doi: 10.32620/oikit.2020.88.10

УДК 519.714.7

$\boxed{\text{В. Ф. Сенчуков}}$, Т. В. Денисова

ν-мінімізація булевих функцій за матрицею відстаней та зведенням до задачі математичного програмування

Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця

Запропоновано подальший розвиток аналітичного методу мінімізації булевих функцій (БФ) у класі диз'юнктивних нормальних форм за номерами наборів значень аргументів – ν-мінімізації. Такий підхід дозволяє звести процес мінімізації БФ до використання суто аналітичного опису всіх його кроків за допомогою функцій від номера набору значень аргументів БФ. Загалом ідея полягає в розробленні такого інструментарію, який дає можливість на всіх кроках процесу мінімізації оперувати тільки числовими об'єктами – булевими векторами, не притягувати візуальний аналіз результатів проміжних кроків і не вдаватися до залучення буквених об'єктів. У подальшому передбачається реалізація цієї ідеї на програмному рівні для ЕОМ. Стаття складається з двох частин. У *першій* йдеться про обчислення відстані Гаммінга між двома булевими векторами. Рівність її одиниці є необхідною і достатньою умовою склеювання конституент одиниці (нуля) чи елементарних кон'юнкцій (диз'юнкцій). Відстань Гаммінга між двома наборами значень змінних обчислено за допомогою операції Жегалкіна (інверсії еквіваленції), складено матрицю відстаней і за нею визначено скорочену диз'юнктивну нормальну форму (ДНФ). Зі скороченої ДНФ здобуто тупикові форми, а серед них і мінімальні, шляхом перебирання підмножин множини одиниць матриці відстаней. Тупикові форми визначено за одиницями, яким відповідають імпліканти, що накривають усі одиниці множини значень БФ. Остаточний результат подано, звичайно, в буквеному вигляді. *Другу* частину статті присвячено постановці і розв'язанню задачі мінімізації БФ як задачі лінійного цілочислового математичного програмування. Функція цілі є арифметичною сумою всіх імплікант скороченої ДНФ. Система обмежень базується на тому, що серед множини простих імплікант необхідно вибрати найменшу їх кількість так, щоб накривалися всі конституенти одиниці вихідної БФ. Обмеження складають з урахуванням того, скільки конституент одиниці накриває та чи інша імпліканта, і подають лінійними нерівностями через символ "більше або дорівнює" з правими частинами, що дорівнюють одиниці. Розв'язання задачі математичного програмування потребує використання матриці відстаней. Наведено приклади ν-мінімізації БФ.

Ключові слова: булева функція; відстань Гаммінга; матриця; метод мінімізації; набір; операція; склеювання; скорочена форма; тупикова форма.

Вступ

Обставини щодо важливості мінімізації диз'юнктивних нормальних форм (ДНФ) булевих функцій детально висвітлено у монографії [1]. *Математичний напрямок досліджень* в області ДНФ охоплює коло питань, що стосуються алгоритмічних труднощів, які виникають під час мінімізації БФ, дослідження їх числових характеристик і кількісних зв'язків між різними типами ДНФ, класифікації БФ і т. ін. Мінімізація БФ тісно пов'язана з іншими розділами математичної кібернетики: теорією синтезу керуючих систем, теорією тестів, теорією кодування, теорією автоматів та ін. Задача мінімізації може розглядатися як окремий випадок задачі синтезу керуючих систем [2]. *Технічний напрямок досліджень* пов'язаний із застосуванням ДНФ в автоматиці та обчислювальній техніці. ДНФ мають переваги над іншими типами схем у плані надійності та швидкодії. Однак ДНФ істотно програють їм у плані схемної складності. Остання обставина сприяла тому, що центр ваги математичних досліджень стосовно мінімізації перемістився з питань схемної реалізації ДНФ на вивчення питань, які виникають під час мінімізації ДНФ як дискретної екстремальної задачі. Відомо, що задача мінімізації допускає тривіальне з класичної точки зору алгоритмічне розв'язання, яке полягає в побудові скінченної кількості ДНФ і виборі серед них мінімальної [3]. Однак таке вирішення проблеми пов'язано з великим обсягом обчислень. Ця ситуація є типовою для багатьох задач, що виникають у різних розділах дискретної математики: теорії графів, цілочисловому програмуванні, комбінаториці та ін.

Запропонований підхід до мінімізації БФ частково вирішує вказані проблеми завдяки покладеним в його основу конструктивним засобам і у разі належного програмного забезпечення обчислювальних пристроїв – ЕОМ – дає можливість уникнути технічних труднощів під час його реалізації.

