МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ**

Л. М. Малярець
О. К. Шевченко
О. В. Мартинова

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник
для студентів спеціальності
232 "Соціальне забезпечення"
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2021

УДК 51-7(075.034)
М21

Авторський колектив: д-р екон. наук, проф. Л. М. Малярець – розд. 2, підрозд. 9 – 12; канд. техн. наук, доцент О. К. Шевченко – розд. 1, підрозд. 1 – 4; канд. екон. наук, доцент О. В. Мартинова – розд. 1, підрозд. 5, 6; розд. 2, підрозд. 7, 8.

Рецензенти: професор кафедри прикладної математики Харківського національного університету радіоелектроніки, д-р техн. наук, професор *Т. Є. Романова*; доцент кафедри інформаційних технологій та кібербезпеки факультету № 4 Харківського національного університету внутрішніх справ, канд. техн. наук *С. Б. Шеховцов.*

Рекомендовано до видання рішенням ученої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.
Протокол № 3 від 15.03.2021 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Малярець Л. М.
М21 Прикладна математика [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 232 "Соціальне забезпечення" першого (бакалаврського) рівня / Л. М. Малярець, О. К. Шевченко, О. В. Мартинова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2021. – 201 с.
ISBN 978-966-676-828-8

Наведено приклади та завдання з математики, надано рекомендації до виконання завдань, а також приклади розв'язання типових задач із метою надання студентам допомоги в засвоєнні теоретичних знань і набутті практичних навичок із навчальної дисципліни.

Рекомендовано для студентів спеціальності 232 "Соціальне забезпечення" першого (бакалаврського) рівня денної форми навчання.

УДК 51-7(075.034)

ISBN 978-966-676-828-8

Вступ

Значним науковим досягненням сучасності стало впровадження математичних методів у економічну науку і в управління економічними процесами. Наукове управління цими процесами може здійснюватись тільки на основі застосування точних математичних методів у всіх сферах господарювання – від прогнозування розміщення корисних копалин до вивчення пропозиції та попиту на товари широкого збуту, від складання оптимальних планів виробництва до планування транспортних перевезень, розміщення транспортних артерій та ін.

У зв'язку зі зростанням ролі аналітичних досліджень соціально-економічних процесів майбутнім економістам, програмістам, менеджерам, інженерам потрібна глибока математична підготовка, яка надасть можливість за допомогою математичних інструментів досліджувати широке коло проблем в їх діяльності, застосовувати засоби сучасного програмного забезпечення і комп'ютерної техніки.

Основними завданнями вивчення навчальної дисципліни "Прикладна математика" є надання студентам знань з основних розділів вищої математики, теорії ймовірностей, математичної статистики й експертних оцінок, а також підвищення рівня фундаментальної математичної підготовки студентів з посиленням її прикладної спрямованості й отримання необхідної математичної бази для вивчення інших дисциплін як математичного, так і нематематичного циклу.

У процесі опанування навчальної дисципліни "Прикладна математика" студент отримує аналітично-дослідницькі компетентності, а саме здатність до: ідентифікації характеристик економічних процесів за допомогою вибіркового методу; застосування кореляційно-регресійного аналізу під час опрацюванні різних економічних явищ; розуміння змісту економічних величин, що входять до складу моделі парної регресії; оволодіння методами експертних оцінок.

У результаті засвоєння теоретичного матеріалу студент повинен уміти: формувати репрезентативну вибіркову сукупність; будувати варіаційний ряд та оцінювати основні числові характеристики випадкової величини за результатами дослідження вибірки; розрізняти види залежностей між економічними факторами та визначати суттєвість кореляційного зв'язку; використовувати довідкову та спеціальну літературу з позицій наукового підходу до управління соціальною сферою.

Навчальний посібник побудований відповідно до робочої програми дисципліни "Прикладна математика" для спеціальності 232 "Соціальне забезпечення" першого (бакалаврського) рівня.

Розділ 1 "Елементи математичного аналізу та лінійної алгебри" дозволяє вивчити основи вищої математики, які дають можливість створити математичний фундамент для засвоєння прикладних понять. Розглянуто елементи теорії матриць, системи лінійних алгебраїчних рівнянь, елементи векторної алгебри, проценти прості та складені, функції та графіки, границі функцій та неперервність, диференціальне числення функції однієї змінної.

Розділ 2 "Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики" дозволяє засвоїти методи та засоби використання математичних моделей в економічних дослідженнях, а також для розв'язування виробничих задач. У цьому розділі розглянуто елементи теорії експертних оцінок, емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей та математичної статистики, схема незалежних випробувань, дискретні та неперервні випадкові величини, первинне опрацювання статистичних даних, елементи теорії кореляції та регресії.

До кожного розділу наведені приклади.

Навчальний посібник корисний для студентів суміжних спеціальностей, які вивчають аналогічні розділи, та аспірантів.

Розділ 1. Елементи математичного аналізу та лінійної алгебри

1. Елементи теорії матриць

1.1. Матриці

Матрицею розміру m на n ($m \times n$) називають прямокутну таблицю чисел, яка має m рядків і n стовпців. Числа, що складають матрицю, називають її **елементами.**

Матриці позначають великими літерами латинського алфавіту A, B, C та іншими, а їх елементи – відповідними малими літерами з подвійними індексами a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, де індекс i відповідає номеру рядка матриці ($i = \overline{1,m}$), а j – номеру її стовпця ($j = \overline{1,n}$).

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Кожний елемент a_{ij} матриці A знаходиться на перетині i-го рядка та j-го стовпця. Для зображення матриць множину елементів беруть у круглі (або у квадратні) дужки.

У загальному випадку елементами матриці можуть бути інші об'єкти: вектори, функції, їх похідні тощо.

У теоретичних дослідженнях при посиланні на матрицю певного розміру зазвичай застосовують позначення $A = (a_{ij})_{m \times n}$.

Матриця $A = (a_{ij})_{n \times n}$, у якої кількість рядків дорівнює кількості стовпців $(m = n)$ і дорівнює n, є **квадратною матрицею порядку n** (або n-го порядку); у протилежному випадку $(m \neq n)$ матрицю називають **прямокутною**.

Матрицею-рядком називається матриця розміру $1 \times n$, тобто така, що складається з одного рядка.

Матрицею-стовпцем називається матриця розміру $m \times 1$, яка має один стовпець.

Якщо розглядається матриця-рядок (або матриця-стовпець), то для її елементів номер рядка (або, відповідно, номер стовпця) вказувати не треба. Матриця може складатися навіть з одного елемента.

Нульовою матрицею називають матрицю, всі елементи якої дорівнюють нулю. Вона позначається літерою O.

Головною діагоналлю квадратної матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$ називається сукупність її елементів, що мають однакові індекси $i=j$, тобто це елементи a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}, а сукупність елементів $a_{1n}, a_{2(n-1)}, ..., a_{(n-1)2}, a_{n1}$ називають **побічною діагоналлю** квадратної матриці.

Симетричною називається квадратна матриця, у якої всі елементи, що розташовані симетрично відносно головної діагоналі, є попарно рівними між собою. Тобто для довільних її елементів при $i\neq j$ виконується співвідношення: $a_{ij}=a_{ji}$, де $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,n}$.

Якщо елементи кожного рядка матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ записати в стовпець, не порушуючи порядку їхнього розташування, то отримаємо матрицю $A^T=\left(a_{ji}\right)_{n\times m}$, яка називається **транспонованою** до матриці A:

$$A^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & ... & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & ... & a_{m2} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & a_{2n} & ... & a_{mn} \end{pmatrix},$$

а сама операція переходу від матриці A до матриці A^T називається **транспонуванням** матриці. Зрозуміло, що двічі транспонована матриця дає вихідну матрицю: $\left(A^T\right)^T=A$, а симетрична матриця співпадає зі своєю транспонованою.

Верхньою (**нижньою**) **трикутною матрицею** називається ненульова квадратна матриця, усі елементи якої, що розташовані нижче (вище) головної діагоналі, дорівнюють нулю.

Діагональною матрицею називається квадратна матриця, у якої всі елементи (окрім, можливо, елементів головної діагоналі) дорівнюють нулю. Таку матрицю доцільно задавати переліком її діагональних елементів, указуючи тільки один індекс: $\mathrm{diag}(d_1, d_2, ..., d_n)$.

Одиничною матрицею називається діагональна матриця, усі елементи головної діагоналі якої дорівнюють одиниці:

$$E=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{pmatrix}.$$

Позначення одиничної матриці зручно супроводжувати індексом, який указує на її **порядок**; отже, одинична матриця розміру $n\times n$ позначається E_n.

Символічні означення основних типів матриць та їх приклади наведені в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Основні різновиди матриць

№ з/п	Різновид матриці	Символьний запис	Приклад
1	2	3	4
1	Прямокутна матриця A розміру $m\times n$	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ або $A=(a_{ij})_{m\times n}$	$A=\begin{pmatrix} 2 & 12 \\ 1 & -3 \\ 0 & 5 \\ 8 & 27 \end{pmatrix}$ $m\times n=4\times 2$
2	Квадратна матриця A n-го порядку	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ або $A=(a_{ij})_{n\times n}$	$A=\begin{pmatrix} 31 & 3 & -8 \\ 9 & 10 & -1 \\ 0 & 52 & -3 \end{pmatrix}$ $n=3$
3	Верхня трикутна матриця A розміру $m\times n$	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 31 & -7 & 4 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$

Закінчення табл. 1.1

1	2	3	4
4	Нижня трикутна матриця A розміру $m\times n$	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 6 & 10 & 0 \\ 9 & 0 & -3 \end{pmatrix}$
5	Діагональна матриця A n-го порядку	$A=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}=D$	$A=\begin{pmatrix} 31 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}=$ $=\operatorname{diag}(31, 10, -3)$
6	Одинична матриця A n-го порядку	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}=E_n$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=E_3$
7	Нульова матриця A розміру $m\times n$	$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}=O_{m\times n}$	$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=O_{3\times 3}$
8	Матриця-стовпець	$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_i \\ \dots \\ a_m \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 31 \\ -2 \\ 15 \end{pmatrix}$
9	Матриця-рядок	$A=\begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_j & \dots & a_n \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -7 \end{pmatrix}$

Елементи двох матриць однакового розміру, які стоять на перетині тих самих (за номером) рядків і стовпців, називаються **відповідними**.

Матриці $A=(a_{ij})_{m\times n}$ і $B=(b_{ij})_{m\times n}$ однакового розміру називаються ***рівними***, якщо їхні відповідні елементи рівні між собою:

$$A=B \iff \left(a_{ij}=b_{ij}, \quad \forall i=\overline{1,m}, \quad \forall j=\overline{1,n}\right).$$

Над матрицями означені такі ***дії*** (***операції***): множення матриці на скаляр, додавання матриць, множення матриць. Розглянемо означення і властивості цих операцій.

Добутком матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ **зі скаляром** $\lambda=\mathrm{const}$ називається матриця $C=\left(c_{ij}\right)_{m\times n}$, відповідні елементи якої є добутком елементів матриці A зі сталим множником λ:

$$C=\lambda A \;\Leftrightarrow\; c_{ij}=\lambda a_{ij}.$$

Якщо $\lambda=-1$, то отримуємо матрицю, яка називається **протилежною** (до) матриці A: $-A=(-1)\cdot A$.

Сумою матриць $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ і $B=\left(b_{ij}\right)_{m\times n}$ однакового розміру називають матрицю $C=A+B$ того ж самого розміру, кожний елемент c_{ij} якої є сумою відповідних елементів вихідних матриць:

$$C=A+B \;\Leftrightarrow\; \left(c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\quad \forall i=\overline{1,m},\quad \forall j=\overline{1,n}\right).$$

Згідно з означенням нульової матриці маємо: $A+O=A$.

Наслідок: різницю двох матриць $C=A-B$ можна розглядати як суму матриць, якщо до матриці A додати матрицю, яка протилежна матриці B:

$$A-B=A+(-1)\cdot B.$$

Приклад 1.1. Знайдемо матрицю $C=2A-B$, якщо

$$A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 12\\ 4 & 6\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}10 & 3\\ -2 & 5\\ 15 & 1\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Оскільки задані матриці мають однаковий розмір, то означені дії можна виконати. Отже,

$$C=2A-B=2\cdot\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 12\\ 4 & 6\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}10 & 3\\ -2 & 5\\ 15 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cdot 2-10 & 2\cdot(-1)-3\\ 2\cdot 0-(-2) & 2\cdot 12-5\\ 2\cdot 4-15 & 2\cdot 6-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & -5\\ 2 & 19\\ -7 & 11\end{pmatrix}.$$

Операції додавання матриць і множення матриці на скаляр називаються **лінійними операціями** над матрицями. Ці операції зводяться до відповідних арифметичних дій над числами і мають ті самі властивості, що й операції над числами. Наведемо ці властивості:

а) $A+B=B+A$, $\lambda A=A\lambda$ – **комутативність** (переставний закон);

б) $(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$, $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$ – **асоціативність** (сполучний закон);

в) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$, $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$ – **дистрибутивність** (розподільний закон).

Добутком матриці A розміру $m\times k$ на матрицю B розміру $k\times n$ називається матриця C розміру $m\times n$, елементи якої обчислюються за формулою: $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+a_{i3}b_{3j}+...+a_{ik}b_{kj}$. Відповідно:

$$C=AB \iff (c_{ij}=\sum_{s=1}^{k}a_{is}b_{sj}, \quad \forall i=\overline{1,m}, \quad \forall j=\overline{1,n}).$$

Правило "**рядок на стовпець**": щоб обчислити елемент c_{ij} добутку матриць $C=AB$, треба елементи i-го рядка матриці $A=(a_{ij})_{m\times k}$ помножити на відповідні за номером елементи j-го стовпця матриці $B=(b_{ij})_{k\times n}$ і знайти суму отриманих добутків.

Приклад 1.2. Знайдемо за цим правилом добуток $C=AB$, де

$$A=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix}12\\ -2\\ -5\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B ($k=3$), отже, матрицю A можна помножити на матрицю B. Оскільки матриця A має два рядки, а матриця B – один стовпець, то їхнім добутком буде матриця-стовпець з двома рядками:

$$C=AB=\begin{pmatrix}3 & -2 & 4\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}12\\ -2\\ -5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cdot12+(-2)\cdot(-2)+4\cdot(-5)\\ 0\cdot12+1\cdot(-2)+(-1)\cdot(-5)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}20\\ 3\end{pmatrix}.$$

Зрозуміло, що для наведених матриць не існує добуток матриці B на матрицю A, оскільки матриця B має один стовпець, а матриця A – два рядка.

Із означення добутку матриць випливають такі властивості операції множення матриць.

Для того щоб дві матриці A і B можна було перемножити, необхідно і достатньо, щоб кількість стовпців n першої матриці (множеного A) дорівнювала кількості рядків m другої матриці (множника B); відповідно, добутком матриці розміру $m \times k$ на матрицю розміру $k \times n$ буде матриця розміру $m \times n$.

Якщо матриці A і B є квадратними матрицями однакового розміру, то існують і добуток AB, і добуток BA; але може бути, що $AB \neq BA$, тобто для добутку матриць у загальному випадку не виконується переставний закон. Однак добутки одиничної матриці E з матрицею A (того самого розміру) зліва та справа є рівними між собою і дорівнюють матриці A: $AE = EA = A$.

Для добутку матриць виконується асоціативний закон, а саме:

$$(AB)C = A(BC).$$

Наведемо властивості, притаманні діям над матрицями, у вигляді табл. 1.2.

Таблиця 1.2

Властивості операцій над матрицями

$A+B=B+A$	$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
$A+O=A$	$(A+B)C=AC+BC$
$(A+B)+C=A+(B+C)=A+B+C$	$\lambda(AB)=(\lambda A)B=A(\lambda B)$
$\lambda A=A\lambda$	$(AB)C=A(BC)$
$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$	$(A+B)C=AC+BC$

1.2. Визначники

Квадратним матрицям ставиться у відповідність числова характеристика – визна́чник, або детермінант, який позначають грецькою буквою Δ з посиланням на відповідну матрицю: ΔA (або без нього), а також $\det A$ (від лат. *determinans* – той, що визначає).

Визначником, або **детермінантом, *n*-го порядку** матриці $A=(a_{ij})_{n\times n}$ називається число, яке записано у вигляді квадратної таблиці й обчислюється за певним правилом.

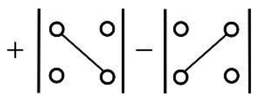
Визначники зображають, як і матрицю, у вигляді таблиці чисел, але в прямих дужках (а не в круглих чи в квадратних):

$$\Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Спочатку розглянемо детермінанти другого та третього порядків.

Детермінант другого порядку дорівнює добутку елементів головної діагоналі мінус добуток елементів побічної діагоналі.

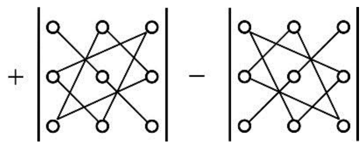
$$n = 2: \ \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}.$$



Праворуч наведено геометричну схему, за якою обчислюється ΔA. На ній елементи визначника позначені кружками, з'єднаними відрізками.

Детермінант третього порядку обчислюється за формулою:

$$n = 3: \quad \Delta A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \\ - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$



Праворуч зображена геометрична схема, за якою обчислюється визначник третього порядку, її називають "***правило трикутників***".

Зауваження. Визначником першого порядку матриці $A = (a_{ij})_{1\times 1} = (a_{11})$ є сам елемент, з якого він складається: $\Delta A = |a_{11}| = a_{11}$.

Приклад 1.3. Обчислимо визначник третього порядку:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 3 & -4 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 3 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \cdot 3 + 5 \cdot (-2) \cdot (-4) - \\ - 5 \cdot 3 \cdot 3 - 0 \cdot (-2) \cdot (-3) - 1 \cdot 1 \cdot (-4) = -10.$$

Кількість членів детермінанта швидко зростає зі збільшенням його порядку.

Властивості визначників

1. Визначник транспонованої матриці A^T дорівнює визначнику вихідної матриці A:

$$\Delta A^T = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1n} & a_{2n} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \Delta A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2. Якщо у визначнику поміняти місцями два рядки, то знак визначника зміниться на протилежний:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = -\Delta, \quad k \neq s,$$

де k і s – номери двох рядків, які міняються місцями.

3. Спільний множник елементів деякого рядка визначника можна винести за знак визначника:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda \cdot a_{k1} & \lambda \cdot a_{k2} & \ldots & \lambda \cdot a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \lambda \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Властивість **3** припускає інше формулювання: якщо всі елементи будь-якого рядка визначника помножити на деяке число λ, то вихідний визначник помножиться на λ.

4. Визначник дорівнює нулю, якщо:

а) усі елементи деякого рядка дорівнюють нулю:

$$\left(\exists i : a_{ij} = 0,\ \forall j = \overline{1,n}\right) \Rightarrow \Delta A = 0;$$

б) він містить рядки з однаковими або пропорційними елементами:

$$\left(\exists\{i_1, i_2\} : a_{i_1 j} = a_{i_2 j} \text{ або } a_{i_1 j} = \lambda \cdot a_{i_2 j}, \forall j = \overline{1,n}\right) \Rightarrow \Delta A = 0.$$

5. Якщо елементи будь-якого рядка визначника (нехай це буде i-тий рядок) є сумою двох доданків, то цей визначник можна подати у вигляді суми двох визначників того ж порядку, в яких елементи всіх рядків, окрім i-го, є елементами вихідного детермінанта, а елементами їхніх i-тих рядків є доданки i-го рядка заданого визначника:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+b_{i1} & a_{i2}+b_{i2} & \cdots & a_{in}+b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

6. Визначник не зміниться, якщо до елементів будь-якого рядка додати відповідні (за номером) елементи іншого рядка, помножені на те саме число k:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1}+ka_{m1} & a_{i2}+ka_{m2} & \cdots & a_{in}+ka_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Дійсно, за попередньою властивістю отримуємо суму двох визначників, перший з яких дорівнює Δ, а другий містить два рядки з пропорційними елементами a_{mj} і ka_{mj} ($\forall j = \overline{1,n}$), тому за властивістю (**4** б) дорівнюватиме нулю.

Мінором елемента a_{ij} визначника n-го порядку (від лат. *minor* – менший) називається визначник $(n-1)$-го порядку, який одержують з вихідного визначника вилученням i-го рядка та j-го стовпця, на перетині яких розташований даний елемент. Він позначається M_{ij}.

Алгебраїчним доповненням елемента $\boldsymbol{a_{ij}}$ визначника n-го порядку називають його мінор, взятий зі знаком "плюс", якщо сума індексів $(i+j)$ є парним числом, і зі знаком "мінус", якщо ця сума індексів непарна. Він позначається A_{ij}:

$$A_{ij}=\left[\begin{array}{l}+M_{ij},\text{ якщо }(i+j)\text{ парне,}\\ -M_{ij},\text{ якщо }(i+j)\text{ непарне,}\end{array}\right.\quad \text{або}\quad A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot M_{ij}.$$

Приклад 1.4. Визначимо мінор і алгебраїчне доповнення елемента a_{12} визначника:

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&4\\4&3&5\end{vmatrix}.$$

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\-1&0&4\\4&3&5\end{vmatrix}\Rightarrow\left(M_{12}=\begin{vmatrix}-1&4\\4&5\end{vmatrix}=-21,\ A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}-1&4\\4&5\end{vmatrix}=21\right).$$

7. Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка або стовпця з їхніми алгебраїчними доповненнями:

$$\Delta=\left[\begin{array}{ll}a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\ldots+a_{in}A_{in} & \forall i=\overline{1,n};\\ a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\ldots+a_{nj}A_{nj} & \forall j=\overline{1,n}.\end{array}\right.$$

8. Сума добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) з алгебраїчними доповненнями відповідних (за номером) елементів іншого рядка або стовпця дорівнює нулю:

$$\left[\begin{array}{llll}a_{i1}A_{k1}+a_{i2}A_{k2}+\ldots+a_{in}A_{kn}=0 & \forall i=\overline{1,n} & \text{при} & k\neq i;\\ a_{1j}A_{1l}+a_{2j}A_{2l}+\ldots+a_{nj}A_{nl}=0 & \forall j=\overline{1,n} & \text{при} & l\neq j.\end{array}\right.$$

Приклад 1.5. Якщо розкладати за елементами першого рядка, то отримуємо:

$$\begin{vmatrix}1&0&5\\-2&3&1\\3&-4&-3\end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=1\cdot\begin{vmatrix}3&1\\-4&-3\end{vmatrix}+5\cdot\begin{vmatrix}-2&3\\3&-4\end{vmatrix}=$$

$$=1\cdot(-9+4)+5\cdot(8-9)=1\cdot(-5)+5\cdot(-1)=-10.$$

Приклад 1.6. Обчислимо визначник четвертого порядку:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix}.$$

Розв'язання. Другий стовпець визначника вже містить нуль ($a_{32} = 0$), а його елемент $a_{12} = 1$ візьмемо за **провідний** і зробимо нулями всі інші елементи другого стовпця. Оскільки перший рядок є провідним, то його елементи залишаємо без зміни, а до елементів другого рядка додаємо відповідні елементи першого, помножені на (–2). До елементів четвертого рядка додаємо відповідні елементи першого, помножені на (–4):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot(-2) & \cdot(-4) \\ & \\ & \\ & \end{matrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 5 \\ -14 & 0 & -5 & -7 \\ 4 & 0 & 2 & 1 \\ -18 & 0 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Розкриваємо визначник за елементами другого стовпця, отримаємо визначник третього порядку:

$$\Delta = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} -14 & -5 & -7 \\ 4 & 2 & 1 \\ -18 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

З першого рядка виносимо множник (-1) і отримаємо визначник:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ -18 & -5 & -19 \end{vmatrix}.$$

Аналогічно зводимо обчислення отриманого визначника до обчислення визначника другого порядку. Для цього візьмемо елемент $a_{23} = 1$ за провідний. Другий рядок визначника залишимо без зміни; до елементів першого рядка додамо відповідні елементи другого, помножені на (–7); до елементів третього рядка – елементи другого, помножені на 19:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 & 5 & 7 \\ 4 & 2 & 1 \\ -18 & -5 & -19 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot(-7) \quad \cdot 19 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} -14 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 58 & 33 & 0 \end{vmatrix}.$$

Розкриваємо цей визначник за елементами третього стовпця і отримуємо визначник другого порядку, який обчислюємо за означенням:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -14 & -9 & 0 \\ 4 & 2 & 1 \\ 58 & 33 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -14 & -9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 14 & 9 \\ 58 & 33 \end{vmatrix} = -60.$$

9. Обчислення визначника трикутної матриці. Визначник верхньої трикутної матриці послідовно розкривають за елементами 1-го стовпця кожного з n визначників, які для такої матриці є алгебраїчними доповненнями елементів головної діагоналі. Тоді вихідний визначник отримуємо у вигляді добутку елементів його головної діагоналі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & a_{44} & \cdots & a_{4n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= ... = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdot ... \cdot a_{nn}.$$

Таку ж формулу отримуємо для обчислення визначника нижньої трикутної матриці.

Приклад 1.7. Розглянемо цей спосіб на прикладі:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -2 & 2 & 1 \\ 3 & -4 & 3 \end{vmatrix} \begin{matrix} \cdot 2 \quad \cdot(-3) \\ \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -4 & 12 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \cdot 2 \\ \\ \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 = 4.$$

Таким чином, для обчислення визначника n-го порядку можна застосовувати кілька способів, які спрощують обчислення.

1.3. Обернена матриця

Квадратна матриця A називається ***неособливою***, або ***невиродженою***, якщо її визначник не дорівнює нулю: $\Delta A \neq 0$. У протилежному випадку вона називається ***особливою*** (***виродженою***).

Матриця A^*, транспонована до матриці, складеної з алгебраїчних доповнень елементів матриці A, називається **приєднаною**, або **союзною**, до матриці A:

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матриця A^{-1} називається ***оберненою*** до матриці A, якщо добуток цієї матриці з матрицею A як зліва, так і справа дорівнює одиничній матриці:

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E\,.$$

Будь-яка неособлива матриця A має єдину обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot A^*.$$

Приклад 1.8. Знайдемо матрицю, обернену до матриці A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Переконаємося в тому, що матриця A є невиродженою. Для цього обчислимо її визначник:

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 17.$$

Оскільки $\Delta A \neq 0$, то обернена матриця існує. Знаходимо алгебраїчні доповнення A_{ij} всіх елементів a_{ij} $(i=\overline{1,3},\ j=\overline{1,3})$ вихідної матриці:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 2\end{vmatrix}=6; \qquad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -1\\ 0 & 2\end{vmatrix}=-2; \qquad A_{31}=\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 0\end{vmatrix}=3;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 1 & 2\end{vmatrix}=2; \qquad A_{22}=\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 2\end{vmatrix}=5; \qquad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -1 & 0\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{13}=\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-3; \qquad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1; \qquad A_{33}=\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=7.$$

Записуємо союзну й обернену матриці:

$$A^{*}=\begin{pmatrix}6 & -2 & 3\\ 2 & 5 & 1\\ -3 & 1 & 7\end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{6}{17} & \frac{-2}{17} & \frac{3}{17}\\ \frac{2}{17} & \frac{5}{17} & \frac{1}{17}\\ \frac{-3}{17} & \frac{1}{17} & \frac{7}{17}\end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність отриманого результату: $A^{-1}\cdot A = A\cdot A^{-1}=E$.

1.4. Ранг матриці

Ранг матриці – це найвищій порядок мінора від'ємного від нуля породженого цією матрицею. Елементарні перетворення, які не змінюють ранга матриці, випливають з властивостей визначників:

1) транспонування не змінює ранга матриці;
2) зміна місцями двох рядків або стовпців не змінює ранга матриці;
3) множення елементів рядка або стовпця на деяке число не змінює ранга матриці;
4) додавання до елементів рядка або стовпця елементів другого рядка або стовпця, помножених на деяке число, не змінює ранга матриці.

Приклад 1.9. Знайдемо ранг матриці A.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 0 & 5\\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12\\ 2 & 6 & 4 & 0 & 10\\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20\end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

$$\operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 2 & 6 & 9 & 7 & 12 \\ 2 & 6 & 4 & 0 & 10 \\ 1 & 4 & 8 & 4 & 20 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 6 & 4 & 15 \end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & 0 & 5 \\ 1 & 6 & 4 & 1 & 15 \\ 0 & 0 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\Delta A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 5 \end{vmatrix} = 5 \cdot$$

Таким чином, $\operatorname{rang} A = 3$.

2. Системи лінійних алгебраїчних рівнянь

2.1. Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Системою лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) називається сукупність m рівнянь першого степеня, тобто лінійних рівнянь відносно n невідомих x_1, x_2, ..., x_n. Її можна надати у **розгорнутому вигляді**:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \quad + \ldots \quad + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \,, \end{cases} \tag{2.1}$$

де $x_j\,(j = \overline{1,n})$ – невідомі характеристики, відносно яких побудована математична модель задачі;

$a_{ij}\,(i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n})$ – коефіцієнти при невідомих (параметри моделі), де індекси i та j указують, відповідно, на номери рівняння і невідомого;

$b_i\,(i = \overline{1,m})$ – вільні члени (праві частини рівнянь), які теж є параметрами математичної моделі.

