doi: 10.32620/oikit.2020.89.06

УДК 517.927.21 Т. В. Денисова, А. П. Рыбалко

О краевых задачах для уравнения Пуассона в многолистной области, составленной из разных круговых сегментов

Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеца

Рассмотрена неклассическая краевая задача математической физики для двумерного уравнения Пуассона. В качестве области, в которой ищется решение, взята область, составленная из разных круговых сегментов, сложенных в многолистную пластину книжной структуры. Все листы отличаются друг от друга, как по своим физическим свойствам, так и по геометрическим размерам, и соединены между собой по хорде, общей для всех листов. Приведена постановка задачи и получено ее точное решение.

Решение задачи рассматривается в биполярных системах координат, каждая из которых связана с одним из сегментов. При этом все системы координат имеют общий параметр – длину прямолинейной границы сегмента. В качестве метода решения задачи используется классический метод разделения переменных – метод Фурье. Хотя как основная рассматривается задача Дирихле, однако, предложенный метод может быть применён и в случае, когда на дугах отдельных окружностей будут заданы условия других типов: Неймана или третьей основной задачи.

Постановка рассмотренной задачи отличается от классической тем, что к традиционным краевым условиям добавлены условия сопряжения полей на линии соединения сегментов. Эти условия представляют собой равенства значений функций и равенство нулю суммы линейных комбинаций их нормальных производных. Решение конструируется (выбирается) так, что первое из условий сопряжения полей выполняется автоматически при любом выборе неизвестных функций. Краевые условия на сегментах и второе условие сопряжения позволяют определить все неизвестные функции задачи. Для применения метода Фурье необходимо, чтобы все краевые функции в угловых точках сегментов были равны нулю. При нарушении этого условия предложена модификация метода, позволяющая получить точное решение и в этом случае. В качестве приложения рассмотрены: а) задача о кручении составного стержня, поперечное сечение которого представляет собой два разных сегмента; б) стационарная задача теплопроводности для двух склеенных полусегментов с источниками тепла внутри области. Получены точные аналитические решения этих новых задач.

Ключевые слова: краевая задача; двумерное уравнение Пуассона; многолистная пластина; круговые сегменты; метод Фурье; условия сопряжения; кручение стержня; стационарная задача теплопроводности.

Введение

В статье ставится и получает свое точное решение неклассическая краевая задача математической физики для двумерного уравнения Пуассона в области, представляющей собой многолистную пластину книжной структуры. Листы отличаются друг от друга, как по своим физическим свойствам, так и по геометрическим размерам. "Неклассичность" задачи состоит в том, что область, в которой ищется решение, состоит из отдельных плоских областей – пластин (в нашем случае – круговых сегментов), соединенных между собой по одной, общей для всех сегментов, хорде.

Потенциальное поле кроме краевых условий должно удовлетворять условиям сопряжения. В этом и состоит основное отличие рассматриваемой задачи от тех, которые изучает традиционная математическая физика. Следует отметить, что для полукруговых и полукольцевых листов такие задачи впервые были рассмотрены в работах [1 – 3].

Применение полученных результатов проиллюстрировано на задаче кручения составного стержня, а также на стационарной задаче теплопроводности о распределении тепла в области, состоящей из двух разных по физическим свойствам сегментов.

1. Постановка задачи

Пусть имеется N круговых сегментов разных радиусов, соединенных по общей хорде так, как это показано на рисунке для случая двух сегментов (рис. 1).

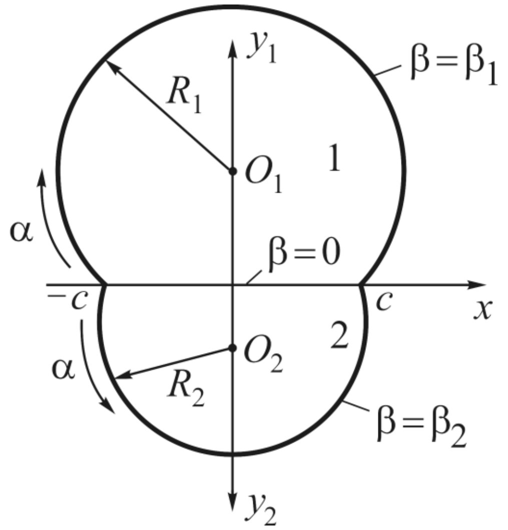

Рис. 1. Область из двух разных сегментов

Область, в которой нужно найти решение краевой задачи, представляет собой N-листную пластину книжной структуры.

В работе [1] рассмотрена многолистная пластина, составленная из полукругов, данная же статья является обобщением задачи, решенной в [1]. С каждым листом свяжем декартову систему координат xy_k $(k=1,2,...,N)$. Функцию u_k будем рассматривать на k-ом листе в системе xy. Индекс k при y_k будем опускать, ось x для всех систем одна и та же.