1. Відстань Гаммінга та матриця відстаней

Розглянемо окремий випадок відстані Гаммінга [4] – відстань між двома булевими векторами як кількість однойменних за номером координат векторів із різними значеннями: 0 і 1 або 1 і 0.

Квадратну матрицю D m-го порядку, елементами якої є відстані між усіма можливими парами заданих векторів (у кількості m) називають **матрицею відстаней** (рис. 1). Діагональні елементи такої матриці дорівнюють нулю.

$$D = \begin{bmatrix} 0 & d_{1,2} & \dots & d_{1,m} \\ d_{2,1} & 0 & \dots & d_{2,m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{m,1} & d_{m,2} & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Рис. 1. Матриця відстаней

Матриця відстаней має такі **властивості** (аксіоми):

1) *аксіома симетрії:* $d_{i,j} = d_{j,i}$. Відстань між векторами i і j дорівнює відстані між векторами j і i;

2) *аксіома тотожності:* $d_{i,j} = 0$ тоді і тільки тоді, коли $i = j$. Відстань між вектором і ним самим дорівнює нулю (0), тому головна діагональ матриці складена із нулів;

3) *аксіома*, або *нерівність, трикутника:* $d_{i,j} \le d_{i,k} + d_{k,j}$. Відстань між двома будь-якими векторами i і j завжди не перевищує суму відстаней від даних векторів до якого-небудь третього вектора k.

Зауваження 1. У силу симетрії матриці D відносно головної діагоналі можна розглядати верхню або нижню трикутну матрицю, що зменшує кількість елементів, які підлягають аналізу: замість m^2 елементів трикутна матриця міститиме тільки $(m^2 - m)/2$ елементів. Ця обставина є суттєвою під час написання комп'ютерних програм для реалізації процесу мінімізації з огляду на об'єм оперативної пам'яті комп'ютера.

Для побудови матриці відстаней можна скористатися формулою суми елементів набору значень аргументів [5]:

$$\sigma_\nu = \sigma(\nu) = \sum_{i=1}^{n} x_i(\nu), \qquad (1)$$

$$x_i(\nu)=\left[\frac{\nu+2^{i-1}}{2^i}\right]-\left[\frac{\nu}{2^i}\right];\ i=\overline{1,n},\ \nu=\overline{0,2^n-1}. \qquad (2)$$

Формулу (1) можна подати інакше, якщо в неї підставити (2):

$$\sigma_\nu=\sigma(\nu)=\sum_{i=1}^{n}x_i(\nu)=\nu-\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\nu}{2^i}\right].$$

Проте за допомогою операції Жегалкіна (заперечення еквіваленції) є можливість обчислювати відстань Гаммінга зручніше і простіше, уникаючи підсумовування.

Введемо в розгляд вектори з координатами $x_i(\nu_1)$, $x_i(\nu_2)$, $i=1,2,...,n$:

$$X(\nu_1)=(x_n(\nu_1),x_{n-1}(\nu_1),...,x_1(\nu_1)),$$
$$X(\nu_2)=(x_n(\nu_2),x_{n-1}(\nu_2),...,x_1(\nu_2)), \qquad (3)$$

де ν_1, $\nu_2\in\{0,1,2,...,2^n-1\}$ – множина номерів наборів ν.

Тоді відстань Гаммінга $d_{i,j}$ між двома векторами $X(\nu_1)$ і $X(\nu_2)$ однакового виміру визначають так:

$$d_{i,j}=d_{i,j}(X(\nu_1),X(\nu_2))=X(\nu_1)\oplus X(\nu_2), \qquad (4)$$

де операцію Жегалкіна ($\oplus$) виконують над усіма координатами $x_i(\nu_1)$, $x_i(\nu_2)$.

Приклад 1. Побудуємо матрицю відстаней D і попутно вкажемо змінні, за якими склеюються конституенти одиниці, для БФ

$$f(x_1,x_2,x_3)=\bar{x}_3x_2\bar{x}_1\vee\bar{x}_3x_2x_1\vee x_3\bar{x}_2x_1\vee x_3x_2x_1,$$

де $\forall\nu\in\{2,3,5,7\}\ \ f\big|_\nu=1$, а $\forall\nu\in\{0,1,4,6\}\ \ f\big|_\nu=0$.