Стислий запис системи рівнянь (2.1) можна отримати за допомогою символу $\sum$, який означає почленне підсумовування:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \qquad i = \overline{1,m}\,.$$

Розглянемо математичну модель задачі про використання ресурсів. Якщо записати питомі витрати ресурсів як матрицю $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, запаси ресурсів – як матрицю-стовпець $B=\left(b_i\right)_{m\times 1}$ і невідомі компоненти плану виробництва представити також як матрицю-стовпець $X=\left(x_j\right)_{n\times 1}$, то за означенням добутку матриць систему лінійних алгебраїчних рівнянь (2.1) можна подати у вигляді матричного рівняння **(матрична форма системи)**:

$$AX=B.$$

Наведемо ще один спосіб подання системи рівнянь за допомогою матриць. Нехай матриця-стовпець A_j ($j=\overline{1,n}$) описує витрати виробництва на виготовлення одиниці j-тої продукції за усіма m видами ресурсів. Кожна з цих матриць складається з елементів відповідного стовпця матриці $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$. Отже, всі матриці A_j мають однаковий розмір $m\times 1$. Витрати ресурсів на виготовлення j-тої продукції в обсязі x_j визначаються як добуток матриці A_j зі скаляром x_j. Тоді загальні витрати ресурсів на виготовлення всіх видів продукції дорівнюють їхнім загальним запасам, які описуються матрицею-стовпцем $B=\left(b_i\right)_{m\times 1}$, якщо виробництво є збалансованим; тобто запаси ресурсів у повному обсязі витрачаються на виготовлення продукції. Отже, маємо ще одну форму подання СЛАР:

$$A_1x_1+A_2x_2+...+A_jx_j+...+A_nx_n=B.$$

Матрицю $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, що складена з коефіцієнтів при невідомих системи рівнянь (2.1), називають **матрицею системи**. Приєднуючи справа (через вертикальну риску) до матриці A матрицю-стовпець вільних членів $B=\left(b_i\right)_{m\times 1}$, отримуємо матрицю $A|B=\left(a_{ij}\mid b_i\right)_{m\times(n+1)}$, яку називають **розширеною матрицею** системи:

$$A|B=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Зрозуміло, що операції над рядками розширеної матриці є операціями над відповідними рівняннями системи.

Розв'язком системи рівнянь називається такий набір чисел $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n)$, який при його підстановці замість невідомих $(x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$ у кожне рівняння системи перетворює ці рівняння у числові тотожності.

Система лінійних алгебраїчних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має принаймні один розв'язок, і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв'язку. Сумісну систему рівнянь називають **визначеною**, якщо вона має єдиний розв'язок, і **невизначеною**, якщо кількість розв'язків більша одного.

Система лінійних рівнянь називається **неоднорідною**, якщо хоча б один елемент матриці-стовпця вільних членів є відмінним від нуля. Якщо всі елементи b_i $(i=\overline{1,m})$ дорівнюють нулю, то така система лінійних рівнянь називається **однорідною**. Однорідна система рівнянь має вигляд:

$$AX = O,$$

де $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – основна матриця системи;

$X=\left(x_j\right)_{1\times n}^T$ – матриця-стовпець невідомих;

$O=\left(0\right)_{m\times 1}$ – матриця-стовпець вільних членів, що містить самі нулі.

2.2. Дослідження на сумісність системи лінійних алгебраїчних рівнянь

Розглянемо загальний випадок, коли кількість рівнянь m не обов'язково співпадає з кількістю невідомих n (тобто числа m і n можуть бути пов'язані будь-яким із співвідношень: $m<n$, $m=n$, $m>n$):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad A\cdot X = B,$$

де $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ – матриця системи;

$B=\left(b_i\right)$ – матриця-стовпець вільних членів $\left(i=\overline{1,m}\right)$;

$X=\left(x_j\right)^T$ – матриця-стовпець невідомих $\left(j=\overline{1,n}\right)$.

Для дослідження системи на сумісність і визначеність використовується теорема Кронекера – Капеллі.

Теорема Кронекера – Капеллі, критерій сумісності системи. Система лінійних алгебраїчних рівнянь сумісна, коли ранг матриці системи дорівнює рангу її розширеної матриці:

$$\text{СЛАР сумісна} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A \,|\, B.$$

Теорему наводимо без доведення.

Зауваження. З теореми Кронекера – Капеллі й означення рангу випливає, що

- система несумісна, коли ранг матриці системи не дорівнює рангу її розширеної матриці;
- якщо ранги співпадають і дорівнюють кількості невідомих $(\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A \,|\, B = n)$, то система має єдиний розв'язок;
- якщо ранги рівні між собою, але менші числа невідомих $(\operatorname{rang} A = \operatorname{rang} A \,|\, B < n)$, то система має безліч розв'язків.

Матриця $A = (a_{ij})_{m \times n}$ є складовою розширеної матриці $A \,|\, B = (a_{ij} \,|\, b_i)_{m \times (n+1)}$, тому ранги матриць A і $A \,|\, B$ визначають не окремо один від одного, а досліджують розширену матрицю системи. Зрозуміло, що ранг матриці системи не може бути більше рангу розширеної матриці.

Розглянемо особливості розв'язку **однорідної** системи рівнянь. Нагадаємо, що система рівнянь називається однорідною, якщо у системі стовпець вільних членів є нульовим стовпцем: $b_i = 0, \ \forall i = \overline{1, m}$.

Однорідна система рівнянь завжди сумісна, оскільки нульові значення невідомих задовольняють систему. Розв'язок однорідної СЛАР, за яким $x_j = 0$, $\forall j = \overline{1, n}$, називається **тривіальним**.

Якщо однорідна система має **ненульовий** розв'язок, тобто хоча б одне з чисел $x_j = \alpha_j \neq 0$, $j = \overline{1, n}$, то вона має нескінченну кількість розв'язків вигляду: $x_j = c\alpha_j$, де c – довільна стала; тобто така система є невизначеною.

Якщо $X_1 = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ і $X_2 = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ є розв'язками системи: $AX_1 = O$, $AX_2 = O$, то їх лінійна комбінація $X = c_1 X_1 + c_2 X_2$, де c_1 та c_2 – довільні числа, теж є розв'язком цієї системи. Дійсно, враховуючи властивості операцій над матрицями, отримуємо:

$$AX = A(c_1 X_1) + A(c_2 X_2) = c_1 (AX_1) + c_2 (AX_2) = O.$$

Проведемо дослідження системи лінійних рівнянь на прикладі.

Приклад 2.1. До трьох будівельних майданчиків необхідно привезти пісок, що зберігається на двох складах. Запаси піску на складах задані матрицею $A=(250;\ 170)$, а потреби кожного будмайданчика – матрицею $B=(200;\ 100;\ 120)$.

Розв'язання. Необхідно дослідити, чи можна скласти такий план перевезень, щоб задовольнити всіх споживачів. За можливості, визначити варіанти способів, якими це можна зробити.

Подамо вихідні дані у вигляді табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Вихідні дані задачі

Постачальники	Будмайданчики			Запаси
	1	2	3	
Склад 1	x_{11}	x_{12}	x_{13}	250
Склад 2	x_{21}	x_{22}	x_{23}	170
Потреби	200	100	120	420

Елементи матриці невідомих $X=\left(x_{ij}\right)_{2\times 3}$ визначають обсяги постачання піску x_{ij}, що потрібно перевезти з i-го складу ($i=\overline{1,2}$) до j-го будмайданчика ($j=\overline{1,3}$).

Оскільки загальні запаси піску $250+170=420$ дорівнюють загальним потребам $200+100+120=420$, то математичну модель задачі можна надати у вигляді системи рівнянь:

$$\begin{cases} x_{11}+x_{21}=200; \\ x_{12}+x_{22}=100; \\ x_{13}+x_{23}=120; \\ x_{11}+x_{12}+x_{13}=250; \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}=170. \end{cases}$$

Отже, маємо систему п'яти лінійних алгебраїчних рівнянь відносно шести невідомих. Кожне з рівнянь системи має певну економічну інтерпретацію. Так, перші три рівняння, що містять суми за стовпцями матриці невідомих, означають: потреби будмайданчиків у піску задовольняються у повному обсязі; останні два рівняння, що містять суми за рядками, означають: запаси зі складів повністю вивезені (див. табл. 2.1). Для розв'язання задачі необхідно дослідити систему на сумісність.

Основна матриця системи $A=(a_{ij})_{5\times 6}$ така, що невідомим x_{1j}, $j=1,2,3$ відповідають елементи матриці a_{ij}, $i=\overline{1,5}$, а невідомим x_{2j}, $j=1,2,3,$ – коефіцієнти a_{ik}, де $k=j+3$. Запишемо розширену матрицю системи та здійснимо елементарні перетворення з метою отримання верхньої трикутної матриці:

$$A\,|\,B=\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\1&1&1&0&0&0&250\\0&0&0&1&1&1&170\end{array}\right)(-1)\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\0&1&1&-1&0&0&50\\0&0&0&1&1&1&170\end{array}\right)(-1)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\0&0&1&-1&-1&0&-50\\0&0&0&1&1&1&170\end{array}\right)(-1)\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\0&0&0&-1&-1&-1&-170\\0&0&0&1&1&1&170\end{array}\right)+\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccccc|c}1&0&0&1&0&0&200\\0&1&0&0&1&0&100\\0&0&1&0&0&1&120\\0&0&0&-1&-1&-1&-170\\0&0&0&0&0&0&0\end{array}\right)\Rightarrow\quad M^{(4)}=\begin{vmatrix}1&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&-1\end{vmatrix}\neq 0.$$

Таким чином, ранги матриці системи та розширеної матриці рівні між собою і дорівнюють 4, тобто менше числа невідомих:

$$\operatorname{rang} A=\operatorname{rang} A\,|\,B=4<n=6.$$

Система сумісна, але невизначена. Це означає, що існує нескінченна множина планів перевезень, за якими здійснюється постачання для забезпечення потреб споживачів.

Виберемо в основній матриці системи базисний мінор r-го порядку (r – ранг матриці $r<n$) розширеної матриці. Доцільно залишити лише ті r рівнянь, які відповідають базисному мінору. У цих рівняннях невідомі $x_j\left(j=\overline{1,r}\right)$, коефіцієнти яких утворюють базисний мінор, залишимо у лівих частинах рівнянь, а інші невідомі $x_j\left(j=\overline{r+1,n}\right)$ перенесемо у праві частині:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1r}x_r = b_1 - a_{1r+1}x_{r+1} - a_{1r+2}x_{r+2} - \ldots - a_{1n}x_n, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2r}x_r = b_2 - a_{2r+1}x_{r+1} - a_{2r+2}x_{r+2} - \cdots - a_{2n}x_n, \\ \cdots \ \cdots \ \cdots \ \cdots\cdots\cdots \ \cdots \ \ \cdots\cdots \ \ \cdots \ \ \cdots \ \ \cdots \ \ \cdots\cdots\cdots \ \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rr}x_r = b_r - a_{rr+1}x_{r+1} - a_{rr+2}x_{r+2} - \cdots - a_{rn}x_n. \end{cases} \tag{2.2}$$

Невідомі $x_j\left(j=\overline{1,r}\right)$, коефіцієнти яких є елементами базисного мінору, називаються **базисними**, а інші невідомі – **вільними**. Якщо систему рівнянь (2.2) розв'язати відносно базисних невідомих, то матимемо розв'язок системи у вигляді:

$$\begin{cases} x_1 = f_1(x_{r+1}, x_{r+2},\ldots, x_n, b_1, b_2,\ldots, b_r), \\ x_2 = f_2(x_{r+1}, x_{r+2},\ldots, x_n, b_1, b_2,\ldots, b_r), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_r = f_r(x_{r+1}, x_{r+2},\ldots, x_n, b_1, b_2,\ldots, b_r), \\ x_j \in \mathbf{R} \ \ (j=\overline{r+1,n}), \end{cases}$$

де $f_1, f_2,\ldots,f_r$ – лінійні функції від вільних невідомих $x_{r+1}, x_{r+2},\ldots,x_n$ і параметрів $b_1, b_2,\ldots,b_r$ – вільних членів перших r рівнянь.

Цей розв'язок можна отримати будь-яким із уже відомих методів (наприклад: за правилом Крамера, за допомогою оберненої матриці або за методом Жордана – Гаусса), оскільки визначником основної матриці системи є базисний мінор.

Розв'язок невизначеної системи, що містить вільні невідомі, через які виражаються базисні невідомі, називається **загальним розв'язком** системи. **Частинним розв'язком** системи називається розв'язок, який отримується із загального при конкретних (фіксованих) значеннях вільних невідомих. Частинний розв'язок системи, знайдений при нульових значеннях вільних невідомих, називають **базисним розв'язком**.

Якщо в базисних розв'язках усі змінні набувають невід'ємних значень, то такий частинний розв'язок називають ***опорним***. Оскільки в економічних дослідженнях застосовуються показники, що набувають невід'ємних значень, то опорні розв'язки викликають найбільший інтерес; отже, виникає потреба у методах їх знаходження.

2.3. Методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь

Визначники n-го порядку застосовують для розв'язання систем n лінійних рівнянь з n невідомими:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + ... + a_{nn}x_n = b_n. \end{cases} \tag{2.3}$$

Правило Крамера. Якщо визначник n-го порядку основної матриці системи відмінний від нуля ($\Delta \neq 0$), то вона має єдиний розв'язок, який знаходять за формулою:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \ j = \overline{1,n}, \text{ тобто } x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \dots, \ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}, \tag{2.4}$$

де Δ_j – визначник, який отримано з визначника основної матриці системи заміною j-го стовпця стовпцем вільних членів $(b_i)_{n\times 1}$.

Зауваження. Правило Крамера виключає з розгляду випадок, коли $\Delta = 0$.

Із формули (2.4) випливає:

1) якщо $\Delta = 0$, але хоча б один із визначників Δ_j, $j = \overline{1,n}$, відмінний від нуля, то система несумісна, оскільки принаймні один із дробів у (2.4) втрачає смисл;

2) якщо $\Delta = 0$ і $\Delta_j = 0$, $\forall j = \overline{1, n}$, то система невизначена та має безліч розв'язків.

Приклад 2.2. Розглянемо розв'язання СЛАР за правилом Крамера:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Обчислимо визначник матриці системи:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Оскільки матриця є невиродженою, то система рівнянь має єдиний розв'язок. Обчислюємо визначники, що відповідають невідомим:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 33 & 3 & 2 \\ 23 & 2 & 1 \\ 12 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -5; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 33 & 2 \\ 3 & 23 & 1 \\ 1 & 12 & 2 \end{vmatrix} = -3, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 33 \\ 3 & 2 & 23 \\ 1 & 1 & 12 \end{vmatrix} = -2.$$

За правилом Крамера знаходимо розв'язок системи:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 5, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 3 \quad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 2.$$

Отже, розв'язком системи є трійка чисел: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 2$.

Розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь методом оберненої матриці. Система лінійних рівнянь у матричній формі: $AX = B$.

Розв'яжемо це матричне рівняння відносно матриці невідомих X. Розглядатимемо випадок, коли матриця системи є невиродженою, тобто для неї існує обернена. Тоді:

$AX = B \Rightarrow$ | помножуємо обидві частини рівняння зліва на A^{-1} | $\Rightarrow$

$\Rightarrow A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow$ | застосовуємо сполучний закон | $\Rightarrow$

$\Rightarrow \left(A^{-1}A\right)X = A^{-1}B \Rightarrow$ | застосуємо означення оберненої матриці

та властивість одиничної: $A^{-1}A = E$, $EX = X$ | $\Rightarrow X = A^{-1}B$.

Отже, якщо існує обернена матриця до основної матриці системи, то розв'язок СЛАР, що містить n рівнянь відносно n невідомих, можна знайти за допомогою оберненої матриці у вигляді:

$$X = A^{-1}B.$$

Приклад 2.3. Розв'яжемо СЛАР, що складається з трьох рівнянь відносно трьох невідомих, за методом оберненої матриці:

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Обернена матриця існує, оскільки визначник матриці системи не дорівнює нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

Визначимо алгебраїчні доповнення і побудуємо союзну матрицю A^*:

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -5 & 6 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Помноживши матрицю A^* на сталу $1/\Delta$, отримаємо обернену матрицю:

$$A^{-1} = \frac{A^*}{\Delta} = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Перевіримо правильність обчислень:

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E,$$

$$A^{-1}A = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Отже, обернена матриця знайдена правильно.

Тепер знаходимо розв'язок системи:

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} -3 & 4 & 1 \\ 5 & -6 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 33 \\ 23 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Таким чином, розв'язком даної системи буде трійка чисел: $X = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

2.4. Метод повного виключення (метод Жордана – Гаусса)

Якщо за допомогою елементарних перетворень звести основну матрицю системи (2.3) до одиничної n-го порядку (нагадаємо, що у цьому випадку $rangA = rangA\,|\,B = n$), то дістанемо:

$$\begin{cases} x_1 \qquad\qquad = b_1^{(n)}, \\ \quad x_2 \qquad\quad = b_2^{(n)}, \\ \qquad \ldots \\ \qquad\qquad x_n = b_n^{(n)}, \end{cases}$$

тобто отримаємо розв'язок системи $X^{\mathrm{T}} = \left(b_1^{(n)};\ b_2^{(n)};\ \ldots;\ b_n^{(n)}\right)$, який є єдиним.

Приклад 2.4. Розв'яжемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь методом Жордана – Гаусса.

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 33; \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 23; \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання. Реалізація цього метода здійснюється у таблиці, на прикладі даної системи рівнянь. Запишемо коефіцієнти при невідомих і вільні члени рівнянь у таблицю (табл. 2.2). Стовпець "Примітки" містить інформацію, внаслідок яких саме перетворень було отримано рядок, поруч з яким записана примітка.

Таблиця 2.2

Схема Жордана – Гаусса

№ з/п	x_1 x_2 x_3	Вільні члени	Контрольні суми	Примітки
I II III	4 3 2 3 2 1 1 1 2	33 23 12	42 29 16	
IV V VI	1 1 2 0 –1 –5 0 –1 –6	12 –13 –15	16 –19 –22	III IV $\cdot(-3)+$ II IV $\cdot(-4)+$ I
VII VIII IX	1 0 –3 0 1 5 0 0 –1	–1 13 –2	–3 19 –3	IV + V V$\cdot(-1)$ VI – V
X XI XII	1 0 0 0 1 0 0 0 1	5 3 2	6 4 3	VII + IX$\cdot(-3)$ VIII + IX$\cdot(5)$ IX$\cdot(-1)$

На місці основної матриці системи шляхом елементарних перетворень ми отримали одиничну матрицю, порядок якої дорівнює трьом, тобто збігається з кількістю невідомих; отже, за теоремою Кронекера – Капеллі система сумісна та має єдиний розв'язок. За останньою ітерацією запишемо розв'язок системи:

$$\begin{cases} x_1 = 5; \\ x_2 = 3; \\ x_3 = 2. \end{cases}$$

За допомогою методу **Жордана – Гаусса** можна відшукати матрицю, **обернену** відносно до даної, якщо вона існує, або довести, що така матриця не існує.

Для цього необхідно до вихідної матриці A справа дописати одиничну матрицю, а далі шляхом елементарних перетворень матриці $A|E$ на місці вихідної матриці A отримати одиничну. Тоді на місці одиничної міститиметься матриця, що є оберненою до вихідної матриці A:

$$A\,|E \sim E\,|A^{-1}.$$

Приклад 2.5. Застосуємо метод Жордана – Гаусса для визначення матриці, оберненої до матриці A:

$$A=\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}.$$

Розв'язання. Допишемо до матриці A справа одиничну матрицю та проведемо елементарні перетворення таким чином, щоб на місці матриці A отримати одиничну:

$$A\,\big|E=\left(\begin{array}{ccc|ccc}4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & -1 & -5 & 0 & 1 & -3\\ 0 & -1 & -6 & 1 & 0 & -4\end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -3 & 0 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 5 & 0 & -1 & 3\\ 0 & 0 & -1 & 1 & -1 & -1\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & -3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 5 & -6 & -2\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1\end{array}\right).$$

Звідси дістаємо: $A^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 1\\ 5 & -6 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

Обчислювання також можна проводити у таблиці з використанням контрольних сум.

Якщо у процесі елементарних перетворень матриці контроль не здійснювався, то після визначення оберненої матриці слід перевірити, чи виконується співвідношення: $A^{-1}\cdot A=E$.

Отже,

$$A^{-1}A=\begin{pmatrix}-3 & 4 & 1\\ 5 & -6 & -2\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 3 & 2\\ 3 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}-12+12+1 & -9+8+1 & -6+4+2\\ 20-18-2 & 15-12-2 & 10-6-4\\ -4+3+1 & -3+2+1 & -2+1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Таким чином, перевірка підтвердила, що знайдена матриця дійсно є оберненою до вихідної матриці.

3. Елементи векторної алгебри

3.1. Основні поняття векторної алгебри

Виберемо на довільній прямій (в $\mathbf{R}^2$ або в $\mathbf{R}^3$) відрізок AB і укажемо, яку з точок (A чи B) вважати початком, а яку − кінцем відрізка. Кінець відрізка позначають стрілкою і кажуть, що на відрізку **задано напрям**. Відрізок AB із заданим на ньому напрямом, або коротко – напрямлений відрізок, називається **вектором**. Вектор позначається символом $\overline{AB}$ або малими буквами латинського алфавіту з рискою: $\overline{a}, \overline{b}, \overline{c}$ та ін. (рис. 3.1).

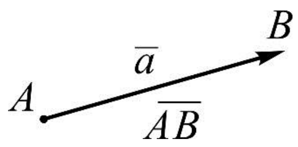


Рис. 3.1. **Вектор**

У застосовних задачах природничих наук суттєвою є обставина : де, у якій точці знаходиться початок вектора. Наприклад, результат дії сили залежить не тільки від її величини та напряму дії, а й від того, у якій точці вона прикладається.

Довжиною, або **модулем**, вектора називається довжина відповідного відрізка, що позначається одним із символів: $|\overline{a}|$, a, $|\overline{AB}|$, AB.

Нульовим вектором $\overline{0}$, або **нуль-вектором**, називається вектор, довжина якого дорівнює нулю, а напрям його вважається довільним (невизначеним).

Одиничним вектором $\overline{e}$ називається вектор, довжина якого дорівнює одиниці.

Рівними векторами називаються вектори, які належать одній прямій або паралельним прямим, однаково спрямовані та мають рівні довжини.

Взаємно протилежними називаються вектори, які належать одній прямій або паралельним прямим, мають рівні довжини**,** але протилежно спрямовані. Вектор, протилежний вектору $\overline{a}$, позначають символом $-\overline{a}$.

Колінеарними називають вектори, які належать одній прямій або паралельним прямим.

Компланарними називаються вектори, які належать одній площині або паралельним площинам.

3.2. Лінійні операції над векторами

Будемо вважати, що вектори $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ належать одній площині. Здійснюючи паралельне перенесення одного з векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, сумістимо початок вектора $\overline{b}$ з кінцем вектора $\overline{a}$ і за відрізками, що відповідають векторам, як за двома сторонами побудуємо трикутник (рис. 3.2а).

1. Сумою векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$ називається вектор $\overline{c}$, який з'єднує початок вектора $\overline{a}$ з кінцем вектора $\overline{b}$. Порядок побудови суми двох векторів за цим означенням називають **правилом трикутника**.

Паралельне перенесення можна здійснити і так, що сумістяться початки векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$. Тоді на векторах як на сторонах побудуємо паралелограм (рис. 3.2б) і прийдемо до **правила паралелограма**: сума векторів – це діагональ паралелограма, яка виходить з їх спільного початку, різниця векторів $\overline{a} - \overline{b}$, – це діагональ, яка з'єднує кінці векторів, причому з кінця віднімаємо початок від $\overline{a} - \overline{b}$.

а) б)

Рис. 3.2. **Сума двох векторів**

Правило трикутника узагальнюється на довільне скінченне число векторів. Якщо паралельним перенесенням розташувати вектори так, що кінець попереднього вектора (починаючи з першого) є початком наступного, то результівним буде вектор, який з'єднує початок першого вектора-доданка з кінцем останнього (рис. 3.3):

$$\overline{s} = \overline{a} + \overline{b} + \overline{c} + \overline{d}\,.$$

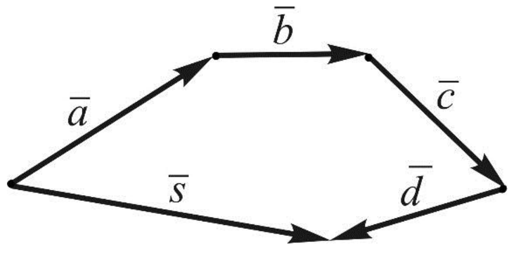


Рис. 3.3. **Сума *n* векторів**

Відповідне правило називають **правилом многокутника**.

Властивості суми векторів:

1) переставна, або комутативна: $\overline{a}+\overline{b}=\overline{b}+\overline{a}$;

2) сполучна, або асоціативна: $\overline{a}+(\overline{b}+\overline{c})=(\overline{a}+\overline{b})+\overline{c}=\overline{a}+\overline{b}+\overline{c}$;

3) $\overline{a}+(-\overline{a})=\overline{0}$;

4) $\overline{a}+\overline{0}=\overline{a}$.

Різницю $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}$ можна розглядати як суму вектора $\overline{a}$ з вектором, протилежним вектору $\overline{b}$: $\overline{c}=\overline{a}-\overline{b}=\overline{a}+(-\overline{b})$.

2. Множення вектора на скаляр. Нехай λ – деяке дійсне число ($\lambda \neq 0$). **Добутком вектора** $\boldsymbol{\overline{a}}$ **зі скаляром** $\boldsymbol{\lambda}$ називається вектор $\overline{b}$, модуль якого дорівнює добутку модулів $|\overline{a}|$, $|\lambda|$, а напрям $\overline{b}$ співпадає з напрямом $\overline{a}$, якщо $\lambda>0$, або є протилежним напряму $\overline{a}$, якщо $\lambda<0$ (рис. 3.4): $\overline{b}=\lambda\overline{a}$.

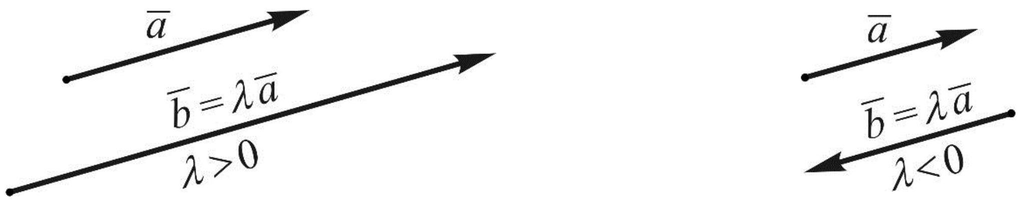


Рис. 3.4. **Множення вектора на скаляр**

При $\lambda=0$ вектор $\overline{b}=\lambda\overline{a}$ перетворюється в нуль-вектор ($\overline{b}=\overline{0}$).

Властивості множення вектора на скаляр:

1) переставний, або комутативний, закон:

$$\lambda\overline{a}=\overline{a}\lambda, \text{ де } \lambda=\text{const};$$

2) сполучний, або асоціативний, закон:

$$\lambda(\mu\overline{a})=\mu(\lambda\overline{a}), \quad \text{де } \lambda=\text{const}, \ \mu=\text{const};$$

3) розподільний, або дистрибутивний, закон:

$$\lambda(\overline{a}+\overline{b})=\lambda\overline{a}+\lambda\overline{b}, \quad (\lambda+\mu)\overline{a}=\lambda\overline{a}+\mu\overline{a}, \quad \text{де } \lambda=\text{const}, \ \mu=\text{const};$$

4) $1\cdot\overline{a}=\overline{a}$, $-1\cdot\overline{a}=-\overline{a}$;

5) $0\cdot\overline{a}=\overline{0}$.

Із означення множення вектора на скаляр випливає **умова колінеарності** двох векторів: якщо вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ колінеарні то, кожний з них є добутком іншого зі скаляром:

$$\bar{b} = \lambda \bar{a} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = \frac{1}{\lambda} \cdot \bar{b} \quad (\lambda = \text{const},\ \lambda \neq 0).$$

Відомо, якщо три ненульові вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ компланарні, то один з них є лінійною комбінацією двох інших:

$\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ − компланарні $\Leftrightarrow$ $\bar{c} = \lambda \bar{a} + \mu \bar{b}$ $(\lambda = \text{const},\ \mu = \text{const})$.

Розглянемо поняття, яке має дуже важливе значення в теорії векторів − проєкції вектора на вісь (пряму, що має напрям); заданий напрям вважатимемо додатним, протилежний напрям – від'ємним.

Компонентою вектора $\bar{a}$ відносно осі l називають вектор, початок якого є проєкцією початку вектора $\overline{AB}$ на вісь l, а кінець – проєкцією кінця вектора $\overline{AB}$ на вісь l: $\bar{a}_1 = \overline{A_1B_1}$ (рис. 3.5).

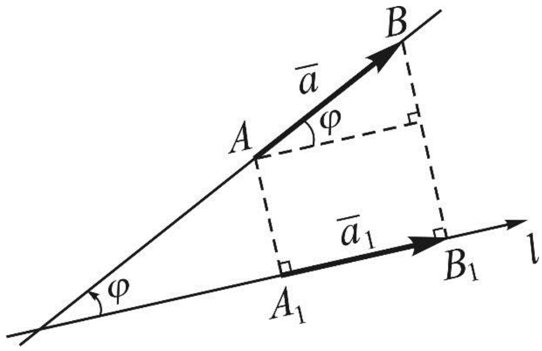


Рис. 3.5. **Проєкція вектора на вісь**

Проєкцією вектора $\bar{a}$ на вісь l називають скаляр, який дорівнює довжині компоненти вектора $\bar{a}$ відносно осі l зі знаком "+", якщо напрям компоненти збігається з напрямом осі l, або зі знаком "–", якщо її напрям протилежний напряму осі: $np_l \bar{a} = \pm \left| \overline{A_1B_1} \right|$.

