МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Методичні рекомендації
для самостійної роботи
за темою "Диференціальне числення
функцій багатьох змінних"
для студентів галузі знань
12 "Інформаційні технології"
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2018

УДК 517(07.034)
М34

Укладачі: А. П. Рибалко
К. В. Стєпанова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.
Протокол № 1 від 28.08.2017 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

М34 **Математичний** аналіз [Електронний ресурс] : методичні рекомендації для самостійної роботи за темою "Диференціальне числення функцій багатьох змінних" для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня / уклад. А. П. Рибалко, К. В. Стєпанова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2018. – 65 с.

Розглянуто основні положення щодо організації та виконання самостійної роботи за темою "Диференціальне числення функцій багатьох змінних" навчальної дисципліни, план-графік і програму виконання роботи. Наведено детальний опис та методичні рекомендації до виконання завдань для самостійної роботи, перелік літературних джерел і запитання для самодіагностики. Визначено професійні компетентності, яких набувають студенти в результаті вивчення теоретичного матеріалу та виконання практичних завдань за цією темою. Подано варіанти завдань самостійної контрольної роботи.

Рекомендовано для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня всіх форм навчання.

УДК 517(07.034)

Вступ

"Математичний аналіз" є базовою навчальною дисципліною, що вивчають, згідно з навчальним планом підготовки фахівців галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня всіх форм навчання. Вивчення цієї дисципліни надає студентам систематизованих знань із фундаментальних методів математичного моделювання та дослідження процесів, формує в майбутнього фахівця аналітично-дослідницькі компетентності, що є необхідними в сучасних умовах.

Загальною світовою тенденцією вищої освіти в наш час є переорієнтація із процесу навчання на результат. Метою навчання є набуття студентами конкретних професійних умінь, навичок і компетентностей. Сучасний професіонал повинен не тільки володіти певною сумою знань, а також бути ініціативним, креативним, здатним до автономного вирішення виробничих завдань, самовдосконалення та неперервного підвищення кваліфікації. Саме тому вища школа робить акцент на самостійній, а значить, більш осмисленій, відповідальній і творчій роботі студентів. Так, за навчальним планом дисципліни "Математичний аналіз" кількість годин, відведених на самостійну роботу для денної форми навчання, становить 54 %.

Цю методичну розробку присвячено організації самостійної роботи студентів денної форми навчання у процесі вивчення теми "Диференціальне числення функцій багатьох змінних", що є складовою частиною навчальної дисципліни "Математичний аналіз". Структуру та зміст методичних рекомендацій повністю погоджено із навчальним планом і робочою програмою навчальної дисципліни. Навчальний час, відведений для самостійної роботи студентів денної форми навчання за темою "Диференціальне числення функцій багатьох змінних", становить 18 годин (53 % від загального обсягу навчального часу на вивчення цієї теми).

Метою методичних рекомендацій є планування самостійної роботи студентів загалом; допомога в засвоєнні теоретичних знань і методів, що дозволяють моделювати, аналізувати та вирішувати економічні й технічні завдання; формування вмінь і навичок у застосуванні математичного апарату функцій багатьох змінних до розв'язання практичних задач.

Для досягнення визначеної мети поставлено такі основні **завдання:**

- здобуття систематизованих знань із диференціального числення функцій багатьох змінних, необхідних для математичного моделювання та дослідження процесів і явищ різної природи;
- оволодіння основними методами та розрахунковими прийомами щодо застосування апарату функцій кількох змінних до розв'язання прикладних задач;
- вироблення навичок у самостійному вивченні довідкової та спеціальної літератури.

У результаті вивчення теми "Диференціальне числення функцій багатьох змінних" дисципліни "Математичний аналіз" студент має:

знати:

теоретичні основи: означення функції кількох змінних; геометрична інтерпретація функції двох змінних; поняття частинних похідних і диференціала функції кількох змінних; поняття похідної за напрямом, градієнта та ліній рівня для функції двох змінних; відшукання локального, глобального й умовного екстремуму функції двох змінних; принципи побудови емпіричних формул методом найменших квадратів;

методи дослідження функцій двох змінних на екстремум, особливості їх використання;

основні застосування апарату функцій багатьох змінних до моделювання, аналізу та дослідження економічних і технічних процесів і явищ, а також розрахунків прикладного характеру;

уміти:

знаходити область визначення функції кількох змінних;

обчислювати частинні похідні функції кількох змінних різних форм завдання;

визначати диференціал функції кількох змінних і вміти застосовувати його в наближених обчисленнях значень функції;

знаходити лінії рівня, похідну за напрямом і градієнт функції двох змінних у заданій точці;

знаходити поверхні рівня, похідну за напрямом і градієнт функції трьох змінних у заданій точці;

досліджувати функцію двох змінних на локальний екстремум;

знаходити найбільше й найменше значення функції двох змінних в обмеженій замкненій області;

знаходити умовний екстремум функції двох змінних методами зведення до локального екстремуму функції однієї змінної та методом множників Лагранжа;

будувати емпіричні формули за експериментальними даними методом найменших квадратів;

застосовувати апарат функцій кількох змінних до моделювання й аналізу об'єктів, процесів і явищ в різних галузях знань;

самостійно використовувати під час розв'язання задач додаткову літературу;

відповідати на контрольні питання для самодіагностики;

виконувати завдання для самостійного вирішення;

застосовувати здобуті знання в подальшому навчанні та розв'язанні практичних задач;

У процесі вивчення теми "Диференціальне числення функцій багатьох змінних" студенти набувають таких **професійних компетентностей:**

здатність застосовувати функції багатьох змінних для моделювання й аналізу об'єктів, процесів і явищ в різних галузях знань;

здатність до інтерпретації розв'язків прикладних задач за допомогою функцій кількох змінних;

розуміння сутності та значущості використання функції багатьох змінних при розгляді різноманітних реальних процесів і під час розв'язання задач оптимізації;

знання методичних основ дослідження функцій багатьох змінних на екстремум, принципів використання диференціала в наближених обчисленнях і вміння їх використовувати при вирішенні прикладних завдань;

вміння знаходити область визначення, частинні похідні, диференціал, похідні за напрямом, градієнт функції кількох змінних;

здатність застосовувати метод найменших квадратів для знаходження параметрів функціональних залежностей за результатами експерименту;

здатність використовувати методи відшукання локальних і глобальних екстремумів функції з метою оптимізації роботи систем;

здатність рекомендувати методи диференціального числення функцій багатьох змінних до розв'язання прикладних задач.

Структура наданих методичних рекомендацій така. По-перше, враховуючи характер і специфіку позааудиторної роботи, спрямованої на формування в студентів навичок у самостійному здобутті певного обсягу нових знань і засвоєння їх під час розв'язання задач, наведено план-графік і програму самостійної роботи за даною темою, які дозволяють студенту дістати узагальнене уявлення про зміст самостійної роботи та запланувати її виконання, відповідно до методичних вимог. Крім того, методичні рекомендації містять основні поняття та формули за темою, приклади розв'язання задач самостійної контрольної роботи, питання для самодіагностики та варіанти індивідуальних практичних завдань для самостійної контрольної роботи. Наприкінці розробки наведено список рекомендованої літератури.

1. Загальні положення щодо виконання та оцінювання самостійної роботи студентів

Самостійну роботу студентів спрямовано на набуття студентами професійних умінь, навичок і компетентностей. Вона сприяє інтенсифікації пізнавальної діяльності загалом, значно підвищує мотивацію, рівень самоорганізації та відповідальність студентів.

Завдання для самостійної роботи з навчальної дисципліни "Математичний аналіз" мають як теоретичний, так і практичний характер. До теоретичних завдань належать вивчення лекційного матеріалу та самостійне оволодіння певним теоретичним матеріалом за допомогою рекомендованої літератури. Практичні завдання розділяють на поточні домашні завдання (вправи для самостійної роботи) та контрольні самостійні роботи. Завдання для контрольних робіт мають індивідуальний характер, тобто студенти їх виконують за варіантом, оформляють у вигляді письмового звіту, вони обов'язково містять відповіді на контрольні запитання для самодіагностики та їх подають викладачеві у встановлений термін.

Виконання завдань для самостійної роботи передбачає:

вивчення та нотування основних питань теоретичного матеріалу з рекомендованих джерел;

оформлення звіту з виконання завдання для самостійної роботи, відповідей на контрольні запитання;

здавання викладачеві виконаного завдання для самостійної роботи та відповідей на контрольні запитання.

Виконання завдань для самостійної роботи будуть оцінювати, зважаючи на:

розуміння, ступінь засвоєння теорії та методології проблем, що розглядають;

ступінь ознайомлення з рекомендованою літературою й засвоєння фактичного матеріалу навчальної дисципліни;

уміння поєднувати теорію із практикою під час розгляду практичних ситуацій, розв'язанні задач, здійснення розрахунків, виконання завдань, винесених для самостійного опрацювання;

повноту урахування вимог до виконання завдання;

логічність викладеного матеріалу та відповідність його структурі передбаченим у завданні змістовим елементам;

наявність і повноту розгляду ключових понять (визначень, термінів, різновидів й тощо) предметної області завдання;

наявність й обґрунтованість підсумкових висновків студента;

ілюстрування опрацьованого матеріалу наведенням власних прикладів і графічного матеріалу.

2. План-графік виконання самостійної роботи студентів

Вивчення теми "Диференціальне числення функцій багатьох змінних" відбувається у другому семестрі навчання. Тематика завдань, терміни їх виконання, здавання та перевірки наведено в табл. 1.

Таблиця 1

План-графік виконання самостійної роботи

№ завдання	Тематика завдання	Тривалість виконання (години)	Порядковий номер навчального тижня, відведеного для:		
			виконання	звіту	оцінювання*
1	Основні поняття функцій багатьох змінних; область визначення та лінії рівня функції двох змінних; границя та неперервність функції двох змінних	3	1	2	4
2	Частинні похідні та диференціали функцій кількох змінних різних форм завдання; їх застосування	5	1, 2	2	4
3	Похідна за напрямом і градієнт функцій двох і трьох змінних, їх властивості	2	3	4	4
4	Дослідження функцій двохзмінних на локальний й умовний екстремуми, відшукання найбільшого та найменшого значення функції двох змінних в обмеженій замкненій області	6	3, 4	4	4
5	Метод найменших квадратів побудови емпіричних формул	2	4	4	4

*Після закінчення цього терміну студент отримує відповідну оцінку або йому визначають час на доопрацювання завдання.

3. Програма самостійної роботи студентів

Зміст основних завдань для самостійної роботи студентів із теми "Диференціальне числення функцій багатьох змінних", а також форми роботи, звітності й контролю наведено в табл. 2. Слід зауважити, що окрім наведених основних видів робіт, самостійна робота студентів передбачає поточну підготовку до практичних і лабораторних занять, підготовку до написання письмової практичної контрольної роботи й колоквіуму тощо.

Таблиця 2

Програма самостійної роботи

№ завдання	Зміст завдання	Форма (вигляд)			Література
		самостійної роботи	звітності	контролю	
1	2	4	5	6	7
1.1	Вивчення лекційного матеріалу. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питань: область визначення й область значень функцій кількох змінних, поняття границі та неперервності функції двох змінних в точці та в області	Вивчення і конспектування теоретичного матеріалу	Конспект або доповідь-презентація	Поточне усне мікроопитування	Основна: [1 – 6]. Додаткова: [11 – 13]
1.2	Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питань: знаходження та зображення на площині області визначення функції двох змінних, визначення ліній і поверхонь рівня функцій	Вирішення індивідуальних практичних завдань 1, 2 для самостійної контрольної роботи. Підготовка відповідей на запитання для самодіагностики 1 – 7	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1; 5; 6]. Додаткова: [7; 11 – 13]

Продовження табл. 2

1	2	4	5	6	7
2.1	Вивчення лекційного матеріалу. Оволодіння основними методами диференціального числення функцій багатьох змінних. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питань диференціювання складних і неявно заданих функцій	Вивчення і конспектування теоретичного матеріалу. Вирішення індивідуальних практичних завдань 3, 4 для самостійної контрольної роботи. Підготовка відповідей на контрольні запитання для самодіагностики 8 – 22	Конспект або доповідь-презентація. Звіт у письмовому вигляді	Поточне усне мікро-опитування. Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1 – 6]. Додаткова: [7 – 13]
2.2	Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питань диференціювання складних і неявно заданих функцій, застосування диференціала функцій кількох змінних до наближених обчислень	Вивчення і конспектування теоретичного матеріалу. Вирішення індивідуального практичного завдання 5 для самостійної контрольної роботи	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1; 5]. Додаткова: [11 – 13]
3	Вивчення лекційного матеріалу. Оволодіння навичками знаходження похідної за напрямом і градієнта функцій багатьох змінних в заданій точці. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питання властивостей похідної за напрямом і градієнта	Вирішення індивідуального практичного завдання 6 для самостійної контрольної роботи. Підготовка відповідей на контрольні запитання для самодіагностики 23 – 30	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1 – 5]. Додаткова: [6; 11 – 13]

Закінчення табл. 2

1	2	4	5	6	7
4.1	Вивчення лекційного матеріалу. Оволодіння методами знаходження локального екстремума функцій двох змінних	Вирішення індивідуального практичного завдання 7 для самостійної контрольної роботи	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1; 3 – 5]. Додаткова: [7 – 13]
4.2	Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питання знаходження найменшого та найбільшого значень функції двох змінних в обмеженій замкненій області	Вивчення і конспектування теоретичного матеріалу. Вирішення індивідуального практичного завдання 8 для самостійної контрольної роботи	Конспект або доповідь-презентація. Звіт у письмовому вигляді	Поточне усне мікро-опитування	Основна: [1; 3 – 5]. Додаткова: [7 – 9; 11 – 13]
4.3	Оволодіння методом зведення задачі на умовний екстремум до задачі на локальний екстремум функції однієї змінної. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питання застосування методу множників Лагранжа до дослідження функцій на умовний екстремум	Вивчення і конспектування теоретичного матеріалу. Вирішення індивідуального практичного завдання 9 для самостійної контрольної роботи. Підготовка відповідей на запитання для самодіагностики 31 – 38	Конспект або доповідь-презентація. Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1; 3 – 5]. Додаткова: [6 – 8; 10 – 12]
5	Оволодіння методом найменших квадратів побудови емпіричних формул. Самостійне вивчення теоретичного матеріалу з питання вибору емпіричної залежності	Вирішення завдання 10 для самостійної контрольної роботи. Підготовка відповідей на запитання для самодіагностики 39 – 41	Звіт у письмовому вигляді	Перевірка звіту й оцінювання виконання завдання	Основна: [1; 3 – 5]. Додаткова: [7 – 9; 11 – 13]

4. Теоретичні відомості

Наведемо основні поняття, теореми та формули за темою "Диференціальне числення функцій багатьох змінних", що мають бути вивчені студентами самостійно. Цей матеріал рекомендовано використовувати як довідковий під час виконання вправ і завдань для самостійної контрольної роботи, а також він може бути основою для конспекту теоретичного матеріалу, винесеного на самостійне опрацювання.

