

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ**

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

**Методичні рекомендації
до практичних завдань
з розділу "Вища математика"
для студентів спеціальності
242 "Туризм"
першого (бакалаврського) рівня**

**Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2019**

УДК 517(07.034)

B95

Укладачі: Е. Ю. Железнякова
Т. В. Сілічова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.

Протокол № 3 від 10.10.2018 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Вища та прикладна математика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних завдань з розділу "Вища математика" для студентів спеціальності 242 "Туризм" першого (бакалаврського) рівня / уклад. Е. Ю. Железнякова, Т. В. Сілічова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 100 с.

Подано значний перелік практичних завдань відповідно до тем робочої програми навчальної дисципліни і методичні рекомендації щодо їхнього виконання, що сприятимуть набуттю майбутніми фахівцями професійних компетентностей. За кожною темою наведено приклади розв'язання типових задач, завдання для самостійної роботи та відповіді до них.

Рекомендовано для студентів спеціальності 242 "Туризм" першого (бакалаврського) рівня.

УДК 517(07.034)

© Харківський національний економічний
університет імені Семена Кузнеця, 2019

Вступ

Фундаментальну основу в математичній підготовці студентів першого (бакалаврського) рівня галузі знань 24 "Сфера обслуговування" спеціальності 242 "Туризм" складає навчальна дисципліна "Вища та прикладна математика", яка є базовою дисципліною структурно-логічної схеми, що передбачена освітньо-професійною програмою. В сучасних умовах важливу роль відіграє залучення математичного апарату до досліджень у галузі гуманітарних і суспільних наук, що в свою чергу формує певний рівень математичної культури студентів закладів вищої освіти.

Основними завданнями вивчення цієї дисципліни є надання студентам знань із основних розділів вищої математики, підвищення рівня їхньої фундаментальної математичної підготовки з посиленням її прикладної спрямованості.

У процесі опанування дисципліни "Вища та прикладна математика" студент отримує предметно-галузеві математичні компетентності, а саме: аналітично-дослідницькі, процедурні, логічні, технологічні та методологічні, які необхідні сучасному спеціалісту в будь-яких сферах його діяльності. Завдяки вивченню дисципліни студент має здобути базові знання з лінійної алгебри, аналітичної геометрії, математичного аналізу. Це дозволить йому застосовувати набуті знання та навички до розв'язання багатьох практичних задач з економіки та бізнесу.

Методичні рекомендації відповідають робочій програмі навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика", наданий матеріал є розподілений за темами практичних занять (8 тем). Кожна тема має велику кількість прикладів, що супроводжуються докладним поясненням кожного кроку розв'язання задачі, основними теоретичними відомостями, необхідними для розв'язання задач. Для закріплення здобутих знань кожна тема (практичне заняття) має задачі для самостійного розв'язання із відповідями.

Методичні рекомендації до практичних завдань із навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" розділ "Вища математика" є рекомендованими для студентів спеціальності 242 "Туризм" першого (бакалаврського) рівня.

Практичне заняття 1. Елементи теорії матриць та визначників. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Мета практичного заняття: навчитися виконувати основні арифметичні дії із матрицями, обчислювати визначники другого та третього порядків, досліджувати на сумісність та розв'язувати системи рівнянь за методом Крамера, методом оберненої матриці та методом Жордана – Гауса.

Матриці

Прямокутна таблиця чисел, яка має m рядків і n стовпців, називається **матрицею**, а самі числа – її елементами. Позначають матриці великими літерами латинського алфавіту $A, B, C, \dots$, а їхні елементи – $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, \dots$, де i – номер рядка матриці ($i = \overline{1, m}$), j – номер стовпця матриці ($j = \overline{1, n}$). Наприклад, $A = (a_{ij})_{i=\overline{1, m}, j=\overline{1, n}}$,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Якщо в матриці число стовпців і число рядків однакове і дорівнює n , матриця називається **квадратною матрицею** n -го порядку. Матрицю, яка має один рядок (стовпець), називають матрицею-рядком (матрицею-стовпцем). Якщо всі елементи матриці дорівнюють нулю, то матрицю називають **нульовою**.

Множина елементів квадратної матриці $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ називається **головною діагоналлю матриці**.

Квадратна матриця називається **діагональною матрицею**, якщо всі її елементи, які знаходяться поза головною діагоналлю, дорівнюють нулю:

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Одинична матриця – це діагональна матриця, елементи якої дорівнюють одиниці:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо матрицю $A = (a_{ij})_{[m \times n]}$. Якщо в цій матриці переставити місцями відповідні рядки і стовпці, то отримаємо транспоновану матрицю A^T :

$$A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Із матрицями можна виконувати різноманітні алгебраїчні операції, деякі з них мають такі ж самі властивості, що і дії над звичайними числами. Тому операції з матрицями мають такі властивості, як і операції над числами, а саме:

- | | |
|---|--|
| 1) $A + B = A + B$; | 5) $(A + B)C = AC + BC$; |
| 2) $(A + B) + C = A + (B + C)$; | 6) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$; |
| 3) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$; | 7) $(AB)C = A(BC)$; |
| 4) $A(B + C) = AB + AC$; | 8) $AE = EA = A$. |

Дві матриці A і B є рівними, якщо вони мають однаковий розмір і всі їхні відповідні елементи рівні між собою: $a_{mk} = b_{mk}$.

Дії над матрицями

1. Сумою (різницею) матриць A і B однакового розміру є матриця C того самого розміру, кожен елемент якої дорівнює сумі (різниці) відповідних елементів матриць A і B :

$$A + B = C; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

$$A - B = C; c_{ij} = a_{ij} - b_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

2. Добутком матриці A на число λ називається нова матриця того ж розміру, всі елементи якої дорівнюють λa_{ij} .

3. Добуток матриці A на матрицю B існує тільки тоді, коли кількість стовпців першого співмножника дорівнює кількості рядків другого. Добуток матриці A розміру $(m \times n)$ на матрицю B розміру $(n \times s)$ називається матриця C розміру $(m \times s)$, елементи якої визначаються рівностями:

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}, \quad (i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n).$$

Тобто, щоб дістати c_{ij} , треба елементи i -го рядка матриці A помножити на відповідні елементи j -го стовпця матриці B і знайдені добутки додати.

Приклад 1.1. Знайти додаток матриць A і B .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Додавання (віднімання) матриць відбувається шляхом додавання (віднімання) відповідних елементів. Тому слід пам'ятати, що можна додавати (віднімати) лише матриці однакового розміру.

Отримаємо:

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -5 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.2. Знайти матрицю $2A$, якщо де $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$.

Розв'язання. У цьому випадку кожен елемент матриці A треба помножити на число 2:

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 9 & 2 & -3 \\ -1 & -5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 8 \\ 18 & 4 & -6 \\ -2 & -10 & 6 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.3. Знайти добуток матриць A і B .

$$A_{[2 \times 3]} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}; B_{[3 \times 2]} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Операція множення матриць є відмінною від множення звичайних алгебраїчних виразів. У загальному випадку рівність $A \cdot B = B \cdot A$ не виконується, тобто: $A \cdot B \neq B \cdot A$, крім того, можлива ситуація, коли добуток $A \cdot B$ існує, а у протилежному напрямі $B \cdot A$ – ні. Для запобігання помилок під час множення матриць доцільно користуватися правилом: *кількість стовпців першої матриці має дорівнювати кількості рядків другої матриці.*

Розв'язання.

$$C_{[2 \times 2]} = (A \cdot B) = (C_{ij}) = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix};$$

$$C_{11} = 1 \cdot 1 + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot (-4) = -9; C_{12} = 1 \cdot 2 + (-1) \cdot (-3) + 2 \cdot 8 = 21;$$

$$C_{21} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot (-4) = 19; C_{22} = 3 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + (-2) \cdot 8 = -22;$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} -9 & 21 \\ 19 & -22 \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.4. Знайти добуток матриць $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Нехай $A \cdot B = C$, тоді:

$$c_{11} = 1 \cdot (-1) + (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 = 3;$$

$$c_{21} = 3 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + (-2) \cdot 3 = 5.$$

$$\text{Отримаємо: } A \cdot B = C = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

У цьому випадку знайти матрицю $B \cdot A$ немає можливості, тому що матриця B має один стовпець, а матриця A – два рядка.

Визначники

Визначником матриці другого порядку називається алгебраїчний вираз:

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}.$$

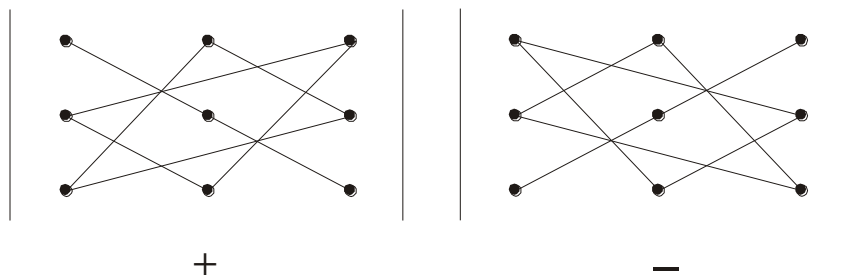
Приклад 1.5. Обчислити визначник матриці другого порядку:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-5) - 6 \cdot 3 = -28.$$

Для обчислення визначника третього порядку застосовується правило трикутника, яке зручно зобразити за допомогою схеми:



$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}.$$

Приклад 1.6. Обчислити визначник матриці третього порядку:

$$\begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

За правилом трикутника, маємо:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 4 - 5 \cdot 2 \cdot 3 - \\ - 2 \cdot (-1) \cdot 3 = 9 + 40 - 2 - 4 - 30 + 6 = 19.$$

Існує загальне правило обчислення визначника матриці: шляхом розкладання за елементами будь-якого рядка (стовпця). Визначник дорівнює сумі добутків всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на їхні алгебраїчні доповнення.

Приклад 1.7. Обчислити визначник розкладанням за елементами першого рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 5 & 6 & 7 \\ 1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 6 & 7 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + (-4) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \\ = 2 \cdot 18 - 3 \cdot 8 + 4 \cdot 6 = 36.$$

Слід пам'ятати, результат обчислень не залежить від того за яким стовпчиком чи рядком відбувається розкладання, тому якщо у визначнику є хоча б один рядок (стовпчик), де існують нульові елементи, то є доцільним проводити розкладання за цим рядком (стовпчиком), щоб зменшити кількість арифметичних дій.

Приклад 1.8. Обчислити визначник:

$$\begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. У цьому випадку є доцільним розкласти визначник за елементами третього рядка:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix} = (-1)A_{31} + 5 \cdot A_{32} + 0 \cdot A_{33} = - \begin{vmatrix} -3 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 5 \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(6 - 3) - 5(-4 - 12) = 77.$$

Обернена матриця

Матриця A^{-1} називається оберненою до квадратної неособливої матриці A , якщо під час множення матриці A справа і зліва на A^{-1} маємо одиничну матрицю:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

Обернена матриця існує не завжди. Так, якщо $\det A = 0$, то матриця A є виродженою, та для неї обернену матрицю обчислити не можливо.

У випадку, якщо $\det A \neq 0$, то обернена матриця знаходиться за правилом: $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, де A^* є союзною матрицею, елементами якої є алгебраїчні доповнення елементів транспонованої до A матриці:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

Приклад 1.9. Обчислити матрицю, обернену до даної:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Спочатку обчислимо визначник матриці A :

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 17.$$

$\det A \neq 0$, обернена матриця існує. Знаходимо всі алгебраїчні доповнення A_{ij} елементів a_{ij} :

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 6, \quad A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -2, \quad A_{31} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 3,$$

$$A_{12} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1, \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 7.$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{17} \begin{pmatrix} 6 & -2 & 3 \\ 2 & 5 & 1 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix},$$

тоді:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{6}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17} \\ \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17} \\ \frac{-3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17} \end{pmatrix}.$$

Іншим засобом пошуку оберненої матриці є використання елементарних перетворень над рядками матриці.

Приклад 1.10. Знайти обернену матрицю A^{-1} для матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання:

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -6 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -5 & -3 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & -3 & 0 & -1 \end{array} \right) \sim \\ & \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -4 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 5 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{array} \right). \end{aligned}$$

$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_E \quad \bigg| \quad \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{A^{-1}}$

Перевіримо правильність обчислень:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ -2 & 5 & -6 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Метод Крамера

Розглянемо систему трьох рівнянь із трьома невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} - \text{матриця системи,}$$

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \text{стовпець невідомих}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} - \text{стовпець вільних членів}.$$

Обчислимо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta \neq 0$, то система рівнянь має єдиний розв'язок, який може бути знайдений за формулами Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta}, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta},$$

$$\text{де } \Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

Якщо $\Delta = 0$ і хоча б один із визначників Δ_{x_1} , Δ_{x_2} , Δ_{x_3} не дорівнює нулю, то система несутісна (не має розв'язку).

Якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$, то система має безліч розв'язків.

Приклад 1.11. Розв'язати систему рівнянь методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -3, \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Спочатку обчислимо визначник системи Δ , елементами якого є коефіцієнти за всіма невідомими системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12 \neq 0.$$

Оскільки $\Delta \neq 0$, за теоремою Крамера система має єдиний розв'язок.

Обчислимо визначник, що отримано із визначника Δ заміною його першого стовпця на стовпець вільних членів системи:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 5 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 12.$$

Далі обчислимо визначники, що отримано із визначника Δ заміною його другого та третього стовпців, відповідно, на стовпець вільних членів системи:

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 5 & -3 & -4 \\ -4 & 1 & 3 \end{vmatrix} = -24, \quad \Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 5 & -6 & -3 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 60.$$

За формулами Крамера маємо:

$$x_1 = \frac{\Delta_{x_1}}{\Delta} = \frac{12}{12} = 1, \quad x_2 = \frac{\Delta_{x_2}}{\Delta} = \frac{-24}{12} = -2, \quad x_3 = \frac{\Delta_{x_3}}{\Delta} = \frac{60}{12} = 5.$$

Відповідь: $x_1 = 1, x_2 = -2, x_3 = 5$.

Приклад 1.12. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = -1, \\ 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 5. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \\ 2 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 27 - 5 + 8 - 6 + 6 - 30 = 0.$$

Обчислимо:

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & -2 \\ 5 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 27 + 5 + 20 - 15 - 6 - 30 = 1.$$

Через те що $\Delta = 0$, а $\Delta_{x_1} \neq 0$, система не має розв'язку.

Приклад 1.13. Розв'язати систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - 3x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 2 - 9 + 1 - 6 + 12 = 0,$$

а $\Delta_{x_1} = \Delta_{x_2} = \Delta_{x_3} = 0$.

Тому система рівнянь має безліч розв'язків.

Метод оберненої матриці

Розв'язати систему лінійних рівнянь матричним методом можливо лише тоді, якщо система має тільки єдиний розв'язок, тобто у випадку, коли $\Delta \neq 0$.

Приклад 1.14. Розв'язати систему рівнянь методом оберненої матриці:

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 5, \\ 5x_1 - 6x_2 - 4x_3 = -3, \\ -4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Розв'язання. Запишемо відповідну систему СЛАР (система лінійних алгебраїчних рівнянь) у матричній формі:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 5 & -6 & -4 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix} - \text{матриця коефіцієнтів}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} - \text{матриця}$$

невідомих, $B = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ – матриця вільних елементів.

Тоді $AX = B$, $X = \frac{B}{A} = A^{-1}B$, де A^{-1} – матриця, що є оберненою

до матриці A . Оскільки, $\Delta = 12$, то A – невироджена, для неї існує обернена матриця, і відповідна система має єдиний розв'язок:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 7/44 & 3/44 & -1/22 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/88 & -1/88 & -19/44 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Тоді: } X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 7/44 & 3/44 & -1/22 \\ 1/8 & 1/8 & 1/4 \\ 1/88 & -1/88 & -19/44 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 5$.

Метод Жордана – Гауса, або метод виключення невідомих

Метод Жордана – Гауса є одним із найпоширених методів розв'язання системи лінійних рівнянь. Основою цього методу є елементарні перетворення над рядками матриці.

Приклад 1.15. Розв'язати систему методом Жордана – Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = -3, \\ x_1 + 4x_2 - x_3 = 3. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язання системи рівнянь зручно надати у вигляді таблиці (табл. 1.1).

Таблиця 1.1

Розв'язання системи рівнянь

№ п/п	Коефіцієнти при			b_i	Σ	Примітка
	x_1	x_2	x_3			
1	2	3	4	5	6	7
1	1	3	1	6	11	
2	2	-1	-2	-3	-4	
3	1	4	-1	3	7	

Закінчення табл. 1.1

1	2	3	4	5	6	7
4	1	3	1	6	11	[1]
5	0	-7	-4	-15	-26	[2]-2·[4]
6	0	1	-2	-3	-4	[3]-[4]
7	1	0	7	15	23	(-3)·[8]+[4]
8	0	1	-2	-3	-4	[6]
9	0	0	-18	-36	-54	[5]+7·[8]
10	1	0	0	1	2	(-7)·[12]+[7]
11	0	1	0	1	2	2·[12]+[11]
12	0	0	1	2	3	[9]:2

Отримали систему:

$$\begin{cases} x_1 & = 1, \\ x_2 & = 1, \\ x_3 & = 2. \end{cases}$$

Відповідь: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$.

Приклад 1.16. Знайти розв'язок заданої системи рівнянь методом Жордана – Гауса:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 5x_3 - 2x_4 = -2, \\ x_1 + 5x_2 - 17x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 - x_2 + x_3 - 4x_4 = -8. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язання системи рівнянь див. у табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Розв'язання системи рівнянь

№ п/п	Коефіцієнти при				b_i	Σ	Примітка
	x_1	x_2	x_3	x_4			
1	2	3	4	5	6	7	8
1	1	1	-5	-2	-2	-7	
2	1	5	-17	2	10	1	
3	1	-1	1	-4	-8	-11	

1	2	3	4	5	6	7	8
4	1	1	-5	-2	-2	-7	[4]=[1]
5	0	4	-12	4	12	8	[5]=[2]-[4]
6	0	-2	6	-2	-6	-4	[6]=[3]-[4]
7	0	1	-3	1	3	2	[7]=[5] : 4
8	1	0	-2	-3	-5	-9	[8]=[4]-[7]
9	0	0	0	0	0	0	[9]=[6]+2·[7]

x_3, x_4 – вільні невідомі. Виразимо через них x_1 і x_2 .

Із табл. 1.2 отримаємо:

$$x_1 = -5 + 2x_3 + 3x_4;$$

$$x_2 = 3 + 3x_3 - x_4.$$

Це є загальний розв'язок системи. Якщо вільним невідомим надати будь-які значення, отримаємо частинний розв'язок.

Приклад 1.17. Розв'язати систему:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12, \\ 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 = 30. \end{cases}$$

Розв'язання. Розв'язання системи рівнянь наведено в табл. 1.3.

Таблиця 1.3

Розв'язання системи рівнянь

№ п/п	Коефіцієнти при			b_i	Σ	Примітка
	x_1	x_2	x_3			
1	2	3	4	5	6	7
1	3	2	1	23	29	
2	1	1	2	12	16	
3	4	3	3	30	40	
4	1	1	2	12	16	[2]
5	0	-1	-5	-13	-19	[4]·(-3)+[1]
6	0	-1	-5	-18	-24	[4]·(-4)+[3]

1	2	3	4	5	6	7
7	1	0	-3	-1	-3	$[8] \cdot (-1) + [4]$
8	0	1	5	13	19	$[5] \cdot (-1)$
9	0	0	0	-5	-5	$[8] + [6]$

Отримали систему:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_3 = -1, \\ x_2 + 5x_3 = 13, \\ 0 = -5. \end{cases}$$

Останнє рівняння суперечить законам математики, тому маємо, що система немає розв'язків.

Відповідь: система немає розв'язків.

Завдання до самостійної роботи

1.1. $A + B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1.2. $A + 2B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$.

1.3. $2A + B$, якщо $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Знайти $A \cdot B$ та $B \cdot A$, якщо:

1.4. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$$1.5. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Виконати дії із матрицями:

$$1.7. \quad (A+B)(A-B), \text{ де } A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$1.8. \quad 2A + A \cdot B, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 1 \\ -2 & 7 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 8 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.9. \quad B \cdot (B - 2A), \text{ де } A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$1.10. \quad (A + 2B) \cdot A, \text{ де } A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обчислити визначники другого порядку:

$$1.11. \quad \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}.$$

$$1.12. \quad \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}.$$

$$1.13. \quad \begin{vmatrix} \sin \alpha & -\cos \alpha \\ \cos \alpha & \sin \alpha \end{vmatrix}.$$

$$1.14. \quad \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}.$$

$$1.15. \quad \begin{vmatrix} a & \sqrt{a} \\ \sqrt{a} & 2 \end{vmatrix}.$$

$$1.16. \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix}.$$

Розв'язати рівняння:

$$1.17. \begin{vmatrix} x & x-2 \\ -5 & x-2 \end{vmatrix} = 0.$$

$$1.18. \begin{vmatrix} x & x+2 \\ x-2 & 2x-5 \end{vmatrix} = 0.$$

Обчислити визначники третього порядку:

$$1.19. \begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 8 \\ 3 & 4 & -6 \end{vmatrix}.$$

$$1.20. \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -4 & 7 & -5 \\ 9 & -8 & 6 \end{vmatrix}.$$

$$1.21. \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix}.$$

$$1.22. \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}.$$

$$1.23. \begin{vmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 4 & 0 & 6 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$1.24. \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 7 & 0 & 5 \\ 3 & 4 & 0 \end{vmatrix}.$$

Перевірити, чи є матриця A невиродженою:

$$1.25. A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.26. A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1 & -3 & 5 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$1.27. A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Знайти матриці, що обернені для вказаних:

$$1.28. \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$1.29. \begin{pmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

$$1.30. \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Обчислити ранг матриці:

$$1.31. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -4 \\ 4 & 8 & -12 \end{pmatrix}.$$

$$1.32. \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$1.33. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язати систему рівнянь:

$$1.34. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.35. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 4, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 5, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.36. \begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9, \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4, \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18. \end{cases}$$

$$1.37. \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 3. \end{cases}$$

$$1.38. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + 4x_2 + 6x_3 = 3, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

$$1.39. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$1.40. \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

$$1.41. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 3, \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 10. \end{cases}$$

$$1.42. \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 0, \\ 8x_1 + 2x_2 - x_3 = 21, \\ 2x_1 + 11x_2 - 16x_3 = 21. \end{cases}$$

$$1.43. \begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 1. \end{cases}$$

Практичне заняття 2. Елементи теорії границь

Мета практичного заняття: навчитися обчислювати границі функцій, розкривати основні невизначеності, використовувати для обчислень границь першу та другу особливі границі, досліджувати функції на неперервність.