Краевая задача состоит в нахождении решения уравнения Пуассона

$$\Delta_{xy}u = f(x,y) \tag{1}$$

в многолистной пластине по заданным краевым условиям на дугах окружностей и условиям сопряжения вида:

$$u_k(x,0) = u_{k+1}(x,0), \quad k=1,2,...,N-1, \tag{2}$$

$$\sum_{k=1}^{N} \mu_k \left.\left(\frac{\partial u_k}{\partial y}\right)\right|_{y=0} = 0, \tag{3}$$

где $\mu_k > 0$ – некоторые заданные параметры, различные для разных листов.

Функция $f(x,y)$ представляет собой источники поля; на k-ом листе будем обозначать ее через $f_k(x,y)$.

Задачу будем рассматривать на каждом листе в биполярной системе координат [4], связанной с декартовой системой формулами:

$$x = c\frac{sh\alpha}{ch\alpha + \cos\beta},\quad y = c\frac{\sin\beta}{ch\alpha + \cos\beta},\ \alpha \in (-\infty, +\infty),\ \beta \in (-\pi, \pi],$$

где c – размерный параметр.

Линии $\beta = const$ – дуги окружностей, которые проходят через точки $\pm c$:

$$x^2 + (y - c \cdot cth\beta)^2 = \frac{c^2}{\sin^2\beta}. \tag{4}$$

При $\alpha = const$ имеем окружности:

$$(x - c \cdot cth\alpha)^2 + y^2 = \frac{c^2}{sh^2\alpha}, \tag{5}$$

ортогональные к (4).

Для наших целей достаточно рассматривать лишь $\beta \geq 0$, координату $\alpha \in (-\infty, +\infty)$ во всех системах, связанных с конкретными листами, будем отсчитывать от точки $x = -c$ так, как это показано на рис. 1.

Оператор Лапласа в биполярной системе координат имеет вид:

$$\Delta_{xy}u = (ch\alpha + \cos\beta)^2 \cdot c^{-2} \cdot \left(\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2}\right). \tag{6}$$

Для полной постановки задачи на дугах окружностей $\beta = \beta_k > 0$ зададим краевые условия Дирихле:

$$u_k(\alpha, \beta_k) = \psi_k(\alpha),\quad k = 1, 2, ..., N. \tag{7}$$

Еще раз подчеркнем, что все системы биполярных координат, связанные с конкретными листами, совпадают при сложении листов в "тетрадь", сшитую по отрезку $[-c, c]$.

2. Метод решения

Задачу для уравнения (1) с условием (7) разделим на две: первая – это задача для уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ с краевым условием (7) и условиями сопряжения (2), (3), а вторая – задача для уравнения Пуассона (1) с нулевыми краевыми условиями на дугах $\beta = \beta_k$ и теми же условиями сопряжения. Очевидно, что сумма решений этих двух задач будет решением уравнения Пуассона при краевых условиях (7) и условиях сопряжения (2), (3).

2.1. Решение уравнения Лапласа при ненулевых краевых условиях

С учетом (6) на каждом листе будем иметь уравнение:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial\beta^2} = 0,\quad -\infty < \alpha < \infty,\ \beta > 0 \tag{8}$$

Решение для сегмента с номером k берем в виде:

$$u_k = \int_{-\infty}^{\infty}\left[A_k(\lambda)sh\lambda\beta + B(\lambda)ch\lambda\beta\right]e^{i\lambda\alpha}d\lambda, \tag{9}$$

где $A_k(\lambda)$ и $B(\lambda)$ – произвольные функции.

На отрезке $[-c,c]$ имеем: $\beta=0$, поэтому первому условию сопряжения (2) функции (9) удовлетворяют при произвольных функциях $A_k(\lambda)$ и $B(\lambda)$.

Второе условие сопряжения (3) переходит в условие:

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k\left(\frac{\partial u_k}{\partial\beta}\right)\Bigg|_{\beta=0}=0, \tag{10}$$

которое для функций (9) превращается в равенство:

$$\sum_{k=1}^{N}\mu_k A_k(\lambda)=0. \tag{11}$$

Для определения функций $A_k(\lambda)$ и $B(\lambda)$ воспользуемся краевыми условиями (7). Из (9) и (7) найдем:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[A_k(\lambda)sh\lambda\beta_k+B(\lambda)ch\lambda\beta_k\right]e^{i\lambda\alpha}d\lambda=\psi_k(\alpha). \tag{12}$$

Предположим, что функция $\psi_k(\alpha)$ разлагается в интеграл Фурье. Тогда из (12) имеем:

$$A_k(\lambda)sh\lambda\beta_k+B(\lambda)ch\lambda\beta_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\psi_k(t)e^{-i\lambda t}dt\equiv\overline{\psi}_k(\lambda) \tag{13}$$