1. Основні поняття.

Нехай $D \subset \mathbf{R}^2$ – множина упорядкованих пар чисел $(x; y)$ (точок площини). Якщо кожній точці $M(x; y) \in D$ за деяким законом f поставлено у відповідність певне число $z \in \mathbf{R}$, то кажуть, що на множині D задано **функцію двох змінних** і пишуть:

$$z = f(x, y) \quad \text{або} \quad z = f(M).$$

Множину $D = D(f)$ називають **областю визначення** функції $z = f(x, y)$, а множину

$$E = E(f) = \{z \in \mathbf{R} : z = f(x, y); (x; y) \in D\} \text{ –}$$

областю значень функції $z = f(x, y)$. Якщо не обумовлено інше, вважають, що область визначення є **природною**, тобто множиною пар чисел (x, y), для яких має сенс вираз $f(x, y)$.

Графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$ називають геометричне місце точок (x, y, z) простору, проекції яких на площину Oxy належать області D, а апліката визначається рівністю $z = f(x, y)$. Таким чином, графік функції двох змінних утворює поверхню у тривимірному просторі.

Аналогічно вище наведеному формулюють означення функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$, областю визначення якої є $D(f) \subset \mathbf{R}^3$, а також функцію n змінних $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, яку задають на множині $D(f) \subset \mathbf{R}^n$.

Лінією рівня (ізокривою) функції двох змінних $z = f(x, y)$ називають всяку криву, вздовж якої функція зберігає постійне значення. Множину всіх ліній рівня називають **картою** ліній рівня.

З означення випливає, що рівняння ліній рівня мають вигляд:

$$f(x,y)=C \quad \left(\forall C=const\in E(f)\right), \tag{1}$$

тобто це проекція кривої, що утворюється при перетині поверхні $z=f(x,y)$ площиною $z=C$.

Аналогічно, **поверхнею рівня (ізоповерхнею)** функції трьох змінних $u=f(x,y,z)$ називають поверхню у просторі, на якій ця функція зберігає постійне значення.

Рівняння поверхонь рівня мають вигляд:

$$f(x,y,z)=C \quad \left(\forall C=const\in E(f)\right).$$

2. Границя та неперервність функції кількох змінних.

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в деякому околі точки M_0.

Множину точок $M(x;y)$, координати яких задовольняють нерівність

$$\rho(M_0;M)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta$$

називають $\delta-$**околом** точки $M_0(x_0;y_0)$ $\left(\rho(M_0;M)-\right.$ відстань між точками M_0 та $\left.M\right)$.

Кажуть, що точка M наближається до точки M_0 $(M\to M_0)$, якщо в процесі зміни координат точки $M(x;y)$ $\rho(M_0;M)\to 0$, що можливо тоді й тільки тоді, коли одночасно $x\to x_0$, $y\to y_0$.

Число A називають **границею функції** $z=f(M)$ **в точці** M_0 (при $M\to M_0$), якщо

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0:\ \left(0<\rho(M_0;M)<\delta\ \Rightarrow\ |f(M)-A|<\varepsilon\right).$$

При цьому пишуть:

$$A=\lim_{M\to M_0} f(M)=\lim_{\substack{x\to x_0,\\ y\to y_0}} f(x;y).$$

Функція $z=f(x,y)$ називається **неперервною в точці** M_0, якщо її границя в точці M_0 дорівнює її значенню цій точці:

$$\lim_{M\to M_0} f(x,y)=f(x_0,y_0).$$

Функція називається **неперервною в області** $D\subset\mathbf{R}^2$, якщо вона неперервна в кожній точці D.

Означення границі та неперервності функції кількох змінних аналогічні цим поняттям для функції однієї змінної, тому: справедливі всі правила та властивості граничного переходу; елементарні функції кількох змінних є неперервними в своїх природних областях визначення; можна переходити до границі під знаком функції, якщо ця функція елементарна й визначена в деякому околі граничної точки; справедливі основні властивості неперервних функцій.

3. Похідні та диференціали функцій кількох змінних.

По-перше розглянемо функції двох змінних $z = f(x, y)$.

Частинним приростом функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$ **за змінною** x називають величину

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y).$$

Бачимо, що змінну y зафіксовано, а змінній x надано приріст Δx.

Аналогічно, **частинний приріст** функції $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$ **за змінною** y визначає формула:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y),$$

тобто тепер навпаки, зафіксовано змінну x, а змінній y надано приріст Δy.

Якщо приріст отримують обидві незалежні змінні, то величину

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \tag{2}$$

називають **повним приростом функції** $z = f(x, y)$ в точці $M(x; y)$.

Частинною похідною $\frac{\partial z}{\partial x}$ (або z'_x) від функції двох змінних $z = f(x, y)$ **за змінною** x в точці $M(x; y)$ називається границя відношення частинного приросту функції за змінною x до приросту цієї змінної Δx за умови $\Delta x \to 0$:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \tag{3}$$

Аналогічно визначається **частинна похідна** $\frac{\partial z}{\partial y}$ (або z'_y) від функції двох змінних $z = f(x, y)$ **за змінною** y:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x; y + \Delta y) - f(x; y)}{\Delta y}. \qquad (4)$$

З означень (3), (4) випливає, що:

- частинна похідна за x, z'_x – це похідна функції $z = f(x, y)$, обчислена в припущенні, що інша змінна y є фіксованою (сталою);
- частинна похідна за y, z'_y – це похідна функції $z = f(x, y)$, обчислена в припущенні, що інша змінна x є фіксованою (сталою).

Частинні похідні z'_x та z'_y функції двох змінних $z = f(x, y)$ характеризують швидкість зміни $z = f(x, y)$ за відповідним аргументом, тобто у напрямках вісей Ox та Oy.

Геометрична інтерпретація: частинна похідна z'_x в точці $M_0(x_0; y_0)$ дорівнює

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = tg\,\alpha,$$

де α – кут між додатним напрямом вісі Ox та дотичною до лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ та площини $y = y_0$. Аналогічно,

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{\substack{x = x_0 \\ y = y_0}} = tg\,\beta,$$

де β – кут між додатним напрямом вісі Oy та дотичною до лінії перетину поверхні $z = f(x, y)$ та площини $x = x_0$.

Частинні похідні функцій більш, ніж двох змінних знаходять в припущенні, що всі змінні фіксовані, окрім тієї, за якою обчислюють похідну. Кількість частинних похідних, звичайно, дорівнює числу змінних функції.

Так, функція трьох змінних $u = f(x, y, z)$ має три частинні похідні:

- частинна похідна за x, u'_x – це похідна функції $u = f(x, y, z)$, обчислена в припущенні, що змінні y та z фіксовані;

- частинна похідна за y, u'_y – це похідна функції $u = f(x, y, z)$, обчислена в припущенні, що змінні x та z фіксовані;
- частинна похідна за z, u'_z – це похідна функції $u = f(x, y, z)$, обчислена в припущенні, що змінні x та y фіксовані.

Функцію двох змінних $z = f(x, y)$ називають **диференційовною** в точці $M(x; y)$, якщо її повний приріст (2) можна представити у вигляді:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) = A\Delta x + B\Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (5)$$

де A, B – дійсні числа, $\alpha(\Delta x, \Delta y), \beta(\Delta x, \Delta y)$ – нескінченно малі функції при $\Delta x \to 0,\ \Delta y \to 0$.

Теорема 1. *(Необхідна умова диференційовності.)* Якщо функція $z = f(x, y)$ диференційовна в точці $M(x; y)$, то вона має в цій точці частинні похідні та її повний приріст набуває вигляду:

$$\Delta z = z'_x(M) \cdot \Delta x + z'_y(M) \cdot \Delta y + \alpha\Delta x + \beta\Delta y, \qquad (6)$$

Теорема 2. *(Достатня умова диференційовності.)* Якщо функція $z = f(x, y)$ має неперервні частинні похідні в деякому околі точки $M(x; y)$, то вона диференційовна в цій точці.

Повним диференціалом dz диференційовної функції двох змінних $z = f(x, y)$ називають лінійну відносно Δx та Δy частину її повного приросту (5): $dz = A\Delta x + B\Delta y$.

За теоремою 1 й оскільки прирости Δx, Δy незалежних змінних x, y співпадають з їх диференціалами dx, dy, маємо наступну формулу для обчислення диференціала:

$$dz = z'_x \cdot dx + z'_y \cdot dy. \qquad (7)$$

Аналогічно, якщо $u = f(x, y, z)$ – диференційовна функція трьох змінних, то її повний диференціал має вигляд:

$$du = u'_x \cdot dx + u'_y \cdot dy + u'_z \cdot dz. \qquad (8)$$

З формул (5) – (7) випливає, що різниця між повним проростом функції та її диференціалом є нескінченно малою величиною, тому

$$\Delta z \approx dz,$$

отримаємо формулу, яку використовують для наближеного обчислення значень функції:

$$f(x+\Delta x, y+\Delta y) \approx f(x,y) + f_x^{'}(x,y)\Delta x + f_y^{'}(x,y)\Delta y. \tag{9}$$

4. Похідні складних і неявно заданих функцій двох змінних.

Нехай $z = f(u,v)$ – функція двох змінних u та v, які, в свою чергу є функціями двох змінних x, y: $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$. Таким чином, $z = f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$ є **складною** функцією двох незалежних змінних x, y, а змінні u та v є проміжними.

За умови диференційовності розглянутих функцій, частинні похідні складної функції $z = f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$ обчислюють за формулами:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{10}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{11}$$

Формули (10), (11) можна узагальнити на випадок функцій більшого числа змінних.

Звернемось до диференціювання неявних функцій. По-перше, згадаємо, що функцією однієї змінної $y = y(x)$ називають неявно заданою, якщо її, за певних умов, визначає рівняння:

$$F(x,y) = 0. \tag{12}$$

Тоді для відшукання похідної y'_x такої функції можна застосувати правило (10) диференціювання складної функції. Для цього продиференціюємо (12) за змінною x та з отриманого співвідношення дістанемо вираз для похідної y'_x неявно заданої функції однієї змінної:

$$F'_x \cdot x'_x + F'_y \cdot y'_x = 0 \Rightarrow F'_x + F'_y \cdot y'_x = 0 \Rightarrow$$

$$y'_x = \frac{-F'_x}{F'_y}, \quad \text{якщо } F'_y \neq 0. \tag{13}$$

Тепер перейдемо до неявних функцій кількох змінних. Розглянемо рівняння:

$$F(x, y, z) = 0. \tag{14}$$

Якщо кожній парі чисел $(x; y)$ з деякої множини $D \subset \mathrm{R}^2$ поставлено у відповідність певне значення z, яке разом з x та y перетворює (14) на тотожність, то кажуть, що рівняння (11) визначає на множині D неявну функцію $z = f(x, y)$.

Отримати явну залежність з рівняння вигляду (14) не завжди можливо. Крім того, (14) може не визначати ніякої функції. Умови, що гарантують існування неявно заданої функції, містить наступна теорема.

Теорема 3. *(Достатня умова існування неявної функції.)* Нехай функція $F(x, y, z)$ та її частинні похідні $F'_x(x, y, z)$, $F'_y(x, y, z)$, $F'_z(x, y, z)$ визначені та неперервні в околі точки $M_0(x_0; y_0; y_0)$, $F(x, y, z) = 0$ і $F'_z\,(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. Тоді існує такий окіл точки $(x_0; y_0)$, в якому визначена єдина неперервна та диференційовна функція $z = f(x, y)$, що задовольняє рівняння (14) і така, що $z_0 = f(x_0; y_0)$.

Нехай умови теореми виконані. Диференцюємо (14) за змінною x, використовуючи правило (10) відшукання частинної похідної складної функції:

$$F'_x \cdot x'_x + F'_y \cdot y'_x + F'_z \cdot z'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad F'_x + F'_z \cdot z'_x = 0.$$

Звідси частинна похідна z'_y неявно заданої рівнянням (14) функції $z = f(x, y)$ дорівнює:

$$z'_x = \frac{-F'_x}{F'_z}, \quad \text{якщо} \;\; F'_z \neq 0. \tag{15}$$

Аналогічно отримаємо формулу для обчислення частинної похідної z'_y за змінною y:

$$F'_x \cdot x'_y + F'_y \cdot y'_y + F'_z \cdot z'_y = 0 \Rightarrow F_y^{'} + F_z^{'} \cdot z'_y = 0 \Rightarrow$$

$$z'_y = \frac{-F'_y}{F'_z}, \quad \text{якщо} \;\; F'_z \neq 0. \tag{16}$$

5. Похідні та диференціали вищих порядків.

Частинні похідні $z'_x(x,y)$, $z'_y(x,y)$ функції двох змінних $z=f(x,y)$ також є функціями двох змінних.

Якщо існують частинні похідні від частинних похідних, то їх називають **частинними похідними другого порядку**. Функція двох змінних $z=f(x,y)$ має чотири частинні похідні другого порядку, які позначають наступним чином:

$$z''_{xx}=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=(z'_x(x,y))'_x; \qquad z''_{yy}=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(z'_y(x,y))'_y;$$
$$z''_{xy}=\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(z'_x(x,y))'_y; \quad z''_{yx}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=(z'_y(x,\,y))'_x. \tag{17}$$

Аналогічно, якщо існують частинні похідні від частинних похідних другого порядку, то їх називають частинними похідними третього порядку і так далі. Функція двох змінних має 2^n частинних похідні n-го порядку.

Частинні похідні z''_{xy} та z''_{yx} називають **мішаними похідними**.