Границі. Основні засоби розкриття невизначеностей

Число A називається границею функції $f(x)$ при x , що прямує до x_0 ($x \rightarrow x_0$), якщо для будь-якого як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існує

число $\delta > 0$, таке, що з нерівності $|x - x_0| < \delta$ випливає нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$, тобто $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

Обчислення границь ґрунтується на наступних теоремах.

Нехай на деякій множині чисел є заданими дві функції $f(x)$ та $g(x)$, які в точці x_0 мають скінченні границі $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ і $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$, то:

- 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
- 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$;
- 3) $\lim_{x \rightarrow x_0} (a \cdot f(x)) = a \cdot \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, $a = \text{const}$;
- 4) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, якщо $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.

Обчислення границь

Для обчислення границі многочлена достатньо замість змінної x підставити значення, до якого вона прямує та виконати відповідні дії:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Приклад 2.1. Обчислити границю функції:

$$\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 7).$$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2} (3x^2 - 2x + 7) = 3 \cdot 2^2 - 2 \cdot 2 + 7 = 15$.

Приклад 2.2. Обчислити границі функцій:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x}{x + 1}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x}{x - 1}; \quad 3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x - 3}{x + 1}.$$

Розв'язання. 1) підставимо значення змінної до функції та отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x}{x + 1} = \frac{3 \cdot 1 - 2 \cdot 1}{1 + 1} = \frac{1}{2};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x}{x - 1} = \frac{3 - 2}{0} = \frac{1}{0} = \infty;$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x-3}{x+1} = \frac{0}{2} = 0.$$

Існують границі, які неможливо обчислити, якщо попередньо не перетворити їхні вирази, такі типи границь називають невизначеностями. Невизначеність кожного типу має власні правила обчислення.

Невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$ та засоби її розкриття

Якщо відповідна невизначеність виникає як наслідок відношення двох поліномів: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \left[\frac{0}{0} \right]$, то у цьому випадку застосовується розвинення на множники чисельника та знаменника із подальшим їхнім скороченням. Для розкладання квадратного тричлена на множники використовуємо формулу: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де $x_{1,2}$ – корені відповідного квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Приклад 2.3. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x+2)}{(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 2} (x+2) = 4.$

Приклад 2.4. Знайти: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^4 - x}$.

Розв'язання. Оскільки, при $x=1$, чисельник і знаменник прямують до нуля, то маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$. Тоді:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 2x - 1}{x^4 - x} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3(x-1)\left(x + \frac{1}{3}\right)}{x(x-1)(x^2 + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+1}{x(x^2 + x + 1)} = \frac{3+1}{1+1+1} = \frac{4}{3}.$$

Приклад 2.5. Знайти: $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3 + 5x - 7}{x^2 - 3x + 2}$.

Розв'язання. У цьому випадку також має місце невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$.

Враховуємо, що $x=1$ є коренем поліному $2x^3+5x-7$, поділимо відповідний поліном на $(x-1)$, отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^3+5x-7}{x^2-3x+2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(2x^2+2x+7)}{(x-1)(x-2)} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x^2+2x+7}{x-2} = -11.$$

Якщо невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$ виникає у виразах, що мають ірраціональність (корені), то в цьому випадку чисельник та знаменник дробу помножують на спряжений вираз.

Приклад 2.6. Знайти: $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{3x+4}}{16-x^2}$.

Розв'язання. Тут маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для її розкриття помножимо чисельник і знаменник на вираз, спряжений до чисельника. Після скорочення дробу на $(x-4)$ застосуємо теорему про границю частки.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x - \sqrt{3x+4}}{16-x^2} &= \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x - \sqrt{3x+4})(x + \sqrt{3x+4})}{(16-x^2)(x + \sqrt{3x+4})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 - 3x - 4}{(16-x^2)(x + \sqrt{3x+4})} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{(x-4)(x+1)}{-(x-4)(x+4)(x + \sqrt{3x+4})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 4} \frac{x+1}{-(x+4)(x + \sqrt{3x+4})} = -\frac{5}{64}. \end{aligned}$$

Приклад 2.7. Знайти: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Тоді, після перетворення, маємо:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(\sqrt{4x+1}-3)(\sqrt{4x+1}+3)(\sqrt{x+2}+2)}{(\sqrt{x+2}-2)(\sqrt{x+2}+2)(\sqrt{4x+1}+3)} =$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(4x+1-9)(\sqrt{x+2}+2)}{(x+2-4)(\sqrt{4x+1}+3)} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(x-2)(\sqrt{x+2}+2)}{(x-2)(\sqrt{4x+1}+3)} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{4(\sqrt{x+2}+2)}{\sqrt{4x+1}+3} = \frac{4 \cdot 4}{3+3} = \frac{8}{3}.
\end{aligned}$$

Невизначеність $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$ та засоби її розкриття

Якщо відповідна невизначеність виникає як наслідок відношення двох поліномів: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, то у таких випадках треба поділити чисельник і знаменник дробу на x^n або x^m , де n або m – найвищий із ступенів чисельника і знаменника.

Приклад 2.8. Знайти: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2}{2x^4 + 3x - 5}$.

Розв'язання. Маємо невизначеність вигляду $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$. Найвищий ступінь $n = 4$, тому поділимо на x^4 .

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 3x^2}{2x^4 + 3x - 5} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{5}{x} + \frac{3}{x^2}}{2 + \frac{3}{x^3} - \frac{5}{x^4}} = \frac{0}{2} = 0,$$

оскільки $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3}{x^3} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5}{x^4} = 0$.

Приклад 2.9. Знайти: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 2}$.

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 2} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Поділимо на x^3 чисельник та знаменник дробу.

Отримаємо: $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5x^3 + 2x - 1}{2x^3 - x^2 + 2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{5 + \frac{2}{x^2} - \frac{1}{x^3}}{2 - \frac{1}{x} + \frac{2}{x^3}} = \frac{5}{2}.$

Приклад 2.10. Знайти: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} + 5}{3\sqrt{x^2 - x} + x}.$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 + 2x^2} + 5}{3\sqrt{x^2 - x} + x} = \left[\frac{\infty}{\infty} \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{x^3 \left(1 + \frac{2}{x} \right)} + 5}{3\sqrt{x^2 \left(1 - \frac{1}{x} \right)} + x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} + 5}{3x \sqrt{1 - \frac{1}{x}} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[3]{1 + \frac{2}{x}} + \frac{5}{x}}{3\sqrt{1 - \frac{1}{x}} + 1} = \frac{1 + 0}{3 + 1} = \frac{1}{4}.$$

Невизначеність $[\infty - \infty]$ та засоби її розкриття

Шляхом алгебраїчних перетворень ця невизначеність завжди зводиться або до $\left[\frac{0}{0} \right]$ або до $\left[\frac{\infty}{\infty} \right].$

Приклад 2.11. Обчислити границю $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right).$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{0} - \frac{6}{0} \right) = [\infty - \infty].$

Зведемо до спільного знаменника:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \left(\frac{1}{x-3} - \frac{6}{x^2-9} \right) = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{1}{6}.$$

Приклад 2.12. Знайти: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - x \right).$

Розв'язання. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\sqrt{x^2 + 2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{(\infty)^2 + 2} - \infty = [\infty - \infty].$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 2} - x)}{1} \cdot \frac{(\sqrt{x^2 + 2} + x)}{(\sqrt{x^2 + 2} + x)}.$$

Помножимо чисельник та знаменник на спряжений вираз, та отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x^2 + 2} - x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 2 - x^2}{(\sqrt{x^2 + 2} + x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2}{(\sqrt{x^2 + 2} + x)} = \frac{2}{\infty} = 0.$$

Перша особлива границя. Таблиця еквівалентних нескінченно малих

$$\text{Першою особливою границею є } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = 1.$$

Для зручності обчислення прикладів, що можуть бути розв'язаними за допомогою першої чудової границі, на практиці використовують такі її наслідки:

$$\begin{array}{lll} 1. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1; & 2. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{a}{b}; & 3. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1; \\ 4. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{x} = a; & 5. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x} = 1; & 6. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{arctg} x}{x} = 1. \end{array}$$

Крім того, в багатьох випадках розв'язання прикладів значно спрощується, якщо застосовувати **таблицю еквівалентних нескінченно малих**.

Так, якщо $\alpha(x) \rightarrow 0$, то відповідні функції можуть бути заміненіми:

$$\begin{array}{ll} \sin \alpha(x) \sim \alpha(x); & \operatorname{tg} \alpha(x) \sim \alpha(x); \\ 1 - \cos \alpha(x) \sim \frac{\alpha^2(x)}{2}; & \operatorname{arctg} \alpha(x) \sim \alpha(x); \\ \arcsin \alpha(x) \sim \alpha(x); & a^{\alpha(x)} - 1 \sim \alpha(x) \ln a. \\ \ln(1 \pm \alpha(x)) \sim \pm \alpha(x); & \end{array}$$

Приклад 2.13. Знайти: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x}.$

Розв'язання. Використаємо для обчислення першу чудову границю. Помножимо та поділимо чисельник і знаменник на відповідні вирази.

$$\text{Отримаємо: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\operatorname{tg} 5x}{5x} \cdot 5x}{\frac{\sin 3x}{3x} \cdot 3x} = \frac{5}{3}, \text{ бо, якщо } x \rightarrow 0$$

$$\frac{\operatorname{tg} 5x}{5x} \rightarrow 1, \quad \frac{\sin 3x}{3x} \rightarrow 1.$$

За умовою використання таблиці еквівалентних нескінченно малих обчислення границі значним чином спрощуються $\operatorname{tg} 5x \sim 5x$; $\sin 3x \sim 3x$, таким чином остаточно отримаємо:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 5x}{\sin 3x} = \left[\frac{0}{0} \right] \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{5x}{3x} = \frac{5}{3}.$$

Приклад 2.14. Знайти: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 6x}$.

$$\text{Розв'язання. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 6x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \left(\frac{\sin 3x}{3x} \right)^2 \cdot 9x^2}{\left(\frac{\operatorname{tg} 6x}{6x} \right)^2 \cdot 36x^2} = \frac{2 \cdot 9}{36} = \frac{1}{2}.$$

За умовою використання таблиці еквівалентних нескінченно малих отримаємо: $\operatorname{tg} 6x \sim 6x$; $1 - \cos 6x \sim \frac{36x^2}{2}$, тоді

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 6x}{\operatorname{tg}^2 6x} = \left[\frac{0}{0} \right] \sim \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{36x^2}{2}}{36x^2} = \frac{1}{2}.$$

Друга особлива границя

Другою особливою границею називають невизначеність $\left[1^\infty \right]$,

якщо вона є заданою у вигляді: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = \left[1^\infty \right] = e$ або

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + x)^{1/x} = \left[1^\infty \right] = e.$$

Приклад 2.15. Знайти: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1} \right)^{2x}$.

Розв'язання.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{2x} = [1^\infty] = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\underbrace{\left(1 + \frac{1}{x-1}\right)^{x-1}}_e \right)^{\frac{2x}{x-1}} = \lim_{x \rightarrow \infty} e^{\frac{2x}{x-1}} = e^2.$$

Приклад 2.16. Знайти: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-7}{6x+5} \right)^{2x-1}$.

Розв'язання. Невизначеність цієї границі є $[1^\infty]$, для її обчислення необхідно звести наданий вираз до другої особливої границі. Отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x-7}{6x+5} \right)^{2x-1} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{6x+5-12}{6x+5} \right)^{2x-1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{12}{6x+5} \right)^{2x-1} = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{12}{6x+5} \right)^{-\frac{6x+5}{12} \cdot \frac{-12(2x-1)}{6x+5}} = e^{\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-12(2x-1)}{6x+5}} = e^{-4}. \end{aligned}$$

Приклад 2.17. Знайти: $\lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}}$.

Розв'язання. У цьому випадку вираз є невизначеністю $[1^\infty]$, однак цей випадок відповідає формулі: $\lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{1/x} = [1^\infty] = e$, тому в дужках додамо та віднімемо одиницю, та згрупуємо:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{x^2}} &= \lim_{x \rightarrow 0} (1-1+\cos x)^{1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \left((1+(\cos x-1))^{1/(\cos x-1)} \right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} e^{\frac{\cos x-1}{x^2}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}} = e^{-\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2}} = e^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Застосування границь до дослідження поведінки графіків функцій у точках розриву. Класифікація точок розриву

Для дослідження графіків функцій у точках розриву знаходять ліво-сторонню та правосторонню границю:

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} f(x) \text{ та } f(x_0 - 0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} f(x),$$

тоді, якщо:

1) існують односторонні границі (скінченні) та виконується тотожність $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$, але $f(x_0) \neq A$ або не існує, то кажуть, що x_0 – точка усувного розриву функції; 2) існують скінченні односторонні границі, але виконується $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$, то x_0 називають точкою розриву 1-го роду; 3) не існує хоча б одна з односторонніх границь або принаймні одна з них нескінченна, то точка x_0 є точкою розриву 2-го роду.

Приклад 2.18. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

Розв'язання. Областю визначення функції є вся числова вісь, крім $x=1$, $x=2$ (у цих точках знаменник дорівнює нулю). Отже, на неперервність функцію досліджуємо у точках $x=1$ та $x=2$. Графік цієї функції зображено на рис. 2.1.

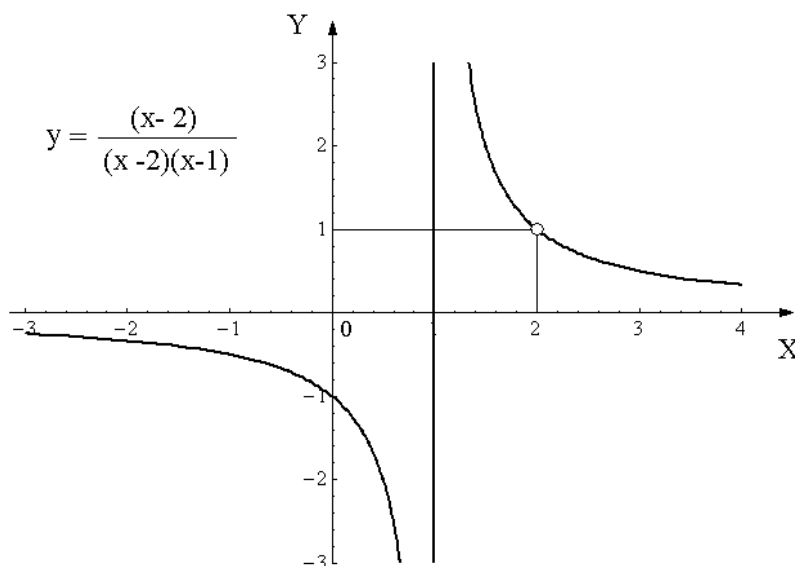


Рис. 2.1. Графік функції $y = \frac{x-2}{x^2-3x+2}$

1. $x=1$.

Знайдемо односторонні границі $f(1-0) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)} = -\infty$.

Отже, точка $x=1$ є точкою розриву 2-го роду.

2. $x=2$.

$$f(2-0) = \lim_{x \rightarrow 2-0} \frac{1}{x-1} = 1, \quad f(2+0) = \lim_{x \rightarrow 2+0} = 1,$$

у точці $x=2$ – функція не існує, тобто $f(2-0) = f(2+0) \neq f(2)$.

Таким чином точка $x=2$ є точкою усувного розриву (див. рис. 2.1).

Приклад 2.19. Дослідити на неперервність функцію:

$$y = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1. \\ x+3, & x > 1 \end{cases}$$

Розв'язання. Маємо неелементарну функцію, яка є заданою трьома формулами (рис. 2.2).

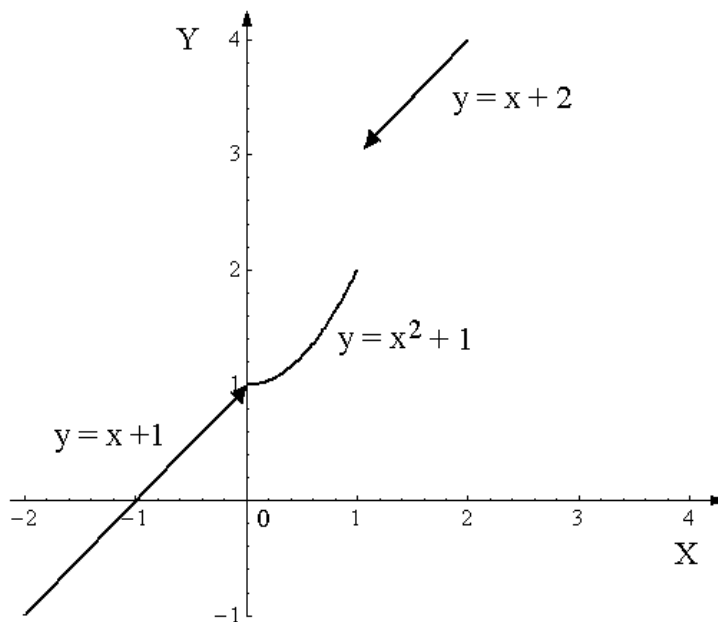


Рис. 2.2. **Графік функції** $y = \begin{cases} x+1, & x \leq 0 \\ x^2+1, & 0 < x \leq 1 \\ x+3, & x > 1 \end{cases}$

На кожному із вказаних проміжків функція неперервна, як елементарна на області свого існування. Необхідно розглянути точки $x=0$ і $x=1$ стиковки функцій різного виду.

1. Якщо $x=0$, односторонні границі $f(0-0)=\lim_{x \rightarrow 0-0}(x+1)=1$;
 $f(0+0)=\lim_{x \rightarrow 0+0}(x^2+1)=1$; $f(0)=1$. Функція в точці $x_0=0$ – неперервна.
2. Якщо $x=1$, $f(1-0)=\lim_{x \rightarrow 1-0}(x^2+1)=2$; $f(1+0)=\lim_{x \rightarrow 1+0}(x+2)=3$;
 $f(1)=2$. Тобто, $f(1-0) \neq f(1+0)$ і функція в цій точці має розрив першого роду (див. рис. 2.1).

Завдання до самостійної роботи

Знайти границі таких функцій:

- 2.1. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{7x-14}{12}$; 2.2. $\lim_{x \rightarrow 0} (17x^3 + 2x - 1)$; 2.3. $\lim_{x \rightarrow 6} \frac{x^2 - 5x - 6}{x^2 - 3x - 18}$;
2.4. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{x^2 - 10x + 21}{x^2 - 14x + 49}$; 2.5. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 14x + 17}{12x^3 + 7x - 3}$; 2.6. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3 - 5x^2 + 2}{2x^3 + 5x - 1}$;
2.7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5 - 2x + 4}{2x^4 + 3x^2 + 1}$; 2.8. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 + 2x - 15}{x^2 - 8x + 15}$; 2.9. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^3 + 4x + 1}{2x^3 - 4x^2 + 5}$;
2.10. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 + 3x - 5}{7x^3 - 2x^2 + 1}$; 2.11. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^4 + 7x + 6}{2x^3 + 10x^2 - 3}$; 2.12. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 3x - 2}{5x^2 + 3x - 1}$;
2.13. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + 10x - 24}{x^2 + 5x - 14}$; 2.14. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 4x - 16}{x^2 - 5x + 4}$; 2.15. $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x - x^6}{x^2 - 2x + 5}$;
2.16. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+3x} - 1}{x}$; 2.17. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{3 - \sqrt{x^2 - 7}}{\sqrt{x+8} - 2}$; 2.18. $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{x^2 + 8x + 16}{2x^2 + 9x + 4}$;
2.19. $\lim_{x \rightarrow 7} \frac{\sqrt{2+x} - 3}{x - 7}$; 2.20. $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{3 - \sqrt{5+x}}{1 - \sqrt{5-x}}$; 2.21. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{5x-1}}{x-1}$;
2.22. $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{\sqrt{5x+1} - 4}{x^2 + 2x - 15}$; 2.23. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{3x-2} - 2}{\sqrt{x+2} - 2}$; 2.24. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 2x}$;
2.25. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 3x - \sin x}{\operatorname{tg} x}$; 2.26. $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{\arcsin(x+2)}{x^2 + 2x}$; 2.27. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - e^{3x}}{\operatorname{tg} 2x}$;
2.28. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x-4}{x+3} \right)^{x+1}$; 2.29. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\arcsin 5(x-1)}{x-1}$; 2.30. $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x-4}{2x+3} \right)^{2x+1}$.