или

$$A_k(\lambda)=\frac{1}{sh\lambda\beta_k}(\overline{\psi}_k(\lambda)-B(\lambda)ch\lambda\beta_k). \tag{14}$$

Найденные функции $A_k(\lambda)$ подставим в (11), в результате чего получим уравнение для определения $B(\lambda)$:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k}{sh\lambda\beta_k}\overline{\psi}_k(\lambda)-\sum_{k=1}^{N}B(\lambda)\mu_k cth\lambda\beta_k=0,$$

$$B(\lambda)\cdot\sum_{k=1}^{N}\mu_k cth\lambda\beta_k=\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k}{sh\lambda\beta_k}\overline{\psi}_k(\lambda),$$

$$B(\lambda)=\frac{\sum_{k=1}^{N}\frac{\mu_k}{sh\lambda\beta_k}\overline{\psi}_k(\lambda)}{\sum_{k=1}^{N}\mu_k cth\lambda\beta_k}. \tag{15}$$

После определения $B(\lambda)$ функции $A_k(\lambda)$ найдем из (14).

На этом решение первой задачи завершено. Найденные функции (9) удовлетворяют всем условиям задачи.

Замечание 1. Может случиться, что функции $\psi_k(\pm\infty) \neq 0$, тогда интеграл Фурье в (13) расходится и получить решение по предложенной схеме нельзя. В этом случае поступим несколько иначе.

Представим функции $\psi_k(\alpha)$ в виде:

$$\psi_k(\alpha) = \omega_k(\alpha) + \sigma(\alpha), \quad \sigma(\alpha) = ax + b, \quad \omega_k(\alpha) = \psi_k(\alpha) - \sigma(\alpha).$$

Параметры a и b выберем из условия: $\psi_k(+\infty) = \psi_k(-\infty) = 0$.

Следует заметить, что эти параметры определяются единственным образом и не зависят от k, так как все функции $\psi_k(+\infty)$ и $\psi_k(-\infty)$ одинаковы для всех k.

Функция $\sigma(\alpha)$ удовлетворяет уравнению Лапласа и всем условиям сопряжения. Исходя из этого, представим $u_k(\alpha,\beta)$ в виде:

$$u_k(\alpha,\beta) = \tilde{u}_k(\alpha,\beta) + \sigma(\alpha),$$

где $\tilde{u}_k(\alpha,\beta)$ – решение уравнения Лапласа для граничной функции $\omega_k(\alpha)$ с прежними условиями сопряжения.

Далее $\tilde{u}_k(\alpha,\beta)$ находим по схеме, изложенной выше.

Замечание 2. На линиях $\beta = \beta_k$ могут быть заданы краевые условия задачи Неймана; кроме того, на разных $\beta = \beta_k$ могут быть заданы разные краевые условия.

2.2. Решение уравнения Пуассона $\Delta_{xy} u = f(x, y)$ при нулевых краевых условиях

Необходимо найти решения уравнений

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial \beta^2} = \frac{c^2 f_k(\alpha,\beta)}{(ch\alpha + \cos\beta)^2}, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{16}$$

при граничных условиях $u_k(\alpha, \beta_k) = 0$ и условиях сопряжения (2), (3).

Для этого правую часть (16) представим в виде интеграла Фурье:

$$\frac{c^2 f_k(\alpha,\beta)}{(ch\alpha + \cos\beta)^2} = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{f}_k(\beta,\lambda) e^{i\lambda\alpha} d\lambda, \tag{17}$$

где

$$\overline{f}_k(\beta,\lambda) = \frac{c^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f_k(t,\beta) e^{-i\lambda t}}{(cht + \cos\beta)^2} dt.$$

Решение u_k уравнения (16) представим в виде:

$$u_k = \int_{-\infty}^{+\infty} C_k(\beta,\lambda) e^{i\lambda\alpha} d\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots, N, \tag{18}$$

где функции $C_k(\beta,\lambda)$ должны удовлетворять уравнению:

$$C_k'' - \lambda^2 C_k = \overline{f}_k(\beta,\lambda), \tag{19}$$

и условиям:

$$\begin{cases} C_k(\beta_k,\lambda)=0, \quad C_k(0,\lambda)=C_{k+1}(0,\lambda) \quad (k=1,2,\ldots,N-1), \\ \sum\limits_{k=1}^{N}\mu_k C'_k(0,\lambda)=0. \end{cases} \tag{20}$$

Последние два условия в (20) являются условиями сопряжения.