Теорема 4. Якщо функція $z=f(x;y)$ та її похідні z'_x, z'_y, z''_{xy}, z''_{yx} визначені та неперервні в деякому околі точки $M_0(x_0;\,y_0)$, то в цій точці мішані похідні є рівними:

$$z''_{xy}(M_0)=z''_{yx}(M_0).$$

Наслідок 4.1. Результат повторного диференціювання не залежить від порядку диференціювання, якщо всі похідні, що виникають при обчисленнях є неперервними.

Наприклад, $z'''_{yyx}=z'''_{yxy}$.

Означення похідних вищих порядків легко узагальнити для функцій більшого числа змінних, а наведені твердження, звичайно, для них також є справедливими.

Диференціалом другого порядку від функції двох змінних $z=f(x;y)$ називають диференціал від диференціала цієї функції та позначають:

$$d^2z=d(dz).$$

За умови наявності у функції неперервних частинних похідних, легко отримати формулу для обчислення диференціала другого порядку:

$$d^2z = z''_{xx}dx^2 + 2z''_{xy}dxdy + z''_{yy}dy^2. \qquad (18)$$

Аналогічно визначають диференціал третього та більш високих порядків: $d^3z = d\left(d^2z\right)$; $d^nz = d\left(d^{n-1}z\right)$.

6. Похідна за напрямом і градієнт.

Нехай функція $z = f(x,\, y)$ задана та диференційовна в деякому околі точки $M_0(x_0;\, y_0)$, $\vec{a} = \left(a_x;\, a_x\right)$ – вектор, що задає деякий напрям.

Дамо приріст точці M_0 вздовж напряму $\vec{a}$, тобто перейдемо в точку $M(x_0 + \Delta x; y_0 + \Delta y)$ на цьому напрямі. Відповідну відстань між точками M_0 та M позначимо $\Delta a = \left|\overrightarrow{M_0M}\right| = \pm\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$. Тоді величину

$$\Delta_a z = f(M) - f(M_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)$$

називають приростом функції в даному напрямі.

Якщо існує границя відношення приросту функції в даному напрямі до величини Δa за умови $\Delta a \to 0$, то її називають **похідною функції** $z = f(x,\, y)$ **за напрямом вектора** $\vec{a}$ в точці M_0 та позначають:

$$\frac{\partial z}{\partial a}\left(M_0\right) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta_a z}{\Delta a}. \qquad (19)$$

З означення (18) нескладно одержати більш зручну формулу для обчислення похідної за напрямом:

$$\frac{\partial z}{\partial a} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta, \qquad (20)$$

де α, β – кути, утворені вектором $\vec{a}$ з вісями Ox, Oy, відповідно. Косинуси цих кутів визначають за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \qquad |\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}.$$

Аналогічно визначають похідну за напрямом для функції трьох змінних $u = f(x,\, y,\, z)$.

Похідною функції $u = f(x, y, z)$ **за напрямом вектора** $\vec{a} = (a_x; a_y; a_z)$ **в точці** $M_0(x_0; y_0; z_0)$ називається границя:

$$\frac{\partial u}{\partial a}(M_0) = \lim_{\Delta a \to 0} \frac{\Delta_a u}{\Delta a}, \tag{21}$$

де $\Delta_a u = f(M) - f(M_0)$ – приріст функції в даному напрямі $\vec{a}$, Δa – відстань між точками M_0 і M. Для обчислення цієї похідної користуються формулою:

$$\frac{\partial u}{\partial a} = u'_x \cos\alpha + u'_y \cos\beta + u'_z \cos\gamma, \tag{22}$$

де α, β, γ – це кути, утворені вектором $\vec{a}$ з осями Ox, Oy і Oz, відповідно. Косинуси цих кутів визначаються за формулами:

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\vec{a}|}; \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\vec{a}|}; \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\vec{a}|}, \tag{23}$$

тут a_x, a_y, a_z – проекції вектора $\vec{a}$ на осі Ox, Oy і Oz, $|\vec{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – його модуль .

Похідна функції за даним напрямом характеризує швидкість зміни функції в цьому напрямі.

Градієнтом $\mathbf{grad} f$ (або ∇f) функції кількох змінних називають вектор, координати якого є частинними похідними за відповідними незалежними змінними.

Так, *градієнтом функції двох змінних* $z = f(x, y)$ називають вектор

$$\mathbf{grad}\, z = z'_x \cdot \vec{i} + z'_y \cdot \vec{j} = \left(z'_x; z'_y\right), \tag{24}$$

а *градієнтом функції трьох змінних* $u = f(x, y, z)$ називають вектор

$$\mathbf{grad}\, u = u'_x \cdot \vec{i} + u'_y \cdot \vec{j} + u'_z \cdot \vec{k} = \left(u'_x; u'_y; u'_y\right). \tag{25}$$

Градієнт визначає напрям максимальної швидкості зростання функції.

Теорема 5. Похідна за напрямом дорівнює проекції градієнта на цей напрямок: $\dfrac{\partial u}{\partial a} = \text{Пр}_{\vec{a}}\mathbf{grad}\, u$.

Наслідок 5.1. Похідна за напрямом максимальна у напрямку градієнта, тобто *градієнт направлений у бік найскорішого зростання* функції, і в цьому напрямку

$$\left(\frac{\partial u}{\partial a}\right)_{\max} = |\operatorname{grad} u| = \sqrt{(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2}\,. \qquad (26)$$

Наслідок 5.2. 1) Градієнт функції двох змінних $u = f(x,\ y)$ в кожній точці $M(x_0; y_0)$ перпендикулярний до лінії рівня даної функції, що проходить через цю точку (якщо $\mathbf{grad}u(M) \neq 0$). 2) Градієнт функції трьох змінних $u = f(x, y, z)$ в кожній точці $M(x_0; y_0; z_0)$ перпендикулярний до поверхні рівня даної функції, що проходить через цю точку (якщо $\mathbf{grad}u(M) \neq 0$).

Наслідок 5.3. Похідна за напрямом вектора, перпендикулярного до градієнта (дотичного до лінії рівня), дорівнює нулю, тобто функція залишається сталою.

Зауваження. У прикладних задачах виникає також потреба у відшуканні вектора **антиградієнта**, який визначається формулою:

$$-\mathbf{grad} z = \left(-z'_x; -z'_y\right) \quad \text{або} \quad -\mathbf{grad}\, u = \left(-u'_x; -u'_y; -u'_y\right),$$

тобто є протилежним вектору градієнта і відповідає *напряму найскорішого спадання функції.*

6. Локальні екстремуми функції двох змінних.

Кажуть, що функція $z = f(x, y)$ має в точці $M_0(x_0; y_0)$ **локальний максимум** (**мінімум**), $f(x_0, y_0)$, якщо в деякому околі цієї точки для всіх точок $M(x; y)$, відмінних від M_0, виконується умова:

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \qquad \left(f(x, y) > f(x_0, y_0)\right).$$

Точку $M_0(x_0; y_0)$ при цьому називають точкою **локального максимума** (**мінімума**).

Локальні мінімуми та максимуми також називають локальними **екстремумами** або екстремальними значеннями.

Точку $M_0(x_0;y_0)$ називають **стаціонарною точкою** функції $z=f(x,y)$, якщо в ній обидві частинні похідні цієї функції дорівнюють нулю:

$$z'_x(x_0;y_0)=0\,,\quad z'_y(x_0;y_0)=0\,. \tag{27}$$

Розглянемо необхідні та достатні умови існування локального екстремума.

Теорема 6. *(Необхідна ознака локального екстремума)*. Якщо диференційовна функція $z=f(x,y)$ має екстремум в $M_0(x_0;y_0)$, тоді точка $M_0(x_0;y_0)$ є стаціонарною.

Таким чином, локальні екстремуми функції двох змінних можуть знаходитись лише в стаціонарних точках, проте умови (26) не є достатніми, тобто їх виконання не гарантує існування екстремума.

Матрицю, елементами якої є частинні похідні другого порядку функції $z=f(x,y)$, називають **матрицею Гессе**, а її визначник

$$\Delta(x;y)=\begin{vmatrix} z''_{xx} & z''^{\,'}_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix}=z''_{xx}z''_{yy}-z''_{xy}z''^{\,'}_{yx}=z''_{xx}z''_{yy}-\left(z''_{xy}\right)^2 \tag{28}$$

– **гессіаном**.

Теорема 7. *(Достатня ознака локального екстремума.)* Нехай функція $z=f(x,y)$ двічі неперервно диференційовна в стаціонарній точці $M_0(x_0;y_0)$. Тоді:

- якщо $\Delta(M_0)<0$, то в точці M_0 екстремума немає (такі точки називаються **сідловими**);
- якщо $\Delta(M_0)>0$, то в точці M_0 є екстремум, причому,

  коли $z''_{xx}(M_0)>0$, M_0 – точка мінімума;

  коли $z''_{xx}(M_0)<0$, M_0 – точка максимума.
- якщо $\Delta(P_0)=0$, то для відповіді на питання про існування екстремума потрібне додаткове дослідження з використанням диференціалів третього або більш високого порядку (невизначений випадок).

7. Найбільше й найменше значення функції двох змінних в обмеженій замкненій області.

Теорема 8. Функція двох змінних $z = f(x, y)$, яка визначена й неперервна в замкненій обмеженій області D, досягає в цій області своїх найбільшого й найменшого значень.

З викладеного вище випливає, що у внутрішніх точках області D диференційовна функція може набувати цих значень лише в точках локального екстремума. Окремого дослідження потребує поведінка функції на межі області D.

Таким чином, для знаходження *найбільшого та найменшого значення* функції в замкненій обмеженій області D потрібно виконати наступні етапи.

1 етап. Знайти всі її стаціонарні точки, які лежать всередині D й обчислити значення функції $z = f(x, y)$ в цих точках.

2 етап. Знайти найбільше й найменше зі значень, які приймає функція на межі K (використовуючи рівняння межі, задачу зводять до дослідження функції однієї змінної).

3 етап. Відібрати найбільше і найменше з отриманих значень.

8. Умовний екстремум функції двох змінних.

Нехай в області $D \subset \mathbf{R}^2$ задано функцію двох змінних $z = f(x, y)$, та деяку лінію L, рівняння якої $\varphi(x, y) = 0$. Задача полягає в тому, щоб знайти на лінії L точки, в яких значення $z = f(x, y)$ є найбільшим або найменшим порівняно із значеннями цієї функції в інших точках кривої L. Тобто на відміну від звичайного екстремуму, аргументи функції $z = f(x, y)$ не є незалежними, а пов'язані співвідношенням:

$$\varphi(x, y) = 0, \tag{29}$$

яке називають **рівнянням зв'язку**.

Точку $M_0(x_0; y_0)$ називають точкою **умовного максимума** функції $z = f(x, y)$, якщо в деякому околі цієї точки для всіх точок $M(x; y)$, відмінних від M_0, виконується нерівність:

$$f(x, y) < f(x_0, y_0) \qquad \text{за умови } \varphi(x, y) = 0. \tag{30}$$

Аналогічно, точку $M_0(x_0; y_0)$ називають точкою **умовного мінімума**, якщо в деякому околі цієї точки виконується нерівність:

$$f(x, y) > f(x_0, y_0) \quad \text{за умови } \varphi(x, y) = 0. \tag{31}$$

При цьому значення функції $f(x_0, y_0)$ в точках умовного екстремума називають умовним максимумом й умовним мінімумом, відповідно.

Розглянемо *два способи* дослідження функції двох змінних на умовний екстремум.

1. Зведення до функції однієї змінної.

Якщо виходячи з рівняння зв'язку (29) можна явно виразити одну змінну через іншу, тоді підстановка цього виразу в формулу $z = f(x, y)$ перетворить z на функцію однієї змінної. Наприклад, якщо

$$\varphi(x, y) = 0 \quad \Rightarrow \quad y = g(x) \quad \Rightarrow \quad z = f(x, g(x)),$$

тобто отримали функцію однієї змінної x.

Локальний екстремум нової функції однієї змінної є умовним екстремумом вихідної.

2. Метод множників Лагранжа.

Суть цього методу полягає в зведенні задачі на умовний екстремум функції двох змінних до задачі на локальний екстремум функції трьох змінних.

Для цього складають **функцію Лагранжа**:

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda\varphi(x, y), \tag{32}$$

де λ – невизначена стала, яку називають **множником Лагранжа.**

Побудована таким чином допоміжна функція Лагранжа має наступні *властивості:*

1) якщо $\hat{M}_0(x_0; y_0; \lambda_0)$ є точкою локального максимума функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$, тоді відповідна $M_0(x_0; y_0)$ є точкою умовного максимума (29) функції $z = f(x, y)$ при $\varphi(x, y) = 0$;

2) якщо $\hat{M}_0(x_0; y_0; \lambda_0)$ є точкою локального мінімума функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$, тоді відповідна $M_0(x_0; y_0)$ є точкою умовного мінумума (30) функції $z = f(x, y)$ при $\varphi(x, y) = 0$.

Теорема 9. *(Необхідна умова умовного екстремума.)* Нехай функції $f(x, y), \varphi(x, y)$ визначені та неперервні разом із своїми частинними похідними в області D; $M_0(x_0; y_0)$ – точка умовного екстремума функції $z = f(x, y)$ при $\varphi(x, y) = 0$; $\mathbf{grad}\,\varphi(x_0, y_0) \neq 0$. Тоді існує єдине значення λ_0 таке, що $\hat{M}_0(x_0; y_0; \lambda_0)$ є стаціонарною точкою функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$, тобто:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = \varphi(x, y) = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0. \end{cases} \tag{33}$$

Розв'язки системи рівнянь (33) дають підозрілі на наявність екстремума точки. Їх перевіряють за допомогою наступних достатніх ознак локального екстремума функції Лагранжа.

Теорема 10. *(Перша достатня умова локального екстремума функції Лагранжа.)* Нехай функція $L(x, y, \lambda)$ двічі неперервно диференційовна в стаціонарній точці $\hat{M}_0(x_0; y_0; \lambda_0)$;

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{yx} & L''_{yy} \end{vmatrix}. \tag{34}$$

Тоді: якщо $\Delta(\hat{M}_0) < 0$, то функція $z = f(x, y)$ досягає умовного мінімуму в точці $M_0(x_0; y_0)$; якщо $\Delta(\hat{M}_0) > 0$ то функція $z = f(x, y)$ досягає умовного максимуму в точці $M_0(x_0; y_0)$.