Дослідити функції на неперервність:

2.31. $y = \frac{x^2 + x}{x + 1};$	2.32. $y = \frac{x}{x^3 + 1};$	2.33. $y = \operatorname{arctg} \frac{1}{x - 3};$
2.34. $y = \frac{x}{x^3 + 1};$	2.35. $y = \frac{(x - 1)}{x^2 - 2x - 3};$	2.36. $y = \frac{3}{x^3 - 8};$
2.37. $y = \frac{x}{4x^2 - 1};$	2.38. $y = \frac{2x}{x^3 + 8};$	2.39. $y = \operatorname{arctg} \frac{2}{x - 1};$
2.40. $y = \frac{x - 1}{x^2 + x - 2};$	2.41. $y = \frac{(x + 2)}{x^2 + x - 2};$	2.42. $y = \frac{1}{\ln(x - 2)}.$

Практичне заняття 3. Диференційне числення функції однієї змінної

Мета практичного заняття: навчитися обчислювати похідні функції однієї змінної, безпосередньо використовуючи: таблицю похідних елементарних функцій та правила диференціювання; похідну складеної функції; похідну неявно заданої функції, похідну параметричної та степеневопоказникової функції. Вміти обчислювати похідні вищих порядків та застосовувати елементи диференційного числення для знаходження рівнянь дотичної та нормалі до графіка функції у заданій точці.

Перша похідна функції однієї змінної

Похідною функції однієї змінної називається: $y' = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$

Процедура відшукування похідної називається диференціюванням.

Під час обчислення похідних користуються основними правилами диференціювання та таблицею похідних елементарних функцій.

Нехай функції $u(x)$ та $v(x)$ мають похідні в певній точці x , тоді в тій же точці:

$$1) (u \pm v)' = u' \pm v';$$

$$2) (uv)' = u'v + v'u;$$

$$3) (cu)' = cu', c = \text{const};$$

$$4) \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2} \quad (v(x) \neq 0).$$

Таблиця похідних

1.	$y=c;$	$y'=0.$	7.	$y=\operatorname{tg} x;$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}.$
2.	$y=x^\alpha (\alpha \in R);$	$y'=\alpha x^{\alpha-1}.$	8.	$y=\operatorname{ctg} x;$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}.$
3.	$y=a^x (a>0; a\neq 1);$	$y'=a^x \ln a.$	9.	$y=\arcsin x;$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
4.	$y=\ln x (x>0);$	$y'=\frac{1}{x}.$	10.	$y=\arccos x;$	$y'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$
5.	$y=\sin x;$	$y'=\cos x.$	11.	$y=\operatorname{arctg} x;$	$y'=\frac{1}{1+x^2}.$
6.	$y=\cos x;$	$y'=-\sin x.$	12.	$y=\operatorname{arcctg} x;$	$y'=-\frac{1}{1+x^2}.$

Приклад 3.1. Знайти похідні функцій, користуючись правилами диференціювання і таблицею похідних:

$$1) y = \frac{5}{x^3} + 8x^{\frac{3}{4}} + 2\sqrt[4]{x} + 9x \cdot \sqrt[3]{x^2} - 3; \quad 2) y = x^3 \operatorname{arctg} x; \quad 3) y = \frac{x - \sin x}{\sqrt{x}}.$$

Розв'язання. 1) запишемо задану функцію у вигляді:

$$y = 5x^{-3} + 8x^{\frac{3}{4}} + 2x^{\frac{1}{4}} + 9x^{\frac{5}{3}} - 3. \text{Тоді: } y' = -15x^{-4} + 8 \cdot \frac{3}{4} \cdot x^{-\frac{1}{4}} + \\ + 9 \cdot \frac{5}{3} \cdot x^{\frac{2}{3}} = -\frac{15}{x^4} + \frac{6}{\sqrt[4]{x}} + \frac{1}{2\sqrt[4]{x^3}} + 15\sqrt[3]{x^2};$$

2) за формулою похідної добутку двох функцій отримаємо:

$$y' = (x^3)' \operatorname{arctg} x + x^3 (\operatorname{arctg} x)' = 3x^2 \operatorname{arctg} x + \frac{x^3}{1+x^2};$$

3) за формулою частки отримаємо:

$$y' = \frac{(x - \sin x)' \sqrt{x} - (x - \sin x)(\sqrt{x})'}{(\sqrt{x})^2} = \frac{(1 - \cos x) \sqrt{x} - (x - \sin x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} =$$

$$= \frac{x - 2x \cos x + \sin x}{2x\sqrt{x}}.$$

Похідна складеної функції

Якщо функція є заданою у вигляді: $y = y(u(x))$, то вона називається складеною, та її похідна обчислюється за формулою:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x.$$

Приклад 3.2. Обчислити похідні складених функцій:

$$1) y = \sin(3x + 1); \quad 2) y = (1 - x^4 - x^8)^{-\frac{1}{2}}; \quad 3) y = (\cos 3x + \arcsin^2 \sqrt{x})^3.$$

Розв'язання. 1) $y = \sin(3x + 1)$. Ця функція є складеною; $u = 3x + 1$, тоді $y' = \sin u \cdot u'$ або $y' = \sin(3x + 1) \cdot (3x + 1)' = 3\sin(3x + 1)$;

2) $y = (1 - x^4 - x^8)^{-\frac{1}{2}}$. У цьому випадку $u(x) = (1 - x^4 - 8)$, тому за формулою похідної складеної функції маємо: $y' = \frac{-1}{2} u^{-1/2-1} \cdot u'$ або

$$y' = -\frac{1}{2} (1 - x^4 - x^8)^{-\frac{3}{2}} \cdot (1 - x^4 - x^8)' = \frac{-4x^3 - 8x^7}{-2\sqrt{(1 - x^4 - x^8)^3}};$$

3) $y = (\cos 3x + \arcsin^2 \sqrt{x})^3$. За формулою похідної складеної функції:

$$y' = 3(\cos 3x + \arcsin^2 \sqrt{x})^2 \cdot (\cos 3x + \arcsin^2 \sqrt{x})' =$$

$$= 3(\cos 3x + \arcsin^2 \sqrt{x})^2 \cdot \left(-\sin 3x \cdot 3 + 2 \arcsin \sqrt{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - (\sqrt{x})^2}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} \right).$$

Похідна неявної функції

Якщо функція задана у вигляді $F(x, y) = 0$, вона вважається заданою неявно. Досить часто таку функцію неможливо привести до явно заданої функції $y = f(x)$, тому в таких випадках похідна знаходиться за правилом диференціювання неявно заданої функції.

Приклад 3.3. Обчислити похідну функції $x^2 y^2 = \operatorname{tg} y$.

Розв'язання. Знайдемо похідні від обох частин рівності:

$$2xy^2 + x^2 \cdot 2y \cdot y' = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y', \text{ де } (y^2)' = 2y \cdot y' \text{ та } (\operatorname{tg} y)' = \frac{1}{\cos^2 y} \cdot y'.$$

Розв'яжемо рівняння щодо y' :

$$y' \left(\frac{1}{\cos^2 y} - 2x^2 y \right) = 2xy^2, \text{ або } y' \left(\frac{1 - 2x^2 y \cos^2 y}{\cos^2 y} \right) = 2xy^2.$$

$$\text{Звідки } y' = \frac{2xy^2 \cos^2 y}{1 - 2x^2 y \cos^2 y}.$$

Логарифмічне диференціювання. Степеневопоказникова функція

Функція, яка має вигляд $y = (u(x))^{\nu(x)}$, називається степеневопоказниковою. Для обчислення похідної цієї функції є необхідним завжди прологарифмувати праву та ліву частини тотожності: $\ln y = \nu(x) \cdot \ln u(x)$, потім продиференціювати отриманий вираз як неявну функцію.

Приклад 3.4. Обчислити похідну $y = (4 + x^3)^{\operatorname{tg} 4x}$.

Розв'язання. У результаті логарифмування функції отримаємо:

$\ln y = \operatorname{tg} 4x \cdot \ln(4 + x^3)$. Диференціюємо обидві частини цієї рівності:

$$\frac{1}{y} \cdot y' = \frac{4}{\cos^2 4x} \cdot \ln(4 + x^3) + \operatorname{tg} 4x \cdot \frac{1}{4 + x^3} \cdot 3x^2.$$

$$\text{Звідси } y' = y \cdot \left(\frac{4}{\cos^2 4x} \cdot \ln(4 + x^3) + \operatorname{tg} 4x \cdot \frac{3x^2}{4 + x^3} \right).$$

$$\text{Отже, } y' = (4 + x^3)^{\operatorname{tg} 4x} \left(\frac{4}{\cos^2 4x} \cdot \ln(4 + x^3) + \operatorname{tg} 4x \cdot \frac{3x^2}{4 + x^3} \right).$$

Похідна функції, заданої параметрично

Функцію $y = f(x)$ називають поданою в параметричній формі, якщо вона визначається за допомогою двох функцій $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ від допоміжної змінної t (параметра), а саме:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t). \end{cases}$$

Тоді її похідна обчислюється за формулою:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

Приклад 3.5. Обчислити похідну:

$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3}, \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t}. \end{cases}$$

Розв'язання.

$$y'_t = \frac{3}{2}(-2 \cdot t^{-3}) - \frac{1}{2t^2} = -\frac{3}{t^3} - \frac{1}{2t^2} = \frac{-6-t}{2t^3};$$

$$x'_t = \frac{t^3 - (1+t) \cdot 3t^2}{t^6} = \frac{-2t^3 - 3t^2}{t^6} = \frac{-2t-3}{t^4}.$$

$$\text{Отже, } \frac{dy}{dx} = \frac{(6+t) \cdot t^4}{2t^3(2t+3)} = \frac{(6+t) \cdot t}{2(2t+3)}.$$

Похідні вищих порядків

Похідні вищих порядків знаходяться шляхом багатократного диференціювання. Так $y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^{(n)}y}{dx^{(n)}}$ – похідна n -порядку від функції $y = f(x)$.

Приклад 3.6. Обчислити похідну третього порядку від функції:

$$y = x^3 + 3x.$$

Розв'язання.

$$y' = 3x^2 + 3,$$

$$y'' = 6x,$$

$$y''' = 6.$$

Дотична та нормаль до графіка функції в заданій точці

Рівняння дотичної та нормалі до функції $y = f(x)$ в точці $M(x_0; y_0)$ має вигляд:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \text{ – рівняння дотичної,}$$

$$y - f(x_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) \text{ – рівняння нормалі,}$$

де $k = f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ – кутовий коефіцієнт нахилу цієї прямої до осі абсцис.

Приклад 3.7. Скласти рівняння нормалі та дотичної до графіка функції у заданій точці: $y = 3x^2 + \frac{1+x}{x-2}$; $x_0 = 1$.

Розв'язання. Рівняння дотичної до графіка функції у заданій точці має вигляд: $y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

$$\text{Обчислимо ординату заданої точки: } y_0 = 3 \cdot 1 + \frac{1+1}{1-2} = 3 - 2 = 1.$$

Знайдемо значення похідної заданої функції у точці $(1; 1)$.

$$f'(x) = y' = 6x + \frac{1(x-2) - 1(1+x)}{(x-2)^2} = 6x + \frac{-3}{(x-2)^2};$$

$$f'(x_0) = y'(1) = 6 \cdot 1 + \frac{-3}{(1-2)^2} = 6 - 3 = 3.$$

Тоді рівняння дотичної має вигляд: $y - 1 = 3(x - 1)$.

Якщо розкрити дужки, то отримаємо рівняння дотичної у вигляді із кутовим коефіцієнтом: $y = 3x - 2$. Слід звернути увагу, що розкривати дужки не обов'язково, так, наприклад, рівняння нормалі до графіка функції може бути подано у вигляді:

$$y - 1 = -\frac{1}{3}(x - 1), \text{ де } k = -\frac{1}{f'(x_0)} = -\frac{1}{3}.$$

Обчислення границь функцій за правилом Лопіталя

Якщо існує границя $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)}$, результатом якої є невизначеність

вигляду $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$, то в цьому випадку є правильною така тотожність:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$
 яка і отримала назву "правило Лопіталя".

Приклад 3.8. Обчислити границі за правилом Лопіталя:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 - \ln x}{e^x - e}; \quad 2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}.$$

Розв'язання. 1) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 - \ln x}{e^x - e}.$

Якщо $x \rightarrow 1$, маємо невизначеність $\left[\frac{0}{0} \right]$. Це випадок, коли правило

Лопіталя використовується безпосередньо. Розглянемо границю відношення похідних функцій:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1 - \ln x}{e^x - e} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2}{e};$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 0} (1+x)^{\ln x}.$$

Маємо невизначеність вигляду 1^∞ . Позначимо задану функцію через y і прологарифмуємо: $y = (1+x)^{\ln x}$, $\ln y = \ln x \cdot \ln(1+x)$.

Знаходимо границю за правилом Лопіталя, попередньо враховуючи, що для цього є необхідним мати невизначеності виду $\left[\frac{0}{0} \right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty} \right]$.

Отримаємо внаслідок арифметичних перетворень:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = \lim_{x \rightarrow 0} \ln x \cdot \ln(1+x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{\frac{1}{\ln x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x \ln^2 x}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \ln^2 x}{1+x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \ln x}{\frac{1}{x}} = 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = -2 \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Таким чином, $\lim_{x \rightarrow 0} \ln y = 0$.

Далі $\ln \lim_{x \rightarrow 0} y = 0$, звідси $\lim_{x \rightarrow 0} y = e^0 = 1$.

Завдання до самостійної роботи

Обчислити похідні наступних функцій:

$$3.1. \quad y = (2 + x)\sqrt{3 - x};$$

$$3.2. \quad y = \sqrt{25x^2 + 1} \arctg 5x;$$

$$3.3. \quad y = \frac{\arcsin 3x}{(x - 4)^3};$$

$$3.4. \quad y = \frac{\sqrt{x + 5} \cdot (x - 5)^3}{(x + 7)^2};$$

$$3.5. \quad y = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{x^3}{3} \arccos x;$$

$$3.6. \quad y = 3^{\operatorname{ctg} x};$$

$$3.7. \quad y = \frac{(x - 6)^3 (x + 4)^5}{\sqrt{(x + 1)^5}};$$

$$3.8. \quad y = \frac{(x + 2)^4 \cdot (x - 7)^5}{\sqrt[4]{(x - 2)^3}};$$

$$3.9. \quad y = \frac{\ln(x - 1)}{(x + 5)^4};$$

$$3.10. \quad y = \arcsin(\ln x);$$

$$3.11. \quad y = \sqrt{4 - x^2} + \arcsin \frac{x}{2};$$

$$3.12. \quad y = \frac{2 \arccos 4x}{(x + 2)^3};$$

$$3.13. \quad y = (1 - 2\sqrt{x})^4;$$

$$3.14. \quad y = \sqrt{\arctg x};$$

$$3.15. \quad y = (x^4 + 5)^{\operatorname{ctg} x};$$

$$3.16. \quad y = \ln(\arcsin 3x);$$

$$3.17. y = \frac{4 \operatorname{arctg} 3x}{(x-2)^3};$$

$$3.18. y = \frac{\ln(x+9)}{(x-3)^4};$$

$$3.19. y = (x^2 + 3)^{\sin x};$$

$$3.20. y = (x^2 + 1)^{\cos x};$$

$$3.21. y^2 = x \sin y;$$

$$3.22. y = 5 - x e^{2y};$$

$$3.23. x y^2 - y \ln x = 5;$$

$$3.24. 2^x + 2^y = 2^{x+y};$$

$$3.25. \begin{cases} x = 2 + \sqrt{\sin t}, \\ y = t^2 \cos t; \end{cases}$$

$$3.26. \begin{cases} x = t e^t, \\ y = \arcsin t + \sin^2 t; \end{cases}$$

$$3.27. \begin{cases} x = \sqrt{1-t}, \\ y = \frac{1}{\sqrt{t}}; \end{cases}$$

$$3.28. \begin{cases} x = \sqrt{1+t}, \\ y = 3t^2 \cos^2 \sqrt{t}; \end{cases}$$

$$3.29. \begin{cases} x = t \cdot e^t, \\ y = \arcsin t + \sin t; \end{cases}$$

$$3.30. \begin{cases} x = t^3 + 5 \sin t, \\ y = t \cos 3t. \end{cases}$$

Записати рівняння дотичної та нормалі графіка наступних функцій із абсцисою в означеній точці.

$$3.31. y = x^2 + 3x - 3; x_0 = 1;$$

$$3.32. y = \frac{1}{x-1} + x^3 + 3; x_0 = 2;$$

$$3.33. y = x^3 + 3x; x_0 = -1;$$

$$3.34. y = \ln x^3 + x; x_0 = \frac{1}{e};$$

$$3.35. y = \cos x + x; x_0 = \pi;$$

$$3.36. y = 1/\operatorname{tg} x + \sin 3x; x_0 = \frac{\pi}{3}.$$

Обчислити границі за правилом Лопіталя:

$$3.37. \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{\ln(e^{x^2} + 1)};$$

$$3.38. \lim_{x \rightarrow 0} x \ln^3 x;$$

$$3.39. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 4x)^{\frac{1}{x^2}};$$

$$3.40. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - 5x - 1}{\sin^2 3x};$$

$$3.41. \lim_{x \rightarrow 0} (\sin x)^{\operatorname{tg} x};$$

$$3.42. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{5x} - e^{3x}}{\sin 5x - \sin 3x};$$

$$3.43. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos 2x)^{\frac{3}{x^2}};$$

$$3.44. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin 2x - 2 \sin x}{x \ln \cos 5x};$$

$$3.45. \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{x} \right)^{2 \operatorname{tg} x};$$

$$3.46. \lim_{x \rightarrow 0} (\cos x)^{\frac{1}{\sin x}};$$

$$3.47. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x}{x \sin 3x};$$

$$3.48. \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{3x} - 3x - 1}{\sin^2 3x}.$$

Практичне заняття 4. Дослідження функцій та побудова їхніх графіків

Мета практичного заняття: навчитися застосовувати знання, здобуті за темами: елементи теорії границь та диференціювання функції однієї змінної до повного дослідження й побудови графіків функцій.

Приклад 4.1. Дослідити функцію $y = \frac{2x^2}{x-1}$ та побудувати її графік.

Розв'язання.

1. Область визначення: $x \in (-\infty; 1) \cup (1; \infty)$.

2. Парність, непарність, періодичність.

Якщо для функції виконується умова $f(-x) = f(x)$, то вона є парною та симетричною щодо осі ординат.

Якщо для функції виконується умова $f(-x) = -f(x)$, то вона є непарною, та симетричною щодо початку координат.

Якщо ці дві умови не виконуються, то функція є функцією загального виду, симетрії немає.

$$y(-x) = \frac{2(-x)^2}{-x-1} = \frac{2x^2}{-x-1} \neq y(x) \quad \text{— функція не є парною.}$$

$$y(-x) = \frac{2(-x)^2}{-x-1} = \frac{2x^2}{-(x+1)} \neq -y(x) \quad \text{— функція не є непарною.}$$

У цьому випадку функція $y = \frac{2x^2}{x-1}$ є функцією загального вигляду, симетрії немає.

3. Періодичними з елементарних функції є тільки ті функції, що у власному складі мають $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$. У цьому випадку функція неперіодична.

4. Нулі функції, нулі аргументу або точки перетину із осями координат.

Точка із ординатою $y = 0$ називається *нулем функції* або точкою перетину із віссю Ox .

Точка із абсцисою $x = 0$ називається *нулем аргументу* або точкою перетину із віссю Oy .

$$1) y = 0, \text{ або } 0 = \frac{2x^2}{x-1}, 0 = x^2, x = 0, \text{ тобто маємо точку } O(0; 0);$$

$$2) x = 0, \text{ або, } y = \frac{2 \cdot 0}{0-1}, y = 0, \text{ тобто маємо також точку } O(0; 0).$$

Таким чином, графік функції має єдину точку перетину із осями – це початок координат $O(0; 0)$.

5. Екстремуми функції, проміжки монотонності.

За *необхідною умовою існування екстремуму*: знайдемо точки, де перша похідна функції дорівнює нулю або не існує: $y' = 0$.

$$y' = \frac{4x(x-1) - 2x^2}{(x-1)^2} = \frac{2x(x-2)}{(x-1)^2}.$$

Так, $y' = 0$, якщо $x = 0$ та $x = 2$.

Точки $x = 0$ і $x = 2$ є критичними точками першого роду. У цих точках функція може як досягати екстремуму, так і ні. Для визначення того, чи є дійсно ці точки точками мінімуму або максимуму, та знаходження проміжків монотонності функції (спадання, зростання) скористаємося *достатньою умовою існування екстремуму*:

якщо під час переходу через критичну точку першого роду похідна змінює знак із $y' > 0$ на $y' < 0$, то відповідна точка є точкою *максимуму*, якщо із $y' < 0$ на $y' > 0$, то вона є точкою мінімуму. Якщо такого переходу немає, то в цій точці екстремум відсутній.

Відповідно, на проміжку, де $y' > 0$, функція зростає, на $y' < 0$ – спадає.

Проаналізуємо поведінку похідної функції та зобразимо на рис. 4.1.