Основні властивості проєкції вектора на вісь.

1. Проєкція вектора на вісь l дорівнює добутку довжини вектора $\bar{a}$ з косинусом кута між вектором і віссю:

$$np_l\, \bar{a} = \left| \bar{a} \right| \cos\varphi, \quad \varphi = \angle(\bar{a}, l).$$

2. Проєкція суми двох векторів на дану вісь дорівнює сумі їх проєкцій на цю вісь:

$$np_l\left(\bar{a}+\bar{b}\right)=np_l\bar{a}+np_l\bar{b}\ .$$

Ця властивість узагальнюється на будь-яке скінченне число векторів.

3. Проєкція на вісь добутку вектора зі скаляром дорівнює добутку зі скаляром проєкції самого вектора на вісь:

$$np_l\ (k\bar{a})=k\cdot np_l\ \bar{a}\ ,\quad k=\mathrm{const}.$$

3.3. Прямокутна система координат у просторі. Координатна і алгебраїчна форми задання векторів

Нехай у тривимірному векторному просторі $\mathbf{R}^3$ задана **прямокутна декартова система координат** $xOyz$, що визначається трьома взаємно перпендикулярними **осями**, на яких указано масштаб (одиницю виміру довжини) зі спільною точкою O – **початком координат** (рис. 3.6).

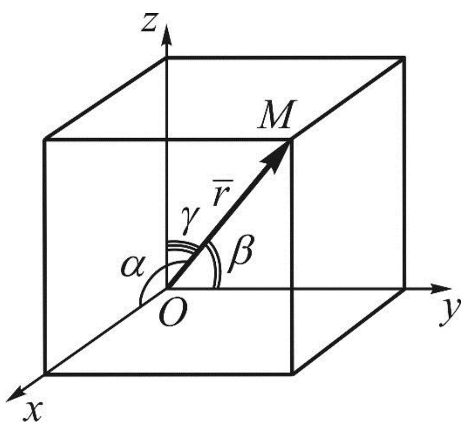


Рис. 3.6. **Напрямні кути радіус-вектора**

Виберемо у просторі довільну точку M і з'єднаємо її відрізком прямої з початком координат O. Вектор $\bar{r}=\overline{OM}$, початком якого є початок координат O, а кінцем є дана точка M, називається **радіус-вектором** точки M.

Декартовими прямокутними координатами точки M називають проєкції її радіуса-вектора $\bar{r}$ на осі Ox, Oy, Oz:

$$x=np_{Ox}\bar{r}\ ,\quad y=np_{Oy}\,\bar{r}\ ,\quad z=np_{Oz}\bar{r}\ .$$

Точка M з координатами x, y, z позначається через $M(x, y, z)$. Вектор $\bar{r}$ кожної точки простору (крім точки O) визначає прямокутний паралелепіпед з діагоналлю, що є відрізком, на якому побудовано вектор $\bar{r}$ (див. рис. 3.6).

Вимірами паралелепіпеда є модулі координат точки M. Довжина діагоналі паралелепіпеда визначається за формулою:

$$|\bar{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\ .$$

Кути α, β, γ, які утворені радіус-вектором $\bar{r}$ з координатними осями Ox, Oy, Oz, називаються його **напрямними кутами** (див. рис. 3.6).

Згідно зі властивістю проєкцій маємо:

$$x = |\bar{r}|\cos\alpha\,,\quad y = |\bar{r}|\cos\beta\,,\quad z = |\bar{r}|\cos\gamma\,,$$

звідки:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|\bar{r}|}\,,\quad \cos\beta = \frac{y}{|\bar{r}|}\,,\quad \cos\gamma = \frac{z}{|\bar{r}|}\,.$$

Косинуси напрямних кутів називаються **напрямними косинусами** радіус-вектора $\bar{r}$. Маємо їхні **властивості**:

1) напрямні косинуси є координатами одиничного радіус-вектора: $|\bar{r}| = 1$;

2) сума квадратів напрямних косинусів вектора $\bar{r}$ ($\bar{r} \neq \bar{0}$) дорівнює одиниці: $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$.

Поняття "координата", "напрямні кути", "напрямні косинуси" без змін переносяться на будь-які вектори, оскільки початок кожного з них паралельним перенесенням можна помістити в початок O, що дає радіус-вектор певної точки.

Координатами будь-якого вектора $\bar{a}$ у просторі називаються його проєкції на осі координат. Вони позначаються символами a_x, a_y, a_z і пишуть: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ або $\bar{a} = \bar{a}(a_x, a_y, a_z)$, де згідно з означенням координат:

$$a_x = np_{Ox}\bar{a}\,,\quad a_y = np_{Oy}\bar{a}\,,\quad a_z = np_{Oz}\bar{a}\,.$$

Задання вектора трійкою його координат a_x, a_y, a_z називають **координатною формою вектора**.

Для одиничних векторів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$, розташованих, відповідно, на осях Ox , Oy , Oz , маємо:

$$\bar{i} = (1,0,0), \quad \bar{j} = (0,1,0), \quad \bar{k} = (0,0,1).$$

Довжина довільного вектора $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і його напрямні косинуси обчислюються за формулами:

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} ,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|}.$$

Приклад 3.1. Знайдемо довжину та напрямні косинуси вектора $\bar{a} = (1, 2, -2)$.

Розв'язання. З формул маємо:

$$|\bar{a}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = 3,$$

$$\cos\alpha = \frac{a_x}{|\bar{a}|} = \frac{1}{3}, \quad \cos\beta = \frac{a_y}{|\bar{a}|} = \frac{2}{3}, \quad \cos\gamma = \frac{a_z}{|\bar{a}|} = -\frac{2}{3}.$$

Компонентами вектора $\bar{a}$ відносно координатних осей є вектори $\overline{OC}$, $\overline{CB}$, $\overline{BA}$ (рис. 3.7).

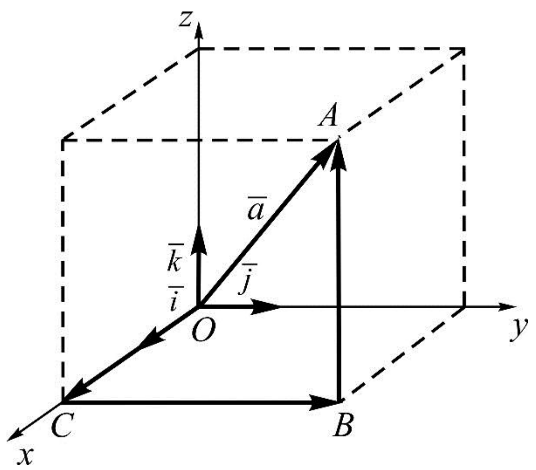


Рис. 3.7. **Компоненти вектора $\bar{a}$**

Згідно з операцією додавання векторів за правилом многокутника отримуємо: $\bar{a} = \overline{OC} + \overline{CB} + \overline{BA}$.

Отже, будь-який вектор $\overline{a}$ у тривимірному просторі є сумою трьох його компонент відносно осей координат:

$$\overline{a} = (a_x,\, a_y,\, a_z) \Rightarrow \overline{a} = a_x \cdot \overline{i} + a_y \cdot \overline{j} + a_z \cdot \overline{k}.$$

Зображення вектора із $\mathbf{R}^3$ у вигляді суми добутків координат з одиничними векторами (ортами) називають **алгебраїчною формою завдання** вектора.

Згідно з властивостями операцій над векторами, алгебраїчна форма задання дає можливість установити результати дій над векторами, заданими в координатній формі.

1. З додаванням (відніманням) двох векторів із $\mathbf{R}^3$: $\overline{a} = (a_x, a_y, a_z)$ і $\overline{b} = (b_x, b_y, b_z)$ їхні відповідні координати додаються (віднімаються):

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \pm b_x,\, a_y \pm b_y,\, a_z \pm b_z).$$

Дійсно, за властивостями асоціативності та дистрибутивності маємо:

$$\overline{a} \pm \overline{b} = (a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}) \pm (b_x \overline{i} + b_y \overline{j} + b_z \overline{k}) =$$
$$= (a_x \pm b_x)\overline{i} + (a_y \pm b_y)\overline{j} + (a_z \pm b_z)\overline{k}.$$

2. У разі множення вектора $\overline{a}$ на скаляр λ усі його координати треба помножити на цій скаляр:

$$\lambda \overline{a} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

Справді, відповідно до розподільної властивості множення скаляра на суму векторів маємо:

$$\lambda \overline{a} = \lambda(a_x \overline{i} + a_y \overline{j} + a_z \overline{k}) = \lambda a_x \overline{i} + \lambda a_y \overline{j} + \lambda a_z \overline{k} = (\lambda a_x, \lambda a_y, \lambda a_z).$$

3.4. Скалярний, векторний, мішаний добутки векторів

Скалярним добутком двох векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається число (скаляр), яке дорівнює добутку їх модулів з косинусом кута між ними $\varphi = \angle(\overline{a}, \overline{b})$; позначається $\overline{a} \cdot \overline{b}$:

$$\overline{a} \cdot \overline{b} = |\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi.$$

Для визначення кута φ між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ суміщають їхні початки та розглядають кут між двома променями l_1 і l_2 (рис. 3.8).

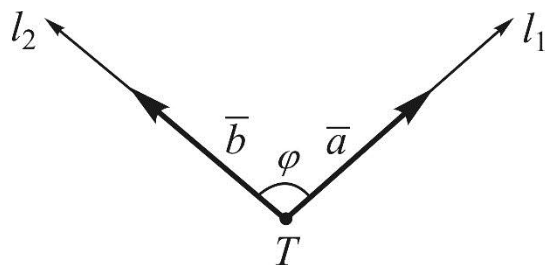


Рис. 3.8. **Кут між векторами**

Якщо кут φ гострий, то $\overline{a}\cdot\overline{b}>0$; якщо тупий, то $\overline{a}\cdot\overline{b}<0$.

Основні властивості скалярного добутку векторів випливають з його означення у формулі.

1. Умова перпендикулярності (ортогональності) векторів: скалярний добуток $\overline{a}\cdot\overline{b}$ дорівнює нулю.

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=0\Leftrightarrow\left(\varphi=\pi/2\right).$$

2. Скалярний добуток вектора на себе дорівнює квадрату його модуля, тобто

$$\overline{a}\cdot\overline{a}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left|\overline{a}\right|\cdot\cos 0=\left|\overline{a}\right|^2.$$

3. Скалярний добуток підпорядковується переставному закону:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\overline{b}\cdot\overline{a},$$

а також лінійним операціям:

$$\overline{a}\cdot(\overline{b}+\overline{c})=\overline{a}\cdot\overline{b}+\overline{a}\cdot\overline{c},$$

$$\left(\lambda\overline{a}\right)\cdot\overline{b}=\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})=\overline{a}\cdot(\lambda\overline{b}),\ \text{де}\ \lambda=\mathrm{const}.$$

4. Скалярний добуток двох векторів дорівнює добутку модуля одного з них із проєкцією другого на вісь, напрям якої визначається першим вектором:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{a}\right|\cdot\left(\left|\overline{b}\right|\cdot cos\,\varphi\right)=\left|\overline{a}\right|\cdot np_{\overline{a}}\overline{b},$$

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=\left|\overline{b}\right|\cdot\left(\left|\overline{a}\right|\cdot cos\,\varphi\right)=\left|\overline{b}\right|\cdot np_{\overline{b}}\overline{a}.$$

Скалярний добуток векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$, заданих у координатній формі. Нехай маємо два вектори $\overline{a}=(a_x,a_y,a_z)$, $\overline{b}=(b_x,b_y,b_z)$.

1. Обчислимо скалярні добутки одиничних векторів $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$. За властивістю **2** $\overline{i}\cdot\overline{i}=\overline{j}\cdot\overline{j}=\overline{k}\cdot\overline{k}=1$. Для інших пар на підставі властивості **1** маємо: $\overline{i}\cdot\overline{j}=\overline{j}\cdot\overline{i}=\overline{j}\cdot\overline{k}=\overline{k}\cdot\overline{j}=\overline{k}\cdot\overline{i}=\overline{i}\cdot\overline{k}=0$.

2. Знаходимо добуток $\overline{a}\cdot\overline{b}$, подаючи вектори в алгебраїчній формі і використовуючи розподільний закон:

$$\left[\begin{aligned}\overline{a}&=a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\\ \overline{b}&=b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\end{aligned}\right. \quad\Rightarrow\ \overline{a}\cdot\overline{b}=\left(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\right)\cdot\left(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\right).$$

Розкриваємо дужки й отримуємо:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z.$$

Зауваження. Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків одноіменних координат. Це повністю збігається з означенням скалярного добутку n-вимірних векторів.

Як наслідок, при $\overline{a}=\overline{b}$ отримуємо формулу модуля вектора через його координати:

$$|\,\overline{a}\,|=\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}.$$

Визначимо **кут між двома векторами** $\overline{a}$ і $\overline{b}$, що задані в координатній формі. Скористаємось означенням скалярного добутку. У результаті отримуємо:

$$\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot\left|\overline{b}\right|\cdot\cos\varphi \quad\Rightarrow\quad \cos\varphi=\frac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot\left|\overline{b}\right|}.$$

Отже, косинус кута між двома векторами визначається за формулою:

$$\cos\varphi=\frac{a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Звідси $\varphi=\arccos\left(\cos\varphi\right)$ $(0\le\varphi\le\pi)$.

Як наслідок, отримуємо **умову ортогональності** двох векторів, заданих у координатній формі:

$$\bar{a} \perp \bar{b} \Leftrightarrow a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0.$$

Умовою колінеарності векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, заданих у координатній формі, є пропорційність їх координат: $\bar{a} = \lambda \bar{b} \;\; \Leftrightarrow \;\; \dfrac{a_x}{b_x} = \dfrac{a_y}{b_y} = \dfrac{a_z}{b_z} = \lambda$.

Векторний добуток двох векторів. Нехай $\bar{a}$ і $\bar{b}$ – вектори простору $\mathbf{R}^3$ ($\bar{a} \neq \bar{0}$, $\bar{b} \neq \bar{0}$), що визначають деяку площину ρ. Вектор $\bar{s}$ називається **векторним добутком** векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, якщо вектор $\bar{s}$ задовольняє умови:

1) модуль його чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах;

2) він є перпендикулярним площині паралелограма ρ і спрямований так, що поворот вектора $\bar{a}$ до суміщення з вектором $\bar{b}$ найкоротшим шляхом спостерігається з кінця вектора $\bar{s}$ проти руху годинникової стрілки (рис. 3.9).

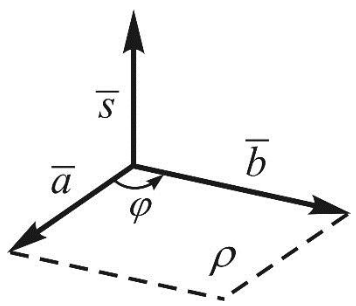


Рис. 3.9. **Векторний добуток векторів**

Векторний добуток позначається символами: $\bar{a} \times \bar{b}$, або $[\,\bar{a}, \bar{b}\,]$.

Отже,

$$\bar{c} = \bar{a} \times \bar{b} = [\,\bar{a}, \bar{b}\,] \;\; \Leftrightarrow \;\; (\left|\bar{c}\right| = \left|\bar{a}\right| \cdot \left|\bar{b}\right| \cdot \sin\varphi \text{ і } \bar{c} \perp \rho),$$

де $\varphi = \angle(\bar{a}, \bar{b})$ – найменший із кутів $(0 < \varphi < \pi)$, що відповідає суміщенню $\bar{a}$ з $\bar{b}$ поворотом вектора $\bar{a}$ проти руху годинникової стрілки.

Основні властивості векторного добутку випливають з його означення.

1. Векторний добуток колінеарних векторів дорівнює нулю:

$$\bar{a} \times \bar{b} = \bar{0} \quad \Leftrightarrow \quad \bar{a} = \lambda \bar{b}.$$

Зауваження. Ще однією **умовою колінеарності** векторів є рівність нульовому вектору їх векторного добутку.

2. При переставленні співмножників знак векторного добутку змінюється на протилежний:

$$\bar{a} \times \bar{b} = -\left(\bar{b} \times \bar{a}\right).$$

Це означає, що векторний добуток не підпорядковується переставному (комутативному) закону.

3. Векторний добуток підпорядковується асоціативному закону відносно скалярного множника та дистрибутивному закону відносно додавання:

$$\lambda\left(\bar{a} \times \bar{b}\right) = \left(\lambda \bar{a}\right) \times \bar{b} = \bar{a} \times \left(\lambda \bar{b}\right), \text{ де } \lambda = \text{const};$$

$$\bar{a} \times \left(\bar{b} + \bar{c}\right) = \bar{a} \times \bar{b} + \bar{a} \times \bar{c}.$$

Векторний добуток векторів $\bar{a}$ і $\bar{b}$, заданих у координатній формі. Нехай маємо два вектори: $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$.

1. Визначимо векторні добутки ортів $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ (рис. 3.10).

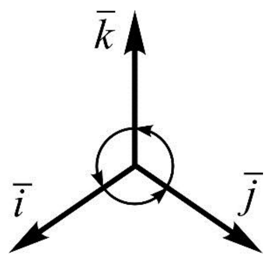


Рис. 3.10. **Векторні добутки ортів**

Векторний добуток однойменних векторів за властивістю **1** дає нуль-вектор:

$$\bar{i} \times \bar{i} = \bar{j} \times \bar{j} = \bar{k} \times \bar{k} = \bar{0}.$$

Однак усі векторні добутки різнойменних одиничних векторів даватимуть одиничні вектори:

$$\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}\,,\quad \overline{j}\times\overline{k}=\overline{i}\,,\quad \overline{k}\times\overline{i}=\overline{j}\,,$$

$$\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k}\,,\quad \overline{k}\times\overline{j}=-\overline{i}\,,\quad \overline{i}\times\overline{k}=-\overline{j}\,.$$

Розглянемо, наприклад, добуток $\overline{i}\times\overline{j}$. Суміщення $\overline{i}$ з $\overline{j}$ найкоротшим шляхом (указано дугою зі стрілкою на рис. 3.10) відбувається проти руху годинникової стрілки, якщо дивитися з кінця вектора $\overline{k}$, отже, $\overline{i}\times\overline{j}=\overline{k}$. Тоді за властивістю **2** $\overline{j}\times\overline{i}=-\overline{k}$.

2. Знаходимо добуток $\overline{a}\times\overline{b}$, подаючи вектори в алгебраїчній формі:

$$\overline{s}=\overline{a}\times\overline{b}=\left(a_x\overline{i}+a_y\overline{j}+a_z\overline{k}\right)\times\left(b_x\overline{i}+b_y\overline{j}+b_z\overline{k}\right)=a_xb_y\left(\overline{i}\times\overline{j}\right)+$$

$$+a_xb_z\left(\overline{i}\times\overline{k}\right)+a_yb_x\left(\overline{j}\times\overline{i}\right)+a_yb_z\left(\overline{j}\times\overline{k}\right)+a_zb_x\left(\overline{k}\times\overline{i}\right)+a_zb_y\left(\overline{k}\times\overline{j}\right)=$$

$$=a_xb_y\overline{k}-a_xb_z\overline{j}-a_yb_x\overline{k}+a_yb_z\overline{i}+a_zb_x\overline{j}-a_zb_y\overline{i}=$$

$$=\left(a_yb_z-a_zb_y\right)\overline{i}-\left(a_xb_z-a_zb_x\right)\overline{j}+\left(a_xb_y-a_yb_x\right)\overline{k}\,.$$

Множники при $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ – це розкриті визначники другого порядку, тому

$$\overline{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\overline{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\overline{k}\,.$$

Коефіцієнти при одиничних векторах у співвідношенні є координатами вектора $\overline{c}$ як векторного добутку векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Якщо символи $\overline{i}$, $\overline{j}$, $\overline{k}$ вважати елементами першого рядка визначника третього порядку, то остаточно отримаємо подання $\overline{a}\times\overline{b}$ у вигляді визначника:

$$\overline{c}=\begin{vmatrix}\overline{i} & \overline{j} & \overline{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Приклад 3.2. Знайдемо векторний добуток векторів $\overline{a}=(1,-2,3)$ і $\overline{b}=(2,0,\,-3)$.

Розв'язання.

$$\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \Rightarrow \left(c_x = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = 6,\ c_y = -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 9,\ c_z = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = (6,\ 9,\ 4).$$

Модуль векторного добутку $|\bar{s}| = \sqrt{36+81+16} = \sqrt{133}$ визначає площу паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$.

Мішаний добуток трьох векторів $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ є векторний добуток двох з них, помножений на третій вектор скалярно, тобто: $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$, $(\bar{a} \times \bar{c}) \cdot \bar{b}$, $(\bar{b} \times \bar{c}) \cdot \bar{a}$ і т. д.

Мішаний добуток можна позначати трійкою векторів $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$, у якій перші два вектори помножені векторно, а на третій вектор – скалярно, тобто $\bar{a}\,\bar{b}\,\bar{c}$ – це те саме, що $(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}$. Зрозуміло, що результатом мішаного добутку є скаляр, оскільки векторний добуток $\bar{a} \times \bar{b}$ є вектором (позначимо його через $\bar{s}$), а добуток $\bar{s} \cdot \bar{c}$ дає скаляр.

Геометрична інтерпретація мішаного добутку. Нехай $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$ – некомпланарні вектори. Побудуємо на цих векторах як на ребрах паралелепіпед (рис. 3.11).

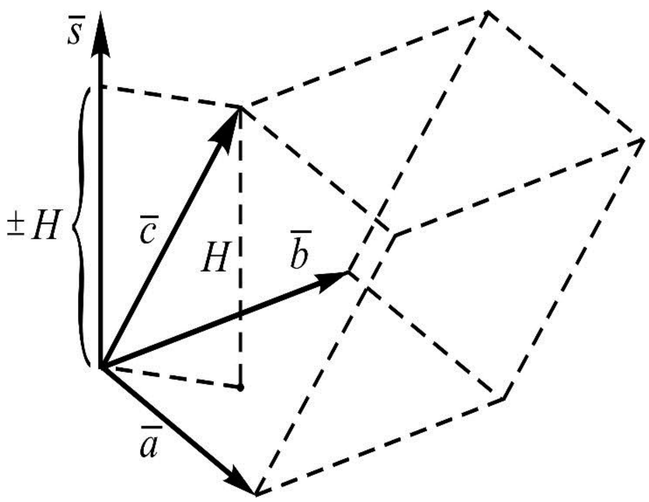


Рис. 3.11. **Геометричний зміст мішаного добутку**

Вектор $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b}$ за довжиною чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах $\bar{a}$ і $\bar{b}$ як на сторонах. Цей паралелограм є основою паралелепіпеда, який побудовано на векторах $\bar{a}$, $\bar{b}$ і $\bar{c}$. Вектор $\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b}$ є перпендикулярним площині паралелограма.

Скалярний добуток $\bar{s} \cdot \bar{c}$ можна подати як добуток модуля $|\bar{s}|$ і проєкції вектора $\bar{c}$ на вісь, що визначається вектором $\bar{s}$:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = (\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c} = \bar{s} \cdot \bar{c} = |\bar{s}| \cdot |\bar{c}| \cdot \cos\angle(\bar{s}, \bar{c}) = |\bar{s}| \cdot np_{\bar{s}}\bar{c},$$

де $np_{\bar{s}}\bar{c} = \pm H$, причому $np_{\bar{s}}\bar{c}$ є додатним числом, якщо кут між векторами $\bar{s}$ і $\bar{c}$ гострий, і від'ємним, якщо цей кут тупий.

За модулем ця проєкція дорівнює висоті паралелепіпеда H.

Модуль мішаного добутку трьох векторів чисельно дорівнює об'єму паралелепіпеда V, побудованого на векторах як на ребрах:

$$|(\bar{a} \times \bar{b}) \cdot \bar{c}| = |\bar{s}| \cdot H = V.$$

Основні властивості мішаного добутку випливають з його означення і геометричної інтерпретації.

1. Умовою компланарності трьох векторів є рівність нулю їх мішаного добутку:

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ − компланарні} \Leftrightarrow \bar{a}\bar{b}\bar{c} = 0.$$

Пов'яжемо із зображеними на площині векторами $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ коло (рис. 3.12). Перелічення векторів, починаючи з будь-якого, проти руху годинникової стрілки назвемо **додатним**, або **циклічним переставленням** векторів; у протилежному випадку − **від'ємним переставленням**.

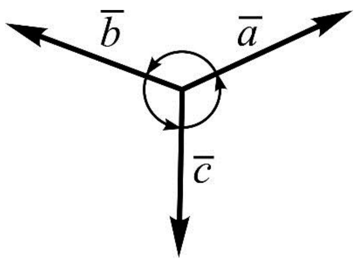


Рис. 3.12. **Циклічне переставлення векторів**

2. Циклічне переставлення трьох співмножників мішаного добутку не змінює його величини, а від'ємне переставлення міняє його знак на протилежний:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \bar{b}\bar{c}\bar{a} = \bar{c}\bar{a}\bar{b} = -\bar{a}\bar{c}\bar{b} = -\bar{b}\bar{a}\bar{c} = -\bar{c}\bar{b}\bar{a}\,.$$

Мішаний добуток векторів, заданих у координатній формі. Нехай маємо три вектори $\bar{a} = (a_x, a_y, a_z)$, $\bar{b} = (b_x, b_y, b_z)$, $\bar{c} = (c_x, c_y, c_z)$. За означенням мішаного добутку та поданням векторного та скалярного добутків у координатній формі маємо:

$$\left(\bar{a} \times \bar{b}\right)\cdot \bar{c} = \bar{s}\cdot \bar{c} = \left(\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \right)\cdot \left(c_x, c_y, c_z\right) =$$

$$= c_x \cdot \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} - c_y \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} + c_z \cdot \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}.$$

Отримана сума добутків є розкладом визначника третього порядку, складеного з координат векторів, за елементами його третього рядка, тобто:

$$\bar{a}\bar{b}\bar{c} = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}.$$

Якщо вектори $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c}$ **компланарні,** тоді визначник третього порядка, дорівнює нулю (властивість **1**):

$$\bar{a}, \bar{b}, \bar{c} \text{ − компланарні} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} = 0.$$

Зауваження. За допомогою мішаного добутку векторів легко визначити, чи належать чотири точки A, B, C, D одній площині. Для цього слід перевірити виконання умови компланарності трьох векторів зі спільним початком в одній із точок.

3.5. Найпростіші задачі аналітичної геометрії

Задача про визначення довжини відрізка. Знайдемо довжину відрізка A_1A_2, якщо відомі координати його кінців: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$. Цю задачу можна також розглядати як задачу про знаходження відстані між двома точками.

1. Введемо в розгляд вектор $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ з початком A_1 і кінцем A_2 і радіуси-вектори $\bar{r}_1 = \overline{OA_1} = (x_1, y_1, z_1)$, $\bar{r}_2 = \overline{OA_2} = (x_2, y_2, z_2)$ (рис. 3.13).

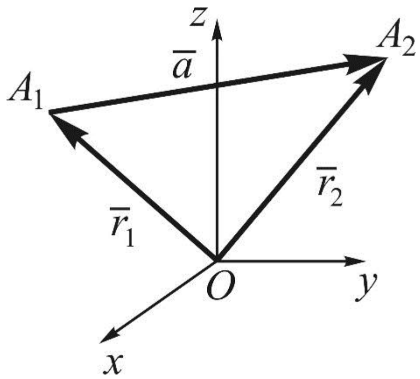


Рис. 3.13. **Відстань між двома точками**

2. Визначимо координати вектора $\bar{a}$ як різниці векторів $\bar{r}_2$ і $\bar{r}_1$:

$$\bar{a} = (a_x, a_y, a_z) = \bar{r}_2 - \bar{r}_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1).$$

3. Знаходимо модуль вектора $\bar{a}$, який і дорівнює довжині відрізка A_1A_2:

$$|\bar{a}| = \left|\overline{A_1A_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$$

Задача про визначення площі трикутника. Знайдемо площу трикутника, заданого координатами вершин: $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$.

За аксіомою стереометрії відомо, що три точки у просторі визначають площину і до того ж тільки одну. Достатньо розглянути два вектори: $\bar{a} = \overline{A_1A_2}$ та $b = \overline{A_1A_3}$.

Його площу можна знайти за формулою: $S_\Delta = \dfrac{1}{2}\left|\bar{a} \times \bar{b}\right|$.

Приклад 3.3. Знайдемо площу трикутника з вершинами $A_1(-3,\ 5,\ 1)$, $A_2(2,\ 0,\ -3)$, $A_3(4,\ -1,\ 5)$.