Найдем решение уравнения (19) методом вариации произвольных постоянных:

$$C_k(\beta,\lambda)=a_k(\beta,\lambda)sh\lambda\beta+b_k(\beta,\lambda)ch\lambda\beta\,, \tag{21}$$

где

$$a_k(\beta,\lambda)=\lambda^{-1}\int\limits_0^{\beta}\overline{f}_k(t,\lambda)ch\lambda t dt+A_k(\lambda)\,,$$

$$b_k(\beta,\lambda)=-\lambda^{-1}\int\limits_0^{\beta}\overline{f}_k(t,\lambda)sh\lambda t dt+B(\lambda)\,.$$

Тогда

$$C_k(\beta,\lambda)=\lambda^{-1}\int\limits_0^{\beta}\overline{f}_k(t,\lambda)sh\lambda(\beta-t)dt+A_k(\lambda)sh\lambda\beta+B(\lambda)ch\lambda\beta.$$

Условия $C_k(\beta_k,\lambda)=0$ на дугах $\beta=\beta_k$ дают равенства:

$$\lambda^{-1}\int\limits_0^{\beta_k}\overline{f}_k(t,\lambda)sh\lambda(\beta_k-t)dt+A_k(\lambda)sh\lambda\beta_k+B(\lambda)ch\lambda\beta_k=0\,.$$

Откуда

$$A_k(\lambda)=-B(\lambda)cth\lambda\beta_k-\lambda^{-1}\int\limits_0^{\beta_k}\overline{f}_k(t,\lambda)\frac{sh\lambda(\beta_k-t)}{sh\lambda\beta_k}dt\,. \tag{22}$$

Второе условие (20) выполняется автоматически.

Найдем $C'_k(\beta,\lambda)$:

$$C'_k(\beta,\lambda)=a'_k(\beta,\lambda)sh\lambda\beta+\lambda a_k(\beta,\lambda)ch\lambda\beta+b'_k(\beta,\lambda)ch\lambda\beta+\lambda b_k(\beta,\lambda)sh\lambda\beta\,.$$

Тогда

$$C'_k(0,\lambda)=\lambda a_k(0,\lambda)+b'_k(0,\lambda)=\lambda A_k(\lambda)\,.$$

Для определения $A_k(\lambda)$ имеем равенство:

$$\mu_1 A_1(\lambda)+\mu_2 A_2(\lambda)=0\,.$$

Подставим в него функции $A_k(\lambda)$ из (22), в результате чего получим:

$$(\mu_1 cth\lambda\beta_1+\mu_2 cth\lambda\beta_2)\lambda B(\lambda)=\mu_1\int\limits_0^{\beta_1}\overline{f}_1(t,\lambda)\frac{sh\lambda(t-\beta_1)}{sh\lambda\beta_1}dt+$$

$$+\mu_2\int\limits_0^{\beta_2}\overline{f}_2(t,\lambda)\frac{sh\lambda(t-\beta_2)}{sh\lambda\beta_2}dt\,,$$

$$B(\lambda)=\frac{1}{\lambda(\mu_1 cth\lambda\beta_1+\mu_2 cth\lambda\beta_2)}\left[\frac{\mu_1}{sh\lambda\beta_1}\gamma_1++\frac{\mu_2}{sh\lambda\beta_2}\gamma_2\right],$$

где

$$\gamma_1(\lambda)=\int\limits_0^{\beta_1}\overline{f}_1(t,\lambda)sh\lambda(t-\beta_1)dt,\quad \gamma_2(\alpha)=\int\limits_0^{\beta_2}\overline{f}_2(t,\lambda)sh\lambda(t-\beta_2)dt.$$

Тогда

$$B(\lambda)=\frac{sh\lambda\beta_1 sh\lambda\beta_2}{\lambda(\mu_1 ch\lambda\beta_1 sh\lambda\beta_2+\mu_2 ch\lambda\beta_2 sh\lambda\beta_1)}\cdot\frac{1}{sh\lambda\beta_1 sh\lambda\beta_2}\left[\mu_1\gamma_1(\lambda)sh\lambda\beta_2+\mu_2\gamma_2(\lambda)sh\lambda\beta_1\right]=$$

$$=\frac{\mu_1\gamma_1(\lambda)sh\lambda\beta_2+\mu_2\gamma_2(\lambda)sh\lambda\beta_1}{\lambda(\mu_1 ch\lambda\beta_1 sh\lambda\beta_2+\mu_2 ch\lambda\beta_2 sh\lambda\beta_1)},$$

где

$$\gamma_k(\lambda)=\int\limits_0^{\beta_k}\overline{f}_k(t,\lambda)sh\lambda(t-\beta_k)dt.$$

Выражение для функций $A_k(\lambda)$ следует из (22):

$$A_k(\lambda)=-B(\lambda)cth\lambda\beta_k-\frac{\gamma_k(\lambda)}{\lambda sh\lambda\beta_k},$$

Полученное решение удовлетворяет всем условиям поставленной задачи.