Теорема 11. *(Друга достатня умова локального екстремума функції Лагранжа.)* Нехай функція $L(x, y, \lambda)$ двічі неперервно диференційовна в стаціонарній точці $\hat{M}_0(x_0; y_0; \lambda_0)$, а її другий диференціал

$$d^2L = L''_{xx} \cdot dx^2 + 2L''_{xy} \cdot dxdy + L''_{yy} \cdot dy^2, \tag{35}$$

визначений при λ_0. Тоді, якщо $d^2L(\hat{M}_0) > 0$, то функція $z = f(x, y)$ досягає умовного мінімуму в точці $M_0(x_0; y_0)$; якщо $d^2L(\hat{M}_0) < 0$, то функція $z = f(x, y)$ досягає умовного максимуму в точці $M_0(x_0; y_0)$.

9. Метод найменших квадратів.

Одним із застосувань теорії екстремальних значень функції двох змінних є *метод найменших квадратів* при побудові емпіричних формул.

Нехай у результаті експерименту одержано n значень функції $y_i\ (i = 1\ldots n)$ при відповідних значеннях аргументу $x_i\ (i = 1\ldots n)$, тобто отримана таблично задана функція:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
y_i	y_1	y_1	$\ldots$	y_n

Задача полягає у визначенні за експерементальними даними аналітичної формули для функції $y = y(x)$. Такі формули називаються **емпіричними.**

При розв'язанні цієї задачі, перш за все, з аналізу експерементальних даних або з теоретичних міркувань встановлюється вигляд шуканої залежності. Може передбачатись наявність лінійної залежності $y = ax + b$, квадратичної $y = ax^2 + bx + c$, показникової $y = Ae^b + c$ та інших.

Розглянемо найпростіший і найпоширеніший випадок, тобто будемо вважати, що потрібна функція має вигляд:

$$y = ax + b. \tag{36}$$

Значення параметрів a і b треба знайти. При підстановці $x = x_i$ у формулу (36) ми повинні одержати $ax_i + b$, а в результаті експерименту одержали y_i. Розбіжність (відхил) $y_i - (ax_i + b)$ є наслідком помилки експерименту. Природно вважати найкращою таку залежність, для якої відхилення в сукупності будуть у деякому розумінні найменшими. Суть

методу найменших квадратів полягає в тому, що значення a і b підбираються так, щоб сума квадратів всіх розбіжностей $\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2$ між спостереженими значеннями та значеннями, отриманими за аналітичною формулою (36) була мінімальною.

Таким чином, задача зводиться до визначення точки мінімуму функції двох змінних $S(a,b)$:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}\left[y_i-(ax_i+b)\right]^2. \tag{37}$$

Маючи на увазі необхідну умову (27) мінімуму функції двох змінних, знайдемо стаціонарні точки функції (37):

$$\begin{cases} S'_a=-\sum\limits_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)\cdot x_i=0; \\ S'_b=-\sum\limits_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)=0. \end{cases}$$

Звідси

$$\begin{cases} a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+b\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i=\sum\limits_{i=1}^{n}x_iy_i \\ a\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum\limits_{i=1}^{n}y_i \end{cases}. \tag{38}$$

Система (38) двох лінійних рівнянь з двома невідомими a і b визначає шукані коефіцієнти. Знайдені значення a і b треба підставити в формулу (36), щоб отримати аналітичну лінійну залежність $y(x)=ax+b$.

Перевіримо достатні умови існування екстремуму (теорема 7):

$$\Delta=S''_{aa}\cdot S''_{bb}-\left(S''_{ab}\right)^2=2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i-x_j)^2>0;\quad S''_{aa}=2\sum_{i=1}^{n}x_i^2>0.$$

За теоремою 7 знайдена стаціонарна точка (a,b) є точка мінімуму функції двох змінних $S(a,b)$, втім, це витікає зі змісту задачі.

5. Приклади виконання завдань самостійної контрольної роботи

Завдання 1. Задано функцію двох змінних $z=\sqrt{9-x^2-y^2}$. Знайти область її визначення.

Розв'язання.

Природною областю визначення заданої функції є множина точок $(x;\, y)$ площини, для яких має сенс формула, що її визначає. У нашому випадку необхідно, щоб підкореневий вираз був невід'ємним, тобто умова набуває вигляду:

$$9-x^2-y^2\ge 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2+y^2\le 3^2.$$

Остання нерівність задає на площині замкнений круг із центром в точці $(0;\,0)$ та радіусом $R=3$.

Відповідь. $D(f)=\{(x;\,y)\in \mathbf{R}^2:\ x^2+y^2\le 9\}$.

Завдання 2. Визначити лінії рівня заданої функції двох змінних $z=\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}$. Знайти лінію рівня, що проходить через задану точку $M(-8;\,2\sqrt{3})$.

Розв'язання.

Лінії рівня (ізокриві) функції двох змінних визначаються рівнянням (1), яке в нашому випадку набуває вигляду:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=C, \qquad \forall C\in\mathbf{R}. \tag{39}$$

З аналітичної геометрії відомо, що це рівняння при кожному конкретному значенні сталої $C\ne 0$ задає на площині гіперболу з центром в початку координат $(0;\,0)$:

$$\frac{x^2}{16C}-\frac{y^2}{4C}=1, \quad \forall C\ne 0,$$

причому при $C>0$ гіперболи мають дійсну піввісь $a=4\sqrt{C}$ й уявну піввісь $b=2\sqrt{C}$, а при $C<0$ дійсна піввісь дорівнює $b=2\sqrt{-C}$, а уявна $a=4\sqrt{-C}$. Нарешті, при $C=0$ маємо пару прямих, що перетинаються:

$$\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{4}=0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y=\pm\frac{x}{4}.$$

Щоб знайти лінію рівня, яка проходить через задану точку $M(-8;\,2\sqrt{3})$, підставимо її координати в рівняння (38). Отримаємо:

$$\frac{(-8)^2}{16}-\frac{(2\sqrt{3})^2}{4}=C \quad \Rightarrow C=1,$$

тобто шукана ізокрива має рівняння: $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1.$

Відповідь. $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1.$

Завдання 3. Знайти частинні похідні першого порядку від заданих функцій двох змінних:

а) $z=\sin x-y\sqrt{x}+2y^3-\pi$; б) $z=\arccos(x^2-3y)$;

в) $z=xy\ln x+\dfrac{e^x y^2}{\cos y}$; г) $z=\sqrt[x]{y}$.

У пункті а) обчислити похідні другого порядку та впевнитись у рівності мішаних похідних.

Розв'язання.

а) Згідно з (3), вважаючи y сталою, одержимо частинну похідну заданої функції за змінною x:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=(\sin x-y\sqrt{x}+2y^3-\pi)'_x=\cos x-y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Тепер за формулою (4), вважаючи x сталою, диференціюємо функцію за змінною y:

$$\frac{\partial z}{\partial y}=(\sin x-y\sqrt{x}+2y^3-\pi)'_y=-\sqrt{x}+6y^2.$$

Обчислюємо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\cos x-y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'_x=\left|y=const\right|=-\sin x+y\cdot\frac{1}{4\sqrt{x^3}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\left(\cos x-y\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)'_y=\left|x=const\right|=-\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(-\sqrt{x}+6y^2\right)'_x=\left|y=const\right|=-\frac{1}{2\sqrt{x}};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)=\left(-\sqrt{x}+6y^2\right)'_y=\left|x=const\right|=12y.$$

Бачимо, що дійсно мішані частинні похідні другого порядку z''_{xy} та z''_{yx} є рівними.

б) Для обчислення частинних похідних у цьому випадку необхідно застосувати правило диференціювання складної функції. Знаходимо частинну похідну заданої функції за змінною x (змінну y вважаємо сталою):

$$z'_x=\left(\arccos(x^2-3y)\right)'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2-3y\right)^2}}\cdot\left(x^2-3y\right)'_x=\frac{-2x}{\sqrt{1-\left(x^2-3y\right)^2}}.$$

Частинна похідна за змінною y дорівнює

$$z'_y=\left(\arccos(x^2-3y)\right)'_y=-\frac{1}{\sqrt{1-\left(x^2-3y\right)^2}}\cdot\left(x^2-3y\right)'_y=\frac{3y}{\sqrt{1-\left(x^2-3y\right)^2}}.$$

в) Для знаходження частинних похідних функції $z=xy\ln x+\dfrac{e^x y^2}{\cos y}$ слід скористатися правилами диференціювання. А саме: при обчисленні частинної похідної за x необхідно зважити на те, що перший доданок містить добуток двох функцій:

$$z'_x=\left(xy\ln x+\frac{e^x y^2}{\cos y}\right)'_x=y\cdot\left(x'_x\cdot\ln x+x\cdot(\ln x)'_x\right)+\frac{y^2}{\cos y}\cdot(e^x)'_x=$$

$$=y\cdot\left(\ln x+\frac{x}{x}\right)+\frac{y^2e^x}{\cos y}=y\cdot\left(\ln x+1\right)+\frac{y^2e^x}{\cos y}.$$

При диференціюванні за змінною y застосуємо правило обчислення похідної частки двох функцій у другому доданку:

$$z'_y = \left(xy\ln x + \frac{e^x y^2}{\cos y} \right)'_y = x\ln x \cdot y'_y + e^x \cdot \frac{(y^2)'_y \cdot \cos y - y^2 \cdot (\cos y)'_y}{\cos^2 y} =$$

$$= x\ln x + e^x \frac{2y\cos y + y^2 \sin y}{\cos^2 y}.$$

г) При обчисленні частинної похідної функції $z = \sqrt[x]{y} = (y)^{1/x}$ за змінною x необхідно застосувати формулу похідної показникової функції (оскільки основа степеня y є сталою) та правило диференціювання складної функції (аргумент $\frac{1}{x}$ показникової функції в свою чергу є функцією):

$$z'_x = \left(\sqrt[x]{y}\right)'_x = \left((y)^{1/x}\right)'_x = (y)^{1/x} \cdot \ln y \cdot \left(\frac{1}{x}\right)'_x = -\frac{\sqrt[x]{y}}{x^2}\ln y.$$

За змінною y задана функція є степеневою (оскільки показник степеня є сталим), тому відповідна частинна похідна дорівнює:

$$z'_y = \left(\sqrt[x]{y}\right)'_y = \left((y)^{1/x}\right)'_y = \frac{1}{x} \cdot (y)^{1/x - 1} = \frac{\sqrt[x]{y}}{xy}.$$

Завдання 4. Знайти частинні похідні першого порядку від

а) складної функції $z = \sin u \cos v$, $u = xy$, $v = \frac{y}{x}$;

б) неявно заданої функції двох змінних $x^3 z - \sqrt{yz} - xtgy = 0$.

Розв'язання.

а) Маємо складну функцію двох змінних $z = f\left(u(x,y), v(x,y)\right)$. Обчислимо її частинну похідну z'_x за змінною x, використовуючи формулу (10):

$$z'_x = (\sin u \cdot \cos v)'_u \cdot u'_x + (\sin u \cdot \cos v)'_v \cdot v'_x =$$

$$= \cos u \cdot \cos v \cdot y - \sin u \cdot \sin v \cdot (-yx^{-2}) = y\cos xy \cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin xy \sin\frac{y}{x}.$$

За формулою (11) отримаємо другу частинну похідну z'_y:

$$z'_y = (\sin u \cdot \cos v)'_u \cdot u'_y + (\sin u \cdot \cos v)'_v \cdot v'_y =$$

$$= \cos u \cdot \cos v \cdot x - \sin u \cdot \sin v \cdot \frac{1}{x} = x \cos xy \cos \frac{y}{x} - \frac{\sin xy}{x} \sin \frac{y}{x}.$$

б) Для обчислення частинних похідних z'_x та z'_y неявно заданої функції необхідно застосувати формули (15) і (16), відповідно. Для цього спочатку обчислюємо частинні похідні:

$$F'_x = \left(z^3 x - 2\sqrt{yx} - ztgy\right)'_x = z^3 - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}};$$

$$F'_y = \left(z^3 x - 2\sqrt{yx} - ztgy\right)'_y = -\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{z}{\cos^2 y};$$

$$F'_z = \left(z^3 x - 2\sqrt{yx} - ztgy\right)'_z = 3z^2 x - tgy.$$

Звідси за (15), (16) одержимо:

$$z'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} = -\frac{z^3 - \frac{\sqrt{y}}{\sqrt{x}}}{3z^2 x - tgy} = \frac{\sqrt{y} - z^3\sqrt{x}}{\sqrt{x}(3z^2 x - tgy)};$$

$$z'_y = -\frac{F'_y}{F'_z} = -\frac{-\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} - \frac{z}{\cos^2 y}}{3z^2 x - tgy} = \frac{z + \sqrt{x}}{\sqrt{y}(3z^2 x - tgy)\cos^2 y}.$$

Завдання 5. За допомогою диференціала обчислити наближено значення функції двох змінних $z(1{,}96;\, 1{,}02) = 1{,}96^2 \cdot 1{,}02^3$, виходячи зі значення в точці $M = (2;1)$.

Розв'язання.

З умови випливає, що функція двох змінних, наближене значення якої необхідно знайти, має вигляд $z = f(x, y) = x^2 y^3$.

Застосуємо формулу (8). У нашому випадку:

$$x = 2;\ \ y = 1; \qquad x + \Delta x = 1{,}96;\ \ y + \Delta y = 1{,}02,$$

звідки:

$$\Delta x = 1{,}96 - x = 1{,}96 - 2 = -0{,}04; \qquad \Delta y = 1{,}02 - y = 1{,}02 - 1 = 0{,}02.$$

Знайдемо частинні похідні заданої функції:

$$f'_x(x;y)=\left(x^2y^3\right)'_x=2xy^3; \qquad f'_y(x;y)=\left(x^2y^3\right)'_y=x^2 3y^2,$$

тоді формула (7) набуває вигляду:

$$(x+\Delta x)^2(y+\Delta y)^3\approx x^2y^3+2xy^3\cdot\Delta x+x^2 3y^2\cdot\Delta y.$$

В останнє співвідношення підставимо значення:

$$x=2,\ y=1,\ \Delta x=-0{,}04,\ \Delta y=0{,}02$$

й одержимо шукане наближене значення:

$$z(1{,}96;\,1{,}02)=1{,}96^2\cdot1{,}02^3\approx$$

$$\approx 2^2\cdot1^3+2\cdot2\cdot1^3\cdot(-0{,}04)+2^2\cdot3\cdot1^2\cdot0.02=4{,}08.$$

Відповідь. $1{,}96^2\cdot1{,}02^3\approx4{,}08$.