Розв'язання. Введемо в розгляд вектори: $\bar{a} = \overline{A_1A_2} = (5, -5, -4)$ і $\bar{b} = \overline{A_1A_3} = (7, -6, 4)$, і визначимо їх векторний добуток:

$$\bar{s} = \bar{a} \times \bar{b} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 5 & -5 & -4 \\ 7 & -6 & 4 \end{vmatrix} = (-44, -48, 5).$$

Тоді:

$$S_\Delta = \frac{1}{2}\sqrt{44^2 + 48^2 + 5^2} = \frac{1}{2}\sqrt{4265} \approx 33 \text{ (кв. од.)}.$$

Задача про поділ відрізка у заданому відношенні. Нехай у просторі задано дві точки A_1, A_2. Проведемо через них довільну пряму l і встановимо на цій прямій додатний напрям, згідно з яким визначимо напрям на відрізку A_1A_2 (рис. 3.14). На прямій l візьмемо точку A_0, яка може належати відрізку A_1A_2 або його продовженню. Якщо точка A_0 належить відрізку A_1A_2 (рис. 3.14а), то кажуть, що вона здійснює **внутрішній поділ** відрізка на частини; якщо не належить (рис. 3.14б) – то **зовнішній**.

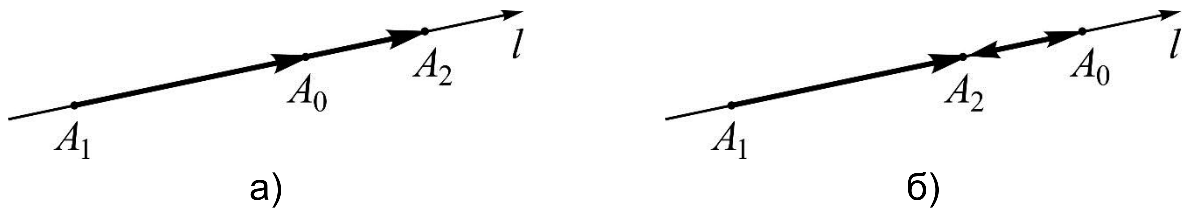


Рис. 3.14. **Внутрішній та зовнішній поділи**

Число λ, яке визначається формулою:

$$\lambda = \frac{np_{\overline{A_1A_2}}\, \overline{A_1A_0}}{np_{\overline{A_1A_2}}\, \overline{A_0A_2}},$$

називається **відношенням, у якому точка A_0 поділяє спрямований відрізок $\overline{A_1A_2}$**. Якщо $\lambda > 0$, то A_0 здійснює внутрішній поділ відрізка на частини; якщо $\lambda < 0$ – зовнішній.

Задача про поділ відрізка у заданому відношенні формулюється так: знайти координати точки $A_0(x_0, y_0, z_0)$, що поділяє відрізок A_1A_2 у відношенні λ, якщо відрізок A_1A_2 задано координатами початку $A_1(x_1, y_1, z_1)$ і кінця − $A_2(x_2, y_2, z_2)$.

Точкам A_1, A_0, A_2 відповідають радіуси-вектори $\bar{r}_1$, $\bar{r}_0$, $\bar{r}_2$ (рис. 3.15). Вектори $\overline{A_1A_0}$ і $\overline{A_0A_2}$ колінеарні, тобто $\overline{A_1A_0} = \lambda\,\overline{A_0A_2}$. Отже, $\bar{r}_0 - \bar{r}_1 = \lambda(\bar{r}_2 - \bar{r}_0)$. З цієї рівності знайдемо вектор $\bar{r}_0$: $\bar{r}_0 = \dfrac{\bar{r}_1 + \lambda\,\bar{r}_2}{1+\lambda}$, або у координатах:

$$x_0 = \frac{x_1 + \lambda\, x_2}{1+\lambda}, \quad y_0 = \frac{y_1 + \lambda\, y_2}{1+\lambda}, \quad z_0 = \frac{z_1 + \lambda\, z_2}{1+\lambda}.$$

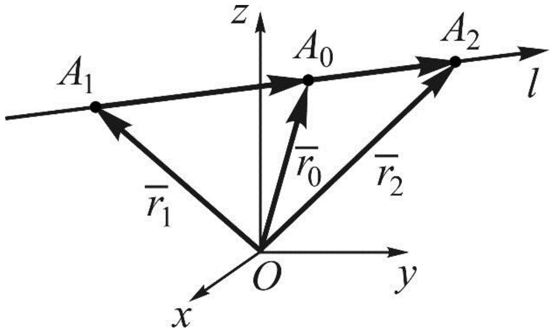


Рис. 3.15. **Поділ відрізка у заданому відношенні**

Звідси: якщо відрізок поділити на дві рівні частини точкою A_0 ($\lambda = 1$), то координати точки A_0 можуть бути знайдені таким чином:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2}{2}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2}{2}.$$

Можна довести, що координати точки перетину медіан трикутника, заданого координатами його вершин $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, обчислюються за формулами:

$$x_0 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_0 = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \quad z_0 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3}.$$

4. Функції та графіки. Проценти прості та складені в економічних дослідженнях

4.1. Абсолютна величина дійсного числа

Абсолютною величиною числа x називається саме число x, якщо воно додатне і $-x$, якщо воно від'ємне, тобто:

$$|x| = \left[\begin{array}{ll} x, & x \ge 0 \\ -x, & x < 0 \end{array}\right.$$

$|x| \le \alpha$ рівнозначно нерівностям $-\alpha \le x \le \alpha$.

4.2. Функція. Способи задання функції

Поняття функції є одним з основних понять математичного аналізу.

Якщо кожному значенню змінної x множини $X\left(x\in X\right)$ за деяким правилом або законом f ставиться у відповідність одне значення змінної y з множини $Y\left(y\in Y\right)$, то говорять, що на множині X **задано функцію** $y=f\left(x\right)$.

Змінну x називають **аргументом**, або незалежною змінною, а залежну змінну y – **функцією**, множину X – **областю визначення**, а множину Y – **областю значень функції**.

Правилом відповідності між значеннями змінних x і y є спосіб задання функції. Існує три основні способи задання функції.

1. Аналітичний спосіб. Якщо функція задається у вигляді аналітичного виразу (формули).

Приклад 4.1. Знайдемо область визначення функцій.

Розв'язання:

1) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; $X=\left(-\infty;+\infty\right)$;

2) $y=\dfrac{1}{x^2-1}$; $X=\left(-\infty;-1\right),\left(-1;1\right),\left(1;+\infty\right)$;

3) $y=\arcsin x$; $X=\left[-1;1\right]$;

4) $y=\sqrt{5-x}+\sqrt{x-1}$; $X=\left[1;5\right]$.

2. Табличний спосіб – це спосіб зображення функції у вигляді таблиці, яка складається з ряду значень незалежної змінної x і відповідних значень змінної y. Такий спосіб задання часто встановлюється експериментально або шляхом спостережень.

3. Графічний спосіб. У дослідженнях, пов'язаних з використанням самописних приладів, відповідність між незалежною змінною x і функцією y встановлюється за допомогою деякої лінії, яку побудовано у вибраній системі координат.

Розроблені в математичному аналізі методи дослідження функції найкраще пристосовані до аналітичного способу задання функції.

4.3. Класифікація функцій за їх властивостями

Монотонні функції. Функція $f(x)$ є зростаючою на деякій множині X, якщо із нерівності $x_1 < x_2$ маємо нерівність $f(x_1) < f(x_2)$. Функція – спадна, якщо при $x_1 < x_2$, $f(x_1) > f(x_2)$. Зростаючі та спадні функції на множині X називаються монотонними.

Приклад 4.2. Функція $y = x^3$, визначена на інтервалі $(-\infty;+\infty)$, зростає на цьому інтервалі.

Приклад 4.3. $y = \ln(-x)$, область визначення: $(-\infty;0)$. Функція спадає на цьому інтервалі.

Функція називається кусково-монотонною на множині X, якщо цю множину можна розбити на такі множини, на яких ця функція буде монотонною. Наприклад, функція $y = x^2 - x - 6$ є кусково-монотонна, тому що вона на інтервалі $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$ – спадає, а на інтервалі $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$ – зростає.

Обмежені та необмежені функції. Функція $y = f(x)$ – обмежена на множині X, якщо є такі числа m і M, що $m \le f(x) \le M$; якщо таких чисел немає, то функція називається необмеженою. Нехай число C найбільше з чисел m і M, тоді для обмеження функції має виконуватись умова $|f(x)| \le C$.

Приклад 4.4. Функція $y = \arcsin x$, обмежена на проміжку $[-1;1]$.

Приклад 4.5. Функція $y = \operatorname{tg} x$, обмежена на проміжку $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ і не обмежена на проміжку $\left[-\frac{\pi}{2};+\frac{\pi}{2}\right]$.

Парні та непарні функції. Функція називається парною, якщо виконується рівність: $f(x) = f(-x)$, а якщо $f(-x) = -f(x)$, $x \in X$, то функція називається непарною.

Приклад 4.6. Дослідимо функції на парність і непарність.

1) $y = \frac{1}{x^2+1}$ – парна;

2) $y=\dfrac{1}{x^3}$ – непарна, $f(-x)=-f(x)$;

3) $y=x^2-x-6$, не є парною і не є непарною;

4) $y=\sqrt{x}$ не є парною і не є непарною, тому що значення $-x$ не належать області визначення функції.

Зауважимо, що графік непарної функції – це крива, що симетрична відносно початку координат, а парної функції – відносно осі ординат.

Періодична функція. Функція $y=f(x)$ називається періодичною на множині X, якщо існує таке число $l>0$, що для будь-якої точки x, яка належить області визначення, виконується умова: $f(x\pm l)=f(x)$.

Найменше число l є період функції $f(x)$.

Наприклад: $y=\sin x$ має періодом $l=2\pi$, $y=\operatorname{tg} x$ має періодом $l=\pi$.

Обернена функція. Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині $X=\{x\}$, а областю її значень є множина $Y=\{y\}$.

Якщо кожному значенню змінної $y\in Y$ відповідає одне значення змінної $x\in X$, то на множині Y можна визначити функцію $x=\varphi(y)$. Оскільки функцію ми позначаємо літерою y, а аргумент літерою x, то запишемо $y=\varphi(x)$. При цьому функції $y=\varphi(x)$ і $y=f(x)$ – взаємообернені. Графіки прямої та оберненої функції симетричні відносно бісектриси першого та третього координатних кутів (рис. 4.1).

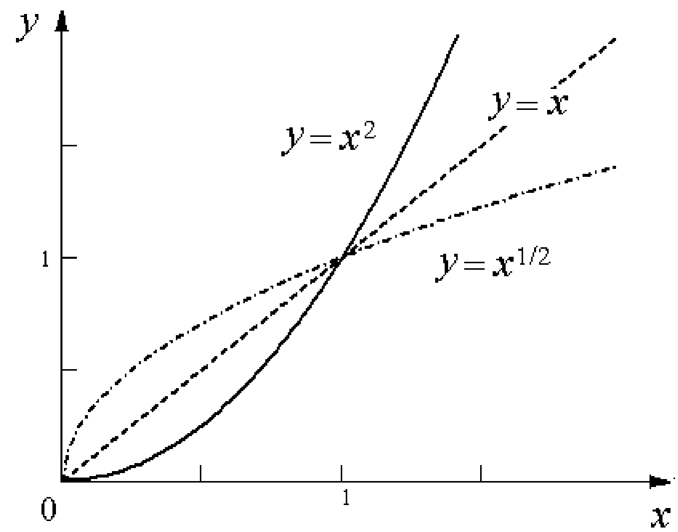


Рис. 4.1. **Графіки взаємообернених функцій**

Якщо функція $y = f(x)$ монотонна на множині X, то на відповідній множині Y існує також монотонна обернена функція $y = \varphi(x)$.

4.4. Основні елементарні функції

Основними елементарними функціями в математичному аналізі є:

1) степенева функція $y = x^{\alpha}$, де $\alpha \in R$;

2) показникова функція $y = a^{x}\,(a > 0; a \neq 1)$, функція визначена на множині $(-\infty; +\infty)$, а областю значень є інтервал $(0; +\infty)$;

3) логарифмічна функція $y = \log_a x\,(a > 0, a \neq 1)$, область визначення $(0; +\infty)$, а область значень $(-\infty; +\infty)$. Функція є оберненою до $y = a^{x}$;

4) тригонометричні функції:

$$y = \sin x;\ \ y = \cos x;\ \ x \in R;\ \ |y| \leq 1;$$

$$y = \operatorname{tg} x;\ \ x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k\,(k \in Z);$$

$$y = \operatorname{ctg} x;\ \ x \neq \pi k\,(k \in Z);$$

5) обернені тригонометричні функції:

$$y = \arcsin x;\ \ x \in [-1; 1];\ \ y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right];$$

$$y = \arccos x;\ \ x \in [-1; 1];\ \ y \in [0; \pi];$$

$$y = \operatorname{arctg} x;\ \ x \in R;\ \ y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right);$$

$$y = \operatorname{arcctg} x;\ \ x \in R;\ \ y \in (0; \pi).$$

Функція $y = f(x)$, визначена на множині X, **називається елементарною**, якщо вона задається однією формулою так, що її значення при будь-якому $x \in X$ може бути знайдено за допомогою скінченного числа елементарних дій (додавання, добутку, ділення, піднесення до степеня, добування кореня, логарифмування, обчислення тригонометричних та обернених тригонометричних функцій); при цьому кількість операцій не залежить від значення аргументу x. Наприклад, $y = \lg\sin(x+1)$ – це елементарна функція; прикладами неелементарних функцій є:

$$y = n! \text{ або } y = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x^2 & x \ge 0 \end{cases}.$$

У першому випадку число дій над аргументом нескінченне, у другому – функція задається двома формулами.

4.5. Приклади застосування елементарних функцій в економіці

Приклад 4.7. Лінійна функція $y = kx + b$.

Якщо $x-$ обсяг продукції, а $k-$витрати на одиницю продукції, $b-$сталі витрати, то $y = f(x)-$ загальні витрати виробництва, або **виробнича функція.**

Приклад 4.8. Дробово-лінійна функція. Нехай виробнича функція $y = kx + b,$ тоді собівартість одиниці продукції $y = \frac{kx+b}{x}$. Останню функцію можна визначити як середні **витрати виробництва** на одиницю продукції. При цьому функція y може мати будь-який вигляд, тоді середні витрати виробництва на одиницю продукції є $y = \frac{f(x)}{x}$.

Формула простих процентів. У банк внесена початкова сума X_0 під p % щорічних. Яку суму буде накопичено за n років?

Якщо початкова сума X_0, то:

за перший рік: $X_1 = X_0 + \frac{p}{100} X_0 = X_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

за другий рік: $X_2 = X_1 + \frac{p}{100} X_0 = X_0 \left(1 + \frac{2 \cdot p}{100}\right)$.

Накопичена сума за n років буде: $X_n = X_0 \left(1 + n \cdot \frac{p}{100}\right)$.

Формула складених процентів. Сума X_0 внесена в банк під складений процент, при умові нарахування кожної одиниці часу (місяць, рік) p %. Яка буде сума через n одиниць часу?

На кінець першого року сума складає: $X_1 = X_0 + \frac{p}{100} X_0 = X_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)$;

другого року: $X_2 = X_1 + \frac{p}{100} X_1 = X_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2$.

Звідки:

$$X_n = X_0 \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Останню формулу можна довести методом математичної індукції.

Приклад 4.9. Підприємець поклав в банк 150 000 грн під складені проценти із щорічним зростанням 18 %. Побудуйте послідовність щорічного зростання його внеску протягом 5 років.

Розв'язання. Для побудови числової послідовності використовуємо формулу $A_n = A(1+p)^n$, де $A = 150\,000$, $p = 0{,}18$, $n = \overline{1,5}$.

Результати обчислень наведено в табл. 4.1.

Таблиця 4.1

Результати обчислень

n, роки	1	2	3	4	5
A_n, грн	177 000,0	208 860,0	246 454,8	290 816,7	323 163,7

Приклад 4.10. Попит на папір у канцелярії університету на місяць складає 20 пачок і щомісяця зростає на 5 %. Через який час попит збільшиться вдвічі, якщо ця тенденція буде зберігатися?

Розв'язання. Ураховуючи формулу $A_n = A(1+p)^n$, маємо:

$$2A = A(1+0{,}05)^n, \text{ або } 2 = 1{,}05^n.$$

Прологарифмуємо обидві частини:

$$\lg 2 = n \lg 1{,}05.$$

Звідси $n = \frac{\lg 2}{\lg 1{,}05} = 14$.

Отже, через 14 місяців попит на папір у канцелярії збільшиться вдвічі.

Приклад 4.11. Підприємець вирішив інвестувати в проєкт з будівництва нового готелю 10 млн грн, розраховуючи отримати через 3 роки 20 млн грн. Якою має бути при цьому процентна ставка?

Розв'язання. Застосовуємо формулу складних процентів:

$$A_n = A(1+p)^n.$$

Необхідно знайти p. Підставимо дані задачі:

$$20 = 10(1+p)^3 \text{ або } 2 = (1+p)^3.$$

Далі маємо: $\lg 2 = 3\lg(1+p)$, $1+p = 1,26$, звідки $p = 0,26$.

Отже, щоб через три роки отримати 20 млн грн, процентна ставка повинна бути 26 %.

Приклад 4.12. Універмаг продає за день 150 пар взуття. Після відкриття ще одного відділу було вирішено довести продаж до 750 пар. Скільки для цього буде потрібно часу, якщо щодня збільшення продажу складає 25 %?

Розв'язання. За формулою:

$$A_n = A(1+p)^n$$

маємо:

$$750 = 150 \cdot 1,25^n \Rightarrow (1,25)^n = 5.$$

Звідси:

$$n = \frac{\lg 5}{\lg 1,25} = 7.$$

Отже, треба буде 7 днів, щоб збільшити щодня продаж взуття до 750 пар.

Приклад 4.13. Клієнт поклав гроші у банк під складні проценти за ставкою 8 %. Через п'ять років він отримав 29 386,6 грн. Яку суму було покладено в банк?

Розв'язання. За формулою складних процентів маємо:

$$29\,386,6 = A(1+0,08)^5,$$

звідки:

$$A = \frac{29\,386,6}{1,08^5} = 20\,000.$$

Таким чином, в банк було покладено 20 000 грн.

Приклад 4.14. Чисельність населення України у 2010 р. складала 47 млн. Знайдіть чисельність населення України через 5 років, якщо вона буде зростати щорічно: а) на 0,5 %; б) на 1,5 %.

Розв'язання. Якщо A – чисельність населення на початок розрахунку, тоді через n років чисельність складатиме $A_n = Ae^{pn}$, а саме:

а) $A_5 = 47e^{0,005\cdot 5} = 48,19$ (млн);

б) $A_5 = 47e^{0,015\cdot 5} = 50,66$ (млн).

Отже, зі зростанням чисельності на 0,5 % через 5 років вона складатиме 48,19 млн, а зі зростанням на 1,5 % – 50,66 млн.

Приклад 4.15. Студент, одержавши на конкурсі премію 10 000 грн, поклав її на 3 роки до банку за схемою неперервного нарахування процентів за ставкою 10 %. Побудуйте числову послідовність накопичень при $n=1$, $n=2$, $n=3$.

Розв'язання. Для побудови числової послідовності використовуємо формулу $A_n = Ae^{pn}$, а саме: $A_n = 10\,000e^{0,1n}$.

Результати обчислень подамо у вигляді табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Результати обчислень

n, роки	1	2	3
A_n, грн	11 051,71	12 214,03	13 498,59

5. Границі функцій та неперервність

Нехай функція $f(x)$ визначена в деякому околі точки x_0, крім, можливо, самої точки x_0. Число A називають **границею функції** в точці x_0; тобто, $A = \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$, якщо для довільного числа $\varepsilon > 0$ існує таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що нерівність $|f(x) - A| < \varepsilon$ виконується для всіх $x \in (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$, $x \neq x_0$.

Якщо число A є границею функції $y=f\left(x\right)$ при $x\to x_0$, то який би малий ε-окіл точки A ми не взяли, знайдеться такий δ-окіл точки x_0, що для всіх $x\neq x_0$ відповідні значення функції розмістяться в смузі $\left(A-\varepsilon;A+\varepsilon\right)$ шириною 2ε (рис. 5.1).

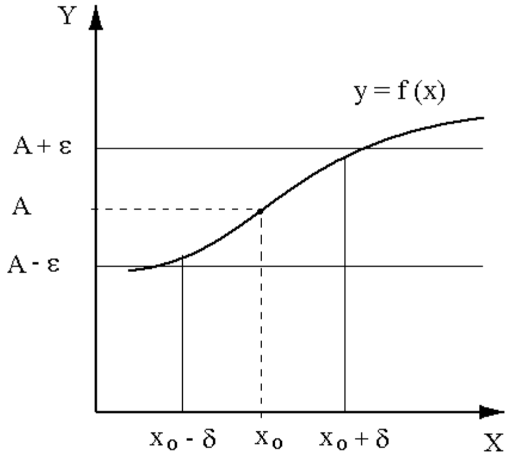


Рис. 5.1. **Геометричний зміст границі функції**

Число A називають **границею** функції в точці x_0, якщо $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

Звернемо увагу на поняття односторонніх границь функції. Число A називають **границею функції** $f\left(x\right)$ **зліва (справа)** в точці x_0, якщо для аргументу збіжного до $x_0\left(x_n<x_0\right)\left(x_n>x_0\right)$ відповідна функція збігається до A. Позначається:

ліва границя:

$$\lim_{x\to x_0-0} f\left(x\right)=f\left(x_0-0\right),$$

права границя:

$$\lim_{x\to x_0+0} f\left(x\right)=f\left(x_0+0\right).$$

Нехай функції $f\left(x\right)$ і $g\left(x\right)$ у точці x_0 мають скінченні границі:

$$\lim_{x\to x_0} f\left(x\right)=A;\quad \lim_{x\to x_0} g\left(x\right)=B.$$

Тоді границя суми, добутку, частки цих функцій дорівнює сумі, добутку, частці границь цих функцій (якщо границя знаменника не дорівнює нулю).

Сформульована теорема в стислому вигляді запишеться так:

1) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)+g\left(x\right)\right)=A+B;$

2) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)-g\left(x\right)\right)=A-B;$

3) $\lim\limits_{x\to x_0}\left(f\left(x\right)\cdot g\left(x\right)\right)=A\cdot B;$

4) $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}=\dfrac{A}{B}, B\neq 0.$

5.1. Розкриття невизначеностей

Для знаходження границі функцій необхідно мати на увазі теореми, яким задовольняють функції, що мають границю. На практиці досить широко маємо справу з такими функціями, до яких теореми використати неможливо, якщо не перетворити вираз, границю якого треба обчислити. Такі вирази називають **невизначеностями**. Розглянемо ряд невизначеностей різного типу.

1. Невизначеність типу $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$, якщо треба знайти границю відношення двох многочленів, коли аргумент прямує до нескінченності:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P_m\left(x\right)}{Q_n\left(x\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_m x^m+a_{m-1}x^{m-1}+\ldots+a_0}{b_n x^n+b_{n-1}x^{n-1}+\ldots+b_0}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\begin{cases}0, & m<n\\ \dfrac{a_m}{b_n}, & m=n\,.\\ \infty, & m>n\end{cases}$$

Для обчислення границі потрібно чисельник і знаменник дробу поділити на найвищу степінь x, а потім обчислити границю.

Приклад 5.1. Обчислимо границю:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3n^2+1}+\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n^2+1}+n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{3+\dfrac{1}{n^2}}+\sqrt{\dfrac{1}{n}}}{\sqrt[3]{\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^3}}+1}=\sqrt{3}.$$

У цьому прикладі перша степінь змінної n є найвища, тому чисельник і знаменник поділили на n і обчислили границю.

2. Невизначеність виду $\left[\frac{0}{0}\right]$. Розглянемо границю частки двох функцій: $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}$, коли $f(x)$ і $\varphi(x)$ прямують до 0 одночасно. Тобто $x=a$ є коренем чисельника та знаменника. У випадку, якщо $f(x)$ і $\varphi(x)$ многочлени, їх можна за теоремою Безу розкласти на множники, один з яких $x-a$, а потім скоротити дріб на $x-a$.

Приклад 5.2. Обчислимо границю.

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^3+5x-7}{x^2-3x+2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(2x^2+2x+7\right)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to 1}\frac{2x^2+2x+7}{x-2}=-11.$$

Щоб виділити в чисельнику та знаменнику множник $x-1$, треба поділили "сходинками" чисельник і знаменник на $x-1$.

Подібним чином, тобто вилученням множника $(x-a)$, розкривають невизначеності $\frac{0}{0}$ і тоді, коли чисельник і знаменник (або) містять кореневі ірраціональності. Найбільше поширена для цього операція – помноження чисельника та знаменника дробу на вираз, спряжений тому чи іншому (або і тому, і іншому – залежно від операції), з метою позбутися початкової ірраціональності, щоб отримати множник $(x-a)$.

Приклад 5.3. Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{6-x}-2}{\sqrt{14+x}-4}=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{6-x}-2\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{\left(\sqrt{14+x}-4\right)\left(\sqrt{14+x}+4\right)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)\left(\sqrt{14+x}+4\right)}{(x-2)\left(\sqrt{6-x}+2\right)}=-\frac{8}{4}=-2.$$

3. Невизначеності типу $[\infty-\infty]$ за допомогою перетворень потрібно привести до невизначень $\left[\frac{0}{0}\right]$ або $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

Приклад 5.4. Обчислимо границю:

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{6}{x^2-9}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\frac{1}{6}.$$

5.2. Нескінченно малі та їх порівняння

Нехай $\alpha = \alpha(x), \beta = \beta(x) -$ нескінченно малі функції при $x \to a$ ($a -$скінченне число або ∞). Хоча всі нескінченно малі мають границю O, ступінь прямування до нього буває різною, в зв'язку з чим і виникає потреба в їх порівнянні.

Порівняти нескінченно малі – це обчислити границю їх відношення:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = c.$$

Якщо така границя існує, то:

а) при $c = 1$ нескінченно малі α і β називають еквівалентними та записують $\alpha \sim \beta$;

б) при *c = const,* $c \neq 0, \alpha(x)$ і $\beta(x)$ називають нескінченно малими одного порядку;

в) при $c = 0, \alpha(x)$ називають нескінченно малою більш високого порядку, ніж $\beta(x)$;

г) при $c = \infty, \alpha(x) -$нескінченно мала більш низького порядку ніж $\beta(x)$.

Коли виникає потреба в більш точній порівняльній характеристиці поведінки $\alpha(x)$ і $\beta(x)$, треба обчислити порядок малості $\alpha(x)$ відносно $\beta(x)$.

Нескінченно мала $\alpha(x)$ є **нескінченно малою порядку** k відносно нескінченно малої $\beta(x)$, якщо:

$$\lim_{x \to a} \frac{\alpha(x)}{\beta^k(x)} = c \neq 0.$$

Наприклад, $\alpha = x; \beta = x^{10}, x \to 0,$ тоді $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\beta(x)}{\alpha(x)} = \lim\limits_{x \to 0} \frac{x^{10}}{x} = \lim\limits_{x \to 0} x^9 = 0 -$ нескінченна мала $\beta(x)$ більш високого порядку малості, ніж α. Порядок малості $k = 10$. Отже, β і $\alpha^{10} -$еквівалентні нескінченно малі.

5.3. Перша чудова границя. Наслідки

Теорема 5.1. Границя відношення синуса нескінченно малого аргументу до цього аргументу дорівнює одиниці, тобто:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Доведення. Щоб довести теорему, розглянемо коло радіуса 1 з центром у точці O (рис. 5.2), і нехай $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$.

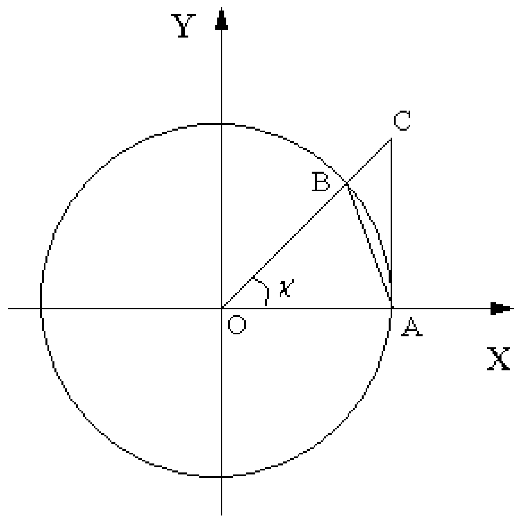


Рис. 5.2. **Одиничне коло**

Порівняємо площини трикутника AOB, сектора $A\breve{O}B$, трикутника AOC. З геометричних міркувань очевидно, що $S_{AOB}<S_{AO*BA}<S_{AOC}$. Отже, $\frac{1}{2}\sin x<\frac{x}{2}<\frac{1}{2}tgx$, або $\sin x<x<\frac{\sin x}{\cos x}$, або $1<\frac{x}{\sin x}<\frac{1}{\cos x}$, тому $\cos x<\frac{\sin x}{x}<1$. Зауважимо, що дані нерівності виконуються і для $x\in\left(-\frac{\pi}{2};0\right)$, тому що функції $\cos x$ і $\frac{\sin x}{x}$ – парні. Переходячи до границі, будемо мати $\lim\limits_{x\to 0}1=1; \lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$. Тоді, за ознакою існування границі проміжної функції: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Для застосування цієї теореми треба зазначити, що в ролі аргументу x під знаком синуса, може виступати складний аргумент – функція незалежної змінної, але структура виразу повинна бути саме такою, як в наведеній теоремі. Тобто $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin\alpha(x)}{\alpha(x)}=1,$ якщо $\sin\alpha(x)\to 0$; $\alpha(x)\to 0,$ коли аргумент x прямує до 0.