2.3. Задача о кручении неоднородного стержня, составленного из двух круговых сегментов

В качестве приложения изложенного выше, решим задачу о кручении стержня, составленного из материалов с модулями сдвига G_1 и G_2 в областях 1 и 2 соответственно (рис. 1). Параметры R_1, R_2 и отрезок $O_1O_2=l$ считаем заданными. Тогда масштабный параметр c находим из уравнения:

$$\sqrt{R_1^2-c^2}+\sqrt{R_2^2-c^2}=l,$$

а β_1 и β_2 – из равенств: $\sin\beta_1=\frac{c}{R_1}$, $\sin\beta_2=\frac{c}{R_2}$.

Задача сводится к решению уравнения кручения [5] в областях 1 и 2:

$$\Delta_{xy}u_k=-2G_k,\quad k=1,2,$$

с граничными условиями $u_k=0$ и условиями сопряжения на линии $y=0$:

$$u_1=u_2,\quad G_1^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial y_1}+G_2^{-1}\frac{\partial u_2}{\partial y_2}=0.$$

С учетом того, что y_1 и y_2 имеют один и тот же смысл для областей 1 и 2, последнее условие запишем следующим образом:

$$G_1^{-1}\frac{\partial u_1}{\partial y}+G_2^{-1}\frac{\partial u_2}{\partial y}=0.$$

В координатах биполярной системы оно будет выглядеть так:

$$\mu_1 \frac{\partial u_1}{\partial \beta} + \mu_2 \frac{\partial u_2}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0} = 0, \quad \mu_k = G_k^{-1}.$$

Тогда уравнение кручения примет вид:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \beta^2} + \frac{\partial^2 u_k}{\partial \alpha^2} = \frac{-2G_k c^2}{(ch\alpha + \cos\beta)^2}, \quad k = 1{,}2,$$

а его правую часть можно представить в виде (17), где

$$\overline{f}_k(\beta, \lambda) = \frac{-2G_k c^2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos\lambda t}{(cht + \cos\beta)^2} dt.$$

Этот интеграл вычисляется через элементарные функции [6], если учесть, что

$$J(\beta) = \int_0^\infty \frac{\cos\lambda t}{(cht + \cos\beta)^2} dt = \pi \frac{sh\lambda\beta}{\sin\beta \, sh\pi\lambda}$$

и продифференцировать последний по β.

В результате получим:

$$\int_0^\infty \frac{\cos\lambda t}{(cht + \cos\beta)^2} dt = \frac{\pi}{sh\pi\lambda} \cdot \frac{\lambda \, ch\lambda\beta \sin\beta - \cos\beta \, sh\lambda\beta}{\sin^3\beta}.$$

Тогда

$$\overline{f}_k(\beta, \lambda) = \frac{2G_k c^2}{sh\pi\lambda \sin^3\beta}\left(\cos\beta sh\lambda\beta - \lambda \sin\beta ch\lambda\beta\right). \tag{23}$$

Согласно (18) имеем:

$$u_k = \int_{-\infty}^{\infty} C_k(\beta, \lambda) e^{i\lambda\alpha} d\lambda,$$

где $C_k(\beta, \lambda)$ определяются формулой (26), а $\overline{f}_k(\beta, t)$ в ней – формулой (23).

Таким образом, получено точное решение задачи кручения.

Рассмотрим **второй способ** решения этой же задачи. Введем замену: $u_k = v_k - G_k y^2$, где v_k – новая неизвестная функция.

Для нахождения v_k имеем уравнение Лапласа: $\Delta v_k = 0$, краевые условия:

$$v_k\big|_{\beta_k} = G_k y^2\big|_{\beta_k} = \frac{a^2 \sin^2\beta_k}{(ch\alpha + \cos\beta_k)^2} G_k, \tag{24}$$

и те же условия сопряжения, что и для u_k:

$$v_1(\alpha, 0) = v_2(\alpha, 0), \quad \mu_1 \frac{\partial v_1}{\partial \beta} + \mu_2 \frac{\partial v_2}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0} = 0. \tag{25}$$

Решение уравнения Лапласа в биполярных координатах с учетом четности по α краевых условий (25) выбираем в виде:

$$v_k(\alpha,\beta)=\int_0^\infty [A(\lambda)ch\beta\lambda+B_k(\lambda)sh\beta\lambda]\cos\lambda\alpha d\lambda. \quad (26)$$

При $y=0$ $(\beta=0)$ первое условие сопряжения $v_1(\alpha,0)=v_2(\alpha,0)$ выполняется.