Завдання 6. Задано функцію трьох змінних:

$$u(x,\,y,\,z)=3y^2+7xy-\sqrt{xz}.$$

Знайти її градієнт і похідну за напрямом $\vec{a}=(1;-2;2)$ у точці $M_0(1;-1;4)$.

Розв'язання.

Знайдемо частинні похідні за x, y і z від заданої функції трьох змінних. При цьому застосуємо правило: всі змінні, крім тієї, за якою обчислюється похідна, вважають сталими. Так, при відшуканні частинної похідної u'_x покладають сталими змінні y і z:

$$u'_x=\left(3y^2+7xy-\sqrt{xz}\right)'_x=\begin{vmatrix}y=const\\ z=const\end{vmatrix}=7y-\frac{\sqrt{z}}{2\sqrt{x}}.$$

Аналогічно знаходимо:

$$u'_y=\left(3y^2+7xy-\sqrt{xz}\right)'_y=\begin{vmatrix}x=const\\ z=const\end{vmatrix}=6y+7x;$$

$$u'_z=\left(3y^2+7xy-\sqrt{xz}\right)'_z=\begin{vmatrix}x=const\\ y=const\end{vmatrix}=-\frac{\sqrt{x}}{2\sqrt{z}}.$$

Обчислимо значення частинних похідних в точці $M_0(1;-1;4)$:

$$u'_x(1;-1;4)=7\cdot(-1)-\frac{\sqrt{4}}{2\sqrt{1}}=-8; \quad u'_y(1;-1;4)=6\cdot(-1)+7\cdot1=1;$$

$$u'_z(1;-1;4) = -\frac{\sqrt{1}}{2\sqrt{4}} = -\frac{1}{4}.$$

За формулами (23) знайдемо напрямні косинуси заданого вектора $\vec{a} = (1;-2;2)$:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{-2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{-2}{3},$$

$$\cos\gamma = \frac{2}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{2}{3}.$$

Використовуючи формулу (22), отримаємо:

$$\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{a}} = (-8)\cdot\frac{1}{3} + 1\cdot\left(-\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{2}{3} = -\frac{21}{6} = -3{,}5.$$

Оскільки $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{a}} < 0$, то можна зробити висновок, що функція $u(x, y, z)$ в точці M_0 в напрямі $\vec{a}$ спадає.

Щоб знайти градієнт заданої функції трьох змінних, підставимо значення частинних похідних у формулу (25)

$$\overrightarrow{\text{grad}\, u}(1;-1;4) = -8\vec{i} + \vec{j} - 0{,}25\vec{k} = (-8;1;-0{,}25).$$

Відповідь. $\frac{\partial u(M_0)}{\partial \vec{a}} = -3{,}5$; $\overrightarrow{\text{grad}\, u}(M_0) = (-8;1;-0{,}25)$.

Завдання 7. Дослідити функцію двох змінних:

$$z = 5x^3 + 4y^2 - 15x + 20$$

на локальний екстремум.

Розв'язання.

Спочатку необхідно знайти стаціонарні точки (27) функції $z = f(x, y)$. Для цього знаходимо частинні похідні:

$$z'_x(x;y) = 15x^2 - 15, \quad z'_y(x;y) = 8y$$

та складаємо систему рівнянь (27)

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 15x^2 - 15 = 0 \\ 8y = 0 \end{cases}.$$

Звідси тримаємо дві стаціонарні точки $M_1(1;\,0),\ M_2(-1;\,0)$, що є підозрілими на наявність екстремума.

Застосуємо достатню умову локального екстремума функції двох змінних – теорему 7. Для цього обчислюємо частинні похідні другого порядку

$$z''_{xx}(x;y) = 30x, \quad z''_{xy}(x;y) = 0, \quad z''_{yy}(x;y) = 8$$

та складений за ними гессіан:

$$\Delta(x;y) = \begin{vmatrix} z''_{xx} & z'''_{xy} \\ z''_{yx} & z''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 30x & 0 \\ 0 & 8 \end{vmatrix} = 240x.$$

Для точки $M_1(1;\,0)$:

$$\Delta(M_1) = \Delta(1;\,0) = 240 \cdot 1 > 0,$$

отже, в $M_1(1;0)$ екстремум є і це мінімум, тому що $z''_{xx}(M_1) = 30 > 0$. Обчислимо

$$z_{\min} = z(1;0) = 5 \cdot 1^3 + 4 \cdot 0^2 - 15 \cdot 1 + 20 = 10.$$

Для точки $M_2(-1;\,0)$:

$$\Delta(M_1) = \Delta(1;\,0) = 240 \cdot (-1) = -240 < 0,$$

отже, в $M_2(-1;0)$ екстремуму немає.

Відповідь. $z_{\min} = z(1;\,0) = 10$; $(-1;0)$ – сідлова точка.

Завдання 8. Задано функцію двох змінних $z = x^2 - xy + 4$. Знайти її найменше та найбільше значення в обмеженій замкненій області $D = \{(x,y):\ y \geq 4x^2 - 4;\ y \leq 1\}$. Зробити рисунок.

Розв'язання.

По-перше, на площині Oxy зобразимо область D. Для цього побудуємо лінії $y = 4x^2 - 4$, $y = 1$, що її обмежують. Перша з них є параболою, друга – горизонтальною прямою (рис. 1).

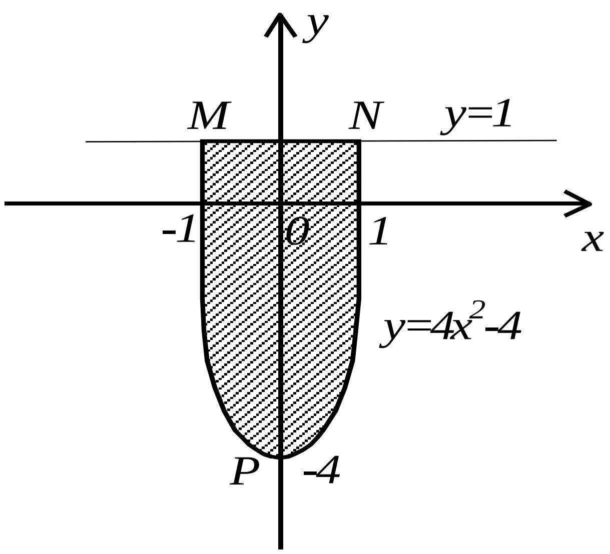

Рис. 1

1 етап. Знайдемо стаціонарні точки (27) заданої функції. Для цього знаходимо її частинні похідні:

$$z'_x(x;y)=(x^2-xy+4)'_x=2x-y,\quad z'_y(x;y)=(x^2-xy+4)'_y=-x$$

та прирівнюємо їх до нуля:

$$\begin{cases}2x-y=0\\ -x=0\end{cases}.$$

Розв'язуємо цю систему: $x=0,\ y=0$. Точка $O(0;\,0)$ – стаціонарна. Вона належить області D, тому знаходимо значення функції в цій точці: $z_O=z(0,\,0)=4$.

2 етап. Межа області D складається з двох частин: відрізка MN прямої $y=1$ і лінії MPN параболи $y=4x^2-4$.

Знайдемо координати точок M і N перетину прямої з параболою. Для цього розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases}y=1\\ y=4x^2-4\end{cases}:\qquad x_1=-\frac{\sqrt{5}}{2},\quad x_2=\frac{\sqrt{5}}{2},\quad y=1.$$

Перетин цих ліній відбувається в точках $M\left(-\frac{\sqrt{5}}{2};1\right)$, $N\left(\frac{\sqrt{5}}{2};1\right)$.

На відрізку MN $y=1$. Підставимо це значення y у функцію $z=x^2-xy+4$ і дістанемо: $z=x^2-x+4$ − це функція одного аргументу x, де $x\in\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. По-перше, знайдемо її значення на кінцях відрізка $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$:

$$x_M=-\frac{\sqrt{5}}{2},\quad z_M=\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\left(-\frac{\sqrt{5}}{2}\right)+4\approx 6{,}368;$$

$$x_N=\frac{\sqrt{5}}{2},\quad z_N=\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2-\frac{\sqrt{5}}{2}+4\approx 4{,}132.$$

Тепер знайдемо стаціонарні точки цієї функції, які належать відрізку $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, й обчислимо в них її значення. Для цього похідну $z'=2x-1$ прирівняємо до нуля та розв'яжемо рівняння $2x-1=0,\quad x=\frac{1}{2}$. Точка $x=\frac{1}{2}$ є стаціонарною точкою і вона належить відрізку $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Знайдемо в ній значення функції $z_Q=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}+4=3{,}75$ – це значення функції в точці $Q\left(\frac{1}{2};1\right)$.

Зауваження. Якщо б стаціонарна точка не належала відрізку $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2};\frac{\sqrt{5}}{2}\right]$, то її не треба було б розглядати.

На параболічному контурі MPN межі області (D) $y=4x^2-4$. Підставимо це значення y у формулу $z=x^2-xy+4$. Тоді $z=x^2-x(4x^2-4)+4=-4x^3+x^2+4x+4$. Це функція одного аргументу x, де $x \in \left[-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Виконаємо з цією функцією ті ж дві операції. По-перше, знайдемо її значення на кінцях відрізка:

$$x_M = -\frac{\sqrt{5}}{2},\ z_M \approx 6{,}368; \quad x_N = \frac{\sqrt{5}}{2},\ z_N \approx 4{,}132.$$

Далі відшукуємо стаціонарні точки цієї функції. Її похідна дорівнює

$$z' = -12x^2 + 2x + 4,$$

тому

$$-12x^2 + 2x + 4 = 0 \text{ при } x_1 = -\frac{1}{2}, \quad x_2 = \frac{2}{3}.$$

Отримані стаціонарні точки x_1, x_2 функції однієї змінної $z = -4x^3 + x^2 + 4x + 4$ обидві належать відрізку $\left[-\frac{\sqrt{5}}{2}; \frac{\sqrt{5}}{2}\right]$. Обчислимо значення цієї функції в кожній з них

$$x_K = -\frac{1}{2}, \quad z_K = -4\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + 4\left(-\frac{1}{2}\right) + 4 = \frac{9}{4};$$

$$x_L = \frac{2}{3}, \quad z_L = -4\left(\frac{2}{3}\right)^3 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{2}{3}\right) + 4 = \frac{160}{27}.$$

Тут K і L – точки на параболі з абсцисами $x_K = -\frac{1}{2}$ і $x_L = \frac{2}{3}$, відповідно.

3 етап. Серед усіх знайдених значень $z_O, z_M, z_N,\ z_Q, z_K, z_L$ відберемо найбільше і найменше

$$z_{найб} = z_L = \frac{160}{27}, \quad z_{найм} = z_K = \frac{9}{4}.$$

Перш, ніж записати відповідь, знайдемо координати точок K і L. Для цього необхідно підставити відомі абсциси цих точок в рівняння параболи $y = 4x^2 - 4$, якій вони належать.

Відповідь. $z_{найб} = z\left(\frac{2}{3}; -\frac{20}{9}\right) = \frac{160}{27}, \quad z_{найм} = z(-0{,}5; -3) = \frac{9}{4}.$

Завдання 9. Дослідити функцію двох змінних $z = x + 2y$ на екстремум за умови $x^2 + y^2 = 5$.

Розв'язання.

По-перше, перетворимо рівняння зв'язку:

$$x^2 + y^2 = 5 \qquad \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 - 5 = 0$$

та побудуємо функцію Лагранжа за формулою (32):

$$L(x,\, y,\, \lambda) = x + 2y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Щоб скористатися теоремою 9, обчислимо частинні похідні

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x, \qquad \frac{\partial L}{\partial y} = 2 + 2\lambda y, \qquad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5,$$

тоді система рівнянь (33) для відшукання стаціонарних точок функції Лагранжа набуває вигляду:

$$\begin{cases} 1 + 2\lambda x = 0; \\ 2 + 2\lambda y = 0; \\ x^2 + y^2 = 5. \end{cases}$$

Система має два розв'язки:

$(x_1;\, y_1;\, \lambda_1) = (-1;\, -2;\, 0{,}5)$ та $(x_2;\, y_2;\, \lambda_2) = (1;\, 2;\, -0{,}5)$,

ці точки є підозрілими на наявність у них екстремуму.

Застосуємо першу достатню умову – теорему 10. Оскільки в нашому випадку $\varphi(x,\, y) = x^2 + y^2 - 5$, отримаємо:

$$\varphi'_x = 2x, \quad \varphi'_y = 2y, \quad L''_{xx} = 2\lambda, \quad L''_{xy} = 0, \quad L''_{yy} = 2\lambda,$$

$$\Delta(x,\, y,\, \lambda) = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{xx} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{yy} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = -8\lambda(x^2 + y^2).$$

Тоді визначник (34) у стаціонарних точках $\hat{M}_1 = (-1;\, -2;\, 0{,}5)$ і $\hat{M}_2 = (1;\, 2;\, -0{,}5)$ дорівнює відповідно:

$$\Delta\left(\hat{M}_1\right) = -20 < 0; \quad \Delta\left(\hat{M}_2\right) = 20 > 0.$$

Звідси за теоремою 10 функція двох змінних $z(x,\, y) = x + 2y$ має в точці $(-1;\, -2)$ умовний мінімум $z_{\min} = z(-1;\, -2) = -5$, а в точці $(1;\, 2)$ умовний максимум $z_{\max} = z(1;\, 2) = 5$.

Зауважимо, що диференціал другого порядку (34) в нашому випадку набуває вигляду:

$$d^2L = 2\lambda\left(dx^2 + dy^2\right),$$

тому $d^2L(\hat{M}_1) > 0$, $d^2L(\hat{M}_2) < 0$ і за теоремою 11 (друга достатня умова) отримаємо той самий результат.

Відповідь. $z_{\min} = z(-1; -2) = -5$, $z_{\max} = z(1; 2) = 5$.

Завдання 10. У результаті спостережень отримані значення (x_i, y_i), які наведені в таблиці:

x_i	1	2	3	4	5
y_i	3	4	2,5	1	0,5

Побудувати емпіричну формулу залежності $y = f(x)$ у вигляді лінійної функції за допомогою методу найменших квадратів.