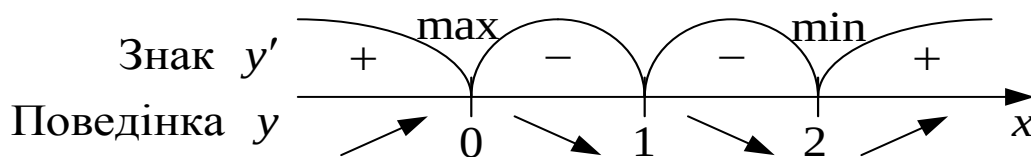


Рис. 4.1. Проміжки монотонності й екстремуми функції $y = \frac{2x^2}{x-1}$

Таким чином $x=0$ – точка максимуму, $x=2$ – точка мінімуму. Знайдемо значення функції в знайдених точках: $y_{\max}(0)=0$, $y_{\min}(2)=8$.

На проміжку $y \in (-\infty; 0) \cup (2; \infty)$ функція зростає, на проміжку $y \in (0; 1) \cup (1; 2)$ – спадає.

6. Інтервали опуклості, угнутості, точки перегину.

Якщо на інтервалі $y'' > 0$, то на цьому інтервалі функція угнута. Якщо на інтервалі $y'' < 0$, то на цьому інтервалі функція опукла. Якщо існує така точка, що $y'' = 0$, та під час переходу через неї друга похідна змінює знак, то ця точка називається точкою перегину функції.

Знайдемо другу похідну.

$$y'' = \frac{(4x-4)(x-1)^2 - 2(x-1)(2x^2-4x)}{(x-1)^4} = \frac{4}{(x-1)^3}.$$

Оскільки $y \neq 0$, то точок перегину немає. Однак відмітимо, що зміна знака другої похідної відбувається під час переходу через точку $x=1$.

Так, якщо $x > 1$ $y'' > 0$ – графік функції угнутий, якщо $x < 1$ $y'' < 0$ – графік функції опуклий.

7. Асимптоти графіка функції.

Вертикальні асимптоти.

Вертикальні асимптоти існують у точках розриву функції, де вона є невизначеною. Оскільки область визначення $D(y) = (-\infty; 1) \cup (1; +\infty)$, то точка $x=1$ є точкою розриву функції, а пряма $x=1$ є вертикальною асимптотою. Для визначення поведінки функції в околі точки розриву

обчислимо лівосторонню та правосторонню границю: $\lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{2x^2}{x-1} = -\infty$

та $\lim_{x \rightarrow 1+0} \frac{2x^2}{x-1} = +\infty$.

Горизонтальна асимптота.

Для визначення існування горизонтальної асимптоти знаходять границю $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} y(x) = A$.

У випадку, якщо границя має числове значення, то горизонтальна асимптота існує, це пряма $y = A$.

Якщо границя дорівнює нескінченності, то горизонтальної асимптоти немає. Оскільки $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2}{x-1} = \pm\infty$, то горизонтальної асимптоти не існує.

Похила асимптота.

Рівняння похилої асимптоти: $y = kx + b$, де $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x}$.

Якщо $k = 0$ або $k = \pm\infty$, то похила асимптота не існує.

Якщо k має числове значення, відмінне від нуля або нескінченності, то обчислюємо $b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx)$.

Перевіримо наявність похилої асимптоти для функції $y = \frac{2x^2}{x-1}$.

Обчислимо: $k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{x(x-1)} = 2$ та

$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (y - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x^2}{x-1} - 2x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x}{x-1} = 2$.

Отже, $y = 2x + 2$ – похила асимптота.

За отриманими розрахунками будуюмо графік функції (рис. 4.2).

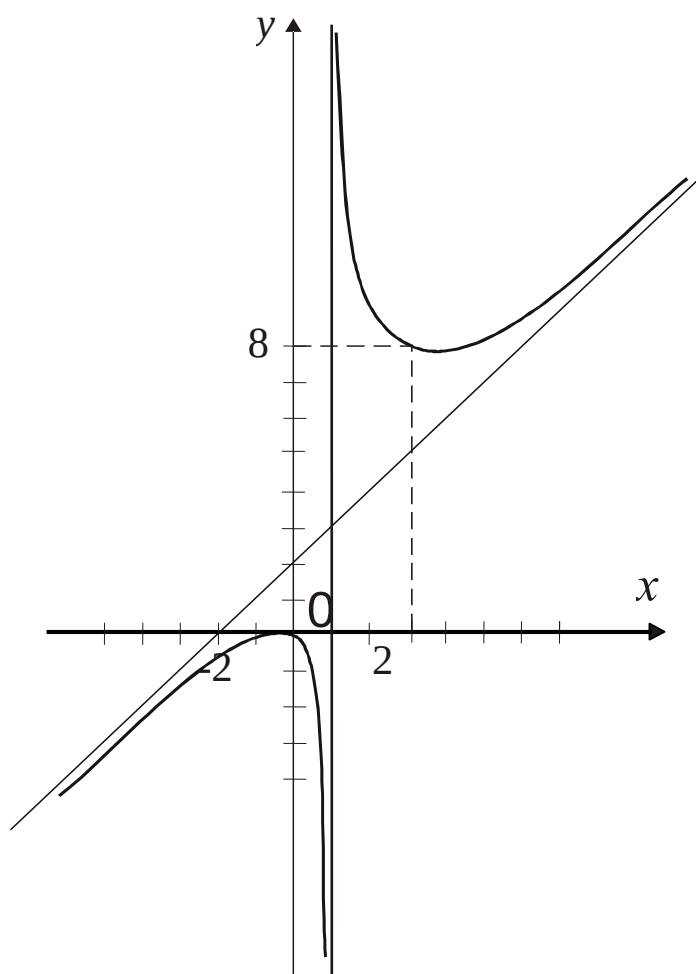


Рис. 4.2. Графік функції $y = \frac{2x^2}{x-1}$

Найбільше та найменше значення функції на заданому проміжку

Приклад 4.2. Знайти найбільше та найменше значення функції $y = 3x^3 - 9x + 1$ на проміжку $x \in [-2; 3]$.

Розв'язання. 1. Знаходимо критичні точки першого роду. Для цього обчислимо похідну першого порядку $y' = 9x^2 - 9 = 9(x-1)(x+1)$ та знайдемо значення змінної x , при яких $y' = 0$.

$$9(x-1)(x+1) = 0,$$

$$x = \pm 1.$$

Обчислимо значення функції, якщо $x = \pm 1$, та на кінцях інтервалу:

$$y(1) = 0; \quad y(-1) = 7; \quad y(3) = 55; \quad y(-2) = -5.$$

Таким чином, бачимо, що на позначеному проміжку функція добігає свого найбільшого значення, якщо $x = 3$ та $y(3) = 55$, а найменшого, якщо $x = -2$ та $y(-2) = -5$.

Дослідити функцію та побудувати її графік:

$$4.1. \ y = \frac{x}{1+x^2}; \quad 4.2. \ y = \frac{1}{x} + 4x^2; \quad 4.3. \ y = \frac{x^2}{x^2-1};$$

$$4.4. \ y = x + \frac{1}{x}; \quad 4.5. \ y = \frac{x^4}{x^3-1}; \quad 4.6. \ y = \frac{x}{x^3+2}.$$

Визначити найбільше та найменше значення функції на проміжку:

$$4.7. \ y = x^4 - 2x^2 + 5; x \in [-2, 2]; \quad 4.8. \ y = xe^x; x \in [-1, 0];$$

$$4.9. \ y = x - 2\ln x; x \in [1, e]; \quad 4.10. \ y = xe^x; x \in [-1, 0].$$

Практичне заняття 5. Диференційованість функцій багатьох змінних

Мета практичного заняття: навчитися обчислювати перші та другі частинні похідні для функції двох змінних, досліджувати функцію двох змінних на екстремум. Обчислювати похідну за напрямом та градієнт, досліджувати функцію двох змінних на найменше та найбільше значення у заданій області.

Частинні похідні першого порядку для функції двох змінних

Нехай існує функція двох змінних $z = f(x, y)$, тоді ця функція має дві частинні похідні першого порядку: похідну функції за змінною x , ($y = \text{const}$), та похідну функції за змінною y , ($x = \text{const}$). Частинні похідні можуть бути записаними:

частинна похідна за змінною x від функції $z = f(x, y)$ має ряд позначень: $z'_x, f'_x(x, y), \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}$;

частинна похідна за змінною y від функції $z = f(x, y)$ має ряд позначень: z'_y , $f'_y(x, y)$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$.

Приклад 5.1. Знайти частинні похідні першого порядку від функції $z = \ln(x^2 + xy + y^2)$.

Розв'язання. За правилом диференціювання складної функції:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\ln(x^2 + xy + y^2) \right) = \frac{1}{x^2 + xy + y^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (x^2 + xy + y^2) = \\ &= \frac{1}{x^2 + xy + y^2} (2x + y); \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{1}{x^2 + xy + y^2} (x + 2y).\end{aligned}$$

Частинні похідні другого порядку для функції двох змінних

Функцію, що є отриманою внаслідок першого диференціювання, можна також продиференціювати другий раз або за x , або за y , тоді отримаємо такі чотири похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_x = z''_{xx} - \text{друга частинна похідна за } x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)'_y = z''_{yy} - \text{друга частинна похідна за } y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)'_y = z''_{xy} - \text{частинна похідна за } y \text{ від похідної за } x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)'_x = z''_{yx} - \text{частинна похідна за } x \text{ від похідної за } y.$$

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають *мішаними похідними*.

Для мішаних похідних другого порядку завжди виконується тотожність: $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Приклад 5.2. Знайти всі частинні похідні другого порядку функції $z = y^2 e^x + x^2 y^3 + 1$. Перевірити тотожність $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 e^x + 2xy^3;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2ye^x + 3x^2 y^2.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = y^2 e^x + 2y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2e^x + 6x^2 y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = (y^2 e^x + 2xy^3)'_y = 2ye^x + 6xy^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = (2ye^x + 3x^2 y^2)'_x = 2ye^x + 6xy^2.$$

Таким чином, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

Похідна за напрямом. Градієнт

Нехай функція $z = f(x, y)$ існує в певному околі точки $M(x; y)$.

Розглянемо напрям, який задано вектором $\vec{S}(a_x; a_y)$, де $\vec{S}$ називається напрямним вектором. *Похідна за напрямом* обчислюється за формулою:

$$\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \beta, \text{ де } \cos \alpha = \frac{a_x}{|a|}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|a|}.$$

А вектор із координатами $\frac{\partial z}{\partial S} = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}$ є градієнтом функції

у заданій точці.

Приклад 5.3. Знайти градієнт функції $z = x^2 \cdot \sin(x + y)$ у точці $M(1; -1)$ та похідну за напрямом вектора: $\vec{a} = (-5; 4)$.

Розв'язання. Знайдемо частинні похідні цієї функції:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x \sin(x + y) + x^2 \cos(x + y) \cdot (1 + y);$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos(x + y) \cdot (1 + x).$$

Обчислимо значення частинних похідних у точці $M(1; -1)$:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{M(1; -1)} = 2 \cdot 1 \cdot \sin(0) + 1^2 \cos(0) \cdot (1 - 1) = 0.$$

$$\left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{M(1; -1)} = 1^2 \cos(0) \cdot (1 + 1) = 2. \quad \text{grad} z = \frac{\partial z}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial y} \vec{j}.$$

Отже, за визначенням: $\text{grad} z = 0\vec{i} + 2\vec{j} = 2\vec{j}$.

Похідна за напрямом обчислюється за формулою:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = \left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_M \cdot \cos \alpha + \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_M \cdot \cos \beta,$$

$$\text{де } \cos \alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|} = \frac{-5}{\sqrt{25+16}} = \frac{-5}{\sqrt{41}}, \quad \cos \beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|} = \frac{4}{\sqrt{25+16}} = \frac{4}{\sqrt{41}}.$$

Тоді значення похідної за напрямом набуває вигляду:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial l} \right|_M = 0 \cdot \left(\frac{-5}{\sqrt{41}} \right) + 2 \cdot \frac{4}{\sqrt{41}} = \frac{8}{\sqrt{41}}$$

Екстремум функції двох змінних

Необхідна умова екстремуму: якщо функція кількох змінних $z = f(x, y)$ диференційована в точці $M_0(x_0, y_0)$ і має в цій точці екстремум, то всі частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю:

$$\begin{cases} \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} = 0; \\ \left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{\substack{x=x_0, \\ y=y_0}} = 0. \end{cases}$$

Достатня умова екстремуму: якщо у визначеній точці $M_0(x_0, y_0)$

значення виразу: $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0$, то ця точка має екстремум,

де $M_0(x_0, y_0)$ – точка мінімуму, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, та $M_0(x_0, y_0)$ – точка мак-

симуму, якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$.

Якщо $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 < 0$, то екстремуму немає.

Приклад 5.4. Дослідити на екстремум функцію двох змінних:
 $z = x^3 + y^3 - 15xy$.

Розв'язання. Враховуємо, що необхідною умовою існування екстремуму є наявність точок, де частинні похідні першого порядку дорівнюють нулю: $\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 15y = 0$ та $\frac{\partial z}{\partial y} = 3y^2 - 15x = 0$.

Для знаходження критичних точок розв'яжемо відповідну систему рівнянь:
$$\begin{cases} 3x^2 - 15y = 0, \\ 3y^2 - 15x = 0. \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо дві критичні точки $M(0; 0)$ і $N(5; 5)$. Знайдемо частинні похідні другого порядку для перевірки достатньої умови існування екстремуму:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -15, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 6y.$$

Тоді для $M(0; 0)$ $A=0$, $B=-15$, $C=0$, а $\Delta = AC - B^2 = -18 < 0$.
Отже, в точці $M(0; 0)$ екстремуму немає. Для $N(5; 5)$: $A=6 \cdot 5 = 30$,
 $B=-15$, $C=6 \cdot 5 = 30$, а $\Delta = 30 \cdot 30 - 15^2 > 0$.

Отже, в точці $N(5; 5)$ є екстремум, а саме мінімум, бо $A=30 > 0$.
Обчислимо мінімальне значення функції: $z_{\min} = 5^3 + 5^3 - 15 \cdot 5 \cdot 5 = -125$.

Найбільше та найменше значення функції двох змінних на заданій області

Приклад 5.5. Знайти найбільше й найменше значення функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в трикутнику, що обмежений прямими $x=0$, $y=0$, $x+y=6$.

Розв'язання. Визначимо область на площині XY , що обмежена відповідними прямими (рис. 5.1).

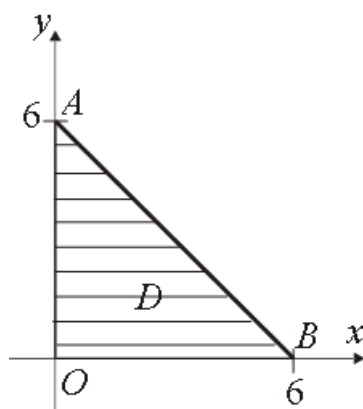


Рис. 5.1. Зазначена область

Знайдемо критичні точки для функції $z = x^2 y(4 - x - y)$ в середині даного трикутника OAB (області D).

За умовою існування екстремуму функції двох змінних маємо:

$$z'_x = 8xy - 3x^2y - 2xy^2 = xy(8 - 3x - 2y),$$

$$z'_y = 4x^2 - x^3 - 2x^2y = x^2(4 - x - 2y).$$

Розв'язуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} xy(8-3x-2y)=0, \\ x^2(4-x-2y)=0. \end{cases}$$

Враховуючи, що множина розв'язків є обмеженою межами заданої області або $x > 0$, $y > 0$, отримаємо таку систему:

$$\begin{cases} 3x+2y=8, \\ x+2y=4. \end{cases}$$

Отримаємо значення критичної точки, що є в межах цієї області. Ця точка $M(2;1)$, а значення функції в ній дорівнює:

$$z(2;1) = 2^2 \cdot 1(4-2-1) = 4.$$

Дослідимо поведінку функції на межах трикутника, розглянувши три його сторони OA , OB і AB . На сторонах OA ($x=0$) і OB ($y=0$) значення функції z дорівнює нулю. На стороні AB (її рівняння $y=6-x$, де $0 \leq x \leq 6$) функція z набуває вигляду:

$$z(x) = x^2(6-x)(4-6) = 2x^3 - 12x^2.$$

Знайдемо критичні точки: $z' = 6x^2 - 24x$, $6x^2 - 24x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = 4$.

Обчислюємо значення функції $z(x)$ в цих точках і на кінцях проміжку $[0; 6]$: $z(0) = 0$, $z(4) = -64$, $z(6) = 0$.

Так, серед отриманих значень функції обираємо найбільше й найменше. Таким чином, $\max_D z = 4$, якщо $x = 2$, $y = 1$ та $\min_D z = -64$, якщо $x = 4$, $y = 2$.

Завдання до самостійної роботи

Дослідити функцію двох змінних на екстремум:

5.1. $z = x^2 + xy + y^2 - 2x - 3y$;

5.2. $z = \frac{3}{2}x^2 + 2xy - \frac{1}{2}y^2 - 5x - y + 2$;

5.3. $z = x^2 + y^2 + xy - 4x - 5y$;

$$5.4. z = 4 - \sqrt[3]{x^2 + y^2};$$

$$5.5. z = x^3 + y^3 - 9xy;$$

$$5.6. z = x^4 + 2y^4 + 4;$$

$$5.7. z = 2x + 6y - 2\ln x - 18\ln y;$$

$$5.8. z = e^{\frac{x}{2}}(x + y^2);$$

$$5.9. z = x^3 + 8y^3 + 6xy - 1.$$

Обчислити похідну та градієнт за напрямом:

$$5.10. z = \sqrt{\frac{y}{x} + xy}, M(1; 2), \bar{a} = (2; 5);$$

$$5.11. z = x + y - \sqrt{x^2 + y^2}, M(3; 4), \bar{a} = (2; -4);$$

$$5.12. z = \sin^2(3x + 2y) M(2; -3), \bar{a} = (1; -4);$$

$$5.13. z = e^{\sqrt{\cos 2x + 3y}}, M\left(\frac{\pi}{4}; 0\right), \bar{a} = (3; -4);$$

$$5.14. z = e^{\sin x - 2y^3}, M(\pi; 0), \bar{a} = (2; 1);$$

$$5.15. z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}, M(2; 1), \bar{a} = (1; -2);$$

$$5.16. z = \sqrt[3]{x + y^2}, M(4; 2), \bar{a} = (2; -2).$$

Знайти найбільше та найменше значення функції двох змінних для заданої області:

$$5.17. z = x - 2y + 5; D: x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq 1;$$

$$5.18. z = x^2 + 4y^2; D: x^2 + y^2 \leq 1;$$

$$5.19. z = xy(4 - x - y); D: x = 0, y = 0, x + y = 8;$$

$$5.20. z = x^2 + 3y^2 + x - y; D: x = 0, y = 0, y - x = 1;$$

$$5.21. z = x^2 + y^2 - 6x + 4y + 2; D: 1 \leq x \leq 4, -3 \leq y \leq 2.$$

Практичне заняття 6. Інтегральне числення

Мета практичного заняття: навчитися обчислювати невизначені та визначені інтеграли, застосовувати визначені інтеграли до обчислення площ та об'ємів фігур.

Невизначений інтеграл

Вираз $\int f(x)dx = F(x) + C$, де $C \in R$, називається невизначеним інтегралом, у цьому випадку $F(x)$ – первісна для функції $f(x)$, а C – довільна стала. Під час обчислення інтегралів користуються правилами інтегрування та таблицею невизначених інтегралів.

Правила інтегрування

$$\int (f_1(x) \pm f_2(x))dx = \int f_1(x)dx \pm \int f_2(x)dx.$$

$$\int af(x)dx = a \int f(x)dx.$$

Таблиця невизначених інтегралів

$$1. \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad (n \neq -1).$$

$$2. \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C.$$

$$3. \int \sin x dx = -\cos x + C.$$

$$4. \int \cos x dx = \sin x + C.$$

$$5. \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C.$$

$$6. \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C.$$

$$7. \int \operatorname{tg} x dx = -\ln|\cos x| + C.$$

$$8. \int \operatorname{ctg} x dx = \ln|\sin x| + C.$$

$$9. \int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a > 0; a \neq 1).$$

$$10. \int e^x dx = e^x + C.$$

$$11. \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad (-a < x < a).$$

$$12. \int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arctg} \frac{x}{a} + C, \quad (a \neq 0).$$

$$13. \int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln \left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C.$$

$$14. \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln \left| x + \sqrt{x^2 \pm a^2} \right| + C.$$

Безпосереднє інтегрування

Приклад 6.1. Обчислити інтеграли:

$$1) \int x^5 dx;$$

$$2) \int \left(2 \sin x - 4 + 3\sqrt{x} + \frac{5}{x^2 + 4} - \frac{1}{x} \right) dx;$$

$$3) \int 2^{3x+4} dx; \quad 4) \int \sin(4x+5) dx.$$

Розв'язання. Перші два інтеграли розв'язуються із безпосереднім використанням таблиці інтегралів елементарних функцій.

$$1) \int x^5 dx = \frac{x^6}{6} + C;$$

$$\begin{aligned} 2) \int \left(2 \sin x - 4 + 3\sqrt{x} + \frac{5}{x^2 + 4} - \frac{1}{x} \right) dx &= 2 \int \sin x dx - 4 \int dx + 3 \int \sqrt{x} dx + \\ &+ 5 \int \frac{dx}{x^2 + 4} - \int \frac{dx}{x} = -2 \cos x - 4x + 3 \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \ln |x| + C = \\ &-2 \cos x - 4x + 2x\sqrt{x} + \frac{5}{2} \operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \ln |x| + C. \end{aligned}$$

Наступні два інтеграли обчислюються з урахуванням властивості невизначеного інтеграла: $\int f(ax + d)dx = \frac{1}{a}F(ax + b) + C$.

