УДК 519.85

Мартынова Е.В.
кандидат экономических наук,
доцент кафедры высшей математики
и экономико-математических методов
Харьковского национального университета имени Семена Кузнеца

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ТЕОРИИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

MODELING OF ECONOMIC PROBLEMS USING THE DYNAMIC PROGRAMMING THEORY

АННОТАЦИЯ

Динамическое программирование представляет собой метод оптимизации, в котором процесс принятия решения разбит на отдельные этапы. Динамическое программирование не содержит универсального метода решения задач, поэтому многие задачи имеют свою индивидуальную особенность и требуют специального подхода.

В статье рассмотрены общая схема многошагового процесса, условия применения метода динамического программирования, постановка и модель задачи динамического программирования, принцип оптимальности и функция Беллмана, этапы решения задачи. Рассмотрено построение математических моделей динамического программирования на примере двух различных задач: нахождения оптимального плана замены оборудования и оптимального распределения инвестиций предприятия. Полученные математические модели могут быть использованы для разработки управленческих решений на предприятии.

Ключевые слова: динамическое программирование, критерий оптимальности Беллмана, математическая модель, экономическая модель, допустимое состояние.

АНОТАЦІЯ

Динамічне програмування являє собою метод оптимізації, в якому процес прийняття рішення розбитий на окремі етапи. Динамічне програмування не містить універсального методу вирішення завдань, тому багато завдань мають свою індивідуальну особливість і вимагають спеціального підходу.

У статті розглянуто загальну схему багатокрокового процесу, умови застосування методу динамічного програмування, постановку і модель задачі динамічного програмування, принцип оптимальності і функцію Беллмана, етапи рішення задачі. Розглянуто побудову математичних моделей динамічного програмування на прикладі двох різних завдань: знаходження оптимального плану заміни обладнання і оптимального розподілу інвестицій підприємства. Отримані в результаті математичні моделі можуть бути використані для розроблення управлінських рішень на підприємстві.

Ключові слова: динамічне програмування, критерій оптимальності Беллмана, математична модель, економічна модель, допустимий стан.

ANNOTATION

Dynamic programming is an optimization method in which the decision making process is divided into separate steps. In contrast to linear programming, dynamic programming does not contain a universal method for solving problems; therefore, many tasks have their own individual peculiarities and require a special approach. The main method of dynamic programming is the method of recurrence relations, based on the use of the principle of optimality. The basis of the principle is that whatever the initial state at any step and the control chosen at this step, the subsequent controls should be optimal with respect to the state to which the system will come at the end of this step.

The method of dynamic programming is most adapted to discrete tasks, most of which are economic. It allows you to reduce the n-dimensional optimization problem to a set of problems of smaller dimension.

The dynamic programming method is applicable to any method of setting and any admissible set of states and controls. This advantage is deprived of classical optimization methods and other computational methods of mathematical programming. This means dynamic programming is a promising method that requires further research and development.

The article describes the general scheme of a multi-step process, the conditions for applying the dynamic programming method, the formulation and model of the dynamic programming problem, the optimality principle and the Bellman function, and the stages of solving the problem. The article discusses the construction of mathematical models of dynamic programming on the example of two different tasks: finding the optimal plan for replacing equipment and optimal distribution of investments of the enterprise. As a result, the resulting mathematical models can be used to develop management decisions in the enterprise.

Key words: dynamic programming, Bellman optimality criterion, mathematical model, economic model, admissible state.

Постановка проблемы в общем виде и ее связь с важными научными или практическими заданиями. Метод динамического программирования является многоэтапным методом оптимизации и позволяет моделировать возникшую проблему и искать ее решение с помощью эффективных алгоритмов. Метод динамического программирования имеет большое прикладное значение, а решение полученных задач экономико-математического моделирования может быть внедрено в практическую деятельность предприятий.

