УДК 519.863:658.15(477)

ВИКОРИСТАННЯ МАТРИЧНОЇ ГРИ В УПРАВЛІННІ ВИРОБНИЦТВОМ

Шевченко О.К., к.т.н., доцент, ХНЕУ, Харків, Україна

Жуков А.В., к.е.н., доцент, ХНЕУ, Харків, Україна

***Анотація* — діяльність підприємств, які змушені діяти в умовах ризику та невизначеності розглянута як гра з природою. Побудована платіжна функція як математичне сподівання виграшу у вигляді функції Лагранжа. Сідлова точка платіжної функції є розв'язок матричної гри. Зроблена економічна інтерпретація результатів.**

***Ключові слова* —Матрична гра, платіжна функція, сумарний прибуток, умови Куна-Таккера, ціни на ресурси.**

Виробнича діяльність підприємства – комплексний процес. Він складається з виробництва – процесу виготовлення кінцевої продукції та діяльності з обслуговування виробництва (енергетичне забезпечення, ремонтне, інструментальне, транспортне, складське обслуговування).

У процесі інноваційної діяльності підприємства підприємці змушені діяти в умовах ризику і невизначеності [1]. Невизначеність викликана відсутністю інформації про умови, в яких здійснюються інновації, оскільки залежать не від свідомих дій учасників угод, а від об'єктивної дійсності, яку можна назвати природою і застосувати до вирішення таких завдань теорію ігор, а саме гру з природою. В іграх з природою гравець А використовує мінімаксну стратегію, що дозволяє мінімізувати ризик [2]. Другий гравець В (природа) діє абсолютно випадково, можливі стратегії визначаються в залежності, наприклад, від умов погоди, попиту на певну продукцію, обсягу перевезень, від поєднання виробничих факторів на даний момент і т. д.

Умови гри задаються у вигляді платіжної матриці (1):

$$\prod = \begin{array}{c|cccc|} & B_1 & B_2 & \ldots & B_n \\ \hline A_1 & a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ A_2 & a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_m & a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{array}; \quad \prod_{[m\times n]} = \{a_{ij}\} \qquad (1)$$

Гравець A вибирає свої стратегії (рядки) $A_1, A_2, \ldots, A_m$ з імовірністю $X(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ гравець B (природа) – свої стани природи $B_1, B_2, \ldots, B_m$ – стовбці, з імовірністю $Y(Y_1, Y_2, \ldots, Y_m)$. Елемент платіжної матриці a_{ij} – це виграш гравця A, якщо він користується стратегією A_i у стані природи B_j.

При розв'язанні матричної гри можна використовувати матрицю ризиків $\prod = \{r_{ij}\}$.

Елементи матриці r_{ij} різниця між виграшем, який отримав би гравець A, якщо знав би B_j виграш, який він отримає, обравши стратегію A_i, тобто $r_{ij} = \beta_j - a_{ij}$, де $\beta_j = \max_i a_{ij}$.

Існує ряд критеріїв для прийняття рішення [3]. Наприклад, максимум математичного очікування виграшу $M(V)$ або мінімум математичного очікування ризику $M(V_p)$ (2):

$$M(V) = \max_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_i, \quad \sum_{j=1}^{n} X_i = 1 \qquad (2)$$

$$M(V_p) = \min_i \sum_{i=1}^{m} r_{ij} Y_i, \quad \sum_{i=1}^{m} Y_i = 1$$

Основна теорема теорії ігор затверджує, що кожна матрична гра має розв'язок у мішаних стратегіях. Отож кожну матричну гру можна звести до задачі лінійного програмування [3].

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq V \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_j \leq V \qquad (3)$$

$$i = \overline{1,m} \qquad j = \overline{1,n}$$

Зробимо декілька перетворень. Поділимо обидві системи (3) на V , та зробимо заміну змінних. Позначимо $\frac{x_j}{V} = t_j$, $\frac{y_i}{V} = u_i$, тоді отримаємо дві взаємодвоїсті задачі лінійного програмування (4).