Тоді отримаємо:

$$3) \int 2^{3x+4} dx = \frac{2^{3x+4}}{3 \ln 2} + C;$$

$$4) \int \sin(4x + 5) dx = -\frac{1}{4} \cos(4x + 5) + C.$$

Інтегрування із заміною змінної

Цей метод використовується у більш складних випадках, особливо заміну змінної є доцільним використовувати, якщо у підінтегральному виразі є функція та її похідна.

Приклад 6.2. Обчислити інтеграли:

$$1) \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}; 2) \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln x}}; 3) \int \frac{2 \sin x dx}{\cos^3 x}; 4) \int \frac{2x + 3}{x^2 + 3x + 5} dx.$$

Розв'язання.

$$1) \int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x}.$$

У чисельнику цього інтеграла бачимо, що $\cos x dx = d(\sin x)$, тому, припускаючи, що: $\sin x = t$, $\cos x dx = dt$, отримаємо:

$$\int \frac{\cos x dx}{\sin^2 x} = \int \frac{dt}{t^2} = \int t^{-2} dt = \frac{t^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{t} + C = -\frac{1}{\sin x} + C;$$

$$2) \int \frac{dx}{x\sqrt{4 - \ln x}} = \left| \begin{array}{l} t = 4 - \ln x \\ dt = (4 - \ln x)' dx = -\frac{1}{x} dx \end{array} \right| = -\int \frac{dt}{\sqrt{t}} = -2\sqrt{t} = -2\sqrt{4 - \ln x} + C;$$

$$3) \int \frac{2 \sin x dx}{\cos^3 x} = \left| \begin{array}{l} t = \cos x \\ dt = (\cos x)' dx = -\sin x dx \end{array} \right| = \int \frac{-2dt}{t^3} = \frac{1}{t^2} = \frac{1}{\cos^2 x} + C;$$

$$4) \int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx. \text{ Нехай } x^2+3x+5=t, \text{ тоді } (2x+3)dx=dt$$

$$\text{та } \int \frac{2x+3}{x^2+3x+5} dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln|t| + C = \ln|x^2+3x+5| + C.$$

Інтегрування частинами

Формула інтегрування частинами має вигляд $\int u dv = uv - \int v du$.

За u завжди береться та функція із підінтегрального виразу $u dv$, яка спрощується внаслідок диференціювання.

Формула інтегрування частинами використовується для знаходження інтеграла $\int f(x) dx$, якщо $f(x)$ має вигляд: $P_n(x)a^{bx}$; $P_n(x)\ln x$; $P_n(x)\sin mx$; $P_n(x)\cos mx$; $P_n(x)\arcsin x$; $P_n(x)\arccos x$; $P_n(x)\operatorname{arctg} x$; $P_n(x)\operatorname{arccotg} x$, де $P_n(x)$ – поліном, та може бути також використаною для інших нестандартних прикладів.

Приклад 6.3. Обчислити інтеграли:

$$1) \int (2x+5)\sin 4x dx; \quad 2) \int \arcsin x dx.$$

Розв'язання.

$$1) \int (2x+5)\sin 4x dx.$$

$$\begin{aligned} \int (2x+5)\sin 4x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = 2x+5 & du = 2dx \\ dv = \sin 4x dx & v = -\frac{1}{4}\cos 4x \end{array} \right| = \\ &= -\frac{1}{4}(2x+5)\cos 4x + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx = -\frac{1}{4}(2x+5)\cos 4x + \frac{1}{8}\sin 4x + c; \end{aligned}$$

$$2) \int \arcsin x dx.$$

$$\text{Позначимо } u = \arcsin x, \quad dv = dx; \quad du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad v = x.$$

Отже, застосувавши формулу інтегрування частинами, отримаємо:

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

Останній інтеграл обчислимо заміною змінної. Замінивши $t = 1 - x^2$, $dt = -2x dx$, будемо мати $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = -\sqrt{1-x^2}$. Тоді

$$\int \arcsin x dx = x \arcsin x + (1-x^2)^{\frac{1}{2}} + C.$$

Інтегрування виразів, які містять квадратний тричлен знаменника

До інтегралів цього типу можна віднести інтеграли вигляду:

$$I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c};$$

$$I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}};$$

$$I = \int \frac{(kx + c)dx}{ax^2 + bx + c};$$

$$I = \int \frac{(kx + c)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

Поділимо умовно ці інтеграли за двома типами:

$$1. \text{ Інтеграли вигляду: } I = \int \frac{dx}{ax^2 + bx + c}; \quad I = \int \frac{(kx + c)dx}{ax^2 + bx + c}.$$

Для обчислення цих інтегралів необхідно визначитися з тим, чи має корені квадратний поліном знаменника, та чи може він бути розкладеним за формулою: $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, де $x_{1,2}$ – корені полінома другого ступеня.

У випадку якщо ні, то є необхідним виділити повний квадрат із квадратного тричлена знаменника.

Приклад 6.4. Обчислити інтеграл:

$$I = \int \frac{3x + 2}{2x^2 + 6x + 5} dx.$$

Розв'язання. Із квадратного тричлена знаменника виділимо повний квадрат, отримаємо:

$$I = \frac{1}{2} \int \frac{3x + 2}{x^2 + 3x + \frac{5}{2}} dx = \frac{1}{2} \int \frac{3x + 2}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} - \frac{9}{4}} dx.$$

Зробимо заміну змінної, замінивши: $x + \frac{3}{2} = t$, $x = t - \frac{3}{2}$, $dx = dt$,

$$\text{тоді: } I = \frac{1}{2} \int \frac{3t - \frac{9}{2} + 2}{t^2 + \frac{1}{4}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{3t - \frac{5}{2}}{t^2 + \frac{1}{4}} dt = \frac{3}{4} \int \frac{2t}{t^2 + \frac{1}{4}} dt - \frac{5}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{4}}.$$

Інтеграл $\int \frac{2t}{t^2 + \frac{1}{4}} dt$ обчислюється за допомогою заміни змінної:

$$t^2 + \frac{1}{4} = z, dz = 2t dt, \text{ тоді } \int \frac{2t}{t^2 + \frac{1}{4}} dt = \int \frac{dz}{z} = \ln z = \ln\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) + C.$$

Інтеграл $\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{4}}$ є табличним, та $\int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{4}} = 2 \operatorname{arctg}(t + 2) + C$, тоді

отримаємо відповідь:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2} \int \frac{3t - \frac{9}{2} + 2}{t^2 + \frac{1}{4}} dt = \frac{1}{2} \int \frac{3t - \frac{5}{2}}{t^2 + \frac{1}{4}} dt = \frac{3}{4} \int \frac{2t}{t^2 + \frac{1}{4}} dt - \frac{5}{4} \int \frac{dt}{t^2 + \frac{1}{4}} = \\ &= \frac{3}{4} \ln\left(t^2 + \frac{1}{4}\right) - \frac{5}{4} 2 \operatorname{arctg} 2t + C = \frac{3}{4} \ln\left(x^2 + 3x + \frac{5}{2}\right) - \frac{5}{4} 2 \operatorname{arctg}(2x + 3) + C. \end{aligned}$$

Приклад 6.5. Обчислити інтеграл:

$$I = \int \frac{6(x+1)}{x^2 + x - 6} dx.$$

Розв'язання. У цьому випадку, розв'язавши відповідне квадратне рівняння, отримаємо: $x^2 + x - 6 = (x - 2)(x + 3)$. Тоді підінтегральний вираз можна розкласти на суму двох елементарних дробів:

$$\frac{6(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3}.$$

За правилами знаходження коефіцієнтів отримаємо:

$$\frac{6(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+3} = \frac{A(x+3) + B(x-2)}{(x-2) \cdot (x+3)}.$$

Знайдемо значення коефіцієнтів A і B :

$$6(x+1) = A(x+3) + B(x-2).$$

Припустимо, що $x = 2$, тоді:

$$6(2+1) = A(2+3) + B(2-2),$$

$$18 = 5A, \quad A = \frac{18}{5}.$$

Припустимо, що $x = 3$, тоді:

$$6(-3+1) = A(-3+3) + B(-3-2),$$

$$12 = -5B, \quad B = -\frac{12}{5}.$$

Підінтегральний вираз має такий вигляд:

$$\frac{6(x+1)}{(x-2)(x+3)} = \frac{18/5}{x-2} + \frac{-12/5}{x+3},$$

а значення інтеграла:

$$\int \frac{6(x+1)dx}{(x-2)(x+3)} = \int \frac{18/5}{(x-2)} dx + \int \frac{-12/5}{(x+3)} dx = \frac{18}{5} \ln|x-2| - \frac{12}{5} \ln|x+3| + C.$$

$$2. \text{ Інтеграли вигляду: } I = \int \frac{dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}; I = \int \frac{(kx + c)dx}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}.$$

У цьому випадку є необхідним завжди виділяти із квадратного тричлена знаменника повний квадрат.

Приклад 6.6. Обчислити інтеграл:

$$I = \int \frac{3x+2}{\sqrt{2x^2+6x+5}} dx.$$

Розв'язання. Виділимо повний квадрат, отримаємо:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+\frac{5}{2}}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{3x+2}{\sqrt{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{5}{2} - \frac{9}{4}}} dx.$$

Зробимо заміну змінної, поклавши: $x + \frac{3}{2} = t$, $x = t - \frac{3}{2}$, $dx = dt$,

тоді:

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{3t - \frac{9}{2} + 2}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{3t - \frac{5}{2}}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dt = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dt - \frac{5}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}}.$$

Інтеграл $\int \frac{2t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dt$ обчислюється за допомогою заміни змінної:

$$t^2 + \frac{1}{4} = z, dz = 2t dt, \text{ тоді } \int \frac{2t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dt = \int \frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{z} = 2\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} + C.$$

Інтеграл $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}}$ є табличним, та $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} = \ln \left| x + \sqrt{t^2 + a^2} \right| + C,$

тоді отримаємо відповідь:

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{3t - \frac{9}{2} + 2}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dt = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{3t - \frac{5}{2}}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dt = \frac{3}{2\sqrt{2}} \int \frac{2t}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} dt - \\ &- \frac{5}{2\sqrt{2}} \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 + \frac{1}{4}}} = \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln \left| x + \sqrt{t^2 + \frac{1}{4}} \right| + C = \\ &= \frac{3}{\sqrt{2}} \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} - \frac{5}{2\sqrt{2}} \ln \left| x + \sqrt{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}} \right| + C. \end{aligned}$$

Інтегрування дробово-раціональних функцій

Приклад 6.7. Обчислити інтеграл: $\int \frac{2x+3}{x(x-1)(x-2)} dx.$

Розв'язання. Аналогічно прикладу 6.5, підінтегральний дріб може бути розкладеним на елементарні дробі:

$$\frac{2x+3}{x(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-2)}.$$

Знайдемо A, B, C за методом невизначених коефіцієнтів:

$$2x+3 = A(x-1)(x-2) + Bx(x-2) + C(x-1)x.$$

Якщо $x=0$, то $A=3/2$; якщо $x=2$, $C=3,5$; якщо: $x=1$, $B=-5$.

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \int \frac{2x+3}{x(x-1)(x-2)} dx &= \int \frac{A}{x} dx + \int \frac{B}{(x-1)} dx + \int \frac{C}{(x-2)} dx = \\ &= \frac{3}{2} \ln x - 5 \ln|x-1| + 3,5 \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

Приклад 6.8. Обчислити інтеграл: $\int \frac{x-1}{x^2(x-2)} dx$.

Розв'язання. Аналогічно прикладу 6.5, підінтегральний дріб може бути розкладеним на елементарні дробі:

$$\frac{x-1}{x^2(x-2)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{(x-2)}.$$

Знайдемо A, B, C за методом невизначених коефіцієнтів:

$$x-1 = A(x-2) + Bx(x-2) + Cx^2.$$

Якщо $x=0$, то $A=1/2$; якщо $x=2$, $C=1/4$.

Для знаходження B надамо змінній будь-якого значення, наприклад:

$$x=1, \text{ тоді } 0 = -A - B + C, \text{ якщо } B = -\frac{1}{4}.$$

$$\begin{aligned} \text{Тоді } \int \frac{x-1}{x^2(x-2)} dx &= \int \frac{A}{x^2} dx + \int \frac{B}{x} dx + \int \frac{C}{(x-2)} dx = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2} dx - \frac{1}{4} \int \frac{1}{x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{x-2} dx = -\frac{1}{2x} - \frac{1}{4} \ln x + \frac{1}{4} \ln|x-2| + C. \end{aligned}$$

Приклад 6.9. Обчислити інтеграл: $\int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+2x+10)} dx$.

Розв'язання. У випадку, якщо квадратний поліном знаменника не може бути розкладаним на множники, то розкладання підінтегрального виразу на елементарний дріб відбувається таким чином:

$$\frac{2x+3}{(x-1)(x^2+2x+10)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+2x+10}.$$

Знайдемо коефіцієнти розкладу:

$$2x+3 = A(x^2+2x+10) + (Bx+C)(x-1).$$

Припустимо: $x=1$, отримаємо: $A = \frac{5}{13}$,

$$x=0, 3=10A-C, C = \frac{11}{13}. \text{ Та } x=-1; -1=9A+2B-2C.$$

$$-1 = \frac{9 \cdot 5}{13} + 2B - \frac{2 \cdot 11}{13}; B = -\frac{18}{13}.$$

Отримаємо:

$$\begin{aligned} \int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+2x+10)} dx &= \int \frac{A}{x-1} dx + \int \frac{Bx+C}{x^2+2x+10} dx = \\ &= \int \frac{2x+3}{(x-1)(x^2+2x+10)} dx = \int \frac{5/13}{x-1} dx + \int \frac{-18/13x+11/13}{x^2+2x+10} dx = \\ &= \frac{5}{13} \int \frac{1}{x-1} dx + \frac{1}{13} \int \frac{-18x+11}{x^2+2x+10} dx = \frac{5}{13} \ln|x-1| + \frac{1}{13} \int \frac{-18x+11}{x^2+2x+10} dx + C, \end{aligned}$$

де останній інтеграл обчислюється за допомогою виділення квадрата знаменника (див. приклад 6.4).

Зауваження: під час обчислення інтегралів від дробово-раціональних функцій треба пам'ятати, що ступінь чисельника має бути меншою, ніж ступінь знаменника, в іншому випадку потрібно відокремлювати цілу частину.

Інтегрування ірраціональних виразів

Здебільшого, якщо підінтегральний вираз є ірраціональністю, необхідно обрати заміну змінної таким чином, щоб позбавитися ірраціональності, тобто найчастіше саме ірраціональний вираз замінюють за нову змінну.

Приклад 6.10. Обчислити інтеграл: $\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} dx.$

Розв'язання. Зробимо заміну змінної: $\sqrt{x} = t$, тоді $x = t^2$, $dx = 2tdt$.

Отримаємо:

$$\int \frac{1}{\sqrt{x}(\sqrt{x}-1)} dx = \left| \begin{matrix} x = t^2 \\ dx = 2tdt \end{matrix} \right| = 2 \int \frac{tdt}{t(t-1)} = 2 \int \frac{dt}{t-1} = 2 \ln|t-1| + C =$$
$$= 2 \ln|\sqrt{x}-1| + C.$$

Інтегрування тригонометричних виразів

Випадки, коли підінтегральна функція є функцією вигляду: $\sin^m x \cos^n x$, $\sin^m x$ або $\cos^n x$, розглянемо на таких прикладах.

Приклад 6.11. Обчислити інтеграли:

1) $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$; 2) $\int \cos^3 x dx$; 3) $\int \sin^2 x dx$.

Розв'язання.

1) $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx$.

Підінтегральна функція є тригонометричною та непарною щодо $\cos x$.

Тоді $\int \cos^3 x \cdot \sin^2 x dx = \int \cos^2 x \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx =$

$$= \int (1 - \sin^2 x) \cdot \sin^2 x \cdot \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x = dt \end{matrix} \right| = \int (1 - t^2) t^2 dt = \int (t^2 - t^4) dt =$$

$$= \frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5} = \frac{\sin^3 x}{3} - \frac{\sin^5 x}{5} + C;$$

2) $\int \cos^3 x dx = \int \cos^2 x \cos x dx = \int (1 - \sin^2 x) \cos x dx = \left| \begin{matrix} \sin x = t \\ \cos x dx = dt \end{matrix} \right| =$

$$= \int (1 - t^2) dt = \int dt - \int t^2 dt = t - \frac{t^3}{3} = \sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C;$$

3) $\int \sin^2 x dx$.

Якщо в означених типах підінтегральних функцій немає непарного ступеня, то слід застосувати формули зниження ступеня:

$$\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}, \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}.$$

Тоді отримаємо:

$$\int \sin^2 x dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2} dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \int \cos 2x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \sin 2x + C.$$

Інтегрування виразів: $\int \sin mx \cdot \cos nx dx$; $\int \sin mx \cdot \sin nx dx$;
 $\int \cos mx \cdot \cos nx dx$.

Обчислення даних інтегралів відбувається за допомогою формул:

$$\int \cos ax \cos bx dx = \frac{1}{2} \int (\cos(a+b)x + \cos(a-b)x) dx;$$

$$\int \sin ax \sin bx dx = \frac{1}{2} \int (\cos(a-b)x - \cos(a+b)x) dx;$$

$$\int \sin ax \cos bx dx = \frac{1}{2} \int (\sin(a+b)x + \sin(a-b)x) dx.$$

Приклад 6.12. Обчислити інтеграл: $\int \cos 3x \cdot \sin 2x dx$.

Розв'язання.

$$\int \cos 3x \cdot \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int (\sin \frac{5x}{2} - \sin \frac{x}{2}) dx = -\frac{1}{5} \cos \frac{5x}{2} + \cos \frac{x}{2} + C.$$

Інтегрування виразів: $\int tg^m x dx$; $\int ctg^n x dx$.

Для інтегралів вигляду $\int tg^m x dx$ слід застосувати заміну змінних:

$$tg x = t, x = \arctgt, dx = \frac{1}{t^2 + 1} dt.$$

Для інтегралів вигляду: $\int ctg^n x dx$ заміна змінної набуває вигляду:

$$ctg x = t, x = \text{arcctgt}, dx = -\frac{1}{t^2 + 1} dt.$$

Приклад 6.13. Обчислити інтеграл: $\int ctg^6 x dx$.

Розв'язання. Зробимо підстановку: $t = ctg x$, $x = \text{arcctgt}$; тоді

$$dx = -\frac{dt}{1+t^2}.$$

Тоді маємо інтеграл: $-\int \frac{t^6}{1+t^2} dt = -\int \left(t^4 - t^2 + 1 - \frac{1}{t^2+1} \right) dt =$

$$-\left(\frac{t^5}{5} - \frac{t^3}{3} + t - \operatorname{arctg} t \right) + C = -\frac{\operatorname{ctg}^5 x}{5} + \frac{\operatorname{ctg}^3 x}{3} + \operatorname{ctg} x - \operatorname{arctg}(\operatorname{ctg} x) + C.$$

Інтегрування виразів: $\int \frac{dx}{a \cos x + b \sin x + c}$, $\int \frac{dx}{a + b \sin x}$, $\int \frac{dx}{a + b \cos x}$

відбувається за допомогою універсальної тригонометричної підстановки:

$$t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}, \text{ тоді } x = 2 \operatorname{arctg} t, dx = \frac{2dt}{1+t^2}, \sin x = \frac{2t}{1+t^2}, \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

Приклад 6.14. Обчислити інтеграл: $\int \frac{dx}{\sin x}$.

Розв'язання.

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \left| \begin{array}{l} \sin x = \frac{2t}{1+t^2} \\ dx = \frac{2dt}{1+t^2} \end{array} \right| = \int \frac{2dt}{\frac{2t}{1+t^2}} = \int \frac{dt}{t} = \ln |t| + C = \ln \left| \operatorname{tg} \frac{x}{2} \right| + C.$$

Визначений інтеграл

Під час обчислення визначеного інтеграла завжди користуються фор-

мулою Ньютона – Лейбніца $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

Під час застосування методу заміни змінної також змінюють межі інтегрування, та під час інтегрування частинами користуються формулою:

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v \Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

Приклад 6.15. Обчислити інтеграли:

$$\text{а) } \int_1^2 x^2(x+3)dx; \text{ б) } \int_1^2 x(x^2+1)dx.$$

Розв'язання: а) під час обчислення інтеграла $\int_1^2 x^2(x+3)dx$ доцільно

розкласти на множники підінтегральний вираз та скористатися формулою Ньютона – Лейбніца:

$$\begin{aligned}\text{Отримаємо: } \int_1^2 x^2(x+3)dx &= \int_1^2 (x^4 + 3x^2)dx = \frac{x^5}{5} + x^3 \Big|_1^2 = \\ &= \frac{2^5 - 1}{5} + 7 = 19\frac{2}{5};\end{aligned}$$

б) під час обчислення цього інтеграла більш доцільним є використання заміни змінної (межі інтегрування змінюємо також):

$$\int_0^2 x(x^2 + 1)dx = \left| \begin{array}{l} x^2 + 1 = t; dt = 2x dx \\ x = 0, t = 1; x = 2, t = 5 \end{array} \right| = \int_1^5 \frac{t}{2} dt = \frac{t^2}{4} \Big|_1^5 = \frac{25 - 1}{4} = \frac{24}{4} = 6.$$

Приклад 6.16. Обчислити значення визначеного інтеграла:

$$\int_0^{\pi} x \sin x dx.$$

Розв'язання. Для обчислення цього інтеграла слід використовувати формулу інтегрування частинами у визначеному інтегралі, тоді:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} x \sin x dx &= \left| \begin{array}{ll} x = u & du = dx \\ \sin x dx = dv & v = -\cos x \end{array} \right| = -x \cdot \cos x \Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \cos x dx = \\ &= -\pi \cdot \cos \pi + 0 \cdot \cos 0 + \sin x \Big|_0^{\pi} = \pi.\end{aligned}$$

Невласні інтеграли

Приклад 6.17. Обчислити значення інтеграла: $\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}}$.