Анализ последних исследований и публикаций, в которых положено начало решению данной проблемы и на которые ссылается автор. Применению метода динамического программирования, в том числе в экономических задачах, посвящено большое количество работ как отечественных, так и зарубежных авторов, а именно: Н.П. Визгунова [2], М.С. Красса [3], Н.Ш. Кремера [4], В.В. Христиановского [5]. Анализируя разработки этих авторов, можно сказать, что практические задачи, решаемые с помощью метода динамического программирования, актуальны и сейчас.

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы, которым посвящена данная статья. Идея метода динамического программирования, геометрическая интерпретация, требования, которые предъявляются к задачам, решаемым методом динамического программирования, рекуррентные соотношения Беллмана для некоторых задач описаны во многих работах [1–5]. Однако его популярность и преимущества перед классическими методами оптимизации и другими вычислительными методами математического программирования приводят к необходимости более подробно рассмотреть этот метод и на примере конкретных задач оценить его достоинства.

Формулирование целей статьи **(постановка задания)**. Цель стати – проанализировать условия, при которых задача может быть решена методом динамического программирования, рассмотреть принцип оптимальности и реализовать метод динамического программирования на примере решения таких частных задач, как нахождение оптимального плана замены оборудования предприятия и оптимальное распределение инвестиций на предприятия.

Изложение основного материала исследования с полным обоснованием полученных научных результатов. В общем случае задача динамического программирования формулируется следующим образом [1, с. 52]. Пусть данная физическая система S находится в некотором начальном состоянии S_0 и является управляемой. Благодаря осуществлению некоторого управления $u \in U$ указанная система переходит из начального состояния S_0 в конечное состояние $S_{кон}$. Качество каждого управления $u \in U$ характеризуется соответствующим значением функции $W(u)$. Задача состоит в том, чтобы из множества возможных управлений $u \in U$ найти такое $u^* \in U$, при котором функция $W(u)$ принимает экстремальное значение $W(u^*)$.

Для экономической интерпретации общей задачи динамического программирования введем некоторые обозначения. Состояние системы S определяется совокупностью чисел $x^{(k)} = (x_1^{(k)}, ..., x_m^{(k)})$, которые получены в результате реализации u_k. Будем считать, что если в результате реализации k-го шага обеспечен определенный доход, также зависящий от исходного состояния системы $x^{(k-1)}$ и выбранного управления U_k, равный $W(x^{(k-1)}; u_k)$, то общий доход за n шагов составляет $W(u) = \sum_{k=1}^{n} W_k(x^{(k-1)}; u_k)$, где $u = (u_1, u_2, ..., u_n)$.

Таким образом, сформированы два условия, которым должна удовлетворять рассматриваемая задача динамического программирования. Первое условие обычно называют условием отсутствия последствия, а второе – условием аддитивности целевой функции задачи.

Задача состоит в нахождении оптимальной стратегии управления, то есть такой совокупности управлений $u^* = (u_1^*, ..., u_n^*)$, в результате реализации которых система S за n шагов переходит из начального состояния $x^{(0)}$ в конечное $x^{(n)}$ и при этом функция дохода $W(u)$ принимает наибольшее значение.

Принцип оптимальности Беллмана. Каково бы ни было состояние системы перед очередным шагом, надо выбрать управление на этом шаге так, чтобы доход на данном шаге плюс оптимальный доход на всех последующих шагах был максимальным [2, с. 73].

Из принципа оптимальности следует, что оптимальную стратегию управления можно получить, если сначала найти оптимальную стратегию управления на n-ом шаге, затем на двух последних шагах, затем на трех последних шагах и так далее вплоть до первого шага. Таким образом, решение рассматриваемой задачи динамического программирования целесообразно начинать с определения оптимального решения на последнем n-ом шаге. Чтобы найти это решение, нужно сделать различные предположения о том, как мог закончиться предпоследний шаг, и с учетом этого выбрать управление u_n^0, обеспечивающее максимальное значение функции дохода $W_n(x^{(n-1)}; u_n)$. Такое управление, выбранное при определенных предположениях о том, как окончился предыдущий шаг, называется условно оптимальным управлением. Следовательно, принцип оптимальности требует находить на каждом шаге оптимальное управление для любого из возможных исходов предшествующего шага.