На практиці, як готові формули, використовують наслідки з теореми:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$; 3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}=\dfrac{a}{b}$; 5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}=1$;

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{x}=a$; 4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}=1$; 6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}=1.$

Приклад 5.5. Обчислимо границі:

а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{4x}=\dfrac{5}{4}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{5x}=\dfrac{5}{4}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{\frac{x}{2}}\right)^2=\dfrac{1}{2}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 3x-\cos 5x}{x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2\sin 4x\sin x}{x^2}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 4x}{4x}\cdot\dfrac{\sin x}{x}=\dfrac{1}{2}$;

г) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{2}x(x-1)}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\frac{1}{2}x(x-1)}{2\cdot\frac{x(x-1)}{2}}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\alpha}{2\cdot 2}=\dfrac{1}{2},$ де $\alpha=\dfrac{1}{2}x(x-1)$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}x\operatorname{ctg}5x=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5\cdot x}{5\cdot\operatorname{tg}5x}=\dfrac{1}{5}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{\operatorname{tg}5x}=\dfrac{1}{5}.$

5.4. Використання еквівалентних нескінченно малих для обчислення границь

Особливий інтерес в обчисленні границі функції викликають еквівалентні нескінченно малі. Ряд еквівалентних нескінченно малих отримано виходячи з першої чудової границі при $\alpha(x)\to 0$:

1) $\sin x\sim x$; 3) $\arcsin x\sim x$;

2) $tgx\sim x$; 4) $arctgx\sim x$.

Приклад 5.6. Обчислити границі:

а) граничний перехід дає невизначеність $\left[\frac{0}{0}\right]$. Оскільки $x \to 0$, $\sin 5x \sim 5x$, $\operatorname{arctg} 6x \sim 6x$. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\operatorname{arctg} 6x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{5x}{6x} = \frac{5}{6}$;

б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{1-\cos 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{3}{2}x}{2\sin^2\frac{5}{2}x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{9}{4}x^2}{\frac{25}{4}x^2} = \frac{9}{25}$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2\sin 3x)}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 3x}{\sin 5x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\cdot 3x}{5x} = \frac{6}{5}$;

г) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\cos 5x - \cos 7x}{\arcsin^2 3x} = \lim\limits_{x\to 0}\frac{2\sin 6x\cdot\sin x}{\arcsin^2 3x} = 2\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x\cdot x}{9x^2} = \frac{4}{3}$.

5.5. Друга чудова границя. Наслідки

Теорема 5.2*.* Якщо $n \to \infty$, границя послідовності $u_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ дорівнює $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$. Маємо невизначеність $\left[1^\infty\right]$.

Другою чудовою границею називають $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$

На практиці, як готові формули, використовують наслідки з основної теореми:

1) $\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{1/\alpha} = e$, де $\alpha = \frac{1}{x}$, при $x \to \infty$, $\alpha \to 0$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x} = 1$. $\ln(1+x) \sim x$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$. $e^x - 1 \sim x$;

4) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{a^x - 1}{x} = \ln a$; $a^x - 1 \sim x\ln a$.

Приклад 5.7. Обчислимо границі:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{\frac{x}{3}}\right)^{\frac{3}{x}\cdot 5x}=e^{15};$

б) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{3/x}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1-2x)^{-1/2x}\right)^{-\frac{2x\cdot 3}{x}}=e^{-6};$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+3}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{2x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\left(1+\dfrac{2}{x+1}\right)^{\frac{x+1}{2}}\right)^{\frac{2(2x-1)}{x+1}}=e^{4};$

г) $\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}(1-1+\cos x)^{1/x^2}=\lim\limits_{x\to 0}\left((1+(\cos x-1))^{1/(\cos x-1)}\right)^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=$

$$=\lim_{x\to 0}e^{\frac{\cos x-1}{x^2}}=e^{-\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}}=e^{-\lim\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}}=e^{-\frac{1}{2}}.$$

Приклад 5.8. Початковий внесок у банк складає A_0 гр. Банк нараховує щорічно $p\%_0$ річних m разів за рік зі щорічним зростанням на p %. Необхідно знайти величину вкладу, який було накопичено за n років.

Розв'язання. Скористаємося формулою складених процентів:

$$A_n=A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}.$$

Якщо проценти за внеском нараховуються неперервно, то будемо мати:

$$A_n=\lim_{m\to\infty}A_0\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{mn}=A_0\lim_{m\to\infty}\left(\left(1+\frac{p}{100m}\right)^{\frac{100m}{p}}\right)^{\frac{p}{100m}mn}=A_0e^{\frac{pn}{100}}.$$

Формула відображує показниковий (експоненціальний) закон зростання (при $p>0$) або спадання (при $p<0$). Її можна використовувати для неперервного нарахування процентів. Ця формула є достатньо ефективною в аналізі складних фінансових проблем, наприклад, для обґрунтування та вибору інвестиційних рішень.

5.6. Неперервність функції в точці

1. Функція $f(x)$ є неперервною в точці x_0, якщо границя цієї функції при $x \to x_0$ дорівнює значенню функції в цій точці.

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0).$$

2. Функція є неперервною в точці x_0, якщо нескінченно малому приросту аргументу відповідає нескінченно малий приріст функції, тобто при $\Delta x \to 0$, $\Delta y \to 0$.

3. Функція є неперервною в точці x_0, якщо існує границя:

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) = f(x_0),$$

$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) = f(x_0),$$

тобто $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$.

Якщо ці умови не виконуються, то функція має розрив у точці x_0.

5.7. Класифікація точок розривів функції

Розрізняють такі випадки:

1) існують односторонні границі (скінченні) і $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$, але $f(x_0) \neq A$ або не існує. Тоді x_0 – точка розриву першого роду (усувного);

2) існують скінченні односторонні границі, але $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0)$. Тоді x_0 точка розриву першого роду (стрибок);

3) не існує хоча б одна з односторонніх границь, тобто або одна, або обидві нескінченні. Тоді x_0 є точка розриву другого роду.

Таким чином, щоб дослідити функцію на неперервність в даній точці x_0, треба знайти односторонні границі функції $f(x)$ при $x \to x_0$ і обчислити значення функції в точці, тобто перевірити умову:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)$$

і зробити висновки щодо різновидів розриву функції.

Приклад 5.9. Досліджмо на неперервність функцію $y=\frac{\sin x}{x}$ у точці $x_0=0$.

Розв'язання. Відповідно до першої чудової границі: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$. Тобто:

$$f(0-0)=\lim_{x\to 0-0}\frac{\sin x}{x}=1; \quad f(0+0)=\lim_{x\to 0+0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

Але в точці $x_0=0$ функція не існує (рис. 5.3).

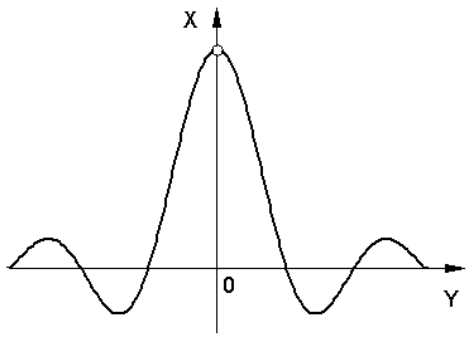


Рис. 5.3. **Усувний розрив функції**

Маємо:

$$f(0-0)=f(0+0)\neq f(0).$$

Отже, $x_0=0$ є точкою усувного розриву.

Приклад 5.10. Дослідимо на неперервність функцію:

$$y=\frac{x-2}{x^2-3x+2}.$$

Розв'язання. Областю визначення функції є вся числова ось, крім $x=1$, $x=2$ (знаменник дорівнює нулю). Отже, на неперервність функцію досліджуємо у точках:

1) $x=1$ – знайдемо односторонні границі:

$$f(1-0)=\lim_{x\to 1-0}\frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)}=-\infty;$$

$$f(1+0)=\lim_{x\to 1+0}\frac{(x-2)}{(x-1)(x-2)}=+\infty.$$

Отже, точка $x=1$ є точкою розриву другого роду;

2) $x=2$: $f\left(2-0\right)=\lim\limits_{x\to 2-0}\dfrac{1}{x-1}=1$; $f\left(2+0\right)=\lim\limits_{x\to 2+0}=1$.

У точці $x=2$ – функція не існує. Тобто $f\left(2-0\right)=f\left(2+0\right)\neq f\left(2\right)$.

Таким чином точка $x=2$ є точкою усувного розриву (рис. 5.4).

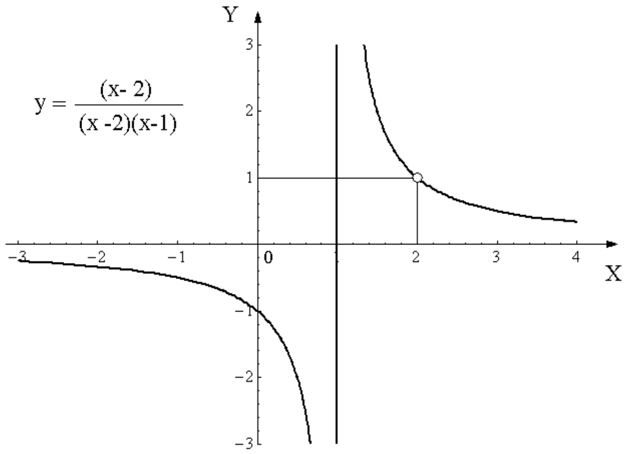


Рис. 5.4. **Розрив другого роду та усувний**

Приклад 5.11. Дослідимо на неперервність функцію:

$$y=\begin{cases} x+1, & x\leq 0 \\ x^2+1, & 0<x\leq 1. \\ x+3, & x>1 \end{cases}$$

Маємо неелементарну функцію, задану трьома формулами. На кожному із вказаних проміжків функція неперервна – як елементарна на області свого існування.

Необхідно розглянути точки стиковки функцій різного виду. Отже, точки $x=0$ і $x=1$:

1) при $x=0$ односторонні границі:

$$f\left(0-0\right)=\lim_{x\to 0-0}\left(x+1\right)=1;\ f\left(0+0\right)=\lim_{x\to 0+0}\left(x^2+1\right)=1;\ f\left(0\right)=1.$$

Таким чином, функція в точці $x_0=0$ неперервна;

2) при $x=1$: $f\left(1-0\right)=\lim\limits_{x\to 1-0}\left(x^2+1\right)=2$; $f\left(1+0\right)=\lim\limits_{x\to 1+0}(x+2)=3$; $f\left(1\right)=2$.

Тобто $f\left(1-0\right)\neq f\left(1+0\right)$, і функція в цій точці має розрив першого роду – стрибок (рис. 5.5).

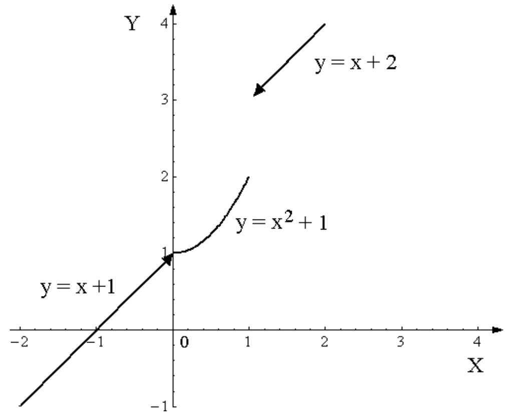


Рис. 5.5. **Розрив першого роду – стрибок**

Приклад 5.12. Дослідимо на неперервність функцію:

$$y=e^{\frac{1}{x-2}}.$$

У точці $x=2$ односторонні границі:

$$f(2-0)=\lim_{x\to 2-0} e^{\frac{1}{x-2}}=0; \quad f(2+0)=\lim_{x\to 2+0} e^{\frac{1}{x-2}}=\infty.$$

Отже, точка $x=2$ є точкою розриву другого роду (рис. 5.6).

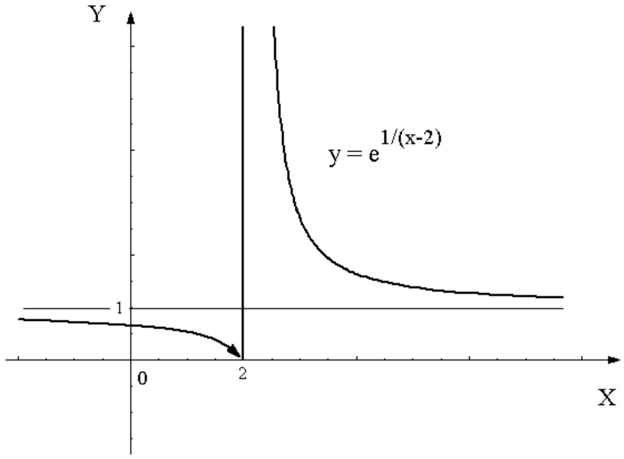


Рис. 5.6. **Розрив другого роду**

6. Диференціальне числення функцій однієї змінної

6.1. Означення похідної, її зв'язок з неперервністю функцій

Нехай функція $y=f(x)$ визначена на множині $X=(a;b)$. Задамо значення аргументу $x=x_0$. Надаємо приріст аргументу Δx такий, що $(x_0+\Delta x)\in(a;b)$. Тоді відповідний приріст функції буде $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$.

Похідною функції $y=f(x)$ у точці x_0 є границя відношення приросту функції Δy до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля. Тобто:

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Процес відшукання похідної функції називають **диференціюванням**. Якщо функція має похідну в точці x_0 вона називається диференційована в цій точці. Похідна в даній точці – це число. Якщо похідна існує в кожній точці множини X, то функція диференційована на множині. Причому похідна змінюється разом із значенням x, тобто є функцією аргументу x.

Для похідної функції вживають різні позначення. Наприклад: y', y'_x, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{df(x)}{dx}$.

Приклад 6.1. Знайдемо похідні функцій:

1. $y=\sin x$, $x\in R$:

а) $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=\sin(x+\Delta x)-\sin x$;

б) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}$;

в) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{2\sin\frac{\Delta x}{2}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)}{\Delta x}=$$
$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)=\cos x.$$

2. $y=\ln x$:

а) $\Delta y=\ln(x+\Delta x)-\ln x$;

б) $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\ln(x+\Delta x)-\ln x}{\Delta x}$;

в) $$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\ln\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$$
$$=\ln\lim_{\Delta x\to 0}\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}=\ln e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}.$$

3. $y=a^x$:

а) $\Delta y=a^{x+\Delta x}-a^x$;

б) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}$;

в) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{a^x\left(a^{\Delta x}-1\right)}{\Delta x}=a^x\ln a$.

Теорема 6.1 (про неперервність диференційованої функції). Якщо функція $f(x)$ диференційована в точці x_0, то вона неперервна в цій точці. Зворотне неправильно.

Доведення. Нехай функція $f(x)$ має похідну $f'(x_0)$ у точці x_0. Тобто:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0).$$

За критерієм існування границі маємо:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+\alpha(x,\Delta x),$$

де $\alpha(x,\Delta x)$ – нескінченно мала при $\Delta x\to 0$.

Отже, $\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\Delta x\alpha(x;\Delta x)$. Ураховуючи арифметичні власти-вості границь і нескінченно малих, отримаємо: $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$. Це означає, що $f(x)$ неперервна у точці x_0. Із неперервності функції не випливає диференційованість $(y=|x|)$.

6.2. Геометричний, фізичний та економічний зміст похідної

1. Задача про проведенні дотичної до графіка функції в точці $\mathrm{A}(x_0;y_0)$ (рис. 6.1).

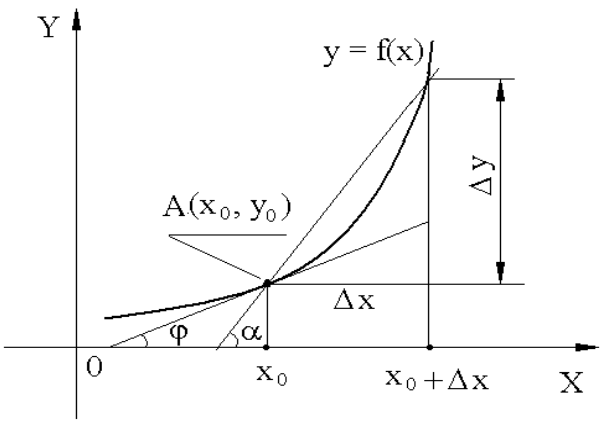


Рис. 6.1. **Дотична до графіка функції**

Рівняння дотичної до кривої в точці $A(x_0;y_0)$, $y-y_0=k(x-x_0)$. Кутовий коефіцієнт дотичної: $k=\operatorname{tg}\varphi=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$. Тобто: $k=f'(x_0)$.

Звідси рівняння дотичної має вигляд: $y-f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)$, а нормалі (перпендикуляра до дотичної) $y-f(x_0)=-\dfrac{1}{f'(x_0)}(x-x_0)$.

2. Задача про знаходження швидкості прямолінійного руху матеріальної точки, якщо відома функція шляху $S=S(t)$. Якщо на інтервалі t, $t+\Delta t$ рух вважати рівномірним, то $\upsilon(t)=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$. Тобто швидкість руху в момент часу t є похідною функції шляху $(\upsilon(t)=S'(t))$. Якщо термін "швидкість" розуміти в більш загальному сенсі, то похідну можна трактувати як швидкість змінювання функції $y=f(x)$ порівняно зі змінною x.

3. Нехай підприємство виробляє однорідну продукцію. Тоді витрати підприємства є функцією обсягу виробництва $y=f(x)$. Якщо кількість продукції змінилася на Δx, тоді витрати виробництва також зміняться на Δy:

$$\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x).$$

І отже, рівність $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ – це середній приріст витрат виробництва на одиницю продукції. Якщо в цій рівності перейти до границі:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

то отримаємо граничні витрати виробництва, або собівартість продукції за даного обсягу виробництва x.

Еластичністю виробничої функції $y=f(x)$ називають:

$$\mathrm{E}_y(x)=\frac{x}{y}\cdot y'.$$

Зміст цієї формули полягає в можливості наближено обрахувати, на скільки процентів зміниться виробнича функція y в точці x, якщо обсяг виробництва зміниться на 1 % (при $\frac{\Delta x}{x}=1$, $\mathrm{E}_y(x)\approx\frac{\Delta y}{y}$).

6.3. Таблиця похідних і правила диференціювання

Наведемо основні правила диференціювання, або властивості похідних. Нехай функції $u(x)$ та $\upsilon(x)$ мають похідні в певній точці x, тоді в тій же точці:

1) $(u\pm\upsilon)'=u'\pm\upsilon'$;

2) $(u\upsilon)'=u'\upsilon+\upsilon'u$ $\quad \left((cu)'=cu', c=const\right)$;

3) $\left(\frac{u}{\upsilon}\right)'=\frac{u'\upsilon-\upsilon'u}{\upsilon^2}$ $\quad \left(\upsilon(x)\neq 0\right)$.

Доведення приведемо для добутку функцій $y=u\upsilon$, використовуючи загальну схему відшукання похідних. Надамо аргументові x приріст Δx. Тоді функції здобудуть, відповідно, прирости Δu, $\Delta\upsilon$, Δy. Їхні нові значення $u+\Delta u$, $\upsilon+\Delta\upsilon$, $y+\Delta y$ зв'язані співвідношенням:

$$y+\Delta y=(u+\Delta u)\cdot(\upsilon+\Delta\upsilon).$$

Звідси:

$$\Delta y=(u+\Delta u)(\upsilon+\Delta\upsilon)-u\upsilon=\upsilon\Delta u+u\Delta\upsilon+\Delta u\Delta\upsilon,$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\upsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}+u\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}+\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta\upsilon.$$

Спрямуємо Δx до нуля. Тоді (згідно з теоремою про неперервність диференційованої функції і при $\Delta\upsilon\to 0$) границі відношень $\frac{\Delta u}{\Delta x}$, $\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}$ при $\Delta x\to 0$ дають відповідно u' і υ'. Таким чином,

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\upsilon\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(u\frac{\Delta\upsilon}{\Delta x}\right)+\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\cdot\Delta x\right)=\upsilon u'+u\upsilon'.$$

Приклад 6.2. Знайдемо похідні функцій:

а) $y=\operatorname{tg} x$:

$$y=\frac{\sin x}{\cos x};\ y=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.$$

Отже, $(\operatorname{tg} x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$;

б) $y=\operatorname{ctg} x$:

$$y=\frac{\cos x}{\sin x};\ \ y'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'\cos x}{\sin^2 x}=\frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.$$

Отже, $(\operatorname{ctg} x)'=\frac{-1}{\sin^2 x}$;

в) $y=2^x\ln x$:

$$y'=\left(2^x\right)'\ln x+2^x(\ln x)'=2^x\ln 2\cdot\ln x+2^x\frac{1}{x}.$$

Отже, $\left(2^x\ln x\right)'=2^x\ln 2\cdot\ln x+2^x\frac{1}{x}$.

Таким чином, похідну будь-якої елементарної функції можна знайти, якщо користуватися правилами та таблицею похідних основних елементарних функцій.

Таблиця похідних

1. $y=c$	$y'=0$
2. $y=x^n\ (n\in R)$	$y'=nx^{n-1}$
3. $y=a^x\ (a>0; a\neq 1)$	$y'=a^x\ln a$
4. $y=\ln x\ (x>0)$	$y'=\frac{1}{x}$
5. $y=\sin x$	$y'=\cos x$
6. $y=\cos x$	$y'=-\sin x$
7. $y=\operatorname{tg} x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$
8. $y=\operatorname{ctg} x$	$y'=-\frac{1}{\sin^2 x}$

9. $y = \arcsin x$ $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

10. $y = \arccos x$ $\qquad y' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

11. $y = \operatorname{arctg} x$ $\qquad y' = \frac{1}{1+x^2}$

12. $y = \operatorname{arcctg} x$ $\qquad y' = -\frac{1}{1+x^2}$

6.4. Похідна складеної функції

Теорема 6.2. Якщо функція $y = f(u)$ при деякому значенні u має похідну $y'_u = f'_u(u)$, а функція $u = \varphi(x)$ має похідну $u'_x = \varphi'_x(x)$ у точці x, якій відповідає значення u, то похідна складеної функції $y = f(\varphi(x))$ визначається за формулою:

$$\left(f(\varphi(x))\right)'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x), \quad \text{або} \quad y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

Звідси отримуємо правило: похідна складної функції дорівнює добутку похідних від всіх вкладених функцій:

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x .$$

Приклад 6.3. Знайдемо похідну:

а) $y = \cos^3 x$. Якщо $u = \cos x$, тоді $y = u^3$. За таблицею похідних будемо мати:

$$y'_x = \left(u^3\right)'_u \cdot (\cos x)'_x = 3u^2(-\sin x) = -3\cos^2 x \sin x;$$

б) $y = \cos x^3 \left(u = x^3;\ f(u) = \cos u\ \right)$. Отже: $y' = -\sin x^3 3x^2$.

Випадок складеної функції як суперпозиції декількох вичерпується послідовним застосуванням наведеного правила. Так, для функції:

$$y = f(u), \quad u = \varphi(\upsilon), \quad \upsilon = \psi(x),$$
$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = y'_u u'_\upsilon \cdot \upsilon'_x .$$

Наприклад, знайдемо похідну $y = \operatorname{arctg}^4 2x$, $\quad y' = 4\operatorname{arct} g^3 2x \cdot \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2$.

6.5. Похідна оберненої, неявної, степенево-показникової та параметричної функцій

Теорема про диференціювання складеної функції дає можливість довести правила обчислення похідних для функцій.

Обернена функція. Якщо функція $y=f(x)$ має обернену $x=\varphi(y)$ і існує похідна відмінна від нуля y'_x у деякій точці x, то $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$.

Доведення. Згідно з означенням оберненої функції змінну x можна розглядати як складену функцію: $x=\varphi(y)$, $y=f(x)$. Тоді: $x=\varphi\big(f(x)\big)$.

Візьмемо похідну від цієї функції за змінною x.

$$x'_x=\varphi'_y\cdot f'_x, \text{ або } 1=x'_y\cdot y'_x.$$

Таким чином, $x'_y=\dfrac{1}{y'_x}$ і $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}\left(x'_y\neq 0\right)$.

Приклад 6.4. Знайдемо похідні:

а) $y=\operatorname{arctg}x$, вважаючи, що $x=\operatorname{tg}y$, $x'_y=\dfrac{1}{\cos^2 y}$ або $y'_x=\cos^2 y=\dfrac{1}{1+tg^2 y}=\dfrac{1}{1+x^2}$.

Отже, $\left(\operatorname{arctg}x\right)'=\dfrac{1}{1+x^2}$;

б) $y=\arcsin x$. Тоді $x=\sin y$, $1=\cos y\cdot y'_x$, $y'_x=\dfrac{1}{\cos y}=\dfrac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}}=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Неявна функція. Функція визначається нерозв'язаним відносно y рівнянням:

$$F(x,y)=0, \text{ або } F\big(x,f(x)\big)\equiv 0.$$

Для знаходження похідної від y немає потреби розв'язувати рівняння $F(x,y)=0$ відносно y (не завжди це можна зробити). Достатньо розглянути $F\big(x,f(x)\big)\equiv 0$ як своєрідну складену функцію від x з урахуванням, що $F'_x\equiv 0$, знайти y' з цієї тотожності. Покажемо це на прикладі залежності ординати у точки кривої другого порядку, яка має рівняння:

$$x^2+2y^2+3xy+5x-4y-10=0.$$

Знайдемо похідну обох частин рівняння по x, ураховуючи, що змінна y – функція x. Отже, $2x+4y\cdot y'+3(y+xy')+5-4y'=0$.

Розв'язуючи це рівняння, відносно y', маємо:

$$y'=\frac{-2x-3y-5}{4y+3x-4}.$$

Для обчислення похідної в деякій точці $x=x_0$ треба знати відповідне значення функції y_0.

Степенево-показникова функція (логарифмічне диференціювання). Функція, яка має вигляд $y=\left(u(x)\right)^{\upsilon(x)}$, називається **степенево-показниковою**. Для обчислення похідної цієї функції знайдемо: $\ln y=\upsilon(x)\cdot\ln u(x)$. Отримана функція буде неявною, і до неї застосуємо правило диференціювання неявної функції. Отже,

$$\frac{1}{y}\cdot y'=\upsilon'\ln u+\upsilon\cdot\frac{1}{u}\cdot u'.$$

З цієї рівності отримаємо:

$$y'=u^{\upsilon}\left(\upsilon'\ln u+\upsilon\cdot\frac{1}{u}\cdot u'\right).$$

Параметрична функція. Функцію $y=f(x)$ називають поданою в параметричній формі, якщо вона визначається за допомогою двох функцій $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ від допоміжної змінної t (параметра), а саме:

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases}$$

Параметричну функцію можна диференціювати як неявну, не вдаючись до явного її задання.

Теорема 6.3. Похідна функції, що задається рівняннями $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$ дорівнює: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}=\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$, якщо y та x мають похідні по аргументу t.

Доведення. Функцію y від x можна розглядати як складену функцію: $y=\psi(t)$, $t=g(x)$, тобто $y=\psi\left(g(x)\right)$. Тоді, за правилом похідної складеної функції: $y'_x=\psi'_t\cdot t'_x=y'_t\cdot\dfrac{1}{x'_t}=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, бо $t'_x\cdot x'_t=1$.

Таким чином, теорему доведено.

Зауважимо, що $y=f(x)$ геометрично – це деяка лінія, тоді рівності $x=\varphi(t)$; $y=\psi(t)$ називають параметричними рівняннями лінії.

Приклад 6.5. Знайдемо похідну функції:

$$\begin{cases} x=R\cos t,\\ y=R\sin t. \end{cases}$$

Розв'язання. Відповідно теореми: $y'_x=\dfrac{y'_t}{x'_t}$, тобто $y'_x=\dfrac{R\cos t}{-R\sin t}=-\operatorname{ctg} t$.

6.6. Похідні вищих порядків

Якщо функція $y=f(x)$ має похідну $f'(x)$ на деякій множині X, то похідна від цієї похідної називається **похідною другого порядку** від функції $y=f(x)$. Тобто:

$$f''(x)=\left(f'(x)\right)'=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}.$$

Таким чином, щоб знайти n-ту похідну від функції $y=f(x)$, необхідно знайти першу похідну від $(n-1)$ похідної функції, отже, $f^{(n)}(x)=\left(f^{(n-1)}(x)\right)'$. Тобто для знаходження n-тої похідної треба обчислити: $f'(x)$, $f''(x)$,..., $f^{(n-1)}(x)$.

Фізичний зміст похідної другого порядку. Якщо $S=S(t)$, тоді $S'(t)=\upsilon(t)$ – це швидкість у точці t, а $S''(t)=\upsilon'(t)$ – це прискорення руху в момент часу t.

Друга похідна від виробничої функції $y=f(x)$ по змінній x є швидкість змінювання граничних витрат (зменшення або збільшення) залежно від обсягу виробництва x; це економічний зміст другої похідної.

Розділ 2. Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики

7. Емпіричні та логічні основи теорії ймовірностей

У практичній діяльності доводиться зустрічатися з випадковими подіями. Теорія ймовірностей вивчає властивості та закономірності масових випадкових явищ.

7.1. Алгебра випадкових подій

Сукупність умов, за яких з'являється певний результат, називають досвідом. Реалізацією цих умов є **випробування**.

Результат випробування – **подія**. Події бувають достовірні, неможливі та випадкові.

Подія буде **випадковою**, якщо вона може відбутися або не відбутися в результаті випробування.

Подія є **достовірною** (Ω), якщо вона обов'язково відбудеться в результаті випробування, і **неможливою** (∅), якщо вона не може відбутися в результаті даного випробування.

Випадкові події позначаються великими літерами латинського алфавіту (A, B, C та іншими).