Розв'язання. Конституентам одиниці c_ν^1 заданої БФ, де $\nu=2,3,5,7$, відповідають такі набори-вектори: (010), (011), (101), (111), тому:

$$X(2)=(x_3(2),x_2(2),x_1(2))=(010);\quad X(3)=(x_3(3),x_2(3),x_1(3))=(011);$$
$$X(5)=(x_3(5),x_2(5),x_1(5))=(101);\quad X(7)=(x_3(7),x_2(7),x_1(7))=(111).$$

За формулою (4) обчислимо елементи $d_{i,j}$ матриці D. У нашому прикладі індексам i, j відповідають номери наборів: 2, 3, 5, 7, на яких БФ набуває значень, що дорівнюють одиниці.

Перебираючи всі можливі пари наборів, отримуємо:

$$X(2)\oplus X(3)=\oplus\frac{010}{011}=1\Rightarrow x_1,$$

$$X(2)\oplus X(5)=\oplus\frac{010}{101}=3,\quad X(2)\oplus X(7)=\oplus\frac{010}{111}=2;$$

$$X(3)\oplus X(5)=\oplus\frac{011}{101}=2,\quad X(3)\oplus X(7)=\oplus\frac{011}{111}=1\Rightarrow x_3,$$

$$X(5)\oplus X(7)=\oplus\frac{101}{111}=1\Rightarrow x_2.$$

Отже, склеюються три пари конституент одиниці за змінними x_1, x_2 і x_3.

Матрицю відстаней згідно з означенням (див. рис. 1) зображено на рис. 2, а. Межі матриці відстаней показано напівжирними лініями, а за її межами за горизонталлю й вертикаллю наведено номери наборів ν, що відповідають булевим векторам, між якими обчислюються відстані, і які визначають індекси i, j. Згідно із зауваженням 1 на рис. 2, б наведено нижню трикутну матрицю (можна було б взяти верхню трикутну). Її межі, як і квадратної матриці, показано напівжирними лініями, а за межами наведено (за горизонталлю й вертикаллю) дещо скорочені номери наборів ν: за вертикаллю немає $\nu = 2$, а за горизонталлю – $\nu = 3$, що пояснюється наявністю нульових елементів на головній діагоналі.

ν	2	3	5	7
2	0	$\underline{1}$	3	2
3	$\underline{1}$	0	2	$\underline{1}$
5	3	2	0	$\underline{1}$
7	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$	0

а

ν	2	3	5
3	$\underline{1}$		
5	3	2	
7	2	$\underline{1}$	$\underline{1}$

б

Рис. 2. Матриця відстаней між булевими векторами з номерами ν:
а – квадратна; б – нижня трикутна

Відстані, що дорівнюють одиниці, в обох таблицях-матрицях підкреслені. Відповідні неупорядковані пари номерів наборів: $\{2,3\}$, $\{3,7\}$, $\{5,7\}$, визначають скорочену ДНФ f^c. Отже, ми оперували не буквами, а тільки числами (!), не складали імплікантну таблицю для знаходження імплікантного накриття БФ.

За результатами розв'язання прикладу можна записати скорочену ДНФ:

$$f^c = \bar{x}_3 x_2 \vee x_3 x_1 \vee x_2 x_1. \tag{5}$$

Але всі номери наборів ν, на яких БФ набуває значень, що дорівнюють одиниці, накриваються (охоплюються) тільки двома елементарними кон'юнкціями. Зайвою виявляється кон'юнкція $x_2 x_1$. Таким чином, приходимо до такої тупикової і водночас мінімальної ДНФ $f_{\vee}^*$:

$$f_{\vee}^* = \bar{x}_3 x_2 \vee x_3 x_1. \tag{6}$$

Висновок. Скорочена ДНФ визначається за одиницями трикутної матриці відстаней. Знаходження в скороченій ДНФ тупикових (і серед них мінімальних ДНФ) зводиться до аналізу множини одиниць однієї з трикутних матриць відстаней з метою встановлення тих підмножин, яким відповідає весь набір номерів ν, на яких БФ набуває значень, що дорівнюють одиниці.

Підсумовуючи розглянуте, наведемо *загальний порядок* реалізації ν-мінімізації БФ за матрицею відстаней:

1. *Подаємо* досконалу диз'юнктивну нормальну форму (ДДНФ) за складеною таблицею істинності БФ.

2. *Виписуємо* за заданою ДДНФ номери наборів значень змінних, на яких БФ набуває значень, що дорівнюють одиниці.

3. *Обчислюємо* відстані Гаммінга між наборами значень змінних і *вказуємо* змінні, за якими склеювалися конституенти одиниці.

4. *Будуємо* матрицю відстаней (верхню або нижню трикутну).

5. *Записуємо* скорочену ДНФ за одиницями матриці-таблиці відстаней.