Чтобы построить алгоритм решения задачи, дадим математическую формулировку принципа оптимальности. Для этого введем некоторые дополнительные обозначения. Обозначим через $F_0(x^{(0)})$ максимальный доход, получаемый за n шагов при переходе системы S из начального состояния $x^{(0)}$ в конечное состояние $x^{(n)}$ при реализации оптимальной стратегии управления $u^* = (u_1^*, ..., u_n^*)$, а через $F_k(x^{(k)})$ – максимальный доход, получаемый при переходе из любого состояния $x^{(k)}$ в конечное состояние $x^{(n)}$ при оптимальной стратегии управления на оставшихся (n-k) шагах. Тогда, при $k = \overline{0, n-1}$:

$$F_0(x^{(0)}) = \max_{u=(u_1,...,u_n)} \left[W_1(x^{(0)}, u_1) + ... + W_n(x^{(n)}, u_n) \right] \quad (1)$$

$$F_k(x^{(k)}) = \max_{u_{k+1}} \left[W_{k+1}(x^{(k)}, u_{k+1}) + ... + F_{k+1}(x^{(k+1)}) \right] \quad (2)$$

Выражение (2) представляет собой математическую запись принципа оптимальности Беллмана (уравнения Беллмана). Используя его, находится решение рассматриваемой задачи динамического программирования.

Полагая k=n-1, получим следующее функциональное уравнение:

$$F_{n-1}(x^{(n-1)}) = \max_{u_n} \left[W_n(x^{(n-1)}, u_n) + ... + F_n(x^{(n)}) \right] \quad (3)$$

В уравнении (3) $F_n(x^{(n)})$ можно считать известным. Используя теперь уравнение (3) и рассматривая возможные допустимые состояния системы S на (n-1) шаге $x_1^{n-1}, x_2^{n-1}, ..., x_i^{n-1}, ...,$ находим условные оптимальные решения $u_n^0(x_1^{n-1}), u_n^0(x_2^{n-1}), ..., u_n^0(x_i^{n-1}), ...$ и соответствующие значения функции (3) $F_{n-1}^0(x_1^{n-1}), F_{n-1}^0(x_2^{n-1}), ..., F_{n-1}^0(x_i^{n-1}), ...$

Таким образом, на n-ом шаге находим условно оптимальное управление при любом допустимом состоянии системы S после (n-1) шага, то есть в каком бы состоянии система ни оказалась после (n-1) шага, нам уже известно, какое следует принять решение на n-ом шаге.

Перейдем теперь к рассмотрению функционального уравнения при k=n-2:

$$F_{n-2}(x^{(n-2)}) = \max_{u_{n-1}}\left[W_{n-1}(x^{(n-2)}, u_{n-1}) + ... + F_{n-1}(x^{(n-1)}\right] \quad (4)$$

Решая функциональное уравнение (4) при различных состояниях на (n-2) шаге, получим оптимальные управления $u^0_{n-1}(x^{n-2}_i), i = 1, 2....$ Каждое из этих управлений совместно с уже выбранным управлением на последнем шаге обеспечивает максимальное значение дохода на двух последних шагах.

Последовательно осуществляя описанный выше итерационный процесс, дойдем до первого шага. На этом шаге известно, в каком состоянии может находиться система, поэтому остается выбрать управление, которое является наилучшим с учетом условно оптимальных управлений, уже принятых далее.

Чтобы найти оптимальную стратегию управления, нужно теперь пройти всю последовательность шагов, только теперь от начала к концу. А именно: на первом шаге в качестве оптимального управления u^*_1 возьмем найденное условно оптимальное управление u^0_1. На втором шаге найдем состояние x^*_1, в которое переводит систему управление u^*_1. Это состояние определяет найденное условно оптимальное управление u^0_2, которое теперь будем считать оптимальным. Зная u^0_2, находим x^*_2, а значит, определяем u^*_3 и так далее. В результате этого находим решение задачи, то есть максимально возможный доход и оптимальную стратегию управления, включающую оптимальные управления на отдельных шагах.