Події називаються **сумісними**, якщо всі вони можуть з'явитися одночасно у тому самому випробуванні.

Події A і B називають **несумісними**, якщо всі вони не можуть відбутися разом у тому самому випробуванні.

Дві події називають **незалежними**, якщо поява однієї з них не залежить від появи іншої. Дві події будуть **залежними**, якщо поява однієї з них залежить від появи іншої.

Події є **рівно можливими**, якщо за умовами випробування жодна з цих подій не є об'єктивно більш можливою, ніж інша.

Події називають **єдино можливими**, якщо крім них не можуть відбутися ніякі інші події.

Протилежною відносно A подією (або доповненням) називається подія $\overline{A}$, яка полягає в тому, що A не відбувається. Дві несумісні єдино можливі події є протилежними. Якщо події незалежні, то незалежні також і відповідні їм протилежні події.

Події A_1, A_2, ... , A_n утворюють **повну групу несумісних подій**, якщо в результаті випробування обов'язково відбувається одна з них і ніяка інша подія відбутися не може. Повну групу подій становить сукупність усіх єдино можливих подій у даному випробуванні. **Елементарними подіями** деякого випробування називаються всілякі результати цього випробування.

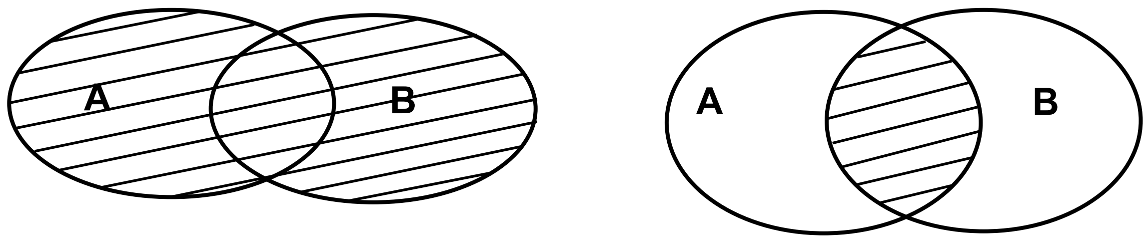
Множина всіх елементарних подій деякого експерименту (випробування) називається **простором елементарних подій**.

Алгебра подій. Об'єднанням (сумою) двох подій A і B називається подія $A \cup B$ (або $A+B$), що полягає в тому, що відбувається або подія A, або подія B, або обидві разом (рис. 7.1а).

У реальному випробуванні подія, яка відповідає $A+B$, полягає в тому, що відбулася хоча б одна з подій A або B.

Перетином (добутком) двох подій A і B називається подія $A \cap B$ (або $A \cdot B$), яка полягає в одночасній появі обох подій (рис. 7.1б).

Подія $A \cdot B$ відбувається тоді, коли відбувається і A, і B.



а) $A \cup B$ б) $A \cap B$

Рис. 7.1. **Операції над подіями**

Позначимо достовірну подію Ω, неможливу – Ø, протилежну відносно A подію $\overline{A}$, яка полягає в невиконанні події A. З цього випливає: $A \cdot \overline{A} =$Ø; $A+\overline{A}=\Omega$.

Сума протилежних подій – це подія, яка протилежна добутку подій, тобто $\overline{A}+\overline{B}=\overline{A \cdot B}$. Правильно і зворотне: подія, протилежна добутку подій, дорівнює сумі протилежних подій, тобто $\overline{A \cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$.

Для несумісних подій A і B виконується: $A \cdot B =$Ø.

Аксіоми теорії ймовірностей:

1) кожній події A поставлене у відповідність невід'ємне число $P(A)$, яке називається **ймовірністю події** A, $P(A) \geq 0$;

2) $P(\Omega)=1$ ймовірність достовірної події дорівнює одиниці;

3) $P(A \cup B)=P(A)+P(B)$ – ймовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій.

З аксіом ймовірності випливає ряд її властивостей:

1) ймовірність неможливої події дорівнює нулю: $P(\varnothing)=0$;

2) ймовірність події належить інтервалу $[0,1]$, тобто $0 \le P(A) \le 1$.

Подія називається **малоймовірною**, якщо в даній системі випробувань ймовірність її появи зневажливо мала. Рівень ймовірності, яким можна зневажити, називається **рівнем значущості** (α). Як правило, на практиці вибирають рівень значущості, який рівний $\alpha_1 = 0{,}01$ або $\alpha_2 = 0{,}05$. Можливі й інші рівні значущості.

Повна група подій. Події A_1, A_2, ... , A_n утворюють повну групу несумісних подій, якщо за результатом випробування обов'язково відбувається одна з них і ніяка інша подія відбутися не може. Тобто сума подій, які утворюють повну групу, є достовірною подією, тому сума їх ймовірностей дорівнює одиниці:

$$P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n)=1.$$

Дві протилежні події A і $\overline{A}$ утворюють повну групу подій, тобто $A+\overline{A}=\Omega$ – достовірна подія.

Тому: $P(A+\overline{A})=1$, $P(A)=1-P(\overline{A})$.

Якщо позначити $P(A)=p$ і $P(\overline{A})=q$, то $q=1-p$.

7.2. Теореми додавання ймовірностей для несумісних і сумісних подій

Теорема 7.1. Імовірність суми двох несумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій:

$$P(A+B)=P(A)+P(B).$$

Наслідок. Ймовірність суми декількох попарно несумісних подій дорівнює сумі їх ймовірностей:

$$P(A_1+A_2+...+A_n)=P(A_1)+P(A_2)+...+P(A_n).$$

Теорема 7.2. Ймовірність суми двох сумісних подій дорівнює сумі ймовірностей цих подій мінус ймовірність їх сумісної появи:

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(A\cdot B).$$

Приклад 7.1. Ймовірність того, що стрілок, влучивши в мішень, виб'є 10 очок, дорівнює 0,4; 9 очок – 0,2; 8 очок – 0,2; 7 очок – 0,1; 6 і менше – 0,1. Знайдемо ймовірність того, що стрілок одним пострілом виб'є не менше 9 очок.

Розв'язання. Шукана подія (позначимо її C) відбудеться, якщо стрілок виб'є або 9 (подія A), або 10 очок (подія B). Події A і B несумісні. Тому $P(C)=P(A)+P(B)=0{,}2+0{,}4=0{,}6$.

Приклад 7.2. Ймовірність здачі іспиту першим студентом дорівнює 0,7, другим – 0,6. Яка ймовірність того, що хто-небудь з них складе іспит?

Розв'язання. Нехай подія A – іспит складе перший студент, подія B – іспит складе другий студент. Події A і B сумісні. Тому $P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)=0{,}7+0{,}6-0{,}7\cdot 0{,}6=0{,}88$.

7.3. Класичне визначення ймовірності

У класичній схемі ймовірність події A є відношенням числа наслідків випробувань m, які сприяють події, до загального числа n рівно можливих, єдино можливих і несумісних наслідків випробувань, тобто:

$$P(A)=\frac{m}{n}.$$

Приклад 7.3. До відділу технічного контролю поступили 15 виробів першого сорту та 5 виробів – другого. Яка ймовірність обрання виробу першого сорту?

Розв'язання. За умовою задачі $n=15+5=20$, $m=15$. Ймовірність події A (вибору виробу першого сорту) дорівнює: $P(A)=\frac{15}{20}=0{,}75$.

Приклад 7.4. Знайдемо ймовірність того, що навмання взяте двозначне число виявиться кратним 2 або 5.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що навмання взяте двозначне число кратне 2, а B – подія, яка полягає в тому, що взяте число кратне 5. Знаходимо $P(A+B)$. Події A і B сумісні. Двозначні числа – це 10, 11, ... , 98, 99. Усього їх 90. З них 45 кратні 2 (сприяють появі A), 18 кратні 5 (сприяють появі B) і, нарешті, 9 чисел кратні 2 і 5 одночасно (сприяють появі $A \cdot B$), тобто:

$$P(A)=\frac{45}{90}=0{,}5; \quad P(B)=\frac{18}{90}=0{,}2; \quad P(A\cdot B)=\frac{9}{90}=0{,}1.$$

За теоремою додавання для спільних подій маємо:

$$P(A+B)=0{,}5+0{,}2-0{,}1=0{,}6.$$

7.4. Основні поняття комбінаторного аналізу

Комбінаторика вивчає кількість комбінацій які можна скласти з даних елементів. Розглянемо основні формули комбінаторики.

Перестановки – це комбінації, що полягають із тих самих n елементів, які відмінні тільки порядком їх розміщення: $P_n = n!$, де $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n,\ 0! = 1$.

Приклад 7.5. Задані цифри 1, 2, 3, 4, 5. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цих цифр, якщо кожне з них входить до числа тільки один раз?

Розв'язання. Число п'ятизначних чисел дорівнює: $P_5 = 5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 120$.

Розміщення – це комбінації, які складені з n різних елементів по m елементів, які відрізняються або складом елементів, або їх порядком:

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Приклад 7.6. Скільки можна скласти сигналів з 6 прапорців різного кольору, якщо брати їх по 2?

Розв'язання. Число сигналів дорівнює: $A_6^2 = 6\cdot 5 = 30$.

Сполучення **–** це комбінації, які складені з n різних елементів по m елементів, які відрізняються хоча б одним елементом:

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!} = \frac{n(n-1)\cdot ...\cdot (n-m+1)}{m!}.$$

Приклад 7.7. Скількома способами можна вибрати 3 деталі з шухляди, у якій 15 деталей?

Розв'язання. За умовою задачі $n = 15,\ m = 3$.

Число способів дорівнює: $C_{15}^{3} = \frac{15!}{3!12!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 15}{(1 \cdot 2 \cdot 3)(1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 12)} = 455$

або $C_{15}^{3} = \frac{15 \cdot 14 \cdot 13}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 455$.

Відносною частотою $w(A)$ події A називають відношення числа m його появи в n випробуваннях до всіх випробувань, тобто:

$$w(A) = \frac{m}{n}.$$

Якщо n досить велике, то відносна частота $w(A)$ коливається навколо деякої постійної величини $P(A)$, яку називають **ймовірністю події** A – це статистичне визначення ймовірності.

Приклад 7.8. До магазину надійшло 100 телевізорів, серед них 5 з неявним дефектом. Яка ймовірність придбати телевізор з неявним дефектом – подія A?

Розв'язання.

$$P(A) = w(A) = \frac{5}{100} = 0{,}05.$$

Класичне та статистичне визначення ймовірності мають принципову різницю. Імовірність, згідно із класичним визначенням, обчислюють до випробування (експерименту), а відносну частоту, згідно зі статистичним визначенням, – після випробування.

7.5. Умовна ймовірність, теореми множення ймовірностей

Події називаються **залежними**, якщо поява одного з них залежить від появи іншого.

Ймовірність події A, яка обчислюється за умови, що подія B вже відбулася, називається **умовною ймовірністю** події A і позначається $P_B(A)$. Умовна ймовірність має всі властивості безумовної ймовірності.

Приклад 7.9. У ящику знаходиться 11 деталей, три з них нестандартні. З ящика двічі беруть по одній деталі, не повертаючи їх. Знайдемо ймовірність того, що в другий раз з ящика буде витягнута стандартна деталь – подія A, якщо в перший раз була витягнута нестандартна деталь – подія B.

Розв'язання. Після першого добування в ящику з 10 деталей залишилося 8 стандартних, і отже, шукана ймовірність $P_B(A) = 0{,}8$.

Теореми множення ймовірностей

Теорема 7.3. Ймовірність спільної появи двох залежних подій дорівнює добутку ймовірності однієї з цих подій на умовну ймовірність другої, якщо перша вже відбулася:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = P(B) \cdot P_B(A).$$

Теорема 7.4. Ймовірність спільної появи двох незалежних подій дорівнює добутку ймовірностей цих подій:

$$P(A \cdot B) = P(A) \cdot P(B).$$

Приклад 7.10. Серед 50 електричних лампочок 3 – нестандартні. Знайдемо ймовірність того, що 2 узяті одночасно електролампочки виявляться нестандартними.

Розв'язання. Ймовірність події A (перша лампочка виявиться нестандартною) дорівнює $3/50$. Ймовірність того, що друга лампочка буде нестандартною (подія B), дорівнює $2/49$, тому що загальне число лампочок і число нестандартних серед них зменшилися на одиницю. Тоді $P(A \cdot B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{50} \cdot \frac{2}{49} \approx 0{,}0024$.

Ймовірність появи хоча б однієї з незалежних подій. Нехай у результаті випробування можуть відбутися незалежні в сукупності події A_1, A_2, ... , A_n, ймовірності яких *p1, p2, …, pn*. Подія A, полягає в тому, що відбудеться хоча б одна із цих подій. Тоді $\overline{A}$ – це подія, яка полягає в тому, що не відбудеться жодна із цих подій, тобто:

$$\overline{A} = \overline{A_1} \cdot \overline{A_2} \cdot ... \cdot \overline{A_n}.$$

Події A і $\overline{A}$ утворюють повну групу подій. Тому $P(A)=1-P(\overline{A})$. Отже: $P(A)=1-P(\overline{A}_1)\cdot P(\overline{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\overline{A}_n)=1-q_1\cdot q_2\cdot\ldots\cdot q_n$.

Якщо всі події $A_1, A_2, \ldots, A_n$ мають однакову ймовірність $P(A_1)=P(A_2)=\ldots=P(A_n)=p$, то $P(\overline{A}_1)=P(\overline{A}_2)=\ldots=P(\overline{A}_n)=q$, тоді: $P(A)=1-q^n$.

Приклад 7.11. Три студенти складають іспит. Ймовірність того, що перший студент складе іспит, дорівнює 0,6; для другого – 0,7; для третього – 0,75. Знайдемо ймовірність того, що хоча б один студент складе іспит.

Розв'язання. Нехай A_1, A_2, A_3 – події, які полягають у тому, що іспит буде зданий відповідно першим, другим, третім студентами, а подія A – у тому, що іспит складе хоча б один студент.

За умовою задачі відомо, що $p_1=0{,}6$; $p_2=0{,}7$ і $p_3=0{,}75$. Тоді $q_1=0{,}4$, $q_2=0{,}3$, $q_3=0{,}25$.

Отже, ймовірність того, що іспит складе хоча б один студент, дорівнює: $P(A)=1-q_1q_2q_3=1-0{,}4\cdot 0{,}3\cdot 0{,}25=0{,}97$.

Необхідна кількість випробувань. Нехай проводиться n випробувань. Ймовірність появи події A у кожному випробуванні дорівнює p. Потрібно визначити кількість випробувань, необхідних для того, щоб подія з'явилася з надійністю не меншої ніж P.

За умовою $P(A)\geq \mathrm{P}$, тобто $P(A)=1-P(\overline{A})=1-q^n\geq \mathrm{P}$, де $q=1-p$. Тоді $(1-p)^n\leq 1-\mathrm{P}$.

Прологарифмуємо отриману нерівність: $n\,ln(1-p)\leq ln(1-\mathrm{P})$.

Оскільки $\ln(1-p)<0$, то $n\geq \dfrac{\ln(1-\mathrm{P})}{\ln(1-p)}$.

Наприклад, при $\mathrm{P}=0{,}98$ і $p=0{,}004$ $n\geq 976$.

7.6. Формула повної ймовірності

Нехай деяка подія A може відбутися з однією з подій (їх називають **гіпотезами**) $B_1, B_2, \ldots, B_n$, що утворюють повну групу несумісних подій. Необхідно знайти ймовірність події A.

За умовою, подію A можна записати у вигляді:

$$A = A\cdot B_1 + A\cdot B_2 + ... + A\cdot B_n .$$

Події $A\cdot B_1$, $A\cdot B_2$, ... ,$A\cdot B_n$ несумісні.

Тому: $P(A) = P(A\cdot B_1) + P(A\cdot B_2) + ... + P(A\cdot B_n)$.

За теоремою множення маємо:

$$P(A) = P(B_1)P_{B_1}(A) + P(B_2)P_{B_2}(A) + ... + P(B_n)P_{B_n}(A),$$ або

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P_{B_i}(A)$$ – **це формула повної ймовірності**.

Приклад 7.12. З першого верстата на складання машини надходить 20 %, із другого – 30 %, із третього – 50 % деталей. Перший верстат дає в середньому 0,2 % браку, другий – 0,3 %, третій – 0,1 %. Знайдемо ймовірність того, що на складання машини потрапила бракована деталь.

Розв'язання. Нехай A – подія, яка полягає в тому, що на складання машини потрапила бракована деталь. B_1, B_2, B_3 – гіпотези: навмання обрана деталь виготовлена, відповідно, на першому, другому та третьому верстатах.

Тоді $P(B_1) = 0{,}2$; $P(B_2) = 0{,}3$; $P(B_3) = 0{,}5$ – ймовірності того, що вона виготовлена, відповідно, на першому, другому та третьому верстатах.

$P_{B_1}(A) = 0{,}002$, $P_{B_2}(A) = 0{,}003$, $P_{B_3}(A) = 0{,}001$ – ймовірності того, що бракована деталь надійшла, відповідно, з першого, другого та третього верстатів.

За формулою повної ймовірності ймовірність події дорівнює:

$$P(A) = P(B_1)\cdot P_{B_1}(A) + P(B_2)\cdot P_{B_2}(A) + P(B_3)\cdot P_{B_3}(A) =$$
$$= 0{,}2\cdot 0{,}002 + 0{,}3\cdot 0{,}003 + 0{,}5\cdot 0{,}001 = 0{,}001\,8.$$

7.7. Формула Байєса

Нехай події $B_1, B_2, ... , B_n$ (гіпотези) утворюють повну групу несумісних подій. Подія A може відбутися за однією із гіпотез. У результаті випробування подія A відбулася.

Потрібно визначити, з якою із гіпотез вона відбувалася, тобто знайти ймовірність того, що вона відбулася за гіпотезою B_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Якщо подія A відбулася, то за умовою відбулася і деяка подія $A \cdot B_i$. Обчислимо ймовірність події $A \cdot B_i$.

$$P(A \cdot B_i) = P(A)P_A(B_i) = P(B_i)P_{B_i}(A).$$

Звідки маємо **формулу Байєса**:

$$P_A(B_i) = \frac{P(B_i) \cdot P_{B_i}(A)}{P(A)},$$

де $P(A)$ – повна ймовірність події A.

Таким чином, формула Байєса дозволяє оцінити відносний внесок кожного елемента формули повної ймовірності.

Проте недоліком формули Байєса та формули повної ймовірності є те, що треба знати *апріорні* (до випробування) ймовірності гіпотез, які не завжди відомі.

Ймовірності $P_A(B_i)$ – це *апостеріорні* (після випробування) ймовірності гіпотез. Вони теж утворюють повну групу подій, тобто сума ймовірностей їх дорівнює одиниці.

Приклад 7.13. За умовами прикладу 7.12 знайдемо ймовірність того, що виявлена бракована деталь виготовлена на першому верстаті.

Розв'язання. Обчислимо умовну ймовірність за формулою Байєса для першого верстата:

$$P_A(B_1) = \frac{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A)}{P(B_1) \cdot P_{B_1}(A) + P(B_2) \cdot P_{B_2}(A) + P(B_3) \cdot P_{B_3}(A)} =$$

$$= \frac{0{,}2 \cdot 0{,}002}{0{,}2 \cdot 0{,}002 + 0{,}3 \cdot 0{,}003 + 0{,}5 \cdot 0{,}001} = 0{,}222.$$

8. Схема незалежних випробувань

8.1. Однорідні незалежні випробування. Схема Бернуллі

Випробування називають **однорідними незалежними,** якщо вони відбуваються незалежно одне від одного, в однакових умовах і так, що ймовірність появи події у всіх випробуваннях однакова.

Нехай відбуваються n однорідних незалежних випробувань, у кожному з яких може відбутися або не відбутися певна подія A (таку серію повторних незалежних випробувань називають **схемою Бернуллі**). Ймовірність появи події / у кожному випробуванні дорівнює p $(q = 1 - p)$.

Тоді ймовірність того, що в результаті n незалежних випробувань подія A відбудеться m разів, обчислюється за **формулою Бернуллі**:

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!} p^m q^{n-m}.$$

Приклад 8.1. Стрілець робить 5 пострілів у мішень; ймовірність влучення в мішень кожного пострілу дорівнює 0,9. Знайдемо ймовірність того, що з п'яти пострілів буде не менше двох влучень.

Розв'язання. Подія A – з п'яти пострілів сталося не менше двох влучень – є об'єднанням чотирьох подій: "2 влучення", "3 влучення", "4 влучення", "5 влучень". Але простіше Знайдемо ймовірність протилежної події $\overline{A}$ – з п'яти пострілів одне влучення або жодного:

$$P(\overline{A}) = P_5(0) + P_5(1) = C_5^0 \cdot (0{,}9)^0 \cdot (0{,}1)^5 + C_5^1 \cdot (0{,}9)^1 \cdot (0{,}1)^4 = 0{,}00046.$$

Отже, $P(A) = 1 - 0{,}00046 = 0{,}99954$.

Число m_0 появи події A в n незалежних випробуваннях називається ***найімовірнішим***, якщо ймовірність появи події m_0 раз найбільша. Найімовірніше число m_0 появи події A в n випробуваннях, у кожному з яких воно може відбутися з ймовірністю p (і не відбутися з ймовірністю $q = 1 - p$), визначається нерівністю: $np - q \le m_0 \le np + p$, де m_0 – ціле число.

Нерівність отримуємо з умови $P_n(m) \ge P_n(m-1)$ і $P_n(m) \ge P_n(m+1)$. Якщо в обчисленні зліва та справа в нерівності отримано цілі числа, то маємо два значення найімовірнішого числа; якщо дробові – то найімовірніше число одне.

Приклад 8.2. Частка виробів вищого сорту на підприємстві становить 31 %. Знайдемо найімовірніше число виробів вищого сорту у випадково відібраній партії з 75 виробів.

Розв'язання. За умовою $n = 75$, $p = 0{,}31$ і $q = 1 - 0{,}31 = 0{,}69$ маємо: $75 \cdot 0{,}31 - 0{,}69 \le m_0 \le 75 \cdot 0{,}31 + 0{,}31$, тобто $22{,}56 \le m_0 \le 23{,}56$; звідси випливає, що $m_0 = 23$ – це єдине ціле число на інтервалі.

Приклад 8.3. Контролер перевіряє 24 вироби. Ймовірність того, що виріб стандартний, дорівнює 0,6. Знайдемо найімовірніше число стандартних виробів.

Розв'язання.

За умовою: $n = 24$, $p = 0{,}6$ і $q = 1 - 0{,}6 = 0{,}4$.

Тоді: $24 \cdot 0{,}6 - 0{,}4 \le m_0 \le 24 \cdot 0{,}6 + 0{,}6$, $14 \le m_0 \le 15$; звідси випливає, що $m_0 = 14$ та $m_0 = 15$.

8.2. Локальна теорема Муавра – Лапласа

Якщо ймовірність p появи події A у кожному з n незалежних випробувань постійна, а число випробувань достатньо велике ($n > 20$), то ймовірність того, що подія A відбудеться m разів, обчислюється за формулою Муавра – Лапласа:

$$P_n(m) \approx \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \quad \text{де} \quad x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}},$$

$\varphi(x)$ – **диференціальна функція Лапласа**, $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ (рис. 8.1).

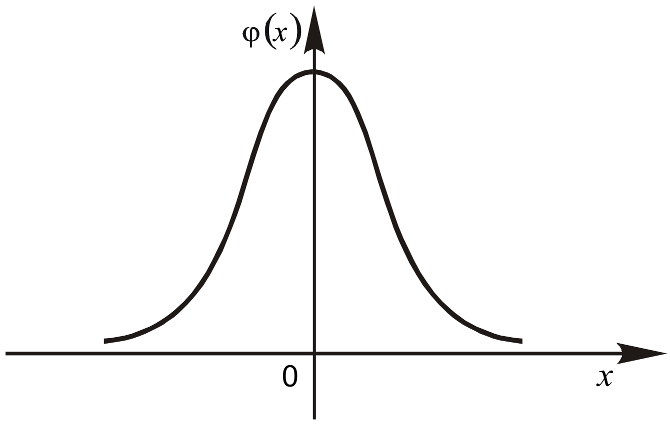


Рис. 8.1. **Графік диференціальної функції Лапласа**

Таблицю значень функції $\varphi(x)$ можна знайти в додатку А. Зазначимо, що в додатку А наведені значення $\varphi(x)$ для додатних значень x, тому що $\varphi(x)$ – парна функція, тобто $\varphi(-x)=\varphi(x)$.

Для значень $|x|>4$ слід вважати, що $\varphi(x)\approx 0$.

Приклад 8.4. Ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,515. Знайдемо ймовірність того, що з 200 народжених дітей кількість хлопчиків і дівчаток буде однаковим.

Розв'язання: $n=200$; $m=100$; $p=0{,}515$; $q=1-p=0{,}485$; $\sqrt{npq}=\sqrt{200\cdot 0{,}515\cdot 0{,}485}\approx\sqrt{49{,}955}\approx 7{,}068$.

$$x=\frac{100-200\cdot 0{,}515}{7{,}068}\approx -0{,}424.$$

Через те, що $\varphi(-0{,}424)=\varphi(0{,}424)=0{,}3647$, отримаємо:

$$P_{200}(100)=\frac{\varphi(-0{,}424)}{\sqrt{49{,}955}}\approx\frac{0{,}3647}{7{,}068}\approx 0{,}052.$$

8.3. Формула Пуассона

Якщо в кожному випробуванні ймовірність p появи події A постійна та досить мала, а число випробувань n достатньо велике, то ймовірність того, що подія A відбудеться m разів, приблизно дорівнює:

$$P_n(m)\approx\frac{\lambda^m}{m!}e^{-\lambda},\qquad \text{де } \lambda=np,\ np\le 10.$$

Для спрощення розрахунків можна використовувати таблицю значень функції Пуассона.

8.4. Інтегральна теорема Муавра – Лапласа

Якщо ймовірність p появи події в кожному випробуванні постійна, а число випробувань n досить велике, то ймовірність того, що подія A настане не менш m_1 і не більш m_2 разів ($m_1<m_2$), приблизно дорівнює:

$$P_n(m_1\le m\le m_2)\approx\Phi(x_2)-\Phi(x_1),\qquad \text{де } x_1=\frac{m_1-np}{\sqrt{npq}},\quad x_2=\frac{m_2-np}{\sqrt{npq}};$$

$\Phi(x)$ – **інтегральна функція Лапласа** (рис. 8.2):

$$\Phi(x) = \int_0^x \varphi(t)dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt .$$

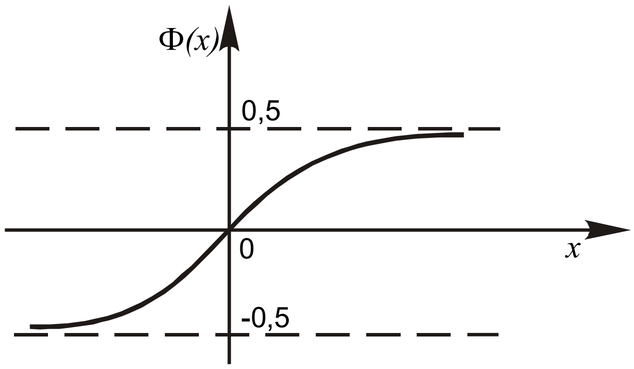


Рис. 8.2. **Графік інтегральної функції Лапласа**

Значення функції $\Phi(x)$. У додатку Б можна знайти значення цієї функції лише для $0 \le x \le 4$.

Для $x < 0$ використовують ту саму таблицю, тому що функція $\Phi(x)$ непарна, тобто $\Phi(-x) = -\Phi(x)$.

Для $x > 4$ можна прийняти $\Phi(x) = 0{,}5$.

Приклад 8.5. Ймовірність того, що деталь виготовлена з порушенням стандартів $p = 0{,}2$. Знайдемо ймовірність того, що серед 400 кількість випадково відібраних нестандартних деталей складає від 70 до 100.

Розв'язання: $m_1 = 70$, $m_2 = 100$, $n = 400$, $p = 0{,}2$, $q = 0{,}8$,

$$x_1 = \frac{70 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = -1{,}25, \quad x_2 = \frac{100 - 400 \cdot 0{,}2}{\sqrt{400 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8}} = 2{,}5.$$

$$P_{400}(70 \le m \le 100) = \Phi(2{,}5) - \Phi(-1{,}25) = \Phi(2{,}5) + \Phi(1{,}25).$$

За таблицею значень функції $\Phi(x)$, $\Phi(2{,}5) = 0{,}4938$, $\Phi(1{,}25) = 0{,}3944$. Тоді $P_{400}(70 \le m \le 100) = 0{,}4938 + 0{,}3944 = 0{,}8882$.

8.5. Ймовірність відхилення відносної частоти від ймовірності в незалежних випробуваннях

Відношення числа випробувань, у яких подія A відбулося, до загального числа випробувань є відносна частота події $w(A) = \frac{m}{n}$, де m – число появ події A, n – загальне число випробувань.

Однією з важливих характеристик незалежних випробувань із постійною ймовірністю появи події A у кожному випробуванні $(0 \le p \le 1)$ є **відхилення відносної частоти від ймовірності** p.