Краевые условия на дугах приводят к равенствам:

$$\int_0^\infty [A(\lambda)ch\lambda\beta_k+B_k(\lambda)sh\lambda\beta_k]\cos\lambda\alpha d\lambda=G_k a^2\sin^2\beta_k(ch\alpha+\cos\beta_k)^{-2}. \quad (27)$$

Обратим эти равенства, используя формулу косинус-преобразования Фурье:

$$A(\lambda)ch\lambda\beta_k+B_k(\lambda)sh\lambda\beta_k=\frac{2}{\pi}a^2G_k\sin^2\beta_k J_1(\beta_k), \quad (28)$$

$$J_1(\beta)=\frac{\pi}{sh\pi\lambda\sin^3\beta}(\lambda\sin\beta ch\lambda\beta-\cos\beta sh\lambda\beta),\quad |\beta|<\pi.$$

Из формулы (28) определим $B_k(\lambda)$:

$$B_k(\lambda)=\frac{1}{sh\lambda\beta_k}\left[\frac{2}{\pi}a^2G_k\sin^2\beta_k J_1(\beta_k)-A(\lambda)ch\lambda\beta_k\right]. \quad (29)$$

Второе условие сопряжения (25) перейдет в условие:

$$\mu_1B_1(\lambda)+\mu_2B_2(\lambda)=0,\quad \mu_k=G_k^{-1},$$

из которого после подстановки в него найденных функций $B_k(\lambda)$, получим:

$$\mu_1A(\lambda)cth\lambda\beta_1+\mu_2A(\lambda)cth\lambda\beta_2=\frac{2}{\pi}a^2\left[\frac{\sin^2\beta_1}{sh\lambda\beta_1}J_1(\beta_1)+\frac{\sin^2\beta_2}{sh\lambda\beta_2}J_1(\beta_2)\right].$$

Откуда

$$A(\lambda)=\frac{2}{\pi}a^2\frac{\sin^2\beta_1 sh\lambda\beta_2J_1(\beta_1)+\sin^2\beta_2 sh\lambda\beta_1J_1(\beta_2)}{\mu_1ch\lambda\beta_1sh\lambda\beta_2+\mu_2ch\lambda\beta_2sh\lambda\beta_1}.$$

Функции $B_k(\lambda)$ найдем из формулы (29).

2.4. Задача стационарной теплопроводности для двух склеенных между собой полусегментов при нулевых краевых условиях

Пусть источники тепла распределены по закону $f_k=-\alpha/\mu_k$, где μ_k – коэффициент теплопроводности в полусегменте [7] (рис. 2).

Выберем решение задачи в виде (см. формулу (18)):

$$u_k(\alpha,\beta)=\int_0^\infty C_k(\beta,\lambda)\sin\lambda\alpha d\lambda. \quad (30)$$

Тогда будем иметь:

$$u_k(0,\beta)=0. \quad (31)$$

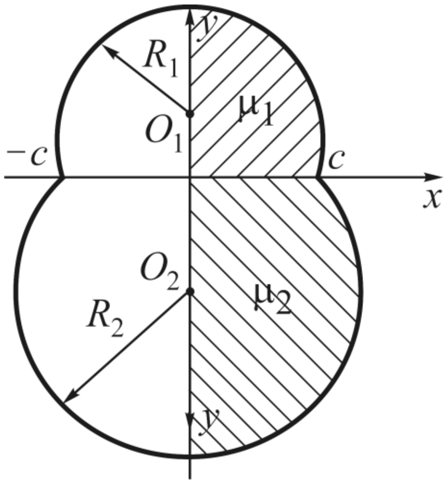

Рис. 2. К задаче теплопроводности

Дальше весь процесс решения повторяет схему, изложенную в пункте 2.2.

Интеграл для $\overline{f}(\beta,\lambda)$ может быть вычислен:

$$\overline{f}(\beta,\lambda)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{t\sin\lambda t dt}{(cht+\cos\beta)^2}=\frac{2}{\sin\beta sh\pi\lambda}\cdot\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\beta ch\lambda\beta-\pi\, cth\pi\lambda sh\lambda\beta}{\sin\beta}\right).$$

Замечание 3. Все формальные выкладки и окончательные формулы можно строго обосновать, наложив соответствующие ограничения на функции граничных условий и на функции источников. В приведенных задачах интегралы для $\overline{f}(\beta,\lambda)$ имеют асимптотику при $\beta>0$ и $\lambda\to\infty$ вида $O\left(e^{-\pi\lambda+\lambda\beta}\right)$. В этих случаях легко показать, что все несобственные интегралы сходятся равномерно. Предельный переход в (30) при $\alpha\to 0$ дает $u_k(0,\beta_k)=0$.

Выводы

Решена новая задача о расчете потенциального поля для двумерного уравнения Пуассона в многолистной пластине книжной структуры, составленной из N круговых сегментов. От классической постановки такая задача отличается наличием условий сопряжения на линии соединения листов. Метод решения основан на применении N биполярных систем координат, каждая из которых связана с одним листом. Использован классический метод Фурье.