Задача о замене оборудования. Для осуществления своей эффективной деятельности производственные объединения и предприятия должны периодически проводить замену используемого оборудования. При этой замене учитываются производительность используемого оборудования, затраты, связанные с содержанием и ремонтом, стоимость приобретаемого и заменяемого оборудования. Предположим, что к началу текущей пятилетки на предприятии установлено новое оборудование. Зависимость производительности этого оборудования от времени его использования предприятием, а также зависимость затрат на содержание и ремонт оборудования при различном времени его использования приведены в табл. 1.

Зная, что затраты, связанные с приобретением и установкой нового оборудования, идентичного с установленным, составляют 40 тыс. грн., а заменяемое оборудование списывается, составить такой план замены оборудования в течение пятилетки, при котором общая прибыль за данный период времени максимальна.

Эту задачу можно рассматривать как задачу динамического программирования, в которой в качестве системы S выступает оборудование. Состояние системы к началу k-го года определяется фактическим временем использования оборудования (его возрастом-$\tau^{(k)}$), то есть описывается единственным параметром. В качестве управлений выступают решения о замене (u_k=З) и сохранении (u_k=С) оборудования. Задача состоит в нахождении такой стратегии управления, при которой общая прибыль предприятия за пятилетку является максимальной. Решая задачу методом динамического программирования, на первом этапе при движении от начала пятого года пятилетки к началу первого года для каждого допустимого состояния оборудования найдем условное оптимальное управление. На втором этапе при движении от начала первого года пятилетки к началу пятого года из условных оптимальных решений для каждого года составим оптимальный план замены оборудования на пятилетку.

Математическая модель.

Прибыль предприятия за k-ой год пятилетки (k=1,...,5) составит

$$W_k(\tau_k; u_k) = \begin{cases} R(\tau^k) - Z(\tau^k), u_k = C \\ R(0) - Z(0) - 40, u_k = З \end{cases}$$

Тогда уравнение Беллмана имеет вид:

$$F_k(\tau^{(k)}) = \max_{u_k}\left[W_k(\tau^{(k)}, u_k) + F_{k+1}(\tau^{(k+1)})\right] =$$

$$= \max \begin{cases} R(\tau^{(k)}) - Z(\tau^{(k)}) + F_{k+1}(\tau^{(k+1)}), u_k = C \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_{k+1}(1), u_k = З \end{cases} \quad (5)$$

С помощью (5) последовательно определим условно оптимальные решения u_k и соответствующее значение функции $F_k(\tau^{(k)})$, (i =5,...1).

<u>*Экономическая модель.*</u>

Используя уравнение Беллмана, определим условно оптимальное решение для последнего (пятого) года пятилетки, в связи с чем находим множество допустимых состояний оборудования к началу данного года. Так как к началу пятилетки имеется новое оборудование ($\tau^{(1)} = 0$), то возраст оборудования к началу пятого года может составлять один, два, три и четыре года. Поэтому допустимые состояния системы на данный период времени таковы $\tau^{(5)}_1 = 1, \tau^{(5)}_2 = 2, \tau^{(5)}_3 = 3, \tau^{(5)}_4 = 4$.

Таблица 1

Исходные данные

	Время t, в течение которого используется оборудование, лет					
	0	1	2	3	4	5
Годовой выпуск продукции R(t) в стоимостном выражении, тыс. грн.	80	75	65	60	60	55
Ежегодные затраты Z(t), связанные с содержанием и ремонтом оборудования, тис. грн.	20	25	30	35	45	55

Для каждого из этих состояний найдем условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_5(\tau^{(5)})$.