Розв'язання.

Щоб отримати емпіричну формулу вигляду (36), необхідно скласти й розв'язати систему (38). Для цього обчислимо коефіцієнти при невідомих у цій системі:

$$\sum_{i=1}^{5} x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 55;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15;$$

$$\sum_{i=1}^{5} x_i y_i = 1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 2{,}5 + 4\cdot 1 + 5\cdot 0{,}5 = 25;$$

$$\sum_{i=1}^{5} y_i = 3 + 4 + 2{,}5 + 1 + 0{,}5 = 11.$$

Найзручніше ці розрахунки представити у вигляді наступної таблиці:

						$\sum_{i=1}^{n}$
x_i	1	2	3	4	5	15
y_i	3	4	2,5	1	0,5	11
$x_i y_i$	3	8	7,5	4	2,5	25
x_i^2	1	4	9	16	25	55

Таким чином, у нашому випадку система (38) набуває вигляду:

$$\begin{cases} 55 \cdot a + 15b = 25 \\ 15 \cdot a + 5b = 11 \end{cases},$$

звідки $a = -0{,}8;\ b = 4{,}6$.

Підставивши знайдені коефіцієнти у формулу (36) лінійної залежності, отримаємо емпіричну формулу $y = -0{,}8x + 4{,}6$.

Відповідь. $y = -0{,}8x + 4{,}6$.

6. Контрольні запитання для самодіагностики

1. Наведіть означення функції кількох змінних.
2. Що називають областю визначення функції двох (трьох) змінних? Як її знайти?
3. У чому полягає геометрична інтерпретація функції двох змінних, її області визначення? Що називають графіком функції двох змінних? Наведіть приклади.
4. Що називають лінією рівня функції двох змінних? Як визначити карту ліній рівня заданої функції?
5. Що називають поверхнею рівня функції трьох змінних? Як визначити сім'ю поверхонь рівня?
6. Сформулюйте означення границі функції двох змінних у точці.
7. Яка функція двох змінних називається неперервною в точці (в області)?
8. Що називають частинними приростами функцій кількох змінних?

9. Сформулюйте означення частинних похідних для функцій двох і трьох змінних. Як їх позначають?

10. Який геометричний зміст частинних похідних функцій двох змінних?

11. Яка функція двох (трьох) змінних називається диференційовною?

12. Сформулюйте необхідні, а також достатню умови диференційовності функції в точці.

13. Наведіть означення повного диференціала 1-го порядку функції двох (трьох) змінних.

14. Як диференціал функції двох змінних застосовується в наближених обчисленнях? Наведіть відповідну формулу.

15. Яку функцію називають складною функцією двох змінних? Наведіть приклади.

16. Наведіть формули для обчислення частинних похідних складної функції двох змінних.

17. Наведіть означення та теорему існування неявної функції двох змінних.

18. Як обчислити частинні похідні неявної функції двох змінних?

19. Як за допомогою частинних похідних обчислити похідну неявно заданої функції однієї змінної?

20. Як визначають й обчислюють на практиці частинні похідні та диференціали вищих порядків? Наведіть приклади.

21. Скільки частинних похідних другого порядку має функція двох (трьох) змінних?

22. Що відомо про мішані частинні похідні функції кількох змінних? Сформулюйте теорему, наслідок із неї та наведіть приклади.

23. Наведіть означення похідної за заданим напрямом функції двох (трьох) змінних у точці.

24. У чому полягає геометричний зміст похідної за напрямом у заданій точці?

25. Наведіть формулу для обчислення похідної за заданим напрямом функції двох (трьох) змінних у точці.

26. Які висновки можна зробити за результатами обчислення похідної за напрямом у точці відносно поведінки функції?

27. Наведіть означення градієнта функції двох (трьох) змінних у точці. Які позначення використовують для градієнта?

28. Який зв'язок між градієнтом і похідною за заданим напрямом функції двох змінних?

29. Який напрям визначає градієнт (антиградієнт) функції двох змінних?

30. Як лінія рівня функції двох змінних пов'язана з її градієнтом у заданій точці?

31. Що називають локальними екстремумами функції двох змінних?

32. Сформулюйте необхідну та достатню умови локального екстремуму функції двох змінних.

33. Що називають глобальним екстремумом функції двох змінних?

34. Як знайти найбільше та найменше значення функції двох змінних у замкненій області?

35. Що називається умовним екстремумом функції двох змінних?

36. Які методи відшукання умовного екстремуму функції двох змінних вам відомі?

37. Що називають матрицею Гессе (гессіаном)? У яких задачах використовують гессіан?

38. Як визначають функцію Лагранжа? У яких задачах її використовують? Наведіть приклади.

39. Як за експериментальними даними обрати вигляд функціональної залежності між величинами? Які ще міркування для цього можуть бути застосовані?

40. На чому базується метод найменших квадратів побудови емпіричних формул?

41. Наведіть формулу й етапи побудови лінійної емпіричної залежності методом найменших квадратів.

7. Варіанти завдань для самостійної контрольної роботи

Завдання 1. Задано функцію двох змінних $z = z(x, y)$. Знайти та зобразити область її визначення.

Варіант 1. $z = \dfrac{12}{\sqrt{x^2 + y^2 - 4}}$.

Варіант 2. $z=\ln\left(x^2-y\right)$.

Варіант 3. $z=\sqrt{9-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-4}$.

Варіант 4. $z=\arccos\left(\dfrac{y}{2x}\right)$.

Варіант 5. $z=\sqrt{4-x^2+y^2}$.

Варіант 6. $z=\dfrac{1}{\ln\left(x^2+2y\right)}$.

Варіант 7. $z=y\sqrt{\sin x}$.

Варіант 8. $z=\arcsin(x+3y)$.

Варіант 9. $z=\log_{\sqrt{5}}\left(x^2-y\right)$.

Варіант 10. $z=\sqrt{x-\sqrt{y}}$.

Варіант 11. $z=\dfrac{15}{\sqrt{100-x^2-y^2}}$.

Варіант 12. $z=\ln(x-y)$.

Варіант 13. $z=\sqrt{25-x^2-y^2}+\sqrt{x^2+y^2-9}$.

Варіант 14. $z=\arccos\left(\dfrac{7y}{x}\right)$.

Варіант 15. $z=\sqrt{49-x^2-y^2}$.

Варіант 16. $z=\dfrac{10}{\ln\left(y-8x^2\right)}$.

Варіант 17. $z=8y\sqrt{\cos x}$.

Варіант 18. $z=\arcsin\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$.

Варіант 19. $z=\log_{\sqrt{7}}\left(y-6x^2\right)$.

Варіант 20. $z=5x+25y^2+75$.

Варіант 21. $z=\dfrac{1}{\sqrt{3x^2-7y^2+4}}$.

Варіант 22. $z=\ln\left(x^2+y^3\right)$.

Варіант 23. $z=\sqrt{8+x^2-2y^2}-\sqrt{x^2+y^2+5}$.

Варіант 24. $z=\arccos\left(\dfrac{y+8}{3x}\right)$.

Варіант 25. $z=\sqrt{7-2x^2+y^2}$.

Завдання 2. Визначити лінії рівня заданої функції двох змінних $z=z(x,y)$. Зобразити лінію рівня, що проходить через задану точку $M(x_0;y_0)$.

Варіант 1. $z=2xy$; $M(1;-1)$.

Варіант 2. $z=\dfrac{x^2}{y}$; $M(-1;1)$.

Варіант 3. $z=\dfrac{y}{\sqrt{x+1}}$; $M(3;-1)$.

Варіант 4. $z=x^2+4x-y$; $M(-1;2)$.

Варіант 5. $z=e^{\frac{xy}{2}}$; $M(2;1)$.

Варіант 6. $z=\dfrac{1}{x^2+y^2}$; $M(1;-1)$.

Варіант 7. $z=5x-6y$; $M(-1;-2)$.

Варіант 8. $z=x^2+y^2$; $M(-1;0)$.

Варіант 9. $z=\dfrac{\sqrt{x}}{y}$; $M(1;2)$.

Варіант 10. $z=x^2-y^2-4x$; $M(0;-2)$.

Варіант 11. $z=10yx$; $M(1;1)$.

Варіант 12. $z = \dfrac{x^2}{5y}$; $M(5;1)$.

Варіант 13. $z = \dfrac{y+1}{\sqrt{x}}$; $M(4;7)$.

Варіант 14. $z = y^2 + 4y - x$; $M(-1;1)$.

Варіант 15. $z = e^{\frac{xy}{3}}$; $M(1;3)$.

Варіант 16. $z = \dfrac{1}{6x^2 + y^2}$; $M(0;1)$.

Варіант 17. $z = 7x + 3y$; $M(1;-1)$.

Варіант 18. $z = x^2 + y^2$; $M(0;2)$.

Варіант 19. $z = \dfrac{3x}{\sqrt{y}}$; $M(-1;9)$.

Варіант 20. $z = 5x + x^2 - y^2$; $M(-1;1)$.

Варіант 21. $z = 6xy$; $M(1;-1)$.

Варіант 22. $z = \dfrac{5x^2}{y}$; $M(-1;1)$.

Варіант 23. $z = \dfrac{7y}{\sqrt{x+1}}$; $M(3;-1)$.

Варіант 24. $z = x^2 - 24x + y$; $M(-1;2)$.

Варіант 25. $z = e^{\frac{xy}{5}}$; $M(1;5)$.

Завдання 3. Знайти частинні похідні першого порядку від заданих функцій двох змінних.

Варіант 1. а) $z = x^2 \cos y - e^y + 2\pi$; б) $z = \log_4(3x - 7y)$;

в) $z = \dfrac{2^x y}{\arccos y}$; г) $z = tg^y x$.

Варіант 2. а) $z = y^2 tgx + 2^x + 8$; б) $z = arctg\left(\frac{x}{2y}\right)$;

в) $z = \frac{(1+2y)x}{x^2+3}$; г) $z = \cos^y 2x$.

Варіант 3. а) $z = -5e^y + x^2 \sin y - 3\pi$; б) $z = \ln(7x + y - 5)$;

в) $z = \frac{x \sin x}{7 + y}$; г) $z = \arcsin^y 5x$.

Варіант 4. а) $z = x^3 ctgy + 3^x - 15$; б) $z = \sqrt{4y + \ln^2 x}$;

в) $z = \frac{(y^3 - 5)(4 - y)}{3x^2}$; г) $z = ctg^y (2 + x)$.

Варіант 5. а) $z = \pi - y^2 \arccos x + e^{4x}$; б) $z = \sin^3(2y - x)$;

в) $z = \frac{ye^x}{\cos y}$; г) $z = arctg^y (x - 5)$.

Варіант 6. а) $z = 7^y - y^2 arctgx + 8\pi$; б) $z = e^{15-y+5x}$;

в) $z = \frac{x^5}{(2x+1)\ln y}$; г) $z = \sin^y (0{,}2 + x)$.

Варіант 7. а) $z = y^2 \arcsin x - \pi + 4e^y$; б) $z = arctg^2 (x - 17y)$;

в) $z = \frac{2\sqrt{y^6} \sin x}{e^y}$; г) $z = \arccos^y (x - 2)$.

Варіант 8. а) $z = -5 - y^4 arcctgx + 7^x$; б) $z = \sqrt{32x + y^2}$;

в) $z = \frac{y^2 8^y}{x+1}$; г) $z = arcctg^x y$.

Варіант 9. а) $z = \sqrt{x} e^y + \cos y + 4\pi$; б) $z = \ln(2x + y^4)$;

в) $z = \frac{2^x}{\sqrt{y - 3}\arccos y}$; г) $z = tg^y\left(\sqrt{3} + x\right)$.

Варіант 10. а) $z = 17 - x^2 \ln y - e^y$; б) $z = 4^{y - x^2}$;

в) $z = \dfrac{y}{\sqrt{x^5 tgx}}$; г) $z = x^{\sin y}$.

Варіант 11. а) $z = 7 - \cos x - x^2 e^y$; б) $z = \log_5(-7y + x)$;

в) $z = \dfrac{y \arccos y}{e^x}$; г) $z = 3tg^x y$.

Варіант 12. а) $z = 2^y + 8\pi + x^2 tg$; б) $z = arctg\left(\dfrac{6x}{y}\right)$;

в) $z = \dfrac{4x}{(1+y)(x^2+3)}$; г) $z = \cos^x(y+7)$.

Варіант 13. а) $z = -5\pi - e^y + y^4 \sin x$; б) $z = \ln(9 - 7x + y)$;

в) $z = \dfrac{x}{7y \sin x}$; г) $z = \arcsin^x 8y$.

Варіант 14. а) $z = y^6 ctgx + 4^x + 1$; б) $z = \sqrt{1 + \ln^2 x + 4y}$;

в) $z = \dfrac{(y^3+1)(4-y^4)}{x^2}$; г) $z = ctg^x 3y$.

Варіант 15. а) $z = -e^{1+2x} + x^2 \arccos y$; б) $z = \cos^3(y - x)$;

в) $z = \dfrac{y}{e^x \sin y}$; г) $z = y^{\ln x}$.

Варіант 16. а) $z = 9^x - x^4 arctgy + \pi$; б) $z = e^{\pi - 10y + x^2}$;

в) $z = \dfrac{y^5}{(x-13)\ln y}$; г) $z = \sin^x y$.

Варіант 17. а) $z = y^2 \arcsin x - \pi + 4e^y$; б) $z = arctg^2(y - 2x)$;

в) $z = \dfrac{20e^y}{\sqrt{y^6} \sin x}$; г) $z = \arccos^x(y+1)$.

Варіант 18. а) $z = 2^y - x^3 arcctgy + 7$; б) $z = \sqrt{3 + y^2 - 2x}$;

в) $z = \dfrac{8^y}{(x+10)y^2}$; г) $z = arcctg^y(x+5)$.

Варіант 19. а) $z = 6 + \cos x + \sqrt{x^3} e^y$; б) $z = \ln(x + 3\pi - y^5)$;

в) $z = \dfrac{6^x}{\sqrt{y+3}\cos y}$; г) $z = y^{2x-1}$.

Варіант 20. а) $z = e^{8y} + y^2 \ln x - \pi$; б) $z = 9^{x^2+y}$;

в) $z = \dfrac{yx^2}{tgx}$; г) $z = x^{\cos y}$.