Розв'язання. Цей інтеграл є невластним, тому отримаємо:

$$\int_0^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^4 \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}} \right) = +\infty.$$

Границя не має числового значення, інтеграл розбігається.

Застосування визначеного інтеграла до обчислення площ фігур та об'ємів тіл обертання

Приклад 6.18. Знайти площу фігури, обмежену лініями:

$$y = x^2 + 4x; y = x + 4.$$

Розв'язання. Площа фігури, яка є створеною в наслідок перетину двох функцій, знаходиться за формулою: $S = \int_a^b [f_1(x) - f_2(x)] dx$, де a та b – точки перетину графіків функцій. Знайдемо точки перетину параболи і прямої, розв'язавши систему рівнянь:

$$\begin{cases} y = x^2 + 4x, \\ y = x + 4. \end{cases}$$

Звідси, $x_1 = -4$, $x_2 = 1$. Зробимо рисунок до задачі (рис. 6.1).

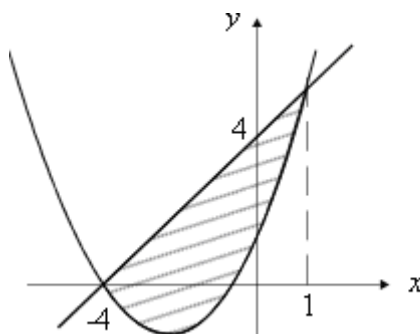


Рис. 6.1. Фігура, що обмежена лініями $y = x^2 + 4x$; $y = x + 4$

Шукана площа фігури дорівнює:

$$\begin{aligned} S &= \int_{-4}^1 ((x + 4) - (x^2 + 4x)) dx = \int_{-4}^1 (4 - 3x - x^2) dx = \left(4x - \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_{-4}^1 = \\ &= \left(4 - \frac{3}{2} - \frac{1}{3} \right) - \left(-16 - 24 + \frac{64}{3} \right) = \frac{125}{6} \text{ (кв. од.)}. \end{aligned}$$

Приклад 6.19. Знайти об'єм тіла, утвореного шляхом обертання фігури, що обмежена лініями $y = 2x - x^2$, $y = 0$ навколо осі OX .

Розв'язання.

Об'єм тіла обертання V_x знаходимо за формулою:

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Зробимо відповідний рисунок для обчислення об'єму тіла, утвореного обертанням фігури, що обмежена лініями $y = 2x - x^2$ та $y = 0$ навколо осі OX (рис. 6.2).

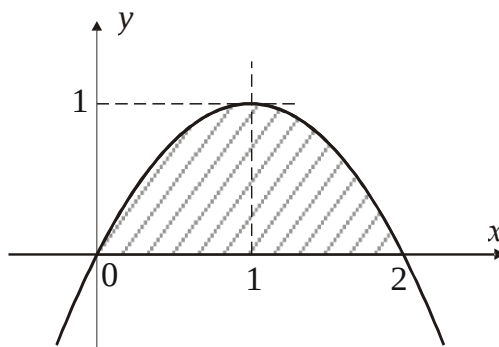


Рис. 6.2. Рисунок для обчислення об'єму тіла

$$V_x = \pi \int_0^2 (2x - x^2)^2 dx = \pi \int_0^2 (4x^2 - 4x^3 + x^4) dx = \pi \left(\frac{4x^3}{3} - x^4 + \frac{x^5}{5} \right) \Bigg|_0^2 = \\ = \frac{16}{15} \pi \text{ (куб. од.)}.$$

Завдання до самостійної роботи

Обчислити значення невизначених інтегралів:

6.1. $\int (9x^2 - 10\sqrt[4]{x} + 3\sqrt{x}) dx;$

6.2. $\int \frac{\cos 2x}{\cos^2 x \sin^2 x} dx;$

6.3. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x};$

6.4. $\int tg^2 x dx;$

6.5. $\int (1-3x)^{17} dx;$

6.6. $\int \sqrt[4]{(12x-5)^3} dx;$

6.7. $\int e^{3x-5} dx;$

6.8. $\int \frac{dx}{11-4x};$

6.9. $\int \frac{2x-3}{x^2-3x+8} dx;$

6.10. $\int \frac{3\sin x}{1-2\cos x} dx;$

- 6.11. $\int \frac{3x^3}{2x^4 + 3} dx;$
- 6.12. $\int \frac{x}{\sqrt[3]{x^2 + 2}} dx;$
- 6.13. $\int e^{4\sin x} \cos x dx;$
- 6.14. $\int \frac{\ln^5(3x-2)}{3x-2} dx;$
- 6.15. $\int \frac{e^{\operatorname{tg} x}}{\cos^2 x} dx;$
- 6.16. $\int x \cos(x^2 - 1) dx;$
- 6.17. $\int \frac{dx}{\arcsin^4 x \sqrt{1-x^2}};$
- 6.18. $\int \frac{dx}{\sqrt{5-3x^2}};$
- 6.19. $\int \frac{e^{\sqrt{2x-1}}}{\sqrt{2x-1}} dx;$
- 6.20. $\int x \ln x dx;$
- 6.21. $\int (1-3x) \cos 2x dx;$
- 6.22. $\int \frac{x}{\cos^2 x} dx;$
- 6.23. $\int (4-x) e^{-3x} dx;$
- 6.24. $\int x^2 e^{-2x} dx;$
- 6.25. $\int e^x \sin x dx;$
- 6.26. $\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5};$
- 6.27. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 10x + 28}};$
- 6.28. $\int \frac{6x-1}{x^2 - 4x + 13} dx;$
- 6.29. $\int \frac{3x-6}{\sqrt{x^2 - 4x + 5}} dx;$
- 6.30. $\int \frac{3-5x}{4x^2 + 16x - 9} dx;$
- 6.31. $\int \frac{7-x}{\sqrt{3+2x-x^2}} dx;$
- 6.32. $\int \frac{3x+8}{(x-2)(x+5)} dx;$
- 6.33. $\int \frac{2x^2 + 41x - 91}{(x-1)(x+3)(x-4)} dx;$
- 6.34. $\int \frac{x^2 + 2}{(x+1)^2(x-1)} dx;$
- 6.35. $\int \frac{x^2 - 7x - 6}{(x^2 + 9)(x-3)} dx;$
- 6.36. $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)(x^2 + x)};$
- 6.37. $\int \frac{7x-15}{x(x^2 - 2x + 5)} dx;$
- 6.38. $\int \frac{x^3 - 7x^2 + 8}{(x^2 + 4)x^2} dx;$
- 6.39. $\int \frac{dx}{3 + 5 \cos x};$
- 6.40. $\int \frac{dx}{4 \sin x + 3 \cos x + 5};$

$$6.41. \int \sin 2x \cos 4x dx;$$

$$6.42. \int \sin^3 x dx;$$

$$6.43. \int \frac{\sin^3 x}{\cos^8 x} dx;$$

$$6.44. \int \cos^4 x dx;$$

$$6.45. \int tg^4 x dx;$$

$$6.46. \int \frac{\sin^3 x}{\sqrt[3]{\cos^4 x}} dx;$$

$$6.47. \int \frac{x+1}{x\sqrt{x-2}} dx;$$

$$6.48. \int \frac{dx}{x + \sqrt[3]{x}};$$

$$6.49. \int \frac{dx}{(1 + \sqrt[3]{x})\sqrt{x}};$$

$$6.50. \int \sqrt{\frac{x}{x+5}} \frac{dx}{x^2};$$

$$6.51. \int \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^2} dx;$$

$$6.52. \int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2-9}};$$

$$6.53. \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(9+x^2)^5}};$$

$$6.54. \int \frac{\sqrt{(9-x^2)^3}}{x^6} dx.$$

Обчислити значення визначених інтегралів:

$$6.55. \int_1^2 \left(x^2 + \frac{1}{x^2} \right) dx; \quad 6.56. \int_{-2}^{-1} \frac{dx}{(11+5x)^3}; \quad 6.57. \int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin 3x dx;$$

$$6.58. \int_0^4 \frac{dx}{25-x^2}; \quad 6.59. \int_4^{4\sqrt{3}} \frac{dx}{\sqrt{64-x^2}}; \quad 6.60. \int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+10};$$

$$6.61. \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}; \quad 6.62. \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 3x \cos 5x dx; \quad 6.63. \int_4^5 x \sqrt{x^2-16} dx;$$

$$6.64. \int_{\ln 3}^{\ln 8} \frac{e^x}{\sqrt{e^x+1}} dx; \quad 6.65. \int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}; \quad 6.66. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x \sin x dx;$$

$$6.67. \int_1^{e^3} \frac{dx}{x \sqrt{1+\ln x}}; \quad 6.68. \int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx; \quad 6.69. \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{5-3\cos x};$$

$$\begin{array}{lll}
 6.70. \int_{-3}^3 x^2 \sqrt{9-x^2} dx; & 6.71. \int_0^{\pi} x \sin \frac{x}{2} dx; & 6.72. \int_1^{\sqrt[3]{e}} x^2 \ln x dx; \\
 6.73. \int_0^1 \arcsin x dx; & 6.74. \int_{-1}^0 (2x+3)e^{-x} dx; & 6.75. \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^5}; \\
 6.76. \int_1^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}; & 6.77. \int_0^{\infty} x e^{-x^2} dx; & 6.78. \int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x} dx; \\
 6.79. \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+9}; & 6.80. \int_1^5 \frac{dx}{\sqrt{5-x}}.
 \end{array}$$

Знайти площі фігур, що обмежені заданими лініями:

$$\begin{array}{ll}
 6.81. y = 3 \cdot x^{-1}, \quad x + y = 4; & 6.82. y = 4 - x^2, \quad y = x^2 - 2x; \\
 6.83. y = \sqrt{1-x}, \quad y = x+1, \quad y = 0; & 6.84. y = x^2, \quad xy = 1, \quad x = 3, \quad y = 0; \\
 6.85. y = 2\sqrt{x}, \quad 6 - y = 0, \quad x = 0; & 6.86. y = x; \quad y = -x + 4; \quad y = 0; \\
 6.87. y = \ln x, \quad x = e, \quad x = e^2, \quad y = 0; & 6.88. y = \sqrt{4-x^2}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1; \\
 6.89. y = x^2 - 2x + 3, \quad y - 3x + 1 = 0; & 6.90. y = x^2 - x, \quad y = 3x; \\
 6.91. y = \ln x, \quad y = 0, \quad x = 2; & 6.92. y = (x-4)^2, \quad y = 16 - x^2, \quad y = 0; \\
 6.93. y = 2x - x^2, \quad y = x.
 \end{array}$$

Знайти об'єми тіл, утворених обертанням навколо осі OX фігур, що обмежені заданими лініями:

$$\begin{array}{l}
 6.94. y = x^2, \quad y = \sqrt{x}; \\
 6.95. y = 3\sin x, \quad y = \sin x, \quad 0 \leq x \leq \pi; \\
 6.96. y = e^{1-x}, \quad y = 0, \quad x = 0, \quad x = 1; \\
 6.97. y = x^2, \quad xy = 8, \quad x = 4, \quad y = 0.
 \end{array}$$

Практичне заняття 7. Диференціальні рівняння

Мета практичного заняття: навчитися знаходити загальні та частинні розв'язки диференціальних рівнянь першого та другого порядку.

Диференціальні рівняння першого порядку

Диференціальні рівняння із відокремлюваними змінними

Це такі рівняння, які можна звести до вигляду $P(x)dx = Q(y)dy$. Означені рівняння розв'язуються шляхом інтегрування правої та лівої частин $\int P(x)dx = \int Q(y)dy$.

Приклад 7.1. Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку:

$$y' \sin x = y \ln y, \text{ за умови, що } y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e.$$

Розв'язання. Це рівняння є диференціальним рівнянням із відокремлюваними змінними.

Розв'яжемо його стосовно y' .

Враховуючи, що $y' = \frac{dy}{dx}$, отримаємо: $\frac{dy}{dx} = \frac{y \ln y}{\sin x}$.

Відокремимо змінні: $\frac{dy}{y \ln y} = \frac{dx}{\sin x}$.

Проінтегруємо: $\int \frac{dy}{y \ln y} = \int \frac{dx}{\sin x}$.

Після інтегрування даного диференційного рівняння отримаємо загальний розв'язок $\ln|\ln y| = \ln\left|\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right| + \ln c$. Спростимо отриманий резуль-

тат: $\ln y = c \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}$ або $y = e^{c \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2}}$ – загальний розв'язок.

Якщо диференціальне рівняння має початкову умову, то кажуть, що є необхідним знайти частинний розв'язок або розв'язати задачу Коші.

Використовуючи умову $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = e$,

знаходимо значення довільної сталої c : $e = e^{c \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} \Rightarrow c \cdot \operatorname{tg} \frac{\pi}{4} = 1 \Rightarrow c = 1$.

Тоді частинний розв'язок має вигляд: $y = e^{\operatorname{tg} \frac{x}{2}}$.

Однорідні диференціальні рівняння

Це рівняння вигляду $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$.

Рівняння розв'язуються введенням нової змінної: $t = \frac{y}{x}$,

де $y' = t'x + t$, $t' = \frac{dt}{dx}$.

Приклад 7.2. Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку $xy' = 5y + x$.

Розв'язання. Поділимо обидві частини рівняння на x . Отримане рівняння $y' = 5\frac{y}{x} + 1$ є однорідним диференціальним рівнянням (ДР) першого

порядку. Зробимо відповідну заміну: $t = \frac{y}{x}$, де $y' = t'x + t$, $t' = \frac{dt}{dx}$.

Тоді задане ДР набуває вигляду: $y' = 5\frac{y}{x} + 1$ $t'x + t = 5t + 1$,

$\frac{dt}{dx}x = 4t + 1$. Результат перетворень є ДР першого порядку із відокремлюваними змінними: $xdt = (4t + 1)dx$, поділяємо змінні та інтегруємо:

$$\int \frac{dt}{4t + 1} = \int \frac{dx}{x}.$$

Отримаємо: $\frac{1}{4} \ln|4t + 1| = \ln|x| + C$; $\sqrt[4]{4t + 1} = C \cdot x$.

Повертаємося до старої змінної: $4\frac{y}{x} + 1 = (C \cdot x)^4$.

Отже, загальний розв'язок ДР має вигляд: $4\frac{y}{x} + 1 = C \cdot x^4$.

Лінійні диференціальні рівняння. Рівняння Бернуллі

Лінійне диференціальне рівняння має вигляд: $y' + P(x)y = Q(x)$.

Розв'язок ДР шукають у вигляді $y = u \cdot v$. Тоді $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$.

Рівняння Бернуллі: $y' + P(x)y = Q(x) \cdot y^n$, де $n \neq 0$, $n \neq 1$. Зробивши заміну $z = y^{1-n}$, ДР зводиться до лінійного.

Приклад 7.3. Розв'язати диференціальне рівняння першого порядку $x^2 y' + 2xy - 1 = 0$.

Розв'язання. $y' + 2\frac{y}{x} - \frac{1}{x^2} = 0$. Приведемо рівняння до вигляду

$y' + 2\frac{y}{x} = \frac{1}{x^2}$. Рівняння є лінійним неоднорідним диференціальним рівнянням першого порядку.

Використаємо відповідну заміну: $y = uv$, тоді $y' = u' \cdot v + v' \cdot u$.

$$u' \cdot v + v' \cdot u + 2\frac{uv}{x} = \frac{1}{x^2};$$

$$u' \cdot v + u(v' + 2\frac{v}{x}) = \frac{1}{x^2}.$$

Знайдемо частинний розв'язок (дорівнюємо вираз у дужках до нуля):

$$v' + 2\frac{v}{x} = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} + 2\frac{v}{x} = 0;$$

$$\frac{dv}{dx} = -2\frac{v}{x};$$

$$\frac{dv}{v} = -2\frac{dx}{x}.$$

Отримане рівняння є рівнянням із відокремлюваними змінними, інтегруємо та отримаємо: $\ln v = -2\ln x$ або $v = \frac{1}{x^2}$.

Підставимо отриманий частинний розв'язок до рівняння:

$$u' \cdot v + u(v' + 2\frac{v}{x}) = \frac{1}{x^2}, \text{ тоді: } u'v = \frac{1}{x^2}, \frac{du}{dx}v = \frac{1}{x^2}.$$

Підставимо значення відповідної змінної $v = \frac{1}{x^2}$, отримаємо

$$\frac{du}{dx} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2}, \quad \frac{du}{dx} = 1, \quad du = dx. \text{ Інтегруємо: } u = x + C.$$

Тоді, оскільки за умовою: $y = uv = (x + C) \cdot \frac{1}{x^2}$ – загальний розв'язок відповідного диференціального рівняння.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку

Диференціальні рівняння першого порядку поділяються за такими основними видами:

диференціальні рівняння другого порядку, що розв'язуються двократним інтегруванням $y'' = f(x)$;

диференціальні рівняння другого порядку, що не містять y у явному вигляді, тобто $F(x, y', y'') = 0$. Вони розв'язуються введенням нової змінної: $y' = p(x)$, $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$;

диференціальні рівняння другого порядку, що не містять x у явному вигляді, тобто: $F(y, y', y'') = 0$. Вони розв'язуються введенням нової змінної: $y' = p(y)$, $y'' = p'(y) \cdot y = \frac{dp}{dy} y$.

Приклад 7.4. Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку:

$$y'' = xe^{-x}, \text{ за умови } y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

Розв'язання. Загальний вигляд рівнянь цього типу: $y'' = f(x)$.

Тоді загальний розв'язок знаходиться безпосереднім інтегруванням:

$$y' = \int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x} + c_1;$$

$$y = \int (-xe^{-x} - e^{-x} + c_1) dx = xe^{-x} + 2e^{-x} + c_1x + c_2.$$

Для отримання частинного розв'язку скористаємося початковими умовами:

$$\begin{cases} 0 = -1 + c_1 \\ 1 = 2 + c_2 \end{cases}, \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} c_1 = 1 \\ c_2 = -1 \end{cases}.$$

Частинний розв'язок: $y = xe^{-x} + 2e^{-x} + x - 1$.

Приклад 7.5. Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку $y''(x+3) + y' = 0$.

Розв'язання. Це рівняння другого порядку загального вигляду: $F(x, y', y'') = 0$. Розв'язання відбувається за допомогою використання відповідної заміни: $y' = p(x)$ та $y'' = p' = \frac{dp}{dx}$.

Тоді отримаємо: $p'(x+3) + p = 0$;

$$\frac{dp}{dx}(x+3) = -p.$$

Розділяємо відповідні змінні: $\frac{dp}{p} = \frac{-dx}{x+3}$ та інтегруємо обидві частини тотожності.

Отримаємо: $\ln p = -\ln(x+3) + \ln C_1$; $p = \frac{C_1}{x+3}$.

Враховуючи, що $p = \frac{dy}{dx}$, підставляємо та інтегруємо ще раз:

$$p = \frac{dy}{dx} = \frac{C_1}{x+3}; \quad y = \int \frac{C_1}{x+3} dx.$$

Таким чином: $y = C_1 \ln(x+3) + C_2$.

Приклад 7.6. Розв'язати диференціальне рівняння другого порядку $2(y')^2 = (y-1)y''$.

Розв'язання. Подане рівняння є рівнянням вигляду: $F(y, y', y'') = 0$.

Розв'язання відбувається за допомогою підстановки: $y' = p(y)$ та $y'' = p \frac{dp}{dy}$.

$$\text{Отримаємо: } 2p^2 = (y-1)p \frac{dp}{dy} \text{ або } p \left(2p - (y-1) \frac{dp}{dy} \right) = 0,$$

звідки маємо $p = 0$, або $2p - (y-1) \frac{dp}{dy} = 0$.

Із першого рівняння $p = 0$, $y' = 0$ отримаємо $y = C$.

У другому рівнянні розділимо змінні та знайдемо його загальний розв'язок: $\frac{dp}{p} = \frac{2dy}{y-1}$, $\ln|p| = 2\ln|y-1| + \ln C_1$, $p = C_1(y-1)^2$.

Підставляючи в останнє рівняння вираз для $p = \frac{dy}{dx}$, отримаємо знову рівняння першого порядку:

$$\frac{dy}{dx} = C_1(y-1)^2, \frac{dy}{(y-1)^2} = C_1 dx.$$

Проінтегруємо: $\int \frac{dy}{(y-1)^2} = C_1 \int dx$, $-\frac{1}{y-1} = C_1 x + C_2$.

Отримаємо загальний розв'язок: $(C_1 x + C_2)(1-y) = 1$.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами поділяються на два типи: $y'' + py' + qy = 0$ – однорідне рівняння, та $y'' + py' + qy = f(x)$ – неоднорідне рівняння. Розв'язок будь-якого неоднорідного рівняння складається із $y_{\text{он}} = y_{\text{чн}} + y_{00}$, де y_{00} – розв'язок відповідного однорідного рівняння, а $y_{\text{чн}}$ – частинний розв'язок, що залежить від вигляду правої частини $f(x)$.

