. Следует учитывать, что предприятие в каждом из месяцев может производить не более 4 000 изделий. Одновременно оно может хранить также не более 4 000 изделий. Затраты, связанные с производством 1 000, 2 000, 3 000 и 4 000 изделий, составляют, соответственно, 13, 15, 17 и 19 грн, а затраты, обусловленные хранением 1 000 изделий, равны 1 грн.

Рекомендуемая литература

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособ. для студентов эконом. спец. / И. Л. Акулич – Москва : Высш. шк., 1986. – 319 с., ил.

2. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – Москва : Изд. иностранной литературы, 1960. – 400 с.

3. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин и др.; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – Москва : Банки и биржи; ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

4. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование : учеб. пособ. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – Москва : Высш. школа, 1980 – 300 с., ил.

5. Норик Л. А. Высшая и прикладная математика : учеб. пособ. для иностранных студентов. Ч. 2 / Л. А. Норик, А. К. Шевченко. – Харьков : Изд. ХНЭУ, 2013. – 404 с. (Русск. яз.).

Содержание

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні рекомендації до практичних завдань з розділу "Динамічне програмування" для іноземних студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня

(рос. мовою)

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Шевченко** Олександра Кирилівна
Жуков Андрій В'ячеславович

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *Н. І. Ганцевич*

Коректор *Т. А. Маркова*

Викладено теоретичний матеріал у стислому вигляді з ілюстративними прикладами, контрольні запитання для самодіагностики, завдання для самостійної роботи.

Рекомендовано для іноземних студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня.

План 2019 р. Поз. № 14 ЕВ. Обсяг 44 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.