Из (5) и соотношения $F_6(\tau^{(6)})=0$ следует:

$$F_5(\tau^{(5)}) = \max\begin{cases} R(\tau^{(5)}) - Z(\tau^{(5)}), \\ R(0) - z(0) - 40. \end{cases}$$

Подставляя в полученную формулу вместо $(\tau^{(5)})$ его значение и учитывая данные табл. 1, находим:

$$F_5(1) = \max\begin{cases} R(1) - Z(1) \\ R(0) - Z(0) - 40 \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 50 \text{ при U = С}$$

$$F_5(2) = \max\begin{cases} R(2) - Z(2) \\ R(0) - Z(0) - 40 \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 35 \text{ при U = С}$$

$$F_5(3) = \max\begin{cases} R(3) - Z(3) \\ R(0) - Z(0) - 40 \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 60 - 35 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 25 \text{ при U = С}$$

$$F_5(4) = \max\begin{cases} R(4) - Z(4) \\ R(0) - Z(0) - 40 \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 60 - 45 \\ 80 - 20 - 40 \end{Bmatrix} = 20 \text{ при U = З}$$

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 2.

Таблица 2

Решение для пятого года

Возраст оборудования, $\tau^{(5)}$ лет	Значение функции дохода F_5, тыс. грн.	Условно оптимальное решение
1	50	С
2	35	С
3	25	С
4	20	З

Рассмотрим теперь возможные состояния оборудования к началу четвертого года пятилетки. Очевидно, допустимыми состояниями являются $\tau_1^{(4)}=1, \tau_2^{(4)}=2, \tau_3^{(4)}=3$. Для каждого из них определим условно оптимальное решение и соответствующее значение функции $F_4(\tau^{(4)})$. Для этого используем уравнение (5) и данные табл. 2. Имеем:

$$F_4(1) = \max\begin{cases} R(1) - Z(1) + F_5(2) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_5(1) \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 35 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 85 \text{ при U = С}$$

$$F_4(2) = \max\begin{cases} R(2) - Z(2) + F_5(3) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_5(1) \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 60 - 30 + 25 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70 \text{ при U = С}$$

$$F_4(3) = \max\begin{cases} R(3) - Z(3) + F_5(4) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_5(1) \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 60 - 35 + 20 \\ 80 - 20 - 40 + 50 \end{Bmatrix} = 70 \text{ при U = З}$$

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 3.

Определим теперь условно оптимальное решение для каждого из допустимых состояний оборудования к началу третьего года пятилетки. Очевидно, такими состояниями являются $\tau_1^{(3)}=1, \tau_2^{(3)}=2$. В соответствии с уравнением (5), имеем:

Таблица 3

Решение для четвертого года

Возраст оборудования, $\tau^{(4)}$ лет	Значение функции дохода F_4, тыс. грн.	Условно оптимальное решение
1	85	С
2	70	С
3	70	З

$$F_3(\tau_1^{(3)}) = \max\begin{cases} R(1) - Z(1) + F_4(2) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_4(1) \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} = 120 \text{ при U = С}$$

$$F_3(\tau_2^{(3)}) = \max\begin{cases} R(1) - Z(1) + F_4(3) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_4(1) \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 65 - 30 + 70 \\ 80 - 20 - 40 + 85 \end{Bmatrix} = 105 \text{ при U = З}$$

Полученные результаты вычислений сведем в табл. 4.

Таблица 4

Решение для третьего года

Возраст оборудования,$\tau^{(3)}$ лет	Значение функции дохода F_3, тыс. грн.	Условно оптимальное решение
1	120	С
2	105	З

Наконец, к началу второго года пятилетки возраст оборудования может быть равен только лишь одному году. Поэтому:

$$F_2(1) = \max\begin{cases} R(1) - Z(1) + F_3(2) \\ R(0) - Z(0) - 40 + F_3(1) \end{cases} = \max\begin{Bmatrix} 75 - 25 + 105 \\ 80 - 20 - 40 + 120 \end{Bmatrix} = 155 \text{ при } U = З$$