Вихідна задача: Двоїста задача:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} t_j \quad (\min) \qquad f = \sum_{i=1}^{m} u_i \quad (\max) \qquad (4)$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} t_j \geq 1 \qquad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} u_i \leq 1$$

$$t_j \geq 0 \qquad u_i \geq 0$$

$$j = \overline{1,n} \qquad i = \overline{1,m}$$

Отже, будь-яку матричну гру можливо звести до пари двоїстих задач лінійного програмування. Цікаво відмітити, то вірно і зворотне, тобто будь яку задачу лінійного програмування можна звести до матричної гри, в якій оптимальні стратегії першого гравця є розв'язком вихідної задачі, а оптимальні стратегії другого гравця – розв'язок двоїстої задачі.

То ж, відповідну матричну гру можна розглядати, як один із можливих засобів управління економічною системою. Відмітимо, що поняттю гри можна придати інший зміст, не обов'язково вектори $\overline{X}(x_1, x_2, ...x_m)$, $\overline{Y}(y_1, y_2, ...y_n)$ визначати як імовірності вибору гравцями своїх чистих стратегій, але можна визначити, як числа довільного походження. Наприклад, стратегіям гравця А відповідає вектор $\overline{X}(x_1, x_2, ...x_m)$ – кількість продукції, що виготовляється, стратегіям гравця В відповідає вектор $\overline{Y}(y_1, y_2, ...y_n)$ – ціни на сировину. Саму гру можна розглядати, як вибір гравцями своїх стратегій, та обчислення платіжної функції $L(\overline{X}, \overline{Y})$, таку гру називають антагоністичною грою. При використанні мішаних стратегій величина виграшу є випадковою величиною. Тобто, виграшем гравця *A* при використанні їм мішаних стратегій $\overline{X}(x_1, x_2, ...x_m)$, а його супротивником, тобто гравцем *B*, мішаних стратегій $\overline{Y}(y_1, y_2, ...y_n)$, можна вважати математичне сподівання цієї випадкової величини (5):

$$L(\overline{X}, \overline{Y}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j y_i \qquad (5)$$

Таким чином, ми отримали платіжну функцію. Оскільки цілі гравців протилежні, тобто гравець *A* максимізує свій виграш *V*, а гравець *B* мінімізує свій програш *V*, то платіжна функція $L(\overline{X}, \overline{Y})$ задовольняє наступним умовам. Якщо $\overline{X} = \overline{X}^*$, $\overline{Y} = \overline{Y}^*$ – оптимальні стратегії гравців, то $L(\overline{X}^*, \overline{Y}) \geq V$ для усіх y_i, а для усіх x_j – $L(\overline{X}, \overline{Y}^*) \leq V$.

Тобто, оптимальними стратегіями гравців в антагоністичній грі будемо вважати стратегії, які є сідловою точкою платіжної функції (6):

$$L(\overline{X}, \overline{Y}^*) \leq L(\overline{X}^*, \overline{Y}^*) \leq L(\overline{X}^*, \overline{Y}) \qquad (6)$$

Тобто, $(\overline{X}^*, \overline{Y}^*)$ є точкою max по $\overline{X}$ і точкою min по $\overline{Y}$.

Для лінійної моделі виробництва

Вихідна задача: Двоїста задача:

$$Z = (\overline{C}, \overline{X}) \; - \; \max \qquad f = (\overline{A_0}, \overline{Y}) \; - \; \min$$

(7) $$A\overline{X} \leq A_0, \qquad \overline{Y}A \geq \overline{C}$$

$$\overline{X} \geq 0 \qquad \overline{Y} \geq 0$$

$$\overline{A_0}(b_1, b_2, ..., b_m)$$

Можливо скласти платіжну функцію (8):

$$L(\overline{X},\overline{Y})=(\overline{C}\,\overline{X})+(\overline{A_0}\,\overline{Y})-(\overline{Y}A\overline{X}) \qquad (8)$$