6. *Знаходимо* в скороченій ДНФ тупикові форми і серед них мінімальні ДНФ.

Слід підкреслити, що ν-мінімізація передбачає за ідеєю оперування тільки числовими об'єктами – наборами значень аргументів БФ, а не буквеними. Дотримуючись такої умови-вимоги, стає можливим під час процесу мінімізації не наводити всі проміжні результати в буквеному вигляді, а робити це вже для подання остаточного результату – мінімальної(их) ДНФ. У такому разі відпадає потреба в побудові імплікантних таблиць і їх аналізі для знаходження тупикових форм. А в існуючих на теперішній час аналітичних методах мінімізації вони – таблиці – є невід'ємною частиною процесу. Розроблення ефективного програмного забезпечення для ν-мінімізації на ЕОМ обумовлюється одноманітністю його структурної схеми для будь-якого типу БФ.

Зауважимо, що у випадках, коли кількість наборів значень аргументів, на яких БФ набуває значень, що дорівнюють одиниці, суттєво перевищує кількість наборів, на яких БФ набуває значень, що дорівнюють нулю, слушною є побудова мінімальної кон'юнктивної нормальної форми (КНФ) з подальшим переходом до мінімальної ДНФ за допомогою розподільного закону.

Приклад 2. БФ f задано значеннями на номерах наборів ν значень змінних (номери наборів, на яких БФ набуває значень, що дорівнюють одиниці, підкреслені):

ν	$\underline{0}$	$\underline{1}$	$\underline{2}$	3	4	$\underline{5}$	$\underline{6}$	$\underline{7}$
f	1	1	1	0	0	1	1	1

Необхідно мінімізувати БФ за матрицею відстаней.

Розв'язання. Запишемо ДДНФ, пропускаючи технічний бік викладення:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee \bar{x}_3\bar{x}_2 x_1 \vee \bar{x}_3 x_2\bar{x}_1 \vee x_3\bar{x}_2 x_1 \vee x_3 x_2\bar{x}_1 \vee x_3 x_2 x_1 .$$

Відповідні набори значень x_i $(i = 1,\ 2,\ 3)$, такі: (000), (001), (010), (101), (110), (111). Трикутна матриця відстаней має вигляд (рис. 3):

ν	1	2	5	6	7
0	$\underline{1}$	$\underline{1}$	2	2	3
1		2	$\underline{1}$	3	3
2			3	$\underline{1}$	2
5				2	$\underline{1}$
6					$\underline{1}$

Рис. 3. Матриця відстаней між булевими векторами з номерами ν

Скорочена ДНФ є диз'юнкцією шести елементарних кон'юнкцій (за кількістю одиниць у матриці відстаней):

$$f_{\vee}^{c} = \bar{x}_3\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_1 \vee x_2\bar{x}_1 \vee x_3 x_1 \vee x_3 x_2 .$$

Вона містить дві тупикові форми, які водночас є мінімальними:

$$f_1^* = \bar{x}_3\bar{x}_2 \vee x_2\bar{x}_1 \vee x_3 x_1, \qquad f_2^* = \bar{x}_3\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 x_1 \vee x_3 x_2 .$$

Якщо ж відштовхуватись від досконалої кон'юнктивної нормальної форми (ДКНФ), яка визначається наборами з номерами $\nu = 3, 4$, то отримаємо:

$$f_{\wedge}^{c} = (x_3 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_1) \cdot (\bar{x}_3 \vee x_2 \vee x_1).$$

Якщо застосувати розподільний закон, то прийдемо до такої ж скороченої форми, як і у разі розгляду ДДНФ, але роботи буде менше.

2. Постановка задачі математичного програмування щодо ν-мінімізації та її розв'язання

Питання, пов'язані з методами математичного програмування (МП) у задачах мінімізації БФ, знаходимо в роботах [6–8]. Так, у роботі [6] пропонується загальний підхід до впровадження лінійного МП у задачах мінімізації диз'юнктивних нормальних форм. Його описано також у монографії [8], де міститься огляд усіх існуючих точних методів мінімізації БФ. У роботі [7] залучена декомпозиція БФ D_i – розбиття вихідної функції f на дві функції f_0^i і f_1^i, які визначаються, відповідно, значеннями 0 і 1 вхідної змінної x_i:

$$D_i: \begin{array}{l} f_0^i = f(x_n, ..., x_{i+1}, 0, x_{i-1}, ..., x_1), \\ f_1^i = f(x_n, ..., x_{i+1}, 1, x_{i-1}, ..., x_1). \end{array} \qquad (7)$$

Перехід до задачі МП передбачає залучення матриці відстаней D.