Варіант 21. а) $z = x^3 \cos y + 3e^y + \pi$; б) $z = \log_{44}(x - 7y)$;

в) $z = \dfrac{8^x y}{\arccos y}$; г) $z = tg^y 2x$.

Варіант 22. а) $z = y^3 tgx + 4^x - 78$; б) $z = arctg\left(\dfrac{4x}{y}\right)$;

в) $z = \dfrac{(11-y)x}{x^2+7}$; г) $z = \cos^y x$.

Варіант 23. а) $z = 15e^y + x^4 \sin y + \pi$; б) $z = \ln(x - y + 15)$;

в) $z = \dfrac{x \sin x}{y - 100}$; г) $z = \arcsin^y 3x$.

Варіант 24. а) $z = x^2 ctgy + 7^x - 1$; б) $z = \sqrt{y - \ln^2 x}$;

в) $z = \dfrac{(y-5)(4+y^3)}{9x^2}$; г) $z = ctg^y(2-x)$.

Варіант 25. а) $z = \pi + y^3 \arccos x - e^{2x}$; б) $z = \sin^2(y + 4x)$;

в) $z = \dfrac{e^{xy}}{\cos y}$; г) $z = arctg^y(2x+5)$.

Завдання 4. Знайти частинні похідні першого порядку: а) складної функції двох змінних $z = f(u,v)$, де $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$; б) неявно заданої співвідношенням $F(x, y, z) = 0$ функції двох змінних.

а) Варіант 1. $z = u^3 + v,\ \ u = x\ln y,\ v = y - x.$

Варіант 2. $z = v\ln u,\ \ u = ye^x,\ \ v = xy^2.$

Варіант 3. $z = u^2 - uv,\ \ u = x\sin y,\ \ v = xy.$

Варіант 4. $z = u\operatorname{tg} v,\ \ u = x - 2\sqrt{y},\ \ v = y^2 - x.$

Варіант 5. $z = u^2 v - u,\ u = y\cos x,\ v = x\sin y.$

Варіант 6. $z = u\operatorname{arcctg} v,\ \ u = x + 7y,\ \ v = 3x - y.$

Варіант 7. $z = v^2 e^u,\ \ u = x^2 y,\ \ v = y^2 - x.$

Варіант 8. $z = u\arcsin v,\ \ u = 3x - y,\ \ v = x + 2y.$

Варіант 9. $z = v^2 - 2\sqrt{u},\ \ u = x^2 y,\ \ v = ye^x.$

Варіант 10. $z = u^3(2v - 1),\ u = \sqrt{xy},\ v = xy.$

Варіант 11. $z = u\arccos v,\ \ \ u = x + 4y, v = x - y.$

Варіант 12. $z = v\sin u,\ \ u = x + 7y,\ \ v = y - x.$

Варіант 13. $z = v^2\ln u,\ \ u = x^2 - y,\ \ v = x - y^3.$

Варіант 14. $z = u - 2\sqrt{v},\ \ u = x\ln y,\ \ v = x^2 y.$

Варіант 15. $z = u^2 + uv,\ \ \ u = ye^x, v = xe^{-y}.$

Варіант 16. $z = u\operatorname{ctg} v,\ \ u = x - 5y,\ \ v = xy.$

Варіант 17. $z = v\operatorname{tg} u,\ \ u = y - 2\sqrt{x},\ \ v = x + 2\sqrt{y}.$

Варіант 18. $z = u\ln v,\ \ u = 2x\sqrt{y},\ \ v = 2y\sqrt{x}.$

Варіант 19. $z = u\cos v,\ \ u = x^2 y,\ \ v = xy^2.$

Варіант 20. $z = u^2 - 2\sqrt{v},\ \ u = y\ln x,\ \ v = y^2 x.$

Варіант 21. $z = \cos u\operatorname{tg} v,\ \ u = x + y^2,\ \ v = y - x^3.$

Варіант 22. $z = v - 2\sqrt{u},\ \ u = y\ln x,\ \ v = xy.$

Варіант 23. $z = 2u - 3v,\ \ \ u = xe^y, v = ye^{-x}.$

Варіант 24. $z = ve^{-u},\ \ u = y^2 - x,\ \ v = y^2 x.$

Варіант 25. $z = ue^v,\ \ u = x^2 + y,\ \ v = y^2 - x.$

б) Варіант 1. $z^2 y - z\ln x - 2xy = 0$.

Варіант 2. $3y - z^4 x + 5yz = 0$.

Варіант 3. $x - y + 3z - xz^2 = 0$.

Варіант 4. $xy + z\cos x + y\cos z = 0$.

Варіант 5. $x^2 - 2yz + 3z^2 + 5y^2 = 0$.

Варіант 6. $yx - xz^2 - 3z\ln y = 0$.

Варіант 7. $9y - zx^2 + 3yz^5 = 0$.

Варіант 8. $-6x + zy - xz^2 = 0$.

Варіант 9. $y\sin z - xy + z\sin x = 0$.

Варіант 10. $x^2 z + z\ln y + 35xy^3 = 0$.

Варіант 11. $4y\ln z + y^2 x - zx = 0$.

Варіант 12. $z^2 x + y^5 z + 8xy = 0$.

Варіант 13. $7x - yz + xz^6 = 0$.

Варіант 14. $y\cos z + z^4 y + x\cos y = 0$.

Варіант 15. $x^3 z^2 - 5y + zy^4 = 0$.

Варіант 16. $yx - z^2 y^3 - 3x\ln z = 0$.

Варіант 17. $7^z x - yx^2 + yz^3 = 0$.

Варіант 18. $xz^4 - 2yx + zy = 0$.

Варіант 19. $y\sin x + 8zy + x\cos z = 0$.

Варіант 20. $x^2 y^3 - 7xz + z\ln y = 0$.

Варіант 21. $z^2 y + 3z\ln x - xy = 0$.

Варіант 22. $y + z^4 x - 8yz = 0$.

Варіант 23. $x + 9y - z - xz^2 = 0$.

Варіант 24. $y\cos z - xy + z\cos x = 0$.

Варіант 25. $x^2 + y^2 - yz + 33z^2 = 0$.

Завдання 5. За допомогою диференціала обчислити наближено значення функції двох змінних $z = z(x, y)$, виходячи зі значення в точці $M(x_0; y_0)$.

Варіант 1.	$z(1{,}98;\ 0{,}05) = \sqrt{1{,}98^2 + 0{,}05^3}$;	$M = (2;0)$.
Варіант 2.	$z(0{,}09;\ 0{,}98) = \ln\left(0{,}09^3 + 0{,}98^2\right)$;	$M = (0;1)$.
Варіант 3.	$z(3{,}02;\ 0{,}99) = 3{,}02 \cdot 0{,}99^3$;	$M = (3;1)$.
Варіант 4.	$z(1{,}01;\ 3{,}98) = 1{,}01^{3{,}98}$;	$M = (1;4)$.
Варіант 5.	$z(1{,}85;\ 0{,}05) = \sqrt{1{,}85^3 + 0{,}05^2}$;	$M = (2;0)$.
Варіант 6.	$z(0{,}02;\ 0{,}88) = \ln\left(0{,}02^2 + 0{,}88^3\right)$;	$M = (0;1)$.
Варіант 7.	$z(2{,}92;\ 0{,}09) = 2{,}92^3 \cdot 0{,}09$;	$M = (3;0)$.
Варіант 8.	$z(1{,}05;\ 3{,}87) = 3{,}87^{1{,}05}$;	$M = (1;4)$.
Варіант 9.	$z(1{,}99;\ 0{,}02) = \sqrt{1{,}99^4 + 0{,}02^3}$;	$M = (2;0)$.
Варіант 10.	$z(0{,}08;\ 0{,}99) = \ln\left(0{,}08 + 0{,}99^3\right)$;	$M = (0;1)$.
Варіант 11.	$z(3{,}21;\ 0{,}89) = 3{,}21^2 \cdot 0{,}89$;	$M = (3;1)$.
Варіант 12.	$z(3{,}99;\ 1{,}08) = 1{,}08^{3{,}99}$;	$M = (4;1)$.
Варіант 13.	$z(2{,}99;\ 0{,}05) = \sqrt{0{,}05^3 + 2{,}99^2}$;	$M = (3;0)$.
Варіант 14.	$z(0{,}98;\ 0{,}08) = \ln\left(0{,}98^2 + 0{,}08^3\right)$;	$M = (1;0)$.
Варіант 15.	$z(0{,}99; 3{,}01) = 0{,}99^3 \cdot 3{,}01$;	$M = (3;1)$.
Варіант 16.	$z(1{,}01;\ 3{,}91) = 3{,}91^{1{,}01}$;	$M = (1;4)$.
Варіант 17.	$z(0{,}07; 1{,}86) = \sqrt{0{,}07^3 + 1{,}86^2}$;	$M = (0;2)$.
Варіант 18.	$z(0{,}09;\ 0{,}91) = \ln\left(0{,}09^5 + 0{,}91^3\right)$;	$M = (0;1)$.
Варіант 19.	$z(2{,}03;\ 0{,}79) = 2{,}03 \cdot 0{,}79^4$;	$M = (2;1)$.
Варіант 20.	$z(1{,}04;\ 2{,}95) = 1{,}04^{2{,}95}$;	$M = (1;3)$.

Варіант 21. $z(1{,}97;\ 0{,}04)=\sqrt{1{,}97^2+0{,}04^3}$; $M=(2;0)$.

Варіант 22. $z(0{,}09;\ 0{,}99)=\ln\left(0{,}09^4+0{,}99^5\right)$; $M=(0;1)$.

Варіант 23. $z(3{,}01;\ 0{,}96)=3{,}01\cdot 0{,}96^2$; $M=(3;1)$.

Варіант 24. $z(1{,}03;\ 4{,}97)=1{,}03^{3{,}97}$; $M=(1;5)$.

Варіант 25. $z(2{,}85;\ 1{,}05)=\sqrt{2{,}85^3+1{,}05^2}$; $M=(3;1)$.

Завдання 6. Задано функцію трьох змінних $u=u(x,y,z)$. Знайти її градієнт і похідну за напрямом $\vec{a}=(a_x;a_y;a_z)$ у точці $M\left(x_0;y_0;z_0\right)$.

Варіант 1. $u=3x^3y+\sqrt{xz}$; $\vec{a}=\left(-1;2;2\right)$; $M=\left(4;0;1\right)$.

Варіант 2. $u=4\ln\left(3+x\right)-8xyz$; $\vec{a}=\left(2;1;-1\right)$; $M=\left(1;1;,1\right)$.

Варіант 3. $u=x\sqrt{y}+y\sqrt{z}$; $\vec{a}=\left(-3;\ 0;4\right)$; $M=\left(2;4;1\right)$.

Варіант 4. $u=x+2y+\sqrt{xyz}$; $\vec{a}=\left(5;\ 0;-1\right)$; $M=\left(9;1;4\right)$.

Варіант 5. $u=x^3y^2z+\ln\left(z-1\right)$; $\vec{a}=\left(2;1;-2\right)$; $M=\left(1;-1;2\right)$.

Варіант 6. $u=x^2z^3+\sqrt{y^3}$; $\vec{a}=\left(-5;12;0\right)$; $M=\left(2;2;4\right)$.

Варіант 7. $u=\ln\left(x+5\right)-4xyz$; $\vec{a}=\left(4;3;-1\right)$; $M=\left(1;1;1\right)$.

Варіант 8. $u=x\sqrt{y}+\left(z+y\right)\sqrt{x}$; $\vec{a}=\left(-6;\ 0;8\right)$; $M=\left(1;1;2\right)$.

Варіант 9. $u=y\ln x-\operatorname{arctg} z$; $\vec{a}=\left(0;-4;-1\right)$; $M=\left(2;1;0\right)$.

Варіант 10. $u=3x^4+2z+\sqrt{xyz}$; $\vec{a}=\left(2;-1;3\right)$; $M=\left(1;4;9\right)$.

Варіант 11. $u=2\sqrt{x+y}+y\operatorname{arctg} x$; $\vec{a}=\left(-2;2;-3\right)$; $M=\left(3;2;1\right)$.

Варіант 12. $u=\ln\left(3-x\right)-xy^2z$; $\vec{a}=\left(8;1;-2\right)$; $M=\left(-1;0;1\right)$.

Варіант 13. $u=x\left(\operatorname{arctg} z-\ln y\right)$; $\vec{a}=\left(12;0;-5\right)$; $M=\left(2;1;1\right)$.

Варіант 14. $u=xz^2+2\ln\left(x+y\right)$; $\vec{a}=\left(0;4;-3\right)$; $M=\left(1;2;-1\right)$.

Варіант 15. $u=x^2-\operatorname{arctg}\left(z+y\right)$; $\vec{a}=\left(0;-4;3\right)$; $M=\left(1;-1;1\right)$.

Варіант 16. $u=x^4\sqrt{y}+yz^2$; $\vec{a}=\left(3;\ 0;-4\right)$; $M=\left(1;4;3\right)$.

Варіант 17. $u=\ln\left(3+x\right)-xy\sqrt{z}$; $\vec{a}=\left(2;3;-3\right)$; $M=\left(1;2;4\right)$.

Варіант 18. $u = xyz - \ln(y + x)$; $\vec{a} = (2;2;-1)$; $M = (1;1;2)$.

Варіант 19. $u = \operatorname{arctg} y + xz^2$; $\vec{a} = (-3;-4;1)$; $M = (2;2;1)$.

Варіант 20. $u = x\,y - \dfrac{x}{z}$; $\vec{a} = (3;2;-1)$; $M = (2;3;6)$.

Варіант 21. $u = \sqrt{x\,y} + \sqrt{10 - z^2}$; $\vec{a} = (1;-2;-1)$; $M = (1;4;1)$.

Варіант 22. $u = x^3y^2z - \ln(z - 1)$; $\vec{a} = (2;1;-2)$; $M = (1;-1;2)$.

Варіант 23. $u = 3\sqrt{x + y} + y\operatorname{arctg} x$; $\vec{a} = (-2;2;-3)$; $M = (3;2;1)$.

Варіант 24. $u = y\ln x^2 - \operatorname{arctg} 3z$; $\vec{a} = (0;-4;-1)$; $M = (2;1;0)$.