В качестве приложения дано точное решение задачи кручения неоднородного стержня, составленного из двух сегментов, и задачи стационарной теплопроводности о распределении тепла в пластине, составленной из двух разных полусегментов.

Рассмотрена только задача с краевыми условиями Дирихле на дугах окружностей, хотя метод решения можно развить и для других краевых условий (условия задачи Неймана, третьей краевой задачи), а также для случая, когда на дугах разных листов заданы разные краевые условия.

Список литературы

1. Денисова, Т. В., Проценко, В. С. Некоторые обобщения классических формул Пуассона и Дини для двумерного уравнения Лапласа // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ", 2011. – Вып. 51. – С. 30-40.

2. Проценко, В. С., Денисова, Т. В. Расчёт потенциального поля в тонких многолистных пластинах, состоящих из круговых полуколец // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ", 2010. – Вып. 46. – С. 189-198.

3. Денисова, Т. В., Проценко, В. С. Нестационарные температурные поля в тонких составных пластинах и оболочках // Открытые информационные и компьютерные интегрированные технологии: сб. науч. тр. – Харьков : Нац. аэрокосм. ун-т "ХАИ", 2012. – Вып. 56. – С. 98-106.

4. Лебедев, Н. Н., Скальская, И. П., Уфлянд, Я. С. Сборник задач по математической физике. – Москва : Государственное издательство технико-теоретической литературы, 1955. – 420 с.

5. Арутюнян, Н. Х., Абрамян, Б. Л. Кручение упругих тел. – Москва : Физматгиз. – 1963. – 686 с.

6. Бейтмен, Г., Эрдейн, А. Таблицы интегральных преобразований. – Москва : Наука. – 1969. – Т. 1. – 343 с.

7. Карслоу, Г., Егер, Д. Теплопроводность твердых тел. – Москва : Наука. – 1964. – 487 с.

References

1. Denisova, T. V., Protsenko, V. S. Nekotorye obobshcheniya klassicheskikh formul Puassona i Dini dlya dvumernogo uravneniya Laplasa [Some generalizations of the classical Poisson and Dini formulas for the two-dimensional Laplace equation]. *Otkrytye informacionnye komp'juternye integrirovannye tehnologii: sb. nauch. tr.*, Khar'kov, Nats. aerokosm. un-t "KhAI" Publ., 2011, vol. 51, pp. 30-40.

2. Protsenko, V. S., Denisova, T. V. Raschet potentsial'nogo polya v tonkikh mnogolistnykh plastinakh, sostoyashchikh iz krugovykh polukolets [Calculation of the potential field in thin multi-sheet plates consisting of circular half-rings]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologii: sb. nauch. tr.*, Khar'kov, Nats. aerokosm. un-t "KhAI" Publ., 2010, vol. 46, pp. 189-198.

3. Denisova, T. V., Protsenko, V. S. Nestatsionarnye temperaturnye polya v tonkikh sostavnykh plastinakh i obolochkakh [Non-stationary temperature fields in thin composite plates and shells]. *Otkrytye informatsionnye i komp'yuternye integrirovannye tekhnologii: sb. nauch. tr.*, Khar'kov, Nats. aerokosm. un-t "KhAI" Publ., 2012, vol. 56, pp. 98-106.

4. Lebedev, N. N., Skal'skaya, I. P., Uflyand, Ya. S. Sbornik zadach po matematicheskoy fizike [Collection of problems in mathematical physics]. Moskva, GITTL Publ., 1955. 420 p.

5. Arutyunyan, N. Kh., Abramyan, B. L. Kruchenie uprugikh tel [Torsion of elastic bodies]. Moskva, Fizmatgiz Publ., 1963. 686 p.

6. Beytmen, G., Erdeyn, A. Tablitsy integral'nykh preobrazovaniy [Integral conversion tables]. Moskva, Nauka Publ., 1969, vol. 1, 343 p.

7. Karslou, G., Eger, D. Teploprovodnost' tverdykh tel [The thermal conductivity of solids]. Moskva, Nauka Publ., 1964. 487 p.

Поступила в редакцию 00.12.2020, рассмотрена на редколлегии 00.12.2020

Про крайові задачі для рівняння Пуассона у багатолистій області, складеній із різних кругових сегментів

Розглянуто некласичну крайову задачу математичної фізики для двовимірного рівняння Пуассона. За область, в якій знаходять розв’язок, узято область, утворену з різних кругових сегментів, складених у багатолисту пластину книжкової структури. Всі листи відрізняються один від одного, як за своїми фізичними властивостями, так і за геометричними розмірами, і з'єднані між собою за хордою, загальною для всіх листів. Наведено постановку задачі та отримано її точний розв'язок.