З*агальний порядок* ν-мінімізації БФ зведенням до задачі МП виглядає так:

1. *Будуємо* матрицю відстаней (верхню або нижню трикутну).

2. *Записуємо* скорочену ДНФ за одиницями матриці-таблиці відстаней.

3. *Здійснюємо* постановку задачі МП, тобто задаємо функцію цілі й складаємо систему обмежень.

4. *Розв'язуємо* поставлену задачу лінійного цілочислового МП.

На третьому і четвертому пунктах зупинимось детальніше у прикладі.

Приклад 3. Нехай БФ від чотирьох змінних задано послідовністю нулів і одиниць своїх значень: $1101010110\,001100$. Мінімізувати функцію зведенням до задачі МП.

Розв'язання. Випишемо номери наборів ν значень змінних і відповідні набори, на яких задана функція набуває значень, що дорівнюють одиниці: $f|_{\nu} = 1$: $\nu = 0, 1, 3, 5, 7, 8, 12, 13$ (табл. 1).

Таблиця 1

Номери наборів значень аргументів і самі набори

ν	0	1	3	5	7	8	12	13
x_1	0	1	1	1	1	0	0	1
x_2	0	0	1	0	1	0	0	0

.

x_3	0	0	0	1	1	0	1	1
x_4	0	0	0	0	0	1	1	1

Значення змінних x_i $(i=\overline{1,4})$ для кожного ν обчислюємо за формулою (2).

Далі обчислюємо відстані Гаммінга між усіма можливими парами наборів – булевих векторів. Якщо набори-вектори склеюються, то вказуємо – за якою змінною:

$$d_{0,1}=1 \Rightarrow x_1,\quad d_{0,3}=2,\quad d_{0,5}=2,\quad d_{0,7}=3,\quad d_{0,8}=1 \Rightarrow x_4,$$
$$d_{0,12}=2,\quad d_{0,13}=3;$$
$$d_{1,3}=1 \Rightarrow x_2,\quad d_{1,5}=1 \Rightarrow x_3,\quad d_{1,7}=2,\quad d_{1,8}=2,\quad d_{1,12}=3,\quad d_{1,13}=2;$$
$$d_{3,5}=2,\quad d_{3,7}=1 \Rightarrow x_3,\quad d_{3,8}=3,\quad d_{3,12}=4,\quad d_{3,13}=3;$$
$$d_{5,7}=1 \Rightarrow x_2,\quad d_{5,8}=3,\quad d_{5,12}=2,\quad d_{5,13}=1 \Rightarrow x_4;$$
$$d_{7,8}=4,\quad d_{7,12}=3,\quad d_{7,13}=2;$$
$$d_{8,12}=1 \Rightarrow x_3,\quad d_{8,13}=2,\quad d_{12,13}=1 \Rightarrow x_1.$$

Тепер складаємо верхню трикутну матрицю, в якій одиниці підкреслюємо. Усього їх дев'ять, тобто скорочена ДНФ містить дев'ять простих імплікант як результат склеювання конституент одиниці, із яких по два рази – за змінними x_1, x_4, x_2 і три – за x_3. Помічаємо, що в сьомому рядку немає жодної одиниці.

ν	1	3	5	7	8	12	13
0	$\underline{1}$	2	2	3	$\underline{1}$	2	3
1		$\underline{1}$	$\underline{1}$	2	2	3	2
3			2	$\underline{1}$	3	4	3
5				$\underline{1}$	3	2	$\underline{1}$
7					4	3	2
8						$\underline{1}$	2
12							$\underline{1}$

Рис. 4. Матриця відстаней між конституентами одиниці

Досліджуємо тричленні імпліканти на наявність чи відсутність склеювання, перебираючи їх попарно. З урахуванням табл. 1 і підрахованих відстаней Гаммінга встановлюємо, що склеюються імпліканти $\bar{x}_4\bar{x}_3x_1$, $\bar{x}_4x_3x_1$ за змінною x_3 і $\bar{x}_4\bar{x}_2x_1$, $\bar{x}_4x_2x_1$ за змінною x_2. Результати склеювання однакові – $\bar{x}_4x_1$.