Варіант 25. $u = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right) + xz^2$; $\vec{a} = (-3;-4;1)$; $M = (1;-1;1)$.

Завдання 7. Дослідити функцію двох змінних $z = z(x, y)$ на локальний екстремум.

Варіант 1. $z = 2x^2 + xy + y^2 + 7y - 1$.

Варіант 2. $z = x^2 + 3y^2 - 6x + 12y - 2$.

Варіант 3. $z = x^2 - y^2 + 5xy + 4x + 3$.

Варіант 4. $z = 3x^2 + y^2 - 2xy + 4x + 9$.

Варіант 5. $z = 5 + 12x - 8y - 3x^2 - 2y^2$.

Варіант 6. $z = 5x^2 + 2y^2 - xy + 4x - 2y$.

Варіант 7. $z = 3x^2 + 2y^2 + 2xy + 6x$.

Варіант 8. $z = 4x^2 + 3y^2 - xy - 7y - 3$.

Варіант 9. $z = x^2 - y^2 + 2xy + 4x + 7$.

Варіант 10. $z = 6x^2 + y^2 - 2xy - x + 6y$.

Варіант 11. $z = x^2 + 2y^2 - x + 4y - 3$.

Варіант 12. $z = 7 - x + 5y - x^2 - 2y^2$.

Варіант 13. $z = 2x^2 + y^2 + 3xy - 5x + y$.

Варіант 14. $z=1-x^2-3y^2+4x-6y$.

Варіант 15. $z=x^2+3y^2-2xy-8x-5$.

Варіант 16. $z=x^2+3y^2-2xy+8y-4$.

Варіант 17. $z=13+xy-5y-3x^2+y^2$.

Варіант 18. $z=6x^2+xy+y^2+7x-3y$.

Варіант 19. $z=4x^2+y^2-2xy+6x-5$.

Варіант 20. $z=x^2+3y^2-xy-7x-2y$.

Варіант 21. $z=x^2+2xy+y^2+y-10$.

Варіант 22. $z=3x^2+y^2+8x-2y-12$.

Варіант 23. $z=x^2-5y^2+xy-2x+1$.

Варіант 24. $z=x^2+3y^2-20xy+x+9$.

Варіант 25. $z=5-2x+13y+x^2-y^2$.

Завдання 8. Знайти найменше та найбільше значення $z=z(x,y)$ у обмеженій замкненій області $D\subset\mathbf{R}^2$. Зробити рисунок.

Варіант 1. $z=x^2+y^2-3xy+2x$;

$D=\{(x,y):\ 0\le x\le 3;\ 0\le y\le 3\}$.

Варіант 2. $z=2xy+y^2-x+5$;

$D=\{(x,y):\ -1\le x\le 1;\ 0\le y\le 2\}$.

Варіант 3. $z=y^2+xy-2x-4y$;

$D=\{(x,y):\ -1\le x\le 1;\ 0\le y\le 3\}$.

Варіант 4. $z=x^2+xy-2y+7$;

$D=\{(x,y):\ 1\le x\le 4;\ -5\le y\le 0\}$.

Варіант 5. $z=x^2+xy-y^2-3x$;

$D=\{(x,y):\ 1\le x\le 2;\ 0\le y\le 1\}$.

Варіант 6. $z=3x^2+6xy-3y+16x$;

$D=\{(x,y):\ x^2-4\le y\le -1\}$.

Варіант 7. $z = 2x^2 + 4xy - y^2 + 3x$;

$D = \{(x, y):\ -1 \le x \le 0;\ -1 \le y \le 1\}$.

Варіант 8. $z = x^2 + y^2 - y + 2$;

$D = \{(x, y):\ -1 \le x \le 1;\ 0 \le y \le 1\}$.

Варіант 9. $z = x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x$;

$D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 2;\ -2 \le y \le 0\}$.

Варіант 10. $z = 5xy + y^2 - 8y + 3$;

$D = \{(x, y):\ 1 \le x \le 2;\ -1 \le y \le 1\}$.

Варіант 11. $z = x^2 - 2y^2 - 2x + 4y$;

$D = \{(x, y):\ x \ge 0;\ y \ge 0;\ x + y \le 3\}$.

Варіант 12. $z = 3x^2 - 2y^2 + 6x - 1$;

$D = \{(x, y):\ x \le 0;\ y \ge -1;\ y - x \le 2\}$.

Варіант 13. $z = y^2 - x^2 + 6y + 3$;

$D = \{(x, y):\ x \ge -1;\ y \ge -4;\ x + y \le 0\}$.

Варіант 14. $z = 2x^2 - 3xy + 9y - 1$;

$D = \{(x, y):\ x \ge 0;\ y \le 5;\ x \le y\}$.

Варіант 15. $z = 2 - 3xy - 3x$;

$D = \{(x, y):\ x^2 - 4 \le y \le 0\}$.

Варіант 16. $z = x^2 + 2xy - y^2 + 4x$;

$D = \{(x, y):\ x \le 0;\ y \le 0;\ x + y + 3 \ge 0\}$.

Варіант 17. $z = 4x^2 - 6x + y - 3$;

$D = \{(x, y):\ 0 \le y \le 4 - x^2\}$.

Варіант 18. $z = 5x^2 - 3xy + 4y + 2$;

$D = \{(x, y):\ x \ge 0;\ y \le 0;\ x - y \le 1\}$.

Варіант 19. $z = x^2 + 3y^2 + x - 4$;

$D = \{(x, y):\ x \ge 0;\ y \ge -1;\ x + y \le 1\}$.

Варіант 20. $z = x^2 - 3xy + y^2 - 1$;

$D = \{(x, y):\ x \le 1;\ y \ge 0;\ y \le x\}$.

Варіант 21. $z = x^2 + y^2 - 4xy + x$;
$D = \{(x, y):\ 0 \le x \le 4;\ 0 \le y \le 4\}$.

Варіант 22. $z = 5xy + y^2 - 8y + 3$;
$D = \{(x, y):\ 1 \le x \le 2;\ -1 \le y \le 1\}$.

Варіант 23. $z = y^2 - x^2 + 6y + 3$;
$D = \{(x, y):\ -1 \le x;\ -4 \le y;\ x + y \le 0\}$.

Варіант 24. $z = 3x^2 + 6x - 2y - 1$;
$D = \{(x, y):\ x \le 0;\ -1 \le y;\ y - x \le 2\}$.

Варіант 25. $z = z = 5xy + y^2 - 8y + 3$;
$D = \{(x, y):\ 1 \le x \le 2;\ -1 \le y \le 1\}$.

Завдання 9. Дослідити функцію двох змінних $z = z(x, y)$ на екстремум за умови $\varphi(x, y) = 0$.

Варіант 1. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$; $x + y + 1 = 0$.

Варіант 2. $z = xy^2$; $x + 2y - 1 = 0$.

Варіант 3. $z = 2x + y$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Варіант 4. $z = xy - y + 4$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Варіант 5. $z = \dfrac{x - y - 4}{\sqrt{2}}$; $x^2 + y^2 = 1$.

Варіант 6. $z = xy - 2x - 30$; $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Варіант 7. $z = x - 3y$; $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Варіант 8. $z = xy - 3y + 1$; $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Варіант 9. $z = xy$; $2x^2 + 8y^2 - 16 = 0$.

Варіант 10. $z = x^2 + y^2$; $x + y = 6$.

Варіант 11. $z = 2x - 5 + xy$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Варіант 12. $z = x^2 + y^2$; $x - y = 2$.

Варіант 13. $z = x^2 + y^2 - xy + x + y - 4$; $x + y + 3 = 0$.

Варіант 14. $z = xy$; $2x + 3y = 5$.

Варіант 15. $z = 11 - 3x + xy$; $x^2 + y^2 - 4 = 0$.

Варіант 16. $z = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$; $x + y = 2$.

Варіант 17. $z = xy$; $x^2 + y - 3 = 0$.

Варіант 18. $z = xy + 3x + 1$; $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Варіант 19. $z = e^{xy}$; $x + y - 1 = 0$.

Варіант 20. $z = 6 - 4x - 3y$; $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Варіант 21. $z = x^2 + 3y^2 - 7xy + x - y$; $x - y + 1 = 0$.

Варіант 22. $z = 5x^2 y$; $x + 2y + 1 = 0$.

Варіант 23. $z = y + 2x + 10$; $x^2 + y^2 - 9 = 0$.

Варіант 24. $z = 2xy - y + 6$; $x^2 + y^2 - 81 = 0$.

Варіант 25. $z = xy$; $x + y = 1$.

Завдання 10. У результаті спостережень отримано значення (x_i, y_i), які наведені в таблиці. Побудувати емпіричну формулу залежності $y = f(x)$ у вигляді лінійної функції за допомогою методу найменших квадратів. Зробити рисунок.

Варіант 1.

x_i	1	3	5	7	9
y_i	9,8	5,3	6,2	4,9	3,7

Варіант 2.

x_i	–3	−1	1	3	5
y_i	0,7	1,5	2,2	2,2	4,3

Варіант 3.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	9,3	5,1	7,8	6,7	4,2

Варіант 4.

x_i	−4	−2	0	2	4
y_i	−6,1	2,1	2,9	2,1	4,3

Варіант 5.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	9,7	8,1	8,9	8,2	6,9

Варіант 6.

x_i	-3	-1	1	3	5
y_i	$-6,5$	2,4	2,9	2,1	4,3

Варіант 7.

x_i	0	3	6	9	12
y_i	6,1	4,2	1,9	5,1	3,8

Варіант 8.

x_i	-7	-5	-3	-1	2
y_i	$-1,2$	$-0,1$	$-1,6$	$-0,8$	,7

Варіант 9.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	5,1	3,3	1,2	2,2	1,3

Варіант 10.

x_i	-3	-1	1	3	5
y_i	$-6,3$	2,1	2,7	2,1	4,2

Варіант 11.

x_i	-4	-2	0	2	4
y_i	0	$-3,1$	$-6,6$	$-5,5$	$-5,1$

Варіант 12.

x_i	1	2	3	4	5
y_i	6,1	4,9	7,2	9,8	8,3

Варіант 13.

x_i	-2	0	2	4	6
y_i	$-0,1$	0,3	3,2	4,8	3,7

Варіант 14.

x_i	3	4	5	6	7
y_i	6,3	6,9	8,1	7,3	8,2

Варіант 15.

x_i	-3	-1	1	3	5
y_i	11,1	0,1	$-0,9$	$-0,2$	$-1,3$

Варіант 16.

x_i	2	6	10	14	18
y_i	5,9	5,1	6,3	4,8	3,9

Варіант 17.

x_i	-1	0	1	2	3
y_i	0,1	$-1{,}6$	$-0{,}8$	$-0{,}9$	$-1{,}8$

Варіант 18.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	9,9	7,1	14,2	11,8	13,7

Варіант 19.

x_i	-4	-2	0	2	4
y_i	$-0{,}2$	0,1	0	$-0{,}1$	3,1

Варіант 20.

x_i	3	6	9	12	15
y_i	8,3	13,1	11,9	11,1	12,3

Варіант 21.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	8,8	4,3	5,2	3,9	2,7

Варіант 22.

x_i	-2	0	2	4	6
y_i	1,7	2,5	3,2	3,2	5,3

Варіант 23.

x_i	2	4	6	8	10
y_i	9,1	5,1	7,7	6,5	4,1

Варіант 24.

x_i	-4	-2	0	2	4
y_i	$-6{,}3$	2,2	2,8	2,3	4,4

Варіант 25.

x_i	0	2	4	6	8
y_i	9,7	8,1	8,9	8,2	6,9

8. Рекомендована література

8.1. Основна

1. Лабораторний практикум з навчальної дисципліни "Вища математика" : навч.-метод. посіб. / Т. В. Денисова, К. М. Дубовик, В. Ф. Сенчуков, В. Г. Титарев. – Харків : ХНЕУ, 2009. – 168 с.

2. Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, В. П. Демидович. – Москва : Наука, 1978. – 656 с.

3. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления. У 2 ч. / Н. С. Пискунов. – Москва : Наука, 1972. –

Ч. 1. – 1972. – 432 с.

Ч. 2. – 1972. – 576 с.

4. Сенчуков В. Ф. Вища математика. Загальні розділи : навч. посіб. У 2 ч. Ч. 2 / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : ХНЕУ, 2013. – 296 с.

5. Сенчуков В. Ф. Зображення просторових фігур : навч.-метод. посіб. / В. Ф. Сенчуков, Т. В. Денисова. – Харків : ХНЕУ, 2008. – 76 с.

6. Вища математика: математичний аналіз, лінійна алгебра, аналітична геометрія [Електронний ресурс] : підручник / [авт. кол.: В. С. Пономаренко, Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва та ін. ; за ред. В. С. Пономаренка]. – Мультимедійне інтерактивне електрон. вид. комбінованого використ. (412 Мб). – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. – Режим доступу : http://library.hneu.edu.ua/jornal_aut1.php.

8.2. Додаткова

7. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. – Москва : Наука, 2002. – 384 с.

8. Высшая математика : сборник задач / под ред. П. Ф. Овчинникова. – Київ : Вища школа, 1999. – 350 с.

9. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. У 2 ч. / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. – Москва : Высшая школа, 2003. –

Ч. 1. – 2003. – 304 с.

Ч. 2. – 2003. – 416 с.

10. Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. – Москва : Наука, 2002. – 352 с.

8.3. Методичне забезпечення

11. Рибалко А. П. Математичний аналіз : опорний конспект [Електронний ресурс] / А. П. Рибалко. – Режим доступу : http://www.ikt.hneu.edu.ua/course/view.php?id=929.

12. Рибалко А. П. Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "Математичний аналіз" [Електронний ресурс] / А. П. Рибалко. – Режим доступу : http://www.ikt.hneu.edu.ua/course/view.php?id=929.

13. Рибалко А. П. Методичні рекомендації та завдання для виконання лабораторних робіт із навчальної дисципліни "Математичний аналіз" [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.ikt.hneu.edu.ua/course/view.php?id=929.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ

Методичні рекомендації
для самостійної роботи
за темою "Диференціальне числення функцій багатьох змінних" для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Рибалко** Антоніна Павлівна
Стєпанова Катерина Вадимівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. І. Черненко*

Коректор *В. Ю. Труш*

План 2018 р. Поз. № 37 ЕВ. Обсяг 65 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.