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду $y'' + py' + qy = e^{\alpha x} P_n(x)$

У цьому випадку частинний розв'язок, що залежить від правої частини $f(x) = e^{\alpha x} P_n(x)$, знаходять у вигляді: $y_{\text{чн}} = e^{\alpha x} \cdot x^k \cdot Q_n(x)$, де $Q_n(x)$ – повний поліном того ж ступеня, що і $P_n(x)$, k – кратність, із якою α повторюється в коренях відповідного однорідного рівняння $y'' + py' + qy = 0$.

Приклад 7.7. Розв'язати лінійне диференціальне рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^x$.

Розв'язання. Загальний розв'язок будемо шукати у вигляді $y_{он} = y_{чн} + y_{оо}$, де $y_{оо}$ – загальний розв'язок однорідного рівняння $y'' - 3y' + 2y = 0$.

Розв'яжемо відповідне характеристичне рівняння: $k^2 - 3k + 2 = 0$, де $k_1 = 1, k_2 = 2$. Отже, $y_{оо} = c_1 e^x + c_2 e^{2x}$.

Права частина, а саме: $f(x) = (3 - 4x)e^x$ є функцією вигляду $f(x) = P_n(x)e^{\alpha x}$, де $P_n(x)$ – поліном першого ступеня.

Тоді $Q(x) = Ax + B$, $e^{\alpha x} = e^x$, звідки $\alpha = 1$, та це значення повторюється у коренях відповідного однорідного рівняння лише один раз, тому $x^k = x^1 = x$.

Отримаємо: $y_{чн} = e^{\alpha x} \cdot x^k \cdot Q_n(x)$ або $y_{чн} = x(Ax + B)e^x$.

Невідомі A і B знайдемо за методом невизначених коефіцієнтів. Для цього, диференціюючи $y_{чн}$, знайдемо $y'_{чн}$ та $y''_{чн}$.

$$y_{чн} = (Ax^2 + Bx)e^x;$$

$$y'_{чн} = (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x;$$

$y''_{чн} = 2Ae^x + (2Ax + B)e^x + (2Ax + B)e^x + (Ax^2 + Bx)e^x$. Підставимо значення всіх отриманих похідних $y_{чн}$, $y'_{чн}$, $y''_{чн}$ у відповідне диференціальне рівняння: $y'' - 3y' + 2y = (3 - 4x)e^x$. Зведемо подібні у лівій частині та отримаємо: $(-2Ax - B + 2A)e^x = (3 - 4x)e^x$. Прирівнюючи коефіцієнти, отримаємо систему:

$$\begin{cases} -2A = -4, \\ -B + 2A = 3. \end{cases}$$

Звідки $A = 2$; $B = 1$.

Таким чином, $y_{чн} = x(2x + 1)e^x$ – деякий частинний розв'язок неоднорідного рівняння.

Остаточно маємо загальний розв'язок:

$$y_{чн} = c_1 e^x + c_2 e^{2x} + x(2x + 1)e^x.$$

Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами вигляду $y'' + py' + qy = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m \sin \beta x)$

У цьому випадку частинний розв'язок, що залежить від правої частини $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m \sin \beta x)$, знаходять у вигляді:

$$y_{\text{чн}} = e^{\alpha x} \cdot x^k (M_s(x) \cos \beta x + N_s(x) \sin \beta x),$$

де $M_s(x)$, $N_s(x)$ – повні поліноми ступеня s , що є найбільшою із n та m того ж ступеня; x^k , k – кратність, із якою вираз $\alpha + i\beta$ повторюється в коренях відповідного однорідного рівняння.

Зауваження: вираз $\alpha + i\beta$ може бути коренем відповідного однорідного рівняння, якщо воно має комплексно-спряжені корені $\alpha \pm i\beta$.

Приклад 7.8. Знайти загальний розв'язок рівняння:

$$y'' + y' - 6y = \cos 2x - 3\sin 2x.$$

Розв'язання. Знайдемо загальний розв'язок однорідного рівняння:

$$y'' + y' - 6y = 0.$$

Складемо його характеристичне рівняння:

$$k^2 + k - 6 = 0.$$

Це рівняння має різні дійсні корені: $k_1 = 2$; $k_2 = -3$, загальний розв'язок однорідного рівняння має вигляд:

$$\bar{y} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x}.$$

У правій частині даного рівняння функція $f(x) = \cos 2x - 3\sin 2x$ є функцією вигляду $f(x) = e^{\alpha x} (P_n(x) \cos \beta x + Q_m(x) \sin \beta x)$, де $P_n(x)$ та $Q_m(x)$ – поліноми нульового ступеня. Оскільки $\alpha = 0$, $\beta = 2$, то $\alpha + \beta i = 0 + 2i$ не є коренем характеристичного рівняння, отже $x^k = x^0 = 1$, частинний розв'язок неоднорідного рівняння знаходимо за формулою:

$$\tilde{y} = A \cos 2x + B \sin 2x.$$

Знайдемо похідні:

$$\tilde{y}' = -2A \sin 2x + 2B \cos 2x,$$

$$\tilde{y}'' = -4A \cos 2x - 4B \sin 2x.$$

У задане рівняння підставимо $\tilde{y}, \tilde{y}'$ та $\tilde{y}''$, отримаємо:
 $-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 2A\sin 2x + 2B\cos 2x - 6A\cos 2x - 6B\sin 2x =$
 $= \cos 2x - 3\sin 2x.$

$$\text{Або } (2B - 10A)\cos 2x - (10B + 2A)\sin 2x = \cos 2x - 3\sin 2x.$$

Звідси:

$$\begin{cases} 2B - 10A = 1, \\ 10B + 2A = 3. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, отримаємо:

$$A = -\frac{1}{26}, B = \frac{4}{13}.$$

Отже, частинний розв'язок цього рівняння набуває вигляду:

$$\tilde{y} = -\frac{1}{26}\cos 2x + \frac{4}{13}\sin 2x$$

та загальний розв'язок: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-3x} - \frac{1}{26}(\cos 2x - 8\sin 2x).$

Завдання до самостійної роботи

Розв'язати диференціальні рівняння першого порядку:

$$7.1. x\sqrt{9-y^2}dx - y(4+x^2)dy = 0; \quad 7.2. (xy^2 - y^2)dx + (x^2y + x^2)dy = 0;$$

$$7.3. y' + \sin(x+y) = \sin(x-y); \quad 7.4. \begin{cases} \sin^2 x \cos^2 y dx = \cos^2 x dy \\ y(0) = \frac{\pi}{4} \end{cases};$$

$$7.5. y'e^{-x} = x-1, \quad y(1) = -e; \quad 7.6. (xy - x^2)y' = y^2;$$

$$7.7. xy' + y = 2y(\ln y - \ln x); \quad 7.8. xy' - y = \sqrt{y^2 + 2x^2};$$

$$7.9. (x^2 + y^2)dx = 2xydy, \quad y(4) = 0; \quad 7.10. y^2 + x^2y' = xy y', \quad y(1) = 1;$$

$$7.11. xy' - y = x \cos^2 \frac{y}{x}, \quad y(3) = 0; \quad 7.12. (x^2 + 1)y' - xy = x^3 + x;$$

$$7.13. y' + 2xy = xe^{-x^2};$$

$$7.14. xy' - y = x^2 \cos x;$$

$$7.15. y' - \frac{y}{x \ln x} = x \ln x, \quad y(e) = \frac{e^2}{2}; \quad 7.16. (1-x^2)y' + 2xy = xy^2, \quad y(0) = 0,5.$$

Розв'язати диференціальні рівняння другого порядку:

$$7.17. y'' = \sin 2x + x;$$

$$7.18. (1+x^2)y'' - 2xy' = 0;$$

$$7.19. yy'' - y'(1+y') = 0;$$

$$7.20. y'' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\ln 2}{2}, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1;$$

$$7.21. y'' = \frac{y'}{x} \left(1 + \ln \frac{y'}{x}\right), \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad y'(1) = e;$$

$$7.22. y'' - 8y' + 7y = 14;$$

$$7.23. y'' - 2y' = x^2 - 1;$$

$$7.24. y'' + 3y' - 10y = 12xe^{-2x};$$

$$7.25. y'' - 3y' + 2y = e^x;$$

$$7.26. y'' + y' - 2y = 8 \sin 2x;$$

$$7.27. y'' + y' - 2y = \cos x - 3 \sin x;$$

$$7.28. y'' - y' = 2(1-x), \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 1;$$

$$7.29. y'' + 4y = e^{2x}, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$$

$$7.30. y'' + y = -\sin 2x, \quad y(\pi) = 1, \quad y'(\pi) = 1.$$

Практичне заняття 8. Ряди

Мета практичного заняття: навчитися досліджувати знакопостійні ряди на збіжність; знакозмінні ряди на умовну та абсолютну збіжність. Уміти визначати область (радіус) збіжності степеневого ряду, вміти застосовувати ряди до наближених обчислень значень деяких функцій.

Знакопостійні числові ряди

Ряд – це послідовність елементів (елементів ряду), що може бути

записаною $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, де u_n – елемент ряду.

Якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$, то ряд може збігатися, якщо $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$, то ряд є розбіжним. Ця умова називається *необхідною умовою збіжності ряду*.

Приклад 8.1. Дослідити на збіжність ряд:

$$u_n = \frac{2n+1}{5n-3}.$$

Розв'язання. За необхідною умовою збіжності ряду:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+1}{5n-3} = \frac{2}{5} \neq 0, \text{ ряд є розбіжним.}$$

Виконання необхідної ознаки не є достатньою умовою збіжності ряду. Для перевірки числових рядів на збіжність застосовують *достатні умови збіжності*, а саме:

ознаку порівняння;

ознаку Д'Аламбера;

радикальну (інтегральну) ознаку Коші.

Приклад 8.2. Дослідити на збіжність ряд: $u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^3 + 4}{\sqrt{n^{10} - 1}}.$

Розв'язання. За необхідною умовою збіжності ряду $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ маємо:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 4}{\sqrt{n^{10} - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^3 + 4}{n^5 \sqrt{1 - \frac{1}{n^{10}}}} = 0.$$

Отже, ряд може збігатися.

Для перевірки достатньої умови збіжності ряду використаємо ознаку порівняння.

За еталонний ряд оберемо узагальнений гармонійний ряд, загальний член якого дорівнює $v_n = \frac{1}{n^2}$, цей ряд є збіжним.

Знайдемо границю: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_n}{v_n} = k.$

$$\text{Отримаємо: } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^3 + 4)n^2}{\sqrt{n^{10} - 1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(3n^3 + 4)n^2}{n^5 \sqrt{1 - \frac{1}{n^{10}}}} = 3 \neq 0.$$

Відповідь: за ознакою порівняння ряд є збіжним.

Приклад 8.3. Дослідити на збіжність ряд: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$.

Розв'язання. Якщо дослідити ряд на необхідну ознаку збіжності важко, тобто виникають труднощі під час обчислення відповідної границі:

$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n}{(n+1)!}$, то можна зразу використовувати будь-яку достатню ознаку.

Так, у цьому випадку зручно застосувати достатню ознаку збіжності Д'Аламбера. За цією ознакою треба обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = q$. Якщо $q < 1$ – ряд є збіжним, $q > 1$ – ряд є розбіжним, $q = 1$ – необхідно застосувати іншу ознаку.

Таким чином:

$$u_n = \frac{3^n}{(n+1)!}; \quad u_{n+1} = \frac{3^{n+1}}{(n+2)!} = \frac{3^n \cdot 3}{(n+1)! \cdot (n+2)}.$$

Тоді:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n \cdot 3 \cdot (n+1)!}{(n+1)! \cdot (n+2) \cdot 3^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3}{(n+2)} = 0 < 1.$$

Отже, за ознакою Д'Аламбера даний ряд є збіжним.

Приклад 8.4. Дослідити на збіжність ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$.

Розв'язання.

У цьому випадку зручно використати радикальну ознаку Коші. За ознакою Коші треба обчислити границю $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = q$. Якщо $q > 1$ – ряд розбігається, $q < 1$ – ряд збігається, $q = 1$ – необхідно міняти ознаку.

Отже, маємо: $u_n = \frac{1}{3^n} \left(\frac{n}{n+1} \right)^{n^2}$, а $\sqrt[n]{u_n} = \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n$.

Тоді $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left(\frac{n}{n+1} \right)^n = \frac{1}{3} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n} \right)^n} = \frac{1}{3e} < 1$ і за ознакою

Коші ряд збігається.

Знакозмінні числові ряди

Знакозмінні числові ряди досліджуються на умовну та абсолютну збіжність.

Умовна збіжність числових рядів (ознака Лейбніца): ряд збігається умовно, якщо виконуються дві такі умови:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = 0$;

2) послідовність елементів, починаючи із деякого номера n , монотонно спадає: $u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq u_4 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$

Приклад 8.5. Дослідити ряди на умовну збіжність:

1) $u_n = (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-2}$; 2) $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$.

Розв'язання. Розглянемо ряд, загальний член якого має вигляд:

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{2n+1}{2n-2}.$$

Цей ряд є знакозмінним, тому за ознакою Лейбніца:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{2n+1}{2n-2} \right| = \frac{2n}{2n} = 1 \neq 0, \text{ ряд розбігається;}$$

2) розглянемо ряд, загальний член якого дорівнює $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$.

За ознакою Лейбніца $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n!} = 0$. Послідовність елементів монотонно спадає, тому ряд збігається умовно.

Абсолютна збіжність числових рядів

Ряд збігається абсолютно, якщо за трьома відомими ознаками достатньої збіжності (порівняння, Д'Аламбера, Коші) збігається відповідний ряд, створений із модулів.

Приклад 8.6. Дослідити на абсолютну збіжність ряд: $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n!}$.

Розв'язання. Цей ряд збігається умовно (див. приклад 8.5).

Дослідимо поведінку ряду $|u_n| = \frac{1}{n!}$, за ознакою Д'Аламбера:

$$|u_n| = \frac{1}{n!}, |u_{n+1}| = \frac{1}{(n+1)!}.$$

Тоді: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0 < 1.$

Таким чином, заданий ряд збігається абсолютно.

Приклад 8.7. Дослідити на умовну та абсолютну збіжність ряд

$$u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}.$$

Розв'язання. Цей ряд збігається умовно, за ознакою Лейбніца:

1) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0;$

2) послідовність елементів ряду монотонно спадає:

$$u_1 \geq u_2 \geq u_3 \geq u_4 \geq \dots \geq u_n \geq \dots$$

Однак, відповідний ряд, створений із абсолютних величин $|u_n| = \frac{1}{n},$

є гармонійним рядом, а значить є розбіжним, тому ряд не збігається абсолютно.

Таким чином, ряд $u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$ збігається умовно.

Степеневі ряди

Ряд, що може бути записаним у вигляді такої числової послідовності: $a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + a_3(x-a)^3 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$, називається степеневим рядом. Для степеневих рядів існує область, де, залежно від значення змінної x , ряд збігається. Тому основним завданням у дослідженні степеневих рядів є визначення області значень x , де ряд збігається.

Приклад 8.8. Дослідити на збіжність степеневий ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(2n+1)^2}.$

Розв'язання. За ознакою Д'Аламбера:

$$u_n = \frac{x^n}{(2n+1)^2}, \quad u_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(2(n+1)+1)^2} = \frac{x^{n+1}}{(2n+3)^2};$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x^{n+1}|}{(2n+3)^2} \cdot \frac{(2n+1)^2}{|x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |x| < 1.$$

Таким чином ряд є абсолютно збіжним на інтервалі $(-1; 1)$.

Дослідимо збіжність ряду на кінцях інтервалу.

Якщо $x = 1$, маємо ряд $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Це ряд із додатними членами і за достатньою умовою порівняння з еталонним узагальненим рядом $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, який є збіжним, отримаємо, що, якщо $x = 1$, ряд є збіжним.

Якщо $x = -1$, ряд набуває вигляду: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}$. Ряд, складений

із модулів, співпадає з рядом $x = 1$, до того ж він є збіжним.

Таким чином цей ряд є абсолютно збіжним, та областю збіжності є відрізок $[-1; 1]$.

Зауваження: кінцеві точки інтервала включаються до області збіжності ряду, якщо в цих точках ряд має або умовну, або абсолютну збіжність. Якщо в цих точках ряд є розбіжним, то вони не включаються до інтервала збіжності.

Розкладання функцій до рядів Тейлора та Маклорена

Для наближених обчислень у математиці користуються розкладаннями функцій у степеневі ряди. Найбільш відомими розкладаннями є розкладання до рядів Тейлора або Маклорена.

Так: $e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$ — збігається, якщо $x \in (-\infty; \infty)$;

$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - (1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \dots$ — збігається, якщо $(-\infty; \infty)$;

$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - (1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots$ — збігається, якщо $(-\infty; \infty)$;

$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \dots$ — збігається, якщо $-1 < x \leq 1$.

Приклад 8.9. Знайти наближене значення e^2 з точністю до 0,01, обмежуючись першими вісьмома членами ряду Маклорена для e^x .

Розв'язання: застосуємо формулу:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots, (-\infty < x < \infty).$$

Якщо $x = 2$, маємо $e^2 \approx 1 + 2 + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!}$.

Тоді:

$$\begin{aligned} R_8 &= \frac{2^8}{8!} + \frac{2^9}{9!} + \dots = \frac{2^8}{8!} + \frac{2^9}{8! \cdot 9} + \frac{2^{10}}{8! \cdot 9 \cdot 10} + \dots = \frac{2^8}{8!} \left(1 + \frac{2}{9} + \frac{2^2}{9 \cdot 10} + \frac{2^3}{9 \cdot 10 \cdot 11} + \dots \right) < \\ &< \frac{2^8}{8!} \left(1 + \frac{2}{9} + \frac{2^2}{9 \cdot 9} + \frac{2^3}{9 \cdot 9 \cdot 9} + \dots \right) = \frac{2^8}{8!} \left(1 + \frac{2}{9} + \left(\frac{2}{9} \right)^2 + \left(\frac{2}{9} \right)^3 + \dots \right) = \\ &= \frac{2^8}{8!} \cdot \frac{1}{1 - \frac{2}{9}} = \frac{2^8 \cdot 9}{8! \cdot 7} < 0,008 < 0,01 \end{aligned}$$

Завдання до самостійної роботи

Дослідити на збіжність ряд з додатними членами $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

8.1. $u_n = \frac{n^2 + 1}{\sqrt[3]{n^2}}$; 8.2. $u_n = \frac{3n + 1}{2n^3 + 3}$; 8.3. $u_n = \frac{n + 1}{(2n + 1)^2}$;

8.4. $u_n = \frac{n + 2}{n\sqrt{n + 2}}$; 8.5. $u_n = \frac{3^n \cdot n}{\sqrt{n(n + 1)}}$; 8.6. $u_n = \frac{2n}{(n + 3)^3 + 1}$;

8.7. $u_n = \frac{7n - 1}{5^n \cdot (n + 1)!}$; 8.8. $u_n = \frac{3n(n + 1)}{7^n}$; 8.9. $u_n = \frac{n^2 + 3}{(n + 1)!}$;

8.10. $u_n = \frac{3n + 1}{\sqrt{n \cdot 7^n}}$; 8.11. $u_n = \frac{2^n}{5^n \cdot (2n + 1)}$; 8.12. $u_n = \left(\frac{n}{3n + 1} \right)^n$;

$$8.13. u_n = \left(\frac{3n-1}{2n+1} \right)^n; \quad 8.14. u_n = \frac{7^n + 3^n}{21^n}.$$

Дослідити на абсолютну та умовну збіжність знакозмінний ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

$$8.15. u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{3^n \cdot (n+1)};$$

$$8.16. u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt[3]{2n^2 + 1}};$$

$$8.17. u_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{2n+5};$$

$$8.18. u_n = \frac{(-1)^{n-1} \cdot (2n+1)}{n^2(n+1)};$$

$$8.19. u_n = \frac{(-1)^{n+1} \cdot n}{4^n \cdot (2n+1)};$$

$$8.20. u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{(3n+2)!};$$

$$8.21. u_n = \frac{(-1)^{n+1} (2n+1)}{5n \cdot (n+1)};$$

$$8.22. u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{7^n \cdot (5n-2)};$$

$$8.23. u_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n\sqrt{n+5}};$$

$$8.24. u_n = \frac{(-1)^n (2 + (-1)^n)}{n}.$$

Знайти область збіжності степеневого ряду $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$:

$$8.25. u_n = \frac{2^n \cdot x^n}{(2n+1)^2 \sqrt{3^n}}; \quad 8.26. u_n = \frac{3^n \cdot x^{n+1}}{2n+1}; \quad 8.27. u_n = \frac{x^{3n}}{8^n (n^2 + 1)};$$

$$8.28. u_n = \frac{x^{n+1}}{5^{n+1} n}; \quad 8.29. u_n = \frac{5^n \cdot x^n}{6^n \sqrt[3]{n}}; \quad 8.30. u_n = \frac{(n+1)^2 x^n}{2^n};$$

$$8.31. u_n = \frac{2^n \cdot x^n}{\sqrt{2n+1}}; \quad 8.32. u_n = \frac{(x-2)^n}{2^n}; \quad 8.33. u_n = \frac{(x-1)^n}{2^n (n+3)};$$

$$8.34. u_n = \frac{x^n}{2^n + 3^n}; \quad 8.35. u_n = \frac{(x-2)^n}{n^2}; \quad 8.36. u_n = \frac{2^n \cdot x^{5n}}{2n-1};$$

$$8.37. u_n = \frac{(x-4)^n}{\sqrt{n}}; \quad 8.38. u_n = \frac{n}{n+1} \left(\frac{x-1}{2} \right)^n; \quad 8.39. u_n = n! (x-5)^n;$$

$$8.40. u_n = (-1)^n \frac{\sqrt[3]{n+2}}{n+1} (x-2)^n.$$

$$8.41. \text{Обчислити наближено } \frac{1}{\sqrt{e}} \text{ з точністю до } 0,001.$$

$$8.42. \text{Обчислити наближено } \ln 1,04 \text{ з точністю до } 0,0001.$$

$$8.43. \text{Обчислити наближено } \sqrt[10]{1027} \text{ з точністю до } 0,0001.$$

$$8.44. \text{Обчислити наближено } \sin 0,4 \text{ з точністю до } 0,0001.$$

$$8.45. \text{Обчислити наближено } \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\sin x}{x} dx \text{ з точністю до } 0,0001.$$

$$8.46. \text{Обчислити наближено } \int_0^1 e^{-x^2} dx \text{ з точністю до } 0,0001.$$