Таким чином, приходимо до шести імплікант:

$$\bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2,\ \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1,\ \bar{x}_4x_1,\ x_3\bar{x}_2x_1,\ x_4\bar{x}_2\bar{x}_1,\ x_4x_3\bar{x}_2. \qquad (8)$$

Імпліканта $\bar{x}_4 x_1$.накриває чотири конституенти одиниці c_ν^1, $\nu = 1,3,5,7$ (див. табл. 1): $\bar{x}_4\bar{x}_3\bar{x}_2 x_1$, $\bar{x}_4\bar{x}_3 x_2 x_1$, $\bar{x}_4 x_3\bar{x}_2 x_1$, $\bar{x}_4 x_3 x_2 x_1$. Причому для $\nu = 7$ тільки $\bar{x}_4 x_1$ накриває відповідну конституенту одиниці. Отже, без неї неможливо отримати накриття всіх c_ν^1, тому її завідомо вносимо у мінімальну ДНФ.

Із останніх п'яти імплікант треба вибрати мінімальну їх кількість так, щоб накривалися конституенти c_ν^1, $\nu = 0,8,12,13$.

У загальному випадку функцію цілі беруть у лінійній формі:

$$F = \sum_{i=1}^{m} g_i \, ,$$

де m – кількість імплікант g_i, $i = \overline{1,m}$.

Систему обмежень формують у вигляді:

$$\sum_{i=1}^{m} a_{j,i} g_i \geq 1, \;\; j = \overline{1,t} \, ,$$

де коефіцієнт $a_{j,i}$ дорівнює нулю або одиниці залежно від того, накриває чи ні імпліканта g_i ту чи іншу конституенту c_ν^1; j визначають кількістю таких імплікант.

У нашому прикладі розглядається п'ять імплікант із шести (див. (8)), які позначимо відповідно через g_i, $i = \overline{1,5}$.

Постановка задачі МП: мінімізувати функцію

$$F = g_1 + g_2 + g_3 + g_4 + g_5 \Rightarrow \min \, ,$$

із системою обмежень:

$$\begin{cases} a_{0,1} g_1 + a_{0,2} g_2 \geq 1, \\ a_{8,2} g_2 + a_{8,4} g_4 \geq 1, \\ a_{12,4} g_4 + a_{12,5} g_5 \geq 1, \\ a_{13,3} g_3 + a_{13,5} g_5 \geq 1. \end{cases}$$

Система має розв'язок, і до того ж єдиний у разі, коли коефіцієнти при g_2 і g_5 дорівнюють одиниці. Всі конституенти c_ν^1, $\nu = 0,8,12,13$ накриваються простими імплікантами $\bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1$ і $x_4 x_3 \bar{x}_2$.

Відповідь: $f_\vee^* = \bar{x}_3\bar{x}_2\bar{x}_1 \vee x_4 x_3 \bar{x}_2 \vee \bar{x}_4 x_1$.

Насамкінець зауважимо, що зведення ν-мінімізації до задачі МП не є доцільним для ручного розв'язання навіть у разі БФ невеликої кількості змінних.

Висновки і перспективи

Достоїнством ν-мінімізації БФ є те, що всі аргументи і сама функція подаються як функції номера набору значень змінних ν, і описуються вони в аналітичному вигляді (через функцію Антьє). Завдяки цьому уможливлюється здійснення мінімізації БФ від будь-якої кількості змінних без візуального аналізу або геометричної інтерпретації проміжних результатів. Тобто весь процес побудови мінімальних форм БФ можна реалізувати програмними засобами на ЕОМ.

Зважаючи на бурхливий розвиток електронної і, разом з тим, обчислювальної техніки, автори сподіваються, що у метода ν-мінімізації БФ є майбутнє, оскільки одноманітність запропонованого підходу, тобто структурна схема методу ν-мінімізації, не залежить від типу БФ і дозволяє розв'язувати системи БФ аналітичним способом. Крім того, доцільно розглянути можливості методу стосовно мінімізації БФ в інших базисах, відмінних від базису $(\vee, \wedge, \neg)$.

Список літератури

1. Сапоженко, А. А., Чухров, И. П. Минимизация булевых функций в классе дизъюнктивных нормальных форм // Итоги науки и техники. Сер. Теор. вероятн. Мат. стат. Теор. кибернет. – Москва : ВИНИТИ. – 1987. – Т. 25. – С. 68-116.

2. Лупанов, О. Б. О реализации функций алгебры логики формулами конечных классов (формулами ограниченной глубины) в базисе $\wedge$, $\vee$, $-$ // Проблемы кибернетики. – Москва : Физматгиз. – 1961. – Вып. 6. – С. 5-14.

3. Яблонский, С. В. Функциональные построения в k-значной логике // Тр. МИАН СССР. – Москва : Изд-во АН СССР. – 1958. – Т. 51. – С. 5-142.