Так как к началу пятилетки установлено новое оборудование $(\tau_1^{(1)} = 0)$, то

$$F_1(0) = R(0) - Z(0) + F_2(1) = 80 - 20 + 155 = 215.$$

Просматривая полученные результаты в обратном порядке, получим: для первого года пятилетки решение единственное – следует сохранить оборудование. Значит, возраст оборудования к началу второго года пятилетки равен одному году. Тогда оптимальное решение для второго года пятилетки является решение о сохранении оборудования. Реализация такого решения приводит к тому, что возраст оборудования к началу третьего года пятилетки становится равным двум годам. При таком возрасте оборудование следует заменить. После замены оборудования его возраст к началу четвертого года пятилетки составит один год. Как видно из табл. 3, при таком возрасте оборудования его менять не следует. Поэтому возраст оборудования к началу пятого года пятилетки составит два года, а значит, согласно табл. 2, оборудование менять нецелесообразно.

Получается следующий оптимальный план замены оборудования (табл. 5).

Таблица 5

Решение задачи

	Годы пятилетки				
	1	**2**	**3**	**4**	**5**
Оптимальное решение	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование	Произвести замену оборудования	Сохранить оборудование	Сохранить оборудование

Максимальная прибыль предприятия равна 215 тыс. грн.

Задача о распределении инвестиций.

Для увеличения объемов выпуска пользующейся повышенным спросом продукции, изготовляемой предприятиями, выделены капиталовложения в объеме А тыс. грн. Использование i-ым предприятием ($i = \overline{1, n}$) x_i тыс. грн. Из указанных средств обеспечивает прирост выпуска продукции, определяемой значением функции $f_i(x_i)$. Требуется найти распределение капиталовложений между предприятиями, обеспечивающее максимальное увеличение выпуска продукции.

Эту задачу можно рассматривать как многоэтапную, если исследовать эффективность вложения средств на одном предприятии, на двух предприятиях и т. д. на n предприятиях. Таким образом, получим n этапов, на каждом из которых состояние системы описывает объем средств, подлежащих освоению k предприятиям ($k = \overline{1, n}$). Решения об объемах капиталовложений x_k, выделяемых k-му предприятию, и являются управлениями. Необходимо выбрать управления, при которых функция $W(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ принимает наибольшее значение.

Математическая модель. Задача состоит в определении таких капиталовложений $x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*$, которые максимизируют прирост выпуска продукции $W = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$ и удовлетворяют условию $\sum_{i=1}^{n} x_i^* = A$.

При решении задачи будем использовать уравнение Беллмана: $F_n(X^{(n)}) = f_n(x_n), x_n = X^{(n)}$, где $X^{(n)}$ – допустимое состояние на n-ом шаге, то есть остаточный объем капиталовложений на n-ом предприятии, и соотношение $F_{n-1}(X^{(n-1)}) = \max_{0 \le x_{n-1} \le X^{(n-1)}} (f_{n-1}(x_{n-1}) + F_n(X^{(n)}))$.

Экономическая модель.

Решим задачу при A=700 тыс. грн., n=3. Значения f_i приведены в табл. 6.

Таблица 6

Исходные данные

Объем капиталовложений X_i, тыс. грн.	**Прирост выпуска продукции $f_i(x_i)$ в зависимости от объема капиталовложений, тыс. грн.**		
	Предприятие 1	**Предприятие 2**	**Предприятие 3**
0	0	0	0
100	30	50	40
200	50	80	50
300	90	90	110
400	110	150	120
500	170	190	180
600	180	210	220
700	210	220	240

Используя полученное ранее уравнение Беллмана, получим:

$$F_3(X^{(3)}) = f_3(x_3),\, x_3 = X^{(3)},$$

где $X^{(3)}$ – допустимое состояние на 3-м шаге, то есть остаточный объем капиталовложений на 3-м предприятии;

$$F_2(X^{(2)}) = \max_{0 \le x_2 \le X^{(2)}} (f_2(x_2) + F_3(X^{(3)})),$$

где $X^{(2)}$ – допустимое состояние на 2-м шаге, то есть остаточный объем капиталовложений на 2-м предприятии, $X^{(3)} = X^{(2)} - x_2$;

$$F_1(X^{(1)}) = \max_{0 \le x_1 \le X^{(1)}} (f_1(x_1) + F_2(X^{(2)})),$$

где $X^{(1)}$ – допустимое состояние на 1-м шаге, то есть остаточный объем капиталовложений на 1-м предприятии, $X^{(2)} = X^{(1)} - x_1$, $X^{(1)} = A$.