Нехай в n незалежних випробуваннях ймовірність події A постійна та дорівнює p $(0 \le p \le 1)$. Тоді ймовірність того, що абсолютна величина відхилення відносної частоти від своєї ймовірності менше, ніж на ε, дорівнює $2\Phi(x)$, де x визначається формулою $\varepsilon = x\sqrt{\frac{pq}{n}}$; $\Phi(x)$ – інтегральна функція Лапласа:

$$P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 2\Phi(x), \text{ де } \varepsilon = x\sqrt{\frac{pq}{n}}.$$

Приклад 8.6. Для визначення якості випущеної продукції відібрані 100 виробів. Ймовірність того, що виріб високої якості, дорівнює 0,1. Необхідно знайти:

а) ймовірність P того, що відносна частота відхилиться від імовірності на величину $\le \varepsilon = 0{,}01$;

б) точність ε, з якою ймовірність відхилення відносної частоти від ймовірності становить $P = 0{,}95$;

в) кількість виробів, щоб з точністю $\varepsilon = 0{,}02$ ймовірність відхилення відносної частоти від ймовірності була $P = 0{,}9$.

Розв'язання:

а) $P\left(\left|\frac{m}{n} - 0{,}1\right| \le 0{,}01\right) = 2\Phi(x)$, де $0{,}01 = x\sqrt{\frac{pq}{n}}$, звідки:

$$x = \frac{0{,}01 \cdot \sqrt{100}}{\sqrt{0{,}1 \cdot 0{,}9}} = \frac{0{,}1}{\sqrt{0{,}09}} = \frac{0{,}1}{0{,}3} = 0{,}33.$$

За таблицею значень інтегральної функції $2\Phi(x) = 2 \cdot 0{,}1293$.

Отже, $P = 0{,}2586$;

б) за умовою $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 0{,}95$.

Тоді $0{,}95 = 2\Phi(x)$, звідки $x = 1{,}96$, $\varepsilon = 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}1 \cdot 0{,}9}{100}}$.

Отже, шукана точність $\varepsilon = 1{,}96\frac{0{,}3}{10} = 0{,}0588 \approx 0{,}06$;

в) за умовою задачі $P = 0{,}9$, $\varepsilon = 0{,}02$.

Тоді $P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le 0{,}02\right) = 0{,}9 = 2\Phi(x)$, звідки $x = 1{,}65$.

За формулою $\varepsilon = x\sqrt{\frac{pq}{n}}$, тоді: $n = \frac{x^2 pq}{\varepsilon^2}$.

Отже $n = \frac{1{,}65^2 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9}{0{,}02^2} = 612{,}1$, тобто для контролю необхідно взяти не менше 613 виробів.

9. Випадкові величини та їх економічна інтерпретація

9.1. Визначення випадкових величин і їх класифікація

Випадкова величина – це змінна величина, значення якої залежать від ряду випадкових факторів; причому в результаті випробувань вона може приймати випадкові, заздалегідь невідомі значення.

Той факт, що випадкова величина приймає певне значення, називається **випадковою подією**. Випадкові величини позначають великими літерами латинського алфавіту X , Y , Z і т. д., а їх можливі значення – відповідними малими літерами. Наприклад, X – випадкова величина, її можливі значення – x_1, x_2, ... , x_n.

Розрізняють дискретні та неперервні випадкові величини. Випадкова величина називається **дискретною**, якщо в результаті випробування вона може приймати конкретні, цілком певні ізольовані значення; їх може бути кінцеве або нескінченне число. Наприклад, розмір взуття є дискретною випадковою величиною. Випадкова величина називається **неперервною,** якщо в результаті випробувань вона може приймати будь-які значення, що належать деякому інтервалу $X \in [a,b]$. Наприклад: зріст людини є неперервною випадковою величиною.

9.2. Закон розподілу дискретної випадкової величини

Якщо відомі можливі значення дискретної випадкової величини та ймовірності їх появи, то говорять, що заданий **закон розподілу** випадкової величини, або **ряд розподілу**.

Ряд розподілу дискретної випадкової величини записують у вигляді таблиці:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

причому $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$.

Графічне зображення дискретної випадкової величини таке: по осі абсцис відкладають можливі значення змінної X, а по осі ординат – відповідні ймовірності p_i і з'єднують для наочності отримані крапки відрізками (рис. 9.1).

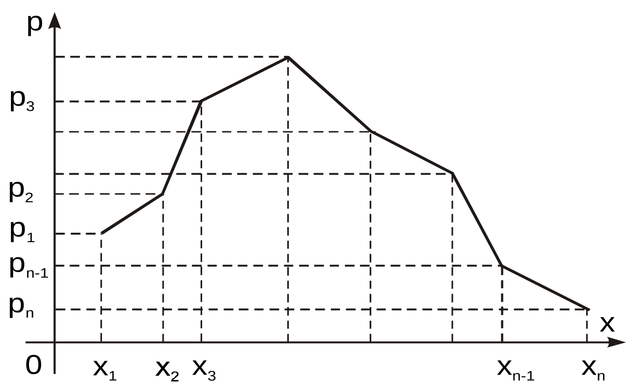


Рис. 9.1. **Полігон розподілу**

У підсумку отримують **полігон розподілу** або **багатокутник розподілу.**

9.3. Числові характеристики дискретної випадкової величини та їх властивості

Характеристикою середнього значення випадкової величини X є **математичне сподівання**. Математичне сподівання дискретної випадкової величини обчислюється як сума добутків значень випадкової величини та їх імовірностей p_i.

Нехай заданий ряд розподілу випадкової величини X:

x_i	x_1	x_2	...	x_i	...	x_n
p_i	p_1	p_2	...	p_i	...	p_n

Позначимо математичне сподівання випадкової величини $M(X)$, тоді одержимо: $M(X)=x_1p_1+x_2p_2+...+x_np_n=\sum_{i=1}^{n}x_ip_i$.

Математичне сподівання називають центром розподілу, тому що воно характеризує середнє значення випадкової величини.

Властивості математичного сподівання.

1. Математичне сподівання сталої величини дорівнює самій сталої: $M(C)=C$, де $C=const$.

Нехай розподіл імовірностей випадкової величини X заданий у вигляді таблиці:

x_i	C	C	…	C
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Тоді $M(C)=\sum_{i=1}^{n}C\cdot p_i=C\sum_{i=1}^{n}p_i=C$, оскільки $\sum_{i=1}^{n}p_i=1$.

2. Постійний множник можна виносити за знак математичного сподівання:

$$M(CX)=C\cdot M(X).$$

Нехай розподіл імовірностей випадкової величини CX заданий в таблиці:

Cx_i	Cx_1	Cx_2	…	Cx_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Тоді $M(CX)=\sum_{i=1}^{n} Cx_i p_i = C\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = C\cdot M(X)$.

3. Математичне сподівання суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх математичних сподівань:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y).$$

Нехай X і Y незалежні випадкові величини з законами розподілу:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

y_j	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
q_j	q_1	q_2	$\ldots$	q_m

Тоді розподіл випадкової величини $X+Y$ буде:

$x_i + y_i$	$x_1 + y_1$	$x_1 + y_2$	...	$x_1 + y_m$	$x_2 + y_1$	$x_2 + y_2$	...	$x_n + y_m$
p_{ij}	p_1q_1	p_1q_2	...	p_1q_m	p_2q_1	p_2q_2	...	p_nq_m

Дійсно, позначимо події: $A: X=x_i$; $B: Y=y_j$. Для того щоб відбулася подія $C: X+Y=x_i+y_j$, необхідно, щоб відбулася і подія A, і подія B, тобто $C=AB$. Тоді $P(C)=P(AB)=P(A)\cdot P(B)=p_i q_j$.

$$M(X+Y)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(x_i+y_j)p_i q_j=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i\sum_{j=1}^{m}q_j+\sum_{i=1}^{n}p_i\sum_{j=1}^{m}y_j q_j=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}x_i p_i+\sum_{j=1}^{m}y_j q_j=M(X)+M(Y).$$

$\sum_{i=1}^{n}p_i=1$ та $\sum_{j=1}^{m}q_j=1$, тому що значення x_i та значення y_j утворюють повну групу несумісних подій X і Y, відповідно.

Наслідок 1. Математичне сподівання різниці випадкових величин дорівнює різниці їх математичних сподівань:

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y).$$

$$M(X-Y)=M(X+(-Y))=M(X)+M(-Y)=M(X)-M(Y).$$

Наслідок 2. (Центральна властивість математичного сподівання) Математичне сподівання відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання дорівнює нулю: $M\left(X - M\left(X\right)\right) = 0$.

$$M\left(X - M\left(X\right)\right) = M\left(X\right) - M\left(M\left(X\right)\right) = M\left(X\right) - M\left(X\right) = 0.$$

4. Математичне сподівання добутку незалежних випадкових величин дорівнює добутку їх математичних сподівань:

$$M\left(XY\right) = M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right).$$

Нехай X та Y незалежні випадкові величини з законами розподілу:

x_i	x_1	x_2	$\ldots$	x_n
p_i	p_1	p_2	$\ldots$	p_n

y_j	y_1	y_2	$\ldots$	y_m
q_j	q_1	q_2	$\ldots$	q_m

Знайдемо закон розподілу випадкової величини XY:

$x_i y_j$	$x_1 y_1$	$x_1 y_2$	$\ldots$	$x_1 y_m$	$x_2 y_1$	$x_2 y_2$	$\cdots$	$x_n y_m$
p_{ij}	$p_1 q_1$	$p_1 q_2$	$\ldots$	$p_1 q_m$	$p_2 q_1$	$p_2 q_2$	$\cdots$	$p_n q_m$

Дійсно, якщо події A: $X = x_i$; B: $Y = y_j$, то подія AB: $XY = x_i y_j$, тобто $P(AB) = P(A) \cdot P(B) = p_i q_j$.

$$M\left(XY\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_i y_j p_i q_j = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i \sum_{j=1}^{m} y_j q_j = M\left(X\right) \cdot M\left(Y\right).$$

Приклад 9.1. У лотереї 100 квитків. На 20 квитків немає виграшу, на 25 квитків можна виграти 1 гривню, на 20 квитків випадає виграш по 2 гривні, на 15 – по 3 гривні, на 10 – по 5 гривень і на 10 – по 10 гривень. Необхідно знайти математичне сподівання виграшу.

Розв'язання. Ряд розподілу випадкової величини X – розмір виграшу в лотереї – має вигляд:

x_i	0	1	2	3	5	10
p_i	0,2	0,25	0,2	0,15	0,1	0,1

$$M(X)=0\cdot 0{,}2+1\cdot 0{,}25+2\cdot 0{,}2+3\cdot 0{,}15+5\cdot 0{,}1+10\cdot 0{,}1=2{,}6.$$

Дисперсія дискретної випадкової величини. Характеристикою ступеня розсіювання значень випадкової величини навколо її математичного сподівання є ***дисперсія***.

Дисперсія дискретної випадкової величини є математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання, тобто:

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-M(X))^2\cdot p_i.$$

Перетворимо формулу для обчислення дисперсії.

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right)=M\left(X^2-2XM(X)+M^2(X)\right)=$$
$$=M\left(X^2\right)-2M(X)M(X)+M\left(M^2(X)\right)=M\left(X^2\right)-2M^2(X)+M^2(X)=$$
$$=M\left(X^2\right)-M^2(X),$$

тобто: $D(X)=M\left(X^2\right)-M^2(X)=\sum_{i=1}^{n}x_i^2 p_i-(M(X))^2$.

Дисперсія випадкової величини дорівнює математичному сподіванню квадрата випадкової величини мінус квадрат її математичного сподівання.

Властивості дисперсії.

1. Дисперсія сталої величини дорівнює нулю:

$D(C)=0$, де $C=const$.

Нехай $X=C$, тоді:

$$D(X)=D(C)=M\left((C-M(C))^2\right)=M\left((C-C)^2\right)=M(0)=0.$$

2. Постійний множник можна виносити за знак дисперсії у квадраті:

$$D(C\cdot X)=C^2\cdot D(X).$$

Дійсно, $D(CX)=M\left((CX-M(CX))^2\right)=M\left((CX-CM(X))^2\right)=$
$=M\left(C^2(X-M(X))^2\right)=C^2M\left((X-M(X))^2\right)=C^2D(X)$.

3. Дисперсія суми незалежних випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій: $D(X+Y)=D(X)+D(Y)$.

Із визначення дисперсії і на підставі властивостей маємо:

$$D(X+Y)=M\left((X+Y-M(X+Y))^2\right)=M\left((X+Y-M(X)-M(Y))^2\right)=$$
$$=M\left(((X-M(X))+(Y-M(Y)))^2\right)=M\left((X-M(X))^2+(Y-M(Y))^2+\right.$$
$$\left.+2(X-M(X))(Y-M(Y))\right)=M\left((X-M(X))^2\right)+M\left((Y-M(Y))^2\right)+$$
$$+2M(X-M(X))M(Y-M(Y))=M\left((X-M(X))^2\right)+M\left((Y-M(Y))^2\right)=$$
$$=D(X)+D(Y),\quad (M(X-M(X))=0 \text{ та } M(Y-M(Y))=0).$$

4. Дисперсія різниці двох випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій:

$$D(X-Y)=D(X)+D(Y).$$
$$D(X-Y)=D(X+(-Y))=D(X)+D(-Y)=D(X)+D(Y).$$

Середнє квадратичне відхилення є показник розсіювання значень випадкової величини навколо її середнього значення.

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ = (σ_x) випадкової величини X – це квадратний корінь із дисперсії, тобто:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

Коефіцієнт варіації – це відношення середнього квадратичного відхилення до математичного сподівання, виражене у процентах:

$$\nu(X)=\frac{\sigma(X)}{M(X)}\cdot 100\,\%.$$

Коефіцієнт варіації дає можливість зрівняти ступінь розсіювання значень різних за природу випадкових величин.

Мода M_o – це значення x_i випадкової величини X з максимальною ймовірністю.

Медіана m_e – це значення x_i випадкової величини X, яке розділяє ряд розподілу навпіл.

Початковий момент k-го порядку ν_k – це математичне сподівання k-ого степеня випадкової величини X:

$$\nu_k = M\left(X^k\right).$$

Так, початковий момент першого порядку $\nu_1 = M(X)$ – це математичне сподівання випадкової величини X, $\nu_2 = M\left(X^2\right)$ – математичне сподівання квадрата випадкової величини X і т. д.

Центральний момент k-го порядку μ_k – це математичне сподівання k-ого степеня відхилення випадкової величини X від свого математичного сподівання:

$$\mu_k = M\left((X - M(X))^k\right).$$

Так, $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = D(X)$.

Приклад 9.2. Заданий ряд розподілу дискретної випадкової величини X:

x_i	1	2	3
p_i	0,4	0,3	0,3

Знайдемо числові характеристики випадкової величини.

Розв'язання.

1. Математичне сподівання:

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + x_3 p_3 = 1 \cdot 0{,}4 + 2 \cdot 0{,}3 + 3 \cdot 0{,}3 = 1{,}9.$$

2. Дисперсія:

$$D(X) = (x_1 - M(X))^2 p_1 + (x_2 - M(X))^2 p_2 + (x_3 - M(X))^2 p_3 =$$

$$= (1 - 1{,}9)^2 \cdot 0{,}4 + (2 - 1{,}9)^2 \cdot 0{,}3 + (3 - 1{,}9)^2 \cdot 0{,}3 \approx 0{,}69 \text{ або}$$

$$D(X) = x_1^2 p_1 + x_2^2 p_2 + x_3^2 p_3 - (M(X))^2 = 1 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 0{,}3 - 1{,}9^2 = 0{,}69.$$

3. Середнє квадратичне відхилення:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{0{,}69} \approx 0{,}84.$$

4. Мода: $M_o = 1$ $(max\ p_i = 0{,}4)$.

5. Медіана: $m_e = 2$.

6. Коефіцієнт варіації: $\nu(X) = \frac{0{,}84}{1{,}9} \cdot 100\,\% = 44\,\%$.

7. Початковий момент: $\nu_1 = 1{,}9$; $\nu_2 = 4{,}3$.

8. Центральний момент: $\mu_1 = 0$; $\mu_2 = 0{,}69$.

Моменти вищого порядку можна використовувати для того, щоб відокремити вплив більших за величиною, але малоймовірних значень випадкової величини.

Приклад 9.3. Заданий ряд розподілу дискретної випадкової величини X:

x_i	1	2	10
p_i	0,50	0,48	0,02

Визначимо початкові моменти випадкової величини.

Розв'язання.

$\nu_1 = M(X) = 1 \cdot 0{,}5 + 2 \cdot 0{,}48 + 10 \cdot 0{,}02 = 1{,}66$.

$\nu_2 = M\left(X^2\right) = 1 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}48 + 100 \cdot 0{,}02 = 4{,}42$.

$\nu_3 = M\left(X^3\right) = 1 \cdot 0{,}5 + 2^3 \cdot 0{,}48 + 10^3 \cdot 0{,}02 = 24{,}34$.

$\nu_4 = M\left(X^4\right) = 1 \cdot 0{,}5 + 2^4 \cdot 0{,}48 + 10^4 \cdot 0{,}02 = 208{,}18$.

Момент ν_4 повністю залежить від значення $x_3 = 10$.

Таким чином, відокремлено вплив великого, але малоймовірного значення випадкової величини.

9.4. Математичне сподівання і дисперсія середнього арифметичного n незалежних випадкових величин

Нехай маємо n незалежних випадкових величин: $X_1, X_2, \ldots, X_n$ з математичними сподіваннями $M(X_1), M(X_2), \ldots, M(X_n)$, відповідно.

Нехай X – випадкова величина, яка дорівнює:

$$X = \frac{X_1 + X_2 + \ldots + X_n}{n}.$$

Згідно з властивостями математичного сподівання маємо:

$$M(X)=\frac{M(X_1)+M(X_2)+\ldots+M(X_n)}{n},$$

тобто математичне сподівання середнього арифметичного n випадкових величин дорівнює середньому арифметичному їх математичних сподівань.

Нехай $D(X_1),D(X_2),\ \ldots\ ,D(X_n)$ – дисперсії цих випадкових величин і $max(D(X_1),D(X_2),\ \ldots\ ,D(X_n))=D$.

Згідно з умовою $D(X_1)\le D,D(X_2)\le D,\ \ldots\ ,D(X_n)\le D$ одержимо:

$$D(X)=\frac{D(X_1)+D(X_2)+\ldots+D(X_n)}{n^2}\le\frac{nD}{n^2}=\frac{D}{n},$$

тобто дисперсія середнього арифметичного n незалежних випадкових величин, що мають обмежені дисперсії, в n раз менше найбільшої дисперсії.

Якщо випадкові величини однаково розподілені, тобто:

$$M(X_1)=M(X_2)=\ldots=M(X_n)=a$$

і

$$D(X_1)=D(X_2)=\ldots=D(X_n)=D.$$

Тоді $M(X)=\frac{na}{n}=a$, $D(X)=\frac{D}{n}$, тобто математичне сподівання n однаково розподілених випадкових величин дорівнює їх загальному математичному сподіванню, а дисперсія – в n раз менше їх загальної дисперсії.

Звідси маємо: $\sigma(X)=\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, тобто середнє квадратичне відхилення середнього арифметичного n незалежних однакове розподілених випадкових величин дорівнює $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ $\left(\sigma=\sqrt{D}\right)$.

9.5. Основні закони розподілу дискретних випадкових величин

Задати закон розподілу дискретної випадкової величини, це означає задати її ряд розподілу, тобто вказати можливі значення випадкової величини і їх імовірності. Залежно від способу обчислення ймовірностей розрізняють закони розподілу.

Біноміальний розподіл. Нехай відбувається n незалежних випробувань, у кожному з яких імовірність появи події дорівнює p. Позначимо через X число випробувань, у яких подія A з'явилася. Випадкова величина X може приймати значення $0, 1, 2, \ldots, m, \ldots, n$. Імовірність того, що випадкова величина прийме значення $X = m$ можна обчислити за формулою Бернуллі:

$$P_n(X = m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \text{ де } q = 1 - p.$$

Закон розподілу, у якому ймовірність випадкової величини обчислюється за формулою Бернуллі, називається **біноміальним законом розподілу**.

Даний закон розподілу має вигляд:

x_i	0	1	2	…	$n-1$	n
p_i	q^n	$C_n^1 pq^{n-1}$	$C_n^2 p^2 q^{n-2}$	…	$C_n^{n-1} p^{n-1} q$	p^n

Якщо n – велике число, то ймовірності p_i обчислюються за формулою Муавра – Лапласа :

$$P_n(X = m) = \frac{\varphi(x)}{\sqrt{npq}}, \text{ де } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

Знайдемо числові характеристики біноміального закону розподілу. Випадкову величину X можна розглядати як суму n незалежних однаково розподілених випадкових величин X_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$ з законом розподілу:

x_i	0	1
p_i	q	p

де x_i – поява події A в i-ом досвіді, тобто $x_i = 1$, якщо подія A з'явилася, і $x_i = 0$, якщо подія A не з'явилася.

Тоді $M(X_i) = 0 \cdot q + 1 \cdot p = p$.

Оскільки математичне сподівання суми випадкових величин дорівнює сумі математичних сподівань, то:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} M(X_i) = \sum_{i=1}^{n} p = np.$$

Дисперсія випадкової величини X_i дорівнює:

$$D(X_i) = (0-p)^2 \cdot q + (1-p)^2 \cdot p = p^2 q + pq^2 = pq(p+q) = pq.$$

Оскільки дисперсія суми випадкових величин дорівнює сумі їх дисперсій, то:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} pq = npq\,.$$

Середнє квадратичне відхилення біноміального розподілу визначається формулою:

$$\sigma(X) = \sqrt{npq}\,.$$

Приклад 9.4. Імовірність здачі іспиту на "5" для кожного із трьох студентів дорівнює 0,4. Скласти закон розподілу кількості відмінних оцінок, отриманих студентами на іспиті. Знайдемо математичне сподівання й дисперсію.

Розв'язання. Дискретна випадкова величина X (кількість студентів, які одержали "5") має такі можливі значення:

$x_1 = 0$ (жоден студент не склав іспит на "5");

$x_2 = 1$ (один студент склав іспит на "5");

$x_3 = 2$ (два студенти склали іспит на "5");

$x_4 = 3$ (три студенти склали іспит на "5").

Здача іспиту на "5" студентами – події незалежні, імовірності скласти іспит кожним студентом однакові, тому використовуємо формулу Бернуллі.

За умовою задачі $n = 3$, $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$.

Тоді:

якщо $x_1 = 0$, то $P_3(0) = q^3 = 0{,}6^3 = 0{,}216$;

якщо $x_2 = 1$, то $P_3(1) = C_3^1 pq^2 = 3 \cdot 0{,}4 \cdot 0{,}6^2 = 0{,}432$;

якщо $x_3 = 2$, то $P_3(2) = C_3^2 p^2 q = 3 \cdot 0{,}4^2 \cdot 0{,}6 = 0{,}288$;

якщо $x_4 = 3$, то $P_3(3) = p^3 = 0{,}4^3 = 0{,}064$.

Закон розподілу випадкової величини X має вигляд:

x_i	0	1	2	3
p_i	0,216	0,432	0,288	0,064

, $\sum_i p_i = 1$.

$$M(X)=n\cdot p=3\cdot 0{,}4=1{,}2;\quad D(X)=npq=3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}6=0{,}72;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{0{,}72}\approx 0{,}85.$$

Закон розподілу Пуассона. Якщо n досить велике, а ймовірність p дуже мала, то ймовірність того, що випадкова величина прийме значення $X=m$ обчислюють за формулою Пуассона:

$$P_n(X=m)=\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!}.$$

Закон розподілу в цьому випадку називають **законом розподілу Пуассона**, який має вигляд:

x_i	0	1	2	…	n
p_i	$e^{-\lambda}$	$\lambda e^{-\lambda}$	$\frac{\lambda^2 e^{-\lambda}}{2}$	…	$\frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$

, де $\lambda=np$.

Визначимо числові характеристики випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона.

Оскільки закон Пуассона є граничним для біноміального закону при досить більших n $(n\to\infty)$ і досить малих p $(q\to 1)$, то математичне сподівання й дисперсія випадкової величини, розподіленої за законом Пуассона, визначаються за формулами:

$$\boldsymbol{M(X)}=np=\boldsymbol{\lambda},\ \boldsymbol{D(X)}=npq\approx np=\boldsymbol{\lambda}.$$

Таким чином, $M(X)\approx D(X)=\lambda$.

Приклад 9.5. Скласти закон розподілу випадкової величини X, якщо в 1 000 незалежних випробуваннях подія з'являється з імовірністю 0,001. Знайдемо $M(X)$ і $D(X)$.

Розв'язання. Маємо незалежні випробування з однаково малою ймовірністю $(p=0{,}001)$ і великою кількістю випробувань $(n=1\,000)$. Тому ймовірності появи кожного окремого значення обчислимо за формулою Пуассона при $\lambda=np=1$.

Можливі значення випадкової величини X : $0,1,2,3,\ldots$.

Запишемо закон розподілу величини X:

x_i	0	1	2	3	4	5	6
p_i	0,367 88	0,367 88	0,183 94	0,061 31	0,015 33	0,003 06	0,000 51

$\sum_i p_i \approx 0{,}9999 \approx 1$.

$$M(X) = D(X) = np = 1\,000 \cdot 0{,}001 = 1.$$

10. Основні закони розподілу неперервної випадкової величини

10.1. Визначення неперервної випадкової величини

Випадкову величину називають **неперервною**, якщо її можливі значення заповнюють деякий числовий інтервал. Число можливих значень неперервної випадкової величини нескінченно.

Неперервна випадкова величина характеризується двома функціями:

1) функцією розподілу ймовірностей $F(x)$ (інтегральною функцією розподілу);

2) щільністю розподілу ймовірностей $f(x)$ (диференціальною функцією розподілу).

Випадкова величина називається також **неперервною**, якщо її функція розподілу неперервна та диференційована.

10.2. Функція розподілу ймовірностей і її властивості

Функція розподілу ймовірностей $F(x)$ – це ймовірність того, що випадкова величина X у результаті випробування прийме значення, менше x:

$$F(x) = P(X < x).$$

Властивості функції розподілу.

1. Значення функції $F(x)$ належать відрізку $[0,1]$ (за означенням):

$$0 \le F(x) \le 1.$$

2. Інтегральна функція є неспадною функцією:

$$F(x+\Delta x)\geq F(x),\ \text{якщо}\ \Delta x>0.$$

Дійсно, якщо $\Delta x>0$, то:

$$F(x+\Delta x)=P(X<x+\Delta x)=P(X<x)+P(x\leq X<x+\Delta x)=$$
$$=F(x)+P(x\leq X<x+\Delta x)\geq F(x).$$

3. Ймовірність влучення неперервної випадкової величини в заданий інтервал (α,β) дорівнює різниці функції $F(x)$ на кінцях інтервалу:

$$P(\alpha<X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha).$$

Дійсно, $P(\alpha<X<\beta)=P(X<\beta)-P(X<\alpha)=F(\beta)-F(\alpha)$.

4. Ймовірність влучення випадкової величини в точку дорівнює нулю: $P(X=C)=0$. Дійсно, $P(X=C)=0$.

Наслідок:

$$P(\alpha<X<\beta)=P(\alpha\leq X<\beta)=P(\alpha<X\leq\beta)=P(\alpha\leq X\leq\beta).$$

5. Якщо значення випадкової величини X належать інтервалу (a,b), то за $x\leq a$ $F(x)=0$, за $x>b$ $F(x)=1$.

Приклад 10.1. Випадкова величина X задана функцією розподілу:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<2,\\ \dfrac{x}{2}-1, & 2<x\leq 4,\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Знайдемо ймовірність того, що внаслідок випробування випадкова величина X прийме значення:

а) в інтервалі $(2;\,3)$;

б) менше $0{,}2$;

в) менше 3;

г) не менше 3;

д) не менше 5.

Розв'язання:

а) $P(2<X<3)=F(3)-F(2)=\left(\dfrac{3}{2}-1\right)-0=0{,}5$;

б) $X < 0{,}2$, $P(X < 0{,}2) = F(0{,}2) = 0$;

в) $X < 3$, $P(X < 3) = F(3) = \frac{3}{2} - 1 = 0{,}5$;

г) $X \geq 3$, тому що $P(X \geq 3) + P(X < 3) = 1$, то:

$$P(X \geq 3) = 1 - P(X < 3) = 0{,}5;$$

д) $X \geq 5$, $P(X \geq 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - F(5) = 1 - 1 = 0$.

Для дискретної випадкової величини аналогом інтегральної функції розподілу є емпірична функція розподілу (кумулята), графіком якої є ступінчаста лінія.

Приклад 10.2. Заданий ряд розподілу випадкової величини X :

x_i	2	4	7
p_i	0,5	0,2	0,3

Знайдемо функцію розподілу $F(x)$ і побудуємо її графік.

Розв'язання:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 2, \\ 0{,}5, & 2 < x \leq 4, \\ 0{,}5 + 0{,}2 = 0{,}7, & 4 < x \leq 7, \\ 0{,}7 + 0{,}3 = 1, & x > 7. \end{cases}$$

Побудуємо графік (рис. 10.1) отриманої функції.

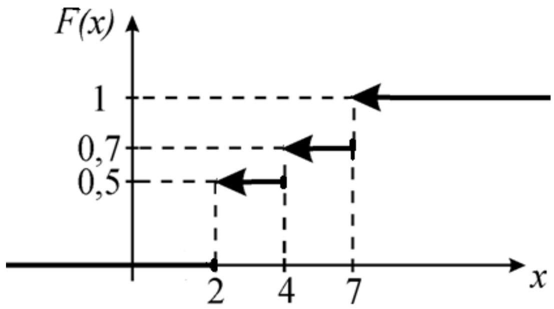


Рис. 10.1. **Графік функції розподілу**

Точками розриву графіка є значення x, у яких $F(x)$ змінює своє значення. Якщо випадкова величина задана інтервалами, то емпіричну функцію можна побудувати ламаною лінією.