4. Hamming, R. W. Error Detecting and Error Correcting Codes // Bell System Technical Journal. – 1950. – vol. 29. – no. 2. – pp. 147-160.

5. Сенчуков, В. Ф., Денисова, Т. В. Мінімізація булевих функцій за номерами наборів значень аргументів // Открытые информационные компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ", 2019. – Вып. 83.– С. 156-167. doi: 10.32620/oikit.2019.83.11.

6. Майстрова, Т. Л. Линейное программирование и задача минимизации нормальных форм булевых функций // Проблемы передачи информации. – Москва : АН СССР. – 1962. – Вып. 12. – С. 5-15.

7. Песков, Р. Н., Щенников В. Н. Способ минимизации дизъюнктивных нормальных форм булевых функций // Вестник Мордовского университета. Серия "Физ.-мат. науки". – 2010. – №4.– С. 26-29.

8. Поспелов, Д. А. Логические методы анализа и синтеза схем. Изд. 3-е, перераб. и доп. – Москва : Энергия, 1974. – 368 с.

References

1. Sapozhenko, A. A., Chuhrov, I. P. Minimizacija bulevyh funkcij v klasse diz#junktivnyh normal'nyh form [Minimization of Boolean Functions in the Class of Disjunctive Normal Forms]. *Itogi nauki i tehniki. Ser. Teor. verojatn. Mat. stat. Teor. kibernet*. Moskva, VINITI Publ., 1987, vol. 25, pp. 68-116.

2. Lupanov, O. B. O realizacii funkcij algebry logiki formulami konechnyh klassov (formulami ogranichennoj glubiny) v bazise $\wedge$, $\vee$, $\neg$ [About the realization of Boolean algebra functions by formulas of finite classes (formulas of bounded depth) in a basis $\wedge$, $\vee$, $\neg$]. *Problemy kibernetiki*, Moskva, Fizmatgiz Publ., 1961, vol. 6, pp. 5-14.

3. Jablonskij, S. V. Funkcional'nye postroenija v k-znachnoj logike [Functional constructions in k -valued logic]. *Tr. MIAN SSSR*, Moskva, AN SSSR Publ., 1958, vol. 51, pp. 5-142.

4. Hamming, R. W. Error Detecting and Error Correcting Codes // Bell System Technical Journal, 1950, vol. 29, no. 2, pp. 147-160.

5. Senchukov, V. F., Denysova, T. V. Minimizatsiya bulevykh funktsiy za nomeramy naboriv znachen' arhumentiv [Minimize Boolean functions by argument set number numbers]. *Otkrytye informacionnye komp'juternye integrirovannye tehnologii: sb. nauch. tr.*, Har'kov, Nac. ajerokosm. un-t "HAI" Publ., 2019, vol. 83, pp. 156-167. doi: 10.32620/oikit.2019.83.11.

6. Majstrova, T. L. Linejnoe programmirovanie i zadacha minimizacii normal'n-yh form bulevyh funkcij [Linear programming and the problem of minimizing normal forms of boolean functions]. *Problemy peredachi informacii*. Moskva, AN SSSR Publ., 1962, vol. 12, pp. 5-15.

7. Peskov, R. N., Shhennikov V. N. Sposob minimizacii diz#junktivnyh normal'nyh form bulevyh funkcij [Method for minimizing disjunctive normal forms of boolean functions]. *Vestnik Mordovskogo universiteta. Serija "Fiz.-mat. nauki"*, 2010, no. 4, pp. 26-29.

8. Pospelov, D. A. Logicheskie metody analiza i sinteza shem. Izd. 3rd, pererab. i dop. [Logical methods of analysis and synthesis of circuits]. Moskva, Jenergija, 1974, 368 p.

Надійшла до редакції 15.09.2020, розглянута на редколегії 16.09.2020

ν-минимизация булевых функций по матрице расстояний и сведением к задаче математического программирования