Відповіді

$$1.1. \begin{pmatrix} 7 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}. 1.2. \begin{pmatrix} 4 & -5 & -3 \\ -4 & 4 & 10 \\ 0 & -9 & 0 \end{pmatrix}. 1.3. \begin{pmatrix} 6 & -7 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

$$1.4. A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$1.5. A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 18 \\ -18 & 19 \end{pmatrix}.$$

$$1.6. A \cdot B = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, B \cdot A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -4 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}. 1.7. \begin{pmatrix} 38 & 18 & -44 \\ 22 & -10 & 43 \\ 29 & 19 & -29 \end{pmatrix}.$$

$$1.8. \begin{pmatrix} 19 & 13 & 40 \\ 6 & -10 & 53 \\ 5 & 7 & -15 \end{pmatrix}. 1.9. \begin{pmatrix} -5 & 29 & 9 \\ -13 & -1 & 3 \\ -9 & -15 & -3 \end{pmatrix}. 1.10. \begin{pmatrix} 5 & -23 & 11 \\ 3 & -8 & 5 \\ -4 & -34 & 16 \end{pmatrix}.$$

1.11. -1. **1.12.** 34. **1.13.** 1. **1.14.** 6. **1.15.** a . **1.16.** 12. **1.17.** 2; -5. **1.18.** 1; 4.
1.19. 80. **1.20.** -68. **1.21.** 60. **1.22.** -2. **1.23.** 52. **1.24.** 10. **1.25.** Так.
1.26. Ні. **1.27.** Так.

$$\mathbf{1.28.} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -3 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} \\ -5 & -\frac{1}{2} & \frac{7}{2} \end{pmatrix}. \mathbf{1.29.} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 24 \end{pmatrix}. \mathbf{1.30.} \begin{pmatrix} -\frac{4}{5} & \frac{6}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{7}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}.$$

1.31. 2. **1.32.** 3. **1.33.** 3. **1.34.** $x_1 = 3, x_2 = 8, x_3 = 13$.

1.35. $x_1 = 2, x_2 = -1, x_3 = 0$. **1.36.** $x_1 = 2, x_2 = 3, x_3 = 5$.

1.37. $x_1 = -8, x_2 = -4, x_3 = -13$. **1.38.** $\emptyset$.

1.39. Нескінченна множина розв'язків. **1.40.** $x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0$. **1.41.** $\emptyset$.

1.42. Нескінченна множина розв'язків. **1.43.** $x_1 = 1, x_2 = -1, x_3 = 2$.

2.1. $\frac{7}{12}$. **2.2.** -2. **2.3.** $\frac{7}{9}$. **2.4.** ∞ . **2.5.** 0. **2.6.** $\frac{3}{2}$. **2.7.** $-\infty$. **2.8.** -4. **2.9.** 2.

2.10. 0. **2.11.** ∞ . **2.12.** $\frac{4}{5}$. **2.13.** $\frac{14}{9}$. **2.14.** 4. **2.15.** $-\infty$. **2.16.** $-\frac{3}{2}$. **2.17.** ∞ .

2.18. 0. **2.19.** $\frac{1}{6}$. **2.20.** -1. **2.21.** ∞ . **2.22.** $\frac{3}{64}$. **2.23.** 3. **2.24.** $\frac{5}{2}$. **2.25.** 2.

2.26. $-\frac{1}{2}$. **2.27.** $-\frac{3}{2}$. **2.28.** e^{-7} . **2.29.** 5. **2.30.** e^{-14} .

3.37. 1. **3.38.** 0. **3.39.** $\frac{25}{18}$. **3.43.** e^{-6} . **3.48.** $-\frac{1}{2}$.

4.7. Найбільше $y(\pm 2) = 13$, найменше $y(\pm 1) = 4$.

4.8. Найбільше $y(0) = 0$, найменше $y(-1) = -\frac{1}{e}$.

4.9. Найбільше $y(1) = 1$, найменше $y(e) = e - 2$.

4.10. Найбільше $y(-\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$, найменше $y(\frac{\pi}{2}) = -\frac{\pi}{2}$.

5.1. $(\frac{1}{3}; \frac{4}{3}) - \min$. **5.2.** Екстремуму немає. **5.3.** $z_{\min}(1; 2) = -7$.

5.4. $z_{\min}(0; 0) = 4$. **5.5.** $z_{\min}(3; 3) = -27$. **5.6.** $z_{\min}(0; 0) = 4$.

$$\mathbf{5.7.} \ z_{\min}(1; 3) = 20 - 18 \ln 3. \ \mathbf{5.8.} \ z_{\min}(-2; 0) = -\frac{2}{e}. \ \mathbf{5.9.} \ z_{\max}\left(-1; -\frac{1}{2}\right) = 0.$$

$$\mathbf{5.17.} \ \max_D z = 6; \min_D z = 3. \ \mathbf{5.18.} \ \max_D z = 4; \min_D z = 0.$$

$$\mathbf{5.19.} \ \min_D z = -64; \max_D z = \frac{64}{27}. \ \mathbf{5.20.} \ \min_D z = -\frac{1}{3}; \max_D z = 2.$$

$$\mathbf{5.21.} \ \min_D z = -11; \max_D z = 9.$$

$$\mathbf{6.1.} \ 3x^3 - 8\sqrt[4]{x^5} + 2\sqrt{x^3} + C. \ \mathbf{6.2.} \ -\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C.$$

$$\mathbf{6.3.} \ \operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x + C. \ \mathbf{6.4.} \ -x + \operatorname{tg} x + C.$$

$$\mathbf{6.5.} \ \frac{(1-3x)^{18}}{-54} + C. \ \mathbf{6.6.} \ \frac{\sqrt[4]{(12x-5)^7}}{21} + C. \ \mathbf{6.7.} \ \frac{1}{3}e^{3x-5} + C.$$

$$\mathbf{6.8.} \ -\frac{\ln|11-4x|}{4} + C. \ \mathbf{6.9.} \ \ln(x^2 - 3x + 8) + C. \ \mathbf{6.10.} \ \frac{3}{2}\ln|1-2\cos x| + C.$$

$$\mathbf{6.11.} \ \frac{3}{8}\ln(2x^4 + 3) + C. \ \mathbf{6.12.} \ \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2 + 2)^2} + C. \ \mathbf{6.13.} \ \frac{1}{4}e^{4\sin x} + C.$$

$$\mathbf{6.14.} \ \frac{1}{18}\ln^6(3x-2) + C. \ \mathbf{6.15.} \ e^{\operatorname{tg} x} + C. \ \mathbf{6.16.} \ \frac{1}{2}\sin(x^2 - 1) + C.$$

$$\mathbf{6.17.} \ -\frac{1}{3\arcsin^3 x} + C. \ \mathbf{6.18.} \ \frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin\frac{\sqrt{3}x}{\sqrt{5}} + C. \ \mathbf{6.19.} \ e^{\sqrt{2x-1}} + C.$$

$$\mathbf{6.20.} \ (7-x)\cos x + \sin x + C. \ \mathbf{6.21.} \ \frac{1-3x}{2}\sin 2x - \frac{3\cos 2x}{4} + C.$$

$$\mathbf{6.22.} \ x \operatorname{tg} x + \ln|\cos x| + C. \ \mathbf{6.23.} \ \frac{3x-11}{9}e^{-3x} + C.$$

$$\mathbf{6.24.} \ -\frac{e^{-2x}}{2}\left(x^2 + x + \frac{1}{2}\right) + C. \ \mathbf{6.25.} \ \frac{1}{2}e^x(\sin x - \cos x) + C.$$

$$\mathbf{6.26.} \ \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x+1}{2} + C. \ \mathbf{6.27.} \ \ln\left|x+5+\sqrt{x^2+10x+28}\right| + C.$$

$$\mathbf{6.28.} \ 3\ln(x^2 - 4x + 13) + \frac{11}{3}\operatorname{arctg}\frac{x-2}{3} + C. \ \mathbf{6.29.} \ 3\sqrt{x^2 - 4x + 5} + C.$$

$$\mathbf{6.30.} \ \frac{13}{20}\ln\left|\frac{2x-1}{2x+9}\right| - \frac{5}{8}\ln|4x^2 + 16x - 9| + C.$$

$$\mathbf{6.31.} \ 6\arcsin \frac{x-1}{2} + \sqrt{3+2x-x^2} + C. \quad \mathbf{6.32.} \ 2\ln|x-2| + \ln|x+5| + C.$$

$$\mathbf{6.33.} \ 4\ln|x-1| + 5\ln|x-4| - 7\ln|x+3| + C.$$

$$\mathbf{6.34.} \ -\frac{3}{2}\frac{1}{x+1} + \frac{1}{4}\ln|x+1| + \frac{3}{4}\ln|x-1| + C.$$

$$\mathbf{6.35.} \ \ln(x^2+9) - \ln|x-3| - \frac{1}{3}\operatorname{arctg} \frac{x}{3} + C.$$

$$\mathbf{6.36.} \ \ln|x| - \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) - \frac{1}{2}\operatorname{arctg} x + C.$$

$$\mathbf{6.37.} \ \frac{3}{2}\ln(x^2-2x+5) - 3\ln|x| + 2\operatorname{arctg} \frac{x-1}{2} + C.$$

$$\mathbf{6.38.} \ \frac{1}{2}\ln(x^2+4) - \frac{9}{2}\operatorname{arctg} \frac{x}{2} - \frac{2}{x} + C. \quad \mathbf{6.39.} \ \frac{1}{4}\ln \left| \frac{\operatorname{tg} \frac{x}{2} + 2}{\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2} \right| + C.$$

$$\mathbf{6.40.} \ C - \frac{1}{2 + \operatorname{tg} \frac{x}{2}}. \quad \mathbf{6.41.} \ \frac{\cos 2x}{4} - \frac{\cos 6x}{12} + C. \quad \mathbf{6.42.} \ \frac{\cos^3 x}{3} - \cos x + C.$$

$$\mathbf{6.43.} \ \frac{1}{7\cos^7 x} - \frac{1}{5\cos^5 x} + C. \quad \mathbf{6.44.} \ \frac{3x}{8} + \frac{\sin 2x}{4} + \frac{\sin 4x}{32} + C.$$

$$\mathbf{6.45.} \ \frac{\operatorname{tg}^3 x}{3} - \operatorname{tg} x + x + C. \quad \mathbf{6.46.} \ \frac{3}{5}\sqrt[3]{\cos^5 x} + \frac{3}{\sqrt[3]{\cos x}} + C.$$

$$\mathbf{6.47.} \ 2\sqrt{x-2} + \sqrt{2}\operatorname{arctg} \sqrt{\frac{x-2}{2}} + C. \quad \mathbf{6.48.} \ \frac{3}{2}\ln(\sqrt[3]{x^2}+1) + C.$$

$$\mathbf{6.49.} \ 6\sqrt[6]{x} - 6\operatorname{arctg} \sqrt[6]{x} + C. \quad \mathbf{6.50.} \ -\frac{2}{5}\sqrt{\frac{x+5}{x}} + C.$$

$$\mathbf{6.51.} \ -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x} - \arcsin x + C. \quad \mathbf{6.52.} \ \frac{\sqrt{x^2-9}}{9x} + C. \quad \mathbf{6.53.} \ \frac{x^3}{27\sqrt{(9+x^2)^3}} + C.$$

$$\mathbf{6.54.} \ C - \frac{\sqrt{(9-x^2)^5}}{45x^5}. \quad \mathbf{6.55.} \ \frac{17}{6}. \quad \mathbf{6.56.} \ \frac{7}{32}. \quad \mathbf{6.57.} \ \frac{2}{3}. \quad \mathbf{6.58.} \ \frac{1}{10}\ln 9. \quad \mathbf{6.59.} \ \frac{\pi}{6}.$$

$$\mathbf{6.60.} \frac{\pi}{12}. \mathbf{6.61.} \frac{\pi}{6}. \mathbf{6.62.} 0. \mathbf{6.63.} 9. \mathbf{6.64.} 2. \mathbf{6.65.} \frac{1}{4}. \mathbf{6.66.} \frac{1}{4}. \mathbf{6.67.} 2. \mathbf{6.68.} 1.$$

$$\mathbf{6.69.} \frac{1}{2} \arctg 2. \mathbf{6.70.} \frac{81}{8} \pi. \mathbf{6.71.} 4. \mathbf{6.72.} \frac{1}{9}. \mathbf{6.73.} \frac{\pi}{2} - 1. \mathbf{6.81.} 4 - 3 \ln 3 \text{ (од}^2\text{)}.$$

$$\mathbf{6.82.} 9 \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.83.} \frac{7}{6} \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.84.} \frac{1}{3} + \ln 3 \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.85.} 15 \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.86.} 14 \text{ (од}^2\text{)}.$$

$$\mathbf{6.87.} e^2 \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.88.} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3} \right) \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.89.} 4,5 \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.90.} 5 \frac{1}{3} \text{ (од}^2\text{)}.$$

$$\mathbf{6.91.} 2 \ln 2 - 1 \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.92.} \approx 106,6 \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.93.} 13,5 \text{ (од}^2\text{)}. \mathbf{6.94.} \frac{3\pi}{10} \text{ (од}^3\text{)}.$$

$$\mathbf{6.95.} 4\pi^2 \text{ (од}^3\text{)}. \mathbf{6.96.} \frac{\pi}{2} (e^2 - 1) \text{ (од}^3\text{)}. \mathbf{6.97.} \frac{112\pi}{5} \text{ (од}^3\text{)}.$$

$$\mathbf{7.1.} \frac{1}{2} \ln(x^2 + 4) + \sqrt{9 - y^2} = C. \mathbf{7.2.} \ln|xy| + \frac{y - x}{xy} = C.$$

$$\mathbf{7.3.} 2 \sin x + \ln \left| \operatorname{tg} \frac{y}{2} \right| = C. \mathbf{7.4.} \operatorname{tgy} = 1 - x + \operatorname{tg} x. \mathbf{7.5.} y = e^x (x - 2).$$

$$\mathbf{7.6.} y = Ce^{\frac{y}{x}}. \mathbf{7.7.} y = xe^{Cx^2+1}. \mathbf{7.8.} y = \frac{Cx^2}{2} - \frac{1}{2C}. \mathbf{7.9.} (x - 2)^2 - y^2 = 4.$$

$$\mathbf{7.10.} y = x \ln(ey). \mathbf{7.11.} x = 3e^{\operatorname{tg} \frac{y}{x}}. \mathbf{7.12.} y = 1 + x^2 + C\sqrt{1 + x^2}.$$

$$\mathbf{7.13.} y = e^{-x^2} \left(\frac{x^2}{2} + C \right). \mathbf{7.14.} y = x \sin x + Cx. \mathbf{7.15.} y = \frac{1}{2} x^2 \ln x.$$

$$\mathbf{7.16.} y = \frac{2(x^2 - 1)}{x^2 - 4}. \mathbf{7.17.} \frac{x^3}{6} - \frac{\sin 2x}{4} + C_1 x + C_2.$$

$$\mathbf{7.18.} C_1 y = x + \frac{x^3}{3} + C_2. \mathbf{7.19.} y = C_1 e^{c_2 x} + \frac{1}{C_2}. \mathbf{7.20.} y = -\ln \cos x.$$

$$\mathbf{7.21.} y = xe^x - e^x + \frac{1}{2}. \mathbf{7.22.} y = C_1 e^x + C_2 e^{7x} + 2.$$

$$\mathbf{7.23.} y = C_1 + C_2 e^{2x} + \frac{x}{4} - \frac{x^2}{4} - \frac{x^3}{6}. \mathbf{7.24.} y = C_1 e^{-5x} + C_2 e^{2x} + \left(\frac{1}{12} - x \right) e^{-2x}.$$

7.25. $y = C_1 e^x + C_2 e^{2x} - x e^x$. **7.26.** $y = C_1 e^x + C_2 e^{-2x} - \frac{6}{5} \sin 2x - \frac{2}{5} \cos 2x$.

7.27. $y = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x + \sin x$. **7.28.** $y = e^x + x^2 + 1$.

7.29. $y = \frac{1}{8} e^{2x} + \frac{7}{8} \cos 2x + \frac{3}{8} \sin 2x$. **7.30.** $y = \frac{\sin 2x}{3} - \frac{\sin x}{3} - \cos x$.

8.1. Розбіжний. **8.2.** Збіжний. **8.3.** Розбіжний. **8.4.** Розбіжний. **8.5.** Розбіжний.

8.6. Збіжний. **8.7.** Збіжний. **8.8.** Збіжний. **8.9.** Збіжний. **8.10.** Збіжний.

8.11. Збіжний. **8.12.** Збіжний. **8.13.** Розбіжний. **8.14.** Збіжний.

8.15. Абсолютно збіжний. **8.16.** Умовно збіжний. **8.17.** Розбіжний.

8.18. Абсолютно збіжний. **8.19.** Абсолютно збіжний.

8.20. Абсолютно збіжний. **8.21.** Умовно збіжний. **8.22.** Абсолютно збіжний.

8.23. Абсолютно збіжний. **8.24.** Розбіжний. **8.25.** $x \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{\sqrt{3}}{2} \right]$.

8.26. $x \in \left[-\frac{1}{3}; \frac{1}{3} \right)$. **8.27.** $x \in [-2; 2]$. **8.28.** $x \in [-5; 5)$. **8.29.** $x \in \left[-\frac{6}{5}; \frac{6}{5} \right)$.

8.30. $x \in (-2; 2)$. **8.31.** $x \in \left[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2} \right)$. **8.32.** $x \in (0; 4)$. **8.33.** $x \in [-1; 3)$.

8.34. $x \in (-3; 3)$. **8.35.** $x \in [1; 3]$. **8.36.** $x \in \left[-\frac{1}{\sqrt[5]{2}}; \frac{1}{\sqrt[5]{2}} \right)$. **8.37.** $x \in [3; 5)$.

8.38. $x \in (-1; 3)$. **8.39.** $x = 5$. **8.40.** $x \in (1; 3]$. **8.41.** 0,6065. **8.42.** 0,0392.

8.43. 2,0006. **8.44.** 0,3894. **8.45.** 0,4931. **8.46.** 0,7468.

Рекомендована література

1. Вища математика : базовий підручник для вузів / під ред. В. С. Пономаренка. – Харків : Фоліо, 2014. – 669 с.
2. Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. – 772 с.
3. Железнякова Е. Ю. Індивідуальні завдання з навчальної дисципліни "Вища математика" для студентів галузі знань 0305 "Економіка та підприємництво" денної форми навчання / Е. Ю. Железнякова, А. В. Ігначкова, Л. Д. Широкоград. – Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 217 с.
4. Железнякова Е. Ю. Методичні рекомендації до самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" розділ "Вища математика" для студентів напряму підготовки 6.030601 "Менеджмент" спеціалізації "Бізнес-адміністрування" денної форми навчання / Е. Ю. Железнякова, Т. В. Сілічова. – Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 102 с.
5. Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посіб. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2006. – 544 с.
6. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. / Л. М. Малярець. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 568 с.
7. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. : у 2 ч. Ч. 1 / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 393 с.
8. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. : у 2-х ч. Ч. 2 / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 368 с.
9. Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "Вища математика" [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://pns.hneu.edu.ua/course/index.php?categoryid=321>.

Зміст

Вступ.....	3
Практичне заняття 1. Елементи теорії матриць та визначників. Розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.....	4
Практичне заняття 2. Елементи теорії границь.....	22
Практичне заняття 3. Диференційне числення функції однієї змінної.....	34
Практичне заняття 4. Дослідження функцій та побудова їхніх графіків...	43
Практичне заняття 5. Диференційованість функцій багатьох змінних.....	48
Практичне заняття 6. Інтегральне числення	56
Практичне заняття 7. Диференціальні рівняння	75
Практичне заняття 8. Ряди	84
Відповіді.....	92
Рекомендована література.....	98

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

**Методичні рекомендації
до практичних завдань
з розділу "Вища математика"
для студентів спеціальності
242 "Туризм"
першого (бакалаврського) рівня**

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Железнякова** Еліна Юріївна
Сілічова Тетяна Василівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *В. Ю. Степаненко*

Коректор *В. Ю. Степаненко*

План 2019 р. Поз. № 12 ЕВ. Обсяг 100 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.*