Таким образом, значения функции F_3 находятся из табл. 6 по значениям функции f_3.

Допустимые состояния на 2-м шаге могут быть:

$$x_0^{(2)} = 0, x_1^{(2)} = 100, x_2^{(2)} = 200, x_3^{(2)} = 300, x_4^{(2)} = 400, x_5^{(2)} = 500, x_6^{(2)} = 600, x_7^{(2)} = 700.$$

Тогда $F_2(0) = f_2(0) + F_3(0)$.

$$F_2(100) = \max_{0 \le x_2 \le 100} (f_2(x_2) + f_3(100 - x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(100) + f_3(0) \\ f_2(0) + f_3(100) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 50 + 0 \\ 0 + 40 \end{Bmatrix} = 50$$

при $x_2 = 100, x_3 = 0$

$$F_2(200) = \max_{0 \le x_2 \le 200} (f_2(x_2) + f_3(200 - x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(200) + f_3(0) \\ f_2(100) + f_3(100) \\ f_2(0) + f_3(200) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 80 + 0 \\ 50 + 40 \\ 0 + 50 \end{Bmatrix} = 90$$

при $x_2 = 100, x_3 = 100$

$$F_2(300) = \max_{0 \le x_2 \le 300} (f_2(x_2) + f_3(300 - x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(300) + f_3(0) \\ f_2(200) + f_3(100) \\ f_2(100) + f_3(300) \\ f_2(0) + f_3(300) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 90 + 0 \\ 80 + 40 \\ 50 + 50 \\ 0 + 110 \end{Bmatrix} = 120$$

при $x_2 = 200, x_3 = 100$

$$F_2(400) = \max_{0 \le x_2 \le 400} (f_2(x_2) + f_3(400 - x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(400) + f_3(0) \\ f_2(300) + f_3(100) \\ f_2(100) + f_3(200) \\ f_2(100) + f_3(300) \\ f_2(0) + f_3(400) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 150 + 0 \\ 90 + 40 \\ 80 + 50 \\ 50 + 110 \\ 0 + 120 \end{Bmatrix} = 160$$

при $x_2 = 100, x_3 = 300$

$$F_2(500) = \max_{0 \le x_2 \le 500} (f_2(x_2) + f_3(500 - x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(500) + f_3(0) \\ f_2(400) + f_3(100) \\ f_2(300) + f_3(200) \\ f_2(200) + f_3(300) \\ f_2(100) + f_3(400) \\ f_2(0) + f_3(500) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 190 + 0 \\ 150 + 40 \\ 90 + 50 \\ 80 + 110 \\ 50 + 120 \\ 0 + 180 \end{Bmatrix} = 190$$

при $\left[\begin{array}{l} x_2 = 500, x_3 = 0 \\ x_2 = 400, x_3 = 100 \\ x_2 = 200, x_3 = 300 \end{array}\right.$

$$F_2(600) = \max_{0 \le x_2 \le 600} (f_2(x_2) + f_3(600 - x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(600) + f_3(0) \\ f_2(500) + f_3(100) \\ f_2(400) + f_3(200) \\ f_2(300) + f_3(300) \\ f_2(200) + f_3(400) \\ f_2(100) + f_3(500) \\ f_2(0) + f_3(600) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 210 + 0 \\ 190 + 40 \\ 150 + 50 \\ 90 + 110 \\ 80 + 120 \\ 50 + 180 \\ 0 + 220 \end{Bmatrix} = 230$$