Предлагается дальнейшее развитие аналитического метода минимизации булевых функций (БФ) в классе дизъюнктивных нормальных форм по номерам наборов значений аргументов – ν-минимизации. Такой подход позволяет свести процесс минимизации БФ к использованию исключительно аналитического описания всех его шагов с помощью функций от номера набора значений аргументов БФ. В целом идея заключается в разработке такого инструментария, который позволяет на всех этапах процесса минимизации оперировать только числовыми объектами – булевыми векторами, не привлекать визуальный анализ результатов промежуточных шагов, не прибегать к привлечению буквенных объектов. В дальнейшем предполагается реализация этой идеи на программном уровне для ЭВМ. Статья состоит из двух частей. В первой части речь идет о вычислении расстояния Гамминга между двумя булевыми векторами. Равенство его единице является необходимым и достаточным условием склеивания конституэнт единицы (нуля) или элементарных конъюнкций (дизъюнкций). Расстояние Гамминга между двумя наборами значений переменных вычислено с помощью операции Жегалкина (инверсии эквиваленции), составлена матрица расстояний и по ней определена сокращенная дизъюнктивная нормальная форма (ДНФ). Из сокращенной ДНФ получены тупиковые формы, а среди них и минимальные, перебирая подмножества множества единиц матрицы расстояний. Тупиковые формы найдены по единицам, которым соответствуют импликанты, накрывающие все единицы множества значений БФ. Окончательный результат представлен, конечно же, в буквенном виде. Вторая часть статьи посвящена постановке и решению задачи минимизации БФ как задачи линейного целочисленного математического программирования. Функция цели является арифметической суммой всех импликант сокращенной ДНФ. Система ограничений базируется на том, что среди множества простых импликант необходимо выбрать наименьшее их количество так, чтобы накрывались все конституэнты единицы исходной БФ. Ограничения составляют с учетом того, сколько конституэнт единицы накрывает та или иная импликанта, и записывают в виде линейных неравенств через символ "больше или равно" с правыми частями, равными единице. Решение задачи математического программирования требует использования матрицы расстояний. Приведены примеры ν-минимизации БФ.

Ключевые слова: булева функция; расстояние Гамминга; матрица; метод минимизации; набор; склеивание; сокращенная форма; тупиковая форма.

ν-minimization of Boolean functions by a distance matrix and reduction to the problem of mathematical programming

The further development of the analytical method for minimizing Boolean functions (BF) in the class of disjunctive normal forms by the numbers of sets of argument values, called ν-minimization, is proposed. Such an approach allows to reduce the process of minimizing the BF to the use of an exclusively analytical description of all its steps using functions of the number of the set of the BF argument values. In general, the idea is to develop such a toolkit that allows at all stages of the minimization process to operate only with numerical objects – Boolean vectors, not involve a visual analysis of the results of the intermediate steps, and not resort to attracting letter objects. In the future, the implementation of this idea at the software level for computers is assumed. The article consists of two parts. The first part is about calculating the Hamming distance between two Boolean vectors. Its equality to unity is a necessary and sufficient condition for gluing together the constituents of unity (zero) or elementary conjunctions (disjunctions). The Hamming distance between two sets of variable values was calculated using the Zhegalkin operation (inversion of equivalence), the distance matrix was compiled, and the abbreviated disjunctive normal form (DNF) was determined from it. From the abbreviated DNF deadlock form, and among them the minimal ones, were obtained by sorting out subsets of the set of units of the distance matrix. Deadlock forms are found by the units to which the implicants, covering all units of the set of BF values, correspond. The final result is presented, of course, in letter form. The second part of the article is devoted to the formulation and solution of the problem of minimizing BF as a problem of linear integer mathematical programming. The goal function is the arithmetic sum of all implicants of the abbreviated DNF. The system of restrictions is based on the fact that among the set of simple implicants, it is necessary to choose the smallest number of them so that all constituents of the unit of the original BF are covered. Restrictions are based on how much the constituent of a unit is covered by one or another implicant, and they are written in the form of linear inequalities through the symbol "greater than or equal to" with the right-hand sides equal to unity. The solution of the mathematical programming problem requires the use of a distance matrix. Examples of ν-minimization of BF are given.

Keywords: Boolean function; Hamming distance; matrix; minimization method; set; gluing; abbreviated form; deadlock form.

Відомості про авторів:

Сенчуков Віктор Федорович – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів

Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця (61166, Україна, м. Харків, пр. Науки, 9а). ORCID : 0000-0002-5402-7554.

Денисова Тетяна Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця (61166, Україна, м. Харків, пр. Науки, 9а, e-mail: tetiana.denysova@hneu.net). ORCID : 0000-0001-7254-0901.

About the authors:

Senchukov Viktor – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Economic-Mathematical Methods of the Kharkov National Economic University named after Symon Kuznets (61166, Ukraine, Kharkov, Nauki ave., 9a). ORCID : 0000-0002-5402-7554.

Denysova Tetiana – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Economic-Mathematical Methods of the Kharkov National Economic University named after Symon Kuznets (61166, Ukraine, Kharkov, Nauki ave., 9a, e-mail: tetiana.denysova@hneu.net). ORCID : 0000-0001-7254-0901.