Розв’язок задачі розглянуто у біполярних системах координат, кожна з яких пов'язана з певним сегментом. До того ж, усі системи координат мають загальний параметр – довжину прямолінійної межі сегмента. Як метод розв'язання задачі використано класичний метод відокремлення змінних – метод Фур'є. Хоча як основну задачу розглянуто задачу Дирихле, однак, запропонований метод можна застосувати й у разі, коли на дугах окремих кіл будуть задані умови інших типів, а саме: Неймана або третьої основної задачі.

Постановка розглянутої задачі відрізняється від класичної тим, що до традиційних граничних умов додано умови спряження полів на лінії з'єднання сегментів. Цими умовами є рівність значень функцій і рівність нулю суми лінійних комбінацій їх нормальних похідних. Розв’язок сконструйовано (вибрано) так, що перша з умов спряження полів задовольняється автоматично за будь-якого вибору невідомих функцій. Крайові умови на сегментах і друга умова спряження дозволяють визначити усі невідомі функції задачі. Для застосування методу Фур'є необхідною є умова, щоб усі граничні функції у кутових точках сегментів дорівнювали нулю. У разі її порушення запропоновано модифікацію методу, що дозволяє отримати точний розв’язок і в цьому випадку. Як застосування розглянуто: а) задачу про крутіння складеного стрижня, поперечний переріз якого є двома різними сегментами; б) стаціонарна задачу теплопровідності для двох напівсегментів, які склеєно між собою, з джерелами тепла всередині області. Отримано точні аналітичні розв’язки цих нових задач.

Ключові слова: гранична задача; двовимірне рівняння Пуассона; багатолиста пластина; кругові сегменти; метод Фур'є; умови спряження; крутіння стрижня; стаціонарна задача теплопровідності.

On the boundary problems for the Poisson equation in a multivalent domain composed of different circular segments

The non-classical boundary problem of the mathematical physics for the two-dimensional Poisson equation is considered. As the area, in which the solution is sought, the area, made up of different circular segments, folded into a multi-sheet plate of a book structure, is taken. All sheets are different from each other, both in their physical properties and in geometric dimensions, and are interconnected by a chord common to all sheets. The problem statement is given and its exact solution is obtained.

The solution to the problem is considered in bipolar coordinate systems, each of which is associated with one of the segments. In this case, all coordinate systems have a common parameter - the length of the rectilinear segment boundary. As a method for solving the problem, the classical method of separation of variables is used – the Fourier method. Although the Dirichlet problem is considered as a basic one, however, the proposed method can be applied in the case when conditions of other types are given on the arcs of separate circles: Neumann or the third main problem.

The statement of the considered problem differs from the classical one in that the conjugation conditions of fields on the line of connection of segments are added to the traditional boundary conditions. These conditions represent the equality of the values of the functions and the equality to zero of the sum of linear combinations of their normal derivatives. The solution is constructed (selected) in such a way that the first of the field conjugation conditions is fulfilled automatically for any choice of unknown functions. The boundary conditions on the segments and the second conjugation condition make it possible to determine all the unknown functions of the problem. To apply the Fourier method, it is necessary that all boundary functions are equal to zero at the corner points of the segments. If this condition is violated, a modification of the method that allows one to obtain an exact solution in this case is proposed. As an application, such problems are considered: a) on the torsion of a composite rod, the cross-section of which is two different segments; b) the stationary heat conductivity problem for two glued half-segment with sources of heat inside the area. Exact analytical solutions to these new problems have been obtained.

Keywords: boundary problem; two-dimensional Poisson equation; multi-sheet plate; circular segments; Fourier method; conjugation conditions; torsion of the rod; stationary heat conductivity problem.

Відомості про авторів:

Денисова Тетяна Володимирівна – кандидат технічних наук, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця (61166, Україна, м. Харків, пр. Науки, 9а, e-mail: tetiana.denysova@hneu.net). ORCID : 0000-0001-7254-0901.

Рибалко Антоніна Павлівна – кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики та економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця (61166, Україна, м. Харків, пр. Науки, 9а, e-mail: Antonina.Rybalko@hneu.net). ORCID : 0000-0002-2253-1393.

About the authors:

Denysova Tetiana – Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Economic-Mathematical Methods of the Kharkov National Economic University named after Symon Kuznets (61166, Ukraine, Kharkov, Nauki ave., 9a, e-mail: tetiana.denysova@hneu.net). ORCID : 0000-0001-7254-0901.

Rybalko Antonina – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Economic-Mathematical Methods of the Kharkov National Economic University named after Symon Kuznets (61166, Ukraine, Kharkov, Nauki ave., 9a, e-mail: Antonina.Rybalko@hneu.net). ORCID : 0000-0002-2253-1393.