яку називають функцією Лагранжа (9):

$$L(\overline{X},\overline{Y})=\sum_{j=1}^{n}C_jX_j+\sum_{i=1}^{m}Y_i\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j\right) \qquad (9)$$

Для вогнутої функції мають місце умови Куна-Таккера (10):

$$\begin{cases}\dfrac{\partial L(\overline{X},\overline{Y})}{\partial \overline{X}}\le 0\\ \dfrac{\partial L(\overline{X},\overline{Y})}{\partial \overline{Y}}\ge 0\end{cases} \qquad \begin{cases}\overline{X}\dfrac{\partial L}{\partial \overline{X}}=0\\ \overline{Y}\dfrac{\partial L}{\partial \overline{Y}}=0\end{cases} \qquad (10)$$

Рішення знаходимо методом штучного базису і відразу отримаємо оптимальну кількість випуску продукції і оптимальні ціни на ресурси. Зробимо економічну інтерпретацію платіжної функції:

перший додаток – прибуток від реалізації продукції $\sum_{j=1}^{n}C_jX_j$;

другий додаток – $\sum_{i=1}^{m}Y_i\left(b_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}X_j\right)$ можна трактувати як прибуток за перевиконання плану, або штраф за недовиконання плану (y_i – ціни на ресурси).

Нехай лінійна модель має вигляд:

$$\begin{gathered}Z=2x_1+x_2 \quad (\max)\\ 2x_1+x_2\le 8\\ x_1+2x_2\le 10\\ x_1\le 15\\ x_1,\,x_2\ge 0\end{gathered}$$

Тоді, платіжна функція:

$$L(x,y)=2x_1+x_2+y_1(8-2x_1-x_2)+\\ +y_2(10-x_1-2x_2)+y_3(15-x_1)$$

За умовами Куна-Таккера побудуємо систему нерівностей, зведемо її до канонічної форми і розв’язок зробимо методом штучного базису, тобто, в рівняння додамо штучні змінні U_1,U_2,U_3 і ті ж змінні додамо в функцію цілі. Тоді одночасно буде одержаний розв’язок як прямої так і двоїстої задач:

$$\overline{X}_{\max}(2,4),\quad \overline{Y}_{\min}(1,0,0)$$
$$Z_{\max}=8,\quad f_{\min}=8$$

Отримана платіжна функція дозволяє запропонувати наступну модель управління економічною системою: управлінський апарат має два відділу – плановий і фінансовий. Завданням планового відділу є формування плану виробництва з метою максимізувати сумарний прибуток системи – платіжну функцію. Завдання фінансового відділу – формування цін на ресурси з метою мінімізувати витрати на ресурси і мінімізувати платіжну функцію, тобто прибуток тієї ж економічної системи. Таким чином слід знайти баланс між цими відділами, знайти таку комбінацію чисел $(\overline{X}^*,\overline{Y}^*)$, які є оптимальним планом випуску продукції, а також має оптимальні витрати на ресурси.

Список використаної літератури

1. Пономаренко О. І. Сучасний економічний аналіз. Мікроекономіка / О. І. Пономаренко, М. О. Перестук, В. М. Бурим. - К.: Вища школа, 2004. – 262 с.
2. Внукова Н. М. Економічна оценка ризику діяльності підприємств / Н. М. Внукова, В. А. Смолюк. - Харків: ВД "ІГОКЕК", 2006. - 180 с.
3. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. - М.: Высшая школа, 1980.- 302 с.

Автори

Шевченко Олександра Кирилівна, к.т.н., доцент, ХНЕУ, Харків, Україна (akshev19@gmail.com).

Жуков Андрій В’ячеславович, к.е.н., викладач, ХНЕУ, Харків, Україна (okydoky87@ukr.net).

Тези доповіді надійшли 15 січня 2020 року.

Опубліковано в авторській редакції.