при $\begin{cases} x_2 = 500, x_3 = 100 \\ x_2 = 100, x_3 = 500 \end{cases}$

$$F_2(700) = \max_{0 \le x_2 \le 700}(f_2(x_2) + f_3(700 - x_2)) = \max \begin{Bmatrix} f_2(700) + f_3(0) \\ f_2(600) + f_3(100) \\ f_2(500) + f_3(200) \\ f_2(400) + f_3(300) \\ f_2(300) + f_3(400) \\ f_2(200) + f_3(500) \\ f_2(100) + f_3(600) \\ f_2(0) + f_3(700) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 220 + 0 \\ 210 + 40 \\ 190 + 50 \\ 150 + 110 \\ 90 + 120 \\ 80 + 180 \\ 50 + 220 \\ 0 + 240 \end{Bmatrix} = 270$$

при $x_2 = 100, x_3 = 600$

Допустимое состояние на 1-м шаге может быть только $x^{(1)} = 700$. Тогда

$$F_1(700) = \max_{0 \le x_1 \le 700}(f_1(x_1) + f_2(400 - x_1)) = \max \begin{Bmatrix} f_1(700) + f_2(0) \\ f_1(600) + f_2(100) \\ f_1(500) + f_2(200) \\ f_1(400) + f_2(300) \\ f_1(300) + f_2(400) \\ f_1(200) + f_2(500) \\ f_1(100) + f_2(600) \\ f_1(0) + f_2(700) \end{Bmatrix} = \max \begin{Bmatrix} 210 + 0 \\ 180 + 50 \\ 170 + 90 \\ 110 + 120 \\ 90 + 160 \\ 50 + 190 \\ 30 + 230 \\ 0 + 270 \end{Bmatrix} = 270$$

при $x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 600$.

Таким образом, $W = 270$ и оптимальное распределение: $x_1^* = 0, x_2^* = 100, x_3^* = 600$.

Выводы из этого исследования и перспективы дальнейших исследований в данном направлении. Основное достоинство принципа оптимальности в том, что он позволяет свести задачу с большим числом измерений к простому виду. В статье была сформулирована общая задача динамического программирования, а также рассмотрены ее частные случаи: задача замены оборудования и задача оптимального распределение инвестиций на предприятиях. Для каждой из них были построены математическая и экономическая модели и найдены их решения с помощью применения метода динамического программирования. Полученные математические модели могут быть использованы для разработки управленческих решений на предприятии. При решении данных задач целесообразно использовать модели динамического программирования, которые позволяют оптимизировать стандартный подход.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК:

1. Беллман Р. Прикладные задачи динамического программирования. Москва : Наука, 1964. 368 с.
2. Визгунов Н.П. Динамическое программирование в экономических задачах с применением системы SciLab. Новгород : ННГУ, 2011. 203 с.
3. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложение в экономическом образовании : учебник ; 6-е изд., испр. Москва : Дело, 208. 720 с.
4. Исследование операций в экономике : учебное пособие для вузов / Н.Ш. Кремер и др. Москва : Юрайт, 2013. 438 с.
5. Христиановский В.В., Щербина В.П. Экономико-математические методы и модели: теория и практика : учебное пособие. Донецк : ДонНУ, 2010. 335 с.

REFERENCES:

1. Bellman R. Prikladnye zadachi dinamicheskogo programmirovaniya. M. : Nauka, 1964. 368 p.
2. Vizgunov N.P. Dinamicheskoe programmirovanie v ekonomicheskikh zadachakh c primeneniem sistemy SciLab. Novgorod : NNGU, 2011. 203 p.
3. Krass M.S., Chuprynov B.P. Osnovy matematiki i ee prilozhenie v ekonomicheskom obrazovanii: uchebnik. 6-e izd., ispr. M. : «DELO» ANKh, 208. 720 p.
4. Kremer N.Sh., Putko B.A., Trishin I.M., Fridman M.N. Issledovanie operatsiy v ekonomike: ucheb. posobie dlya vuzov. M. : Yurayt, 2013. 438 p.
5. Khristianovskiy V.V., Shcherbina V.P. Ekonomiko-matematicheskie metody i modeli: teoriya i praktika : ucheb. posobie. Donetsk : DonNU, 2010. 335 p.