Приклад 10.3. Задані можливі інтервали значень випадкової величини та їх ймовірності:

X	[1; 3]	[3; 5]	[5; 8]
p	0,5	0,2	0,3

Розв'язання. Знайдемо функцію розподілу ймовірностей $F(x)$ і побудуємо її графік (рис. 10.2).

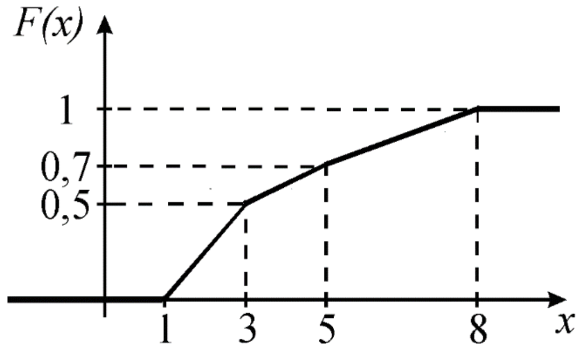


Рис. 10.2. **Емпірична інтегральна функція розподілу**

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 1,\\ 0{,}5, & 1<x\le 3,\\ 0{,}5+0{,}2=0{,}7, & 3<x\le 5,\\ 0{,}7+0{,}3=1, & 5<x\le 8,\\ 1, & x>8.\end{cases}$$

10.3. Щільність розподілу ймовірностей і її властивості

Диференціальна функція розподілу ймовірностей (щільність розподілу) $f(x)$ є похідною від інтегральної функції розподілу $F(x)$:

$$f(x)=F'(x).$$

Таким чином, пошук інтегральної функції, якщо задана диференціальна, пов'язаний з розв'язком зворотної задачі:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx.$$

Дійсно, $\int_{-\infty}^{x} f(x)dx = F(x)\Big|_{-\infty}^{x} = F(x) - F(-\infty) = F(x)$, оскільки $F(-\infty) = P(X < -\infty) = 0$ ($X < -\infty$ – подія неможлива).

Ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, що належить інтервалу $[a,b]$:

$$P(a < X < b) = F(b) - F(a) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx - \int_{-\infty}^{a} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx.$$

Тобто $P(a < X < b) = \int_{a}^{b} f(x)dx$.

Виходячи з геометричного змісту певного інтеграла можемо зробити висновок: ймовірність $P(a < X < b)$ чисельно дорівнює площі фігури, яка обмежена прямими $x = a$, $x = b$, $y = 0$ та кривою $y = f(x)$.

Властивості диференціальної функції розподілу $f(x)$.

1. Функція $f(x)$ невід'ємна:

$$f(x) \geq 0.$$

Ця властивість випливає з того, що похідна від неспадної функції $F(x)$ є функцією невід'ємною.

2. Якщо $X \in (-\infty, \infty)$, то: $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$.

Дійсно $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = P(-\infty < X < \infty) = 1$, тому що $-\infty < X < \infty$ – достовірна подія.

3. Якщо $X \in (a,b)$, то $\int_{a}^{b} f(x)dx = 1$.

Приклад 10.4. Задана щільність розподілу $f(x)$ випадкової величини:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ cx, & 0 < x \leq 1, \\ 0, & x > 1. \end{cases}$$

Знайдемо:

а) параметр c;

б) функцію $F(x)$;

в) $P(0{,}5 < X < 1)$.

Зобразимо графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$.

Розв'язання:

а) оскільки $\int\limits_a^b f(x)dx = 1$, то $\int\limits_0^1 f(x)dx = 1$,

звідси маємо $\int\limits_0^1 cx\,dx = c\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{c}{2} = 1$.

Отже, $c = 2$ і $f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & x > 1; \end{cases}$

б) тому що $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx$, то:

якщо $x \le 0$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} 0dx = 0$;

якщо $x \le 1$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{x} 2xdx = x^2\Big|_0^x = x^2$;

якщо $x > 1$, $F(x) = \int\limits_{-\infty}^{0} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{0} 0dx + \int\limits_{0}^{1} 2xdx + \int\limits_{1}^{x} 0dx = x^2\Big|_0^1 = 1$.

Отже: $F(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ 1, & x > 1; \end{cases}$

в) $P(0{,}5 < X < 1) = F(1) - F(0{,}5) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

або

$$P(0{,}5 < X < 1) = \int\limits_{0,5}^{1} 2xdx = x^2\Big|_{0,5}^{1} = 0{,}75.$$

Графіки інтегральної і диференціальної функцій розподілу $F(x)$ і $f(x)$ зображені на рис. 10.3.

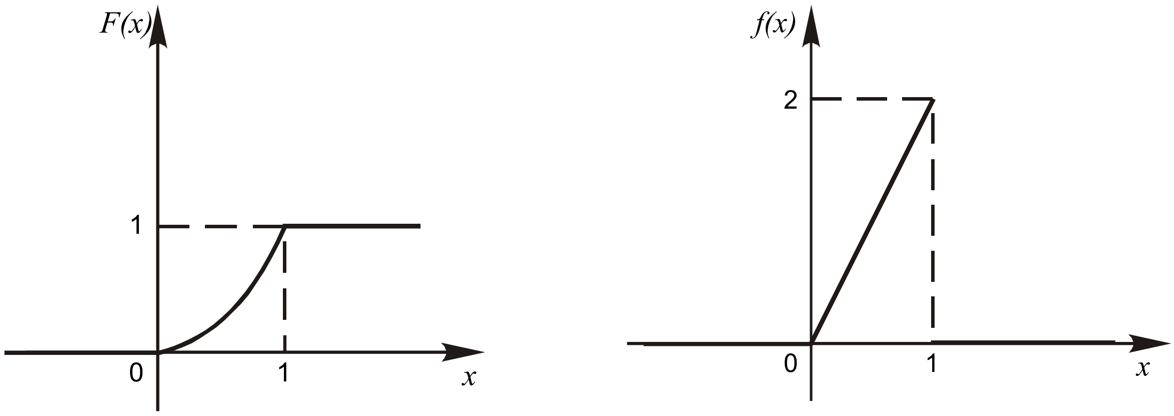


Рис. 10.3. **Графіки функцій $F(x)$ і $f(x)$**

Якщо $F(x)$ – функція розподілу ймовірностей неперервної випадкової величини X, то:

$$f(x) = F'(x), \text{ тобто } f(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}.$$

Відомо, що $F(x + \Delta x) - F(x) = P(x < X < x + \Delta x)$.

Ураховуючи, що

$$F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta F(x), \text{ а } \Delta F(x) \approx dF(x) = f(x)\Delta x,$$

маємо:

$$P(x < X < x + \Delta x) \approx f(x)\Delta x.$$

Таким чином, ймовірність того, що неперервна випадкова величина прийме значення, що належить інтервалу $(x, x + \Delta x)$ (при $\Delta x \to 0$), приблизно дорівнює добутку диференціальної функції на довжину інтервалу Δx. Тобто диференціальна функція виступає в ролі щільності розподілу ймовірностей.

10.4. Числові характеристики неперервної випадкової величини

Нехай X – неперервна випадкова величина, яка може приймати всілякі значення на відрізку $[a, b]$ і має щільність розподілу ймовірностей $f(x)$. Розіб'ємо проміжок $[a, b]$ на n частин точками

$a = x_0 < x_1 < x_2 < ... < x_{n-1} < x_n = b$. Тоді отримаємо відрізки $[x_0, x_1]$, $[x_1, x_2]$, … , $[x_{n-1}, x_n]$. Виберемо на кожному з них довільну точку x_i $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Згідно з ймовірнісним змістом щільності розподілу, $f(x_i)\Delta x_i$ дорівнює ймовірності потрапляння випадкової величини X до інтервалу Δx_i.

Використовуючи формулу для математичного сподівання дискретної випадкової величини X, отримаємо:

$$M(X_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \Delta x_i .$$

Якщо $\max\limits_{i \to 0} \Delta x_i \to 0$ і $n \to \infty$, то дискретна величина X_n буде все менше відрізнятися від неперервної величини X.

Функція $xf(x)$ – неперервна, тоді маємо:

$$\lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} x_i f(x_i) \Delta x_i = \int_a^b xf(x)dx.$$

Отже, **математичне сподівання неперервної випадкової величини** X, можливі значення якої належать відрізку $[a,b]$, обчислюється як визначений інтеграл:

$$M(X) = \int_a^b xf(x)dx.$$

Аналогічно, якщо $X \in (-\infty, \infty)$, то $M(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx$.

Дисперсія неперервної випадкової величини X обчислюється як математичне сподівання квадрата відхилення випадкової величини від свого математичного сподівання.

Якщо $X \in (-\infty, \infty)$, то:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(X))^2 f(x)dx$$

або

$$D(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

Якщо $X \in [a; b]$, то:

$$D(X) = \int_a^b (x - M(X))^2 f(x)dx$$

або

$$D(X) = \int_a^b x^2 f(x)dx - (M(X))^2.$$

Середнє квадратичне відхилення неперервної випадкової величини X:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Властивості математичного сподівання і дисперсії дискретних величин зберігаються і для неперервних величин.

Модою M_o неперервної випадкової величини називають таке значення випадкової величини, для якого диференціальна функція максимальна.

Медіаною m_e називають таке значення випадкової величини, для якого виконується рівність $P(X > m_e) = P(X < m_e)$. Геометрично медіану можна визначити як точку, у якій ордината функції $f(x)$ розділяє навпіл площу під кривою розподілу (диференціальною).

Моменти неперервної випадкової величини:

а) **початковий** момент k-го порядку:

$$\nu_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x)dx;$$

б) **центральний** момент k-го порядку:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{\infty} (x - M(x))^k f(x)dx.$$

Приклад 10.5. Задана диференціальна функція розподілу неперервної випадкової величини X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ x-\dfrac{1}{2}, & 1\le x\le 2,\\ 0, & x>2.\end{cases}$$

Знайдемо інтегральну функцію розподілу $F(x)$. Зобразимо графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$. Знайдемо $M(X)$ $D(X)$.

Розв'язання. Функцію розподілу $F(x)$ знайдемо за формулою:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx\cdot$$

Якщо $x<1$, то $f(x)=0$, звідки $F(x)=0$;

якщо $1\le x\le 2$, то:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{x}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\Bigg|_1^x=\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2};$$

якщо $x>2$, то:

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x} f(x)dx=\int_{-\infty}^{1}0dx+\int_{1}^{2}\left(x-\frac{1}{2}\right)dx+\int_{2}^{x}0dx=\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{2}\right)\Bigg|_1^2=1\cdot$$

Остаточно маємо $F(x)$:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<1,\\ \dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x}{2}, & 1\le x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$$

Знайдемо числові характеристики:

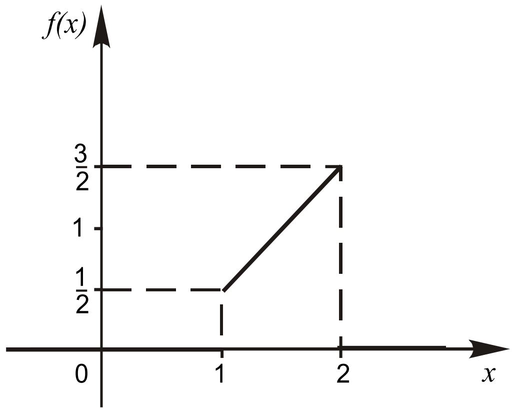
$$M(X)=\int_{1}^{2} x\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)dx=\int_{1}^{2}\left(x^2-\frac{x}{2}\right)dx=\left(\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{4}\right)\Bigg|_1^2=1{,}58;$$

$$D(X)=\int_1^2 x^2\cdot\left(x-\frac{1}{2}\right)dx-1{,}58^2=\int_1^2\left(x^3-\frac{x^2}{2}\right)dx-1{,}58^2=$$

$$=\left(\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{6}\right)\Bigg|_1^2-1{,}58^2=0{,}08;$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{0{,}08}=0{,}28.$$

Побудуємо графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ (рис. 10.4).



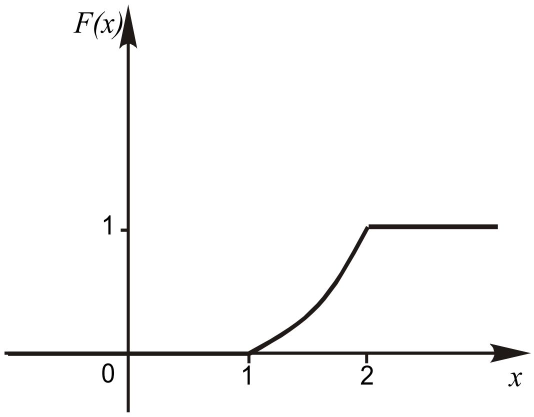


Рис. 10.4. **Графіки щільності розподілу $f(x)$ і функції розподілу $F(x)$**

10.5. Рівномірний закон розподілу і його числові характеристики

Рівномірним розподілом неперервної випадкової величини називають такий розподіл, за якого диференціальна функція є сталою величиною на інтервалі $[a,b]$, а поза цим інтервалом дорівнює нулю:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ c, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

Визначимо параметр c.

Виходячи з властивості функції $f(x)$ маємо:

$$\int_a^b f(x)dx=1,\quad \int_a^b c\,dx=cx\Big|_a^b=c(b-a),\quad c(b-a)=1\Rightarrow c=\frac{1}{b-a}.$$

Отже, для рівномірного розподілу диференціальна функція $f(x)$ має вигляд:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & x>b.\end{cases}$$

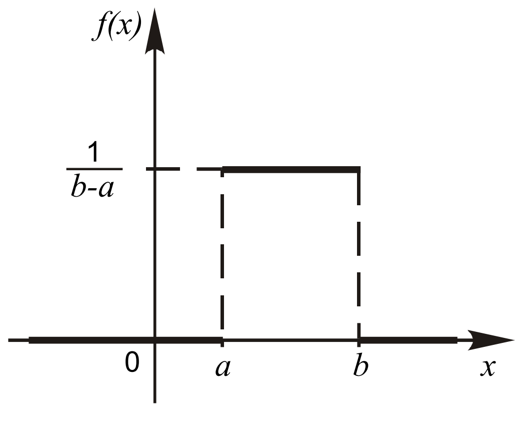
Знайдемо інтегральну функцію розподілу $F(x)$ для $X\in[a,b]$:

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx=\int_a^x \frac{1}{b-a}dx=\left.\frac{x}{b-a}\right|_a^x=\frac{x-a}{b-a}.$$

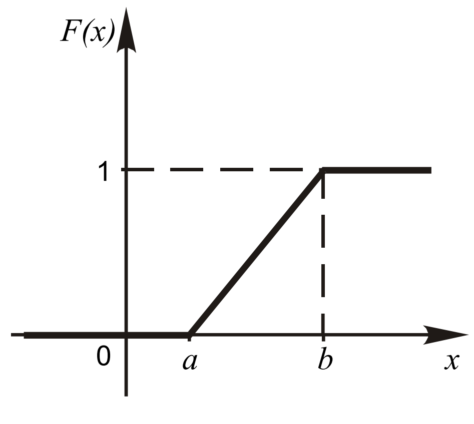
Таким чином, $F(x)$ запишемо у вигляді:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x<a,\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 1, & x>b.\end{cases}$$

Графіки диференціальної функції $f(x)$ і інтегральної функції $F(x)$ рівномірного розподілу наведені на рис. 10.5 а), б).



а) диференціальна функція



б) інтегральна функція

Рис. 10.5. **Графіки диференціальної та інтегральної функцій рівномірного розподілу ймовірностей**

Визначимо ймовірність влучення випадкової величини X до інтервалу $(\alpha,\beta)\in[a,b]$:

$$\boldsymbol{P(\alpha<X<\beta)}=F(\beta)-F(\alpha)=\frac{\beta-a}{b-a}-\frac{\alpha-a}{b-a}=\boldsymbol{\frac{\beta-\alpha}{b-a}}.$$

Обчислимо числові характеристики випадкової величини, розподіленої за рівномірним законом.

Математичне сподівання $M(X)$ визначимо за формулою:

$$\boldsymbol{M(X)}=\int_a^b x\cdot f(x)dx=\int_a^b x\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\frac{x^2}{2}\Bigg|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\boldsymbol{\frac{a+b}{2}}.$$

Дисперсія $D(X)$:

$$\boldsymbol{D(X)}=\int_a^b x^2\cdot f(x)dx-(M(X))^2=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^2\,dx-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=$$

$$=\frac{b^3-a^3}{3(b-a)}-\frac{(a+b)^2}{4}=\frac{b^2+ab+a^2}{3}-\frac{a^2+2ab+b^2}{4}=\boldsymbol{\frac{(b-a)^2}{12}}.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$ обчислимо за формулою:

$$\boldsymbol{\sigma(X)}=\sqrt{D(X)}=\boldsymbol{\frac{b-a}{2\sqrt{3}}}.$$

Приклад 10.6. Автобус прибуває на зупинку з інтервалом 5 хвилин. Необхідно: зайти ймовірність того, що автобус з'явиться в останні дві хвилини; знайти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$.

Розв'язання. За умовою задачі $b-a=5$, $\alpha=3$, $\beta=5$.

$$P(3<X<5)=F(5)-F(3)=\frac{x-0}{5-0}\bigg|_{x=5}-\frac{x-0}{5-0}\bigg|_{x=3}=\frac{5-3}{5}=\frac{2}{5}=0{,}4;$$

$$M(X)=\frac{0+5}{2}=2{,}5;\quad D(X)=\frac{25}{12}=2{,}08;\quad \sigma(X)=1{,}44.$$

Рівномірний закон розподілу ймовірностей застосовується у роботі з округленими числами. Наприклад, якщо число округлене до цілого, то помилка округлення Δ розподілена рівномірно на відрізку $[-0{,}5; 0{,}5]$.

10.6. Показниковий закон розподілу ймовірностей

Неперервна випадкова величина X розподілена за **показниковим законом**, якщо щільність розподілу ймовірностей:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \end{cases}$$ з параметром $\lambda > 0$.

Перевіримо, що функція, яка задана в такому вигляді, задовольняє властивостям диференціальної функції розподілу.

Дійсно: $f(x) > 0$ і

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} e^{-\lambda x} dx = \lambda \lim_{b\to\infty} \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right)\Bigg|_{0}^{b} = 1.$$

Інтегральна функція показникового розподілу:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx = \int_{-\infty}^{0} 0dx + \int_{0}^{x} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x} = 1 - e^{-\lambda x}.$$

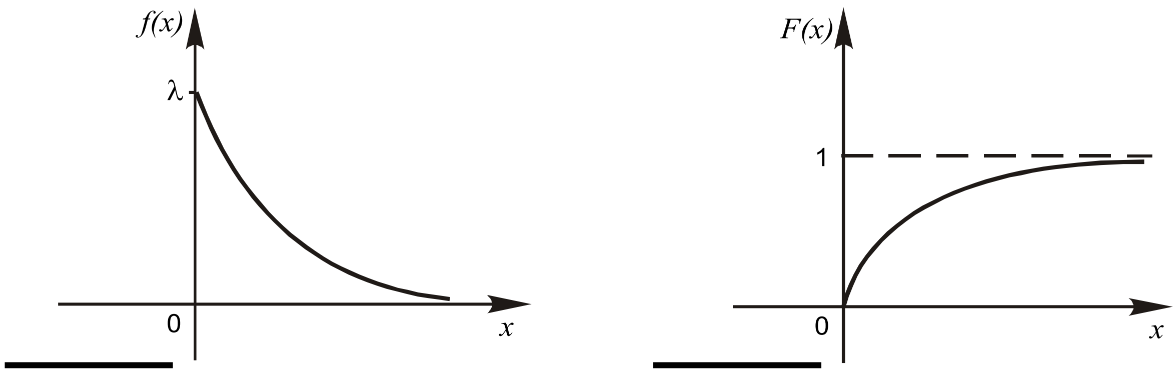
Остаточно:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0. \end{cases}$$

Ймовірність влучення випадкової величини X в інтервал (α, β):

$$\boldsymbol{P(\alpha < X < \beta)} = F(\beta) - F(\alpha) = \left(1 - e^{-\lambda\beta}\right) - \left(1 - e^{-\lambda\alpha}\right) = \boldsymbol{e^{-\lambda\alpha} - e^{-\lambda\beta}}.$$

Графіки функцій $f(x)$ і $F(x)$ наведені на рис. 10.6 а), б).



а) диференціальна функція б) інтегральна функція

Рис. 10.6. **Графіки диференціальної та інтегральної функцій показникового розподілу ймовірностей**

Обчислимо числові характеристики показникового закону розподілу. Математичне сподівання $M(X)$:

$$\boldsymbol{M}(\boldsymbol{X})=\int_a^{\infty} x\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx=\lambda\lim_{b\to\infty}\int_0^b x\cdot e^{-\lambda x}dx=\begin{vmatrix} u=x & du=dx \\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{vmatrix}=$$

$$=\lambda\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\frac{1}{\lambda}\int_0^b e^{-\lambda x}dx\right)=\lim_{b\to\infty}\left(0-e^{-\lambda b}\right)-\frac{1}{\lambda}\lim_{b\to\infty}e^{-\lambda x}\Big|_0^b=0+\frac{1}{\lambda}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}.$$

Дисперсія $D(X)$:

$$\boldsymbol{D}(\boldsymbol{X})=\int_0^{\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx-\left(M(X)\right)^2=\lambda\int_0^{\infty}x^2\cdot\lambda e^{-\lambda x}dx-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\begin{vmatrix} u=x^2 & du=2xdx \\ dv=e^{-\lambda x}dx & v=-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\end{vmatrix}==\lambda\lim_{b\to\infty}\left(-\frac{x^2}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_0^b+\frac{2}{\lambda}\int_0^b x\cdot e^{-\lambda x}dx\right)-\frac{1}{\lambda^2}=$$

$$=\frac{2}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}^{\mathbf{2}}}.$$

Середнє квадратичне відхилення $\sigma(X)$: $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{X})=\sqrt{D(X)}=\frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{\lambda}}$.

Зазначимо, що у показниковому розподілі математичне сподівання дорівнює середньому квадратичному відхиленню:

$$M(X)=\sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Показниковий закон використовують у теорії масового обслуговування.

Приклад 10.7. Середній час обслуговування покупця становить 20 хвилин і розподілений за показниковим законом. Яка ймовірність простояти в черзі від 20 до 40 хвилин?

Розв'язання. $M(X)=20$, $1/\lambda=20$.

$$P(20<X<40)=F(40)-F(20)=e^{-20\cdot\frac{1}{20}}-e^{-40\cdot\frac{1}{20}}=\frac{1}{e}-\frac{1}{e^2}=$$

$$=0{,}368-0{,}135=0{,}233.$$

Функцією, яка визначає ймовірність безвідмовної роботи елемента за проміжок часу довжиною t, є **функція надійності** $R(t)$: $R(t)=P(T\geq t)$. Події $(T\geq t)$ і $(T<t)$ протилежні. Функція розподілу $F(t)=P(T<t)$ визначає ймовірність відмови елемента за час довжиною t.

Таким чином, для показникового розподілу:

$$\boldsymbol{R(t)}=P(T\geq t)=1-P(T<t)=1-F(t)=\boldsymbol{e^{-\lambda t}},$$

де λ – інтенсивність відмов.

Приклад 10.8. Випадкова величина T – час роботи лампи розжарювання має показниковий розподіл. Визначимо ймовірність того, що час роботи лампи становитиме не менше 600 годин, якщо середній час роботи – 400 годин.

Розв'язання.

$$M(X)=400,\ \text{тоді}\ \lambda=\frac{1}{M(X)}=\frac{1}{400},\quad t=600.$$

$$R(t)=P(T\geq 600)=e^{-\frac{1}{400}\cdot 600}=e^{-1{,}5}=0{,}223.$$

10.7. Нормальний закон розподілу

Випадкова величина X розподілена за **нормальним законом**, якщо її щільність розподілу ймовірностей при $x\in(-\infty;\infty)$ визначається формулою:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

де σ, a – параметри розподілу.

Перевіримо, що $f(x)$ задовольняє властивостям диференціальної функції розподілу. Дійсно: $f(x)>0$.

Обчислимо $\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx$.

Зробимо заміну $t=\frac{x-a}{\sigma}$, $dx=\sigma\, dt$. Межі інтегрування при цьому зберігаються.

Тоді маємо:

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} \sigma dt = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = 1,$$

де $\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \sqrt{2\pi}$ – інтеграл Пуассона.

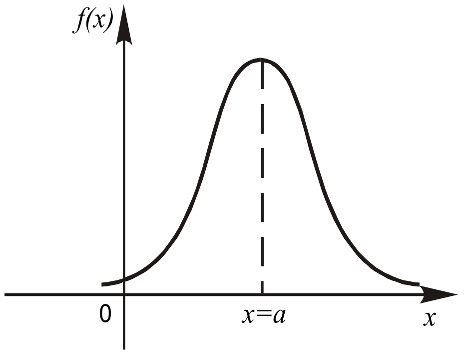
Інтегральна функція розподілу $F(x)$ для нормального закону:

$$F(x) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{x-a}{\sigma}\right).$$

Якщо ввести центровану та нормовану величину $t=\frac{x-a}{\sigma}$ таку, що $a=0$, $\sigma=1$, то $\boldsymbol{f(x)=\varphi(t)}$, $\boldsymbol{F(x)=\frac{1}{2}+\Phi(t)}$, де $\varphi(t)$, то $\Phi(t)$ – диференціальна й інтегральна функції Лапласа:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}, \quad \Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_0^t e^{-\frac{t^2}{2}} dt.$$

Графіки диференціальної $f(x)$ і інтегральної $F(x)$ функцій нормального розподілу наведені на рис. 10.7 а), б).



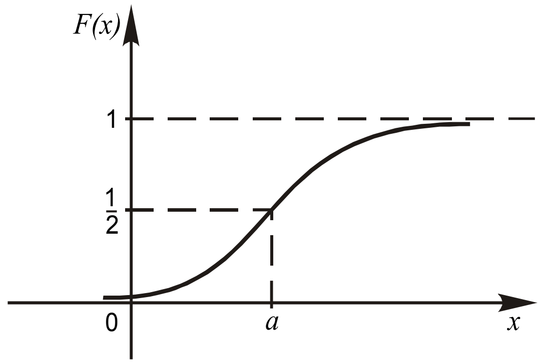


Рис. 10.7. **Графіки диференціальної та інтегральної функцій нормального розподілу ймовірностей**

Числові характеристики нормального розподілу такі:

$$\boldsymbol{a = M(X), \quad \sigma = \sqrt{D(X)}}.$$

Для нормального розподілу крива розподілу – функція $f(x)$ – досягає максимуму при $x = a$ і симетрична щодо лінії $x = a$.

Знайдемо ймовірність влучення випадкової величини X, розподіленої за нормальним законом з параметрами a і σ у проміжок (α, β):

$$P(\alpha < X < \beta) = F(\beta) - F(\alpha) = \frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \left(\frac{1}{2} + \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)\right) =$$

$$= \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right).$$

Таким чином:

$$\boldsymbol{P(\alpha < X < \beta) = \Phi\left(\frac{\beta - a}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{\alpha - a}{\sigma}\right)}.$$

Приклад 10.9. Випадкова величина X розподілена за нормальним законом і має щільність розподілу:

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-3)^2}{8}}.$$

Знайдемо числові характеристики величини X і ймовірність влучення її в інтервал $(1;7)$.

Розв'язання. За визначенням функції $f(x)$ маємо: $a=3,\ \sigma=2$.

Тобто, $M(X)=3,\ \sigma(X)=2,\ D(X)=4$.

Тоді ймовірність влучення випадкової величини X в інтервалі $(1;7)$ дорівнює:

$$P(1<X<7)=\Phi\left(\frac{7-3}{2}\right)-\Phi\left(\frac{1-3}{2}\right)=\Phi(2)-\Phi(-1)=0{,}477+0{,}341=0{,}818.$$

Приклад 10.10. Автоматичний верстат штампує деталі. Довжина деталі є випадковою величиною, що розподілена за нормальним законом з параметрами $a=10$ см, $\sigma^2=0{,}0004$. Знайдемо ймовірність браку, якщо допустимі розміри деталі повинні бути $10\pm0{,}05$ см.

Розв'язання:

$$P_{\text{брака}}+P(9{,}95<X<10{,}05)=1;$$

$$P_{\text{брака}}=1-P(9{,}95<X<10{,}05);\ \alpha=9{,}95;\ \beta=10{,}05;\ \sigma=0{,}02.$$

$$P(9{,}95<X<10{,}05)=\Phi\left(\frac{10{,}05-10}{0{,}02}\right)-\Phi\left(\frac{9{,}95-10}{0{,}02}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{0{,}05}{0{,}02}\right)-\Phi\left(\frac{-0{,}05}{0{,}02}\right)=2\Phi(2{,}5)=2\cdot0{,}494=0{,}988.$$

Таким чином, імовірність браку дорівнює: $P_{\text{брака}}=1-0{,}988=0{,}012$.

Ймовірність відхилення нормально розподіленої випадкової величини від її математичного сподівання за модулем на величину, що не перевершує ε ($\varepsilon>0$).

Знайдемо $P(|X-a|<\varepsilon)$:

$$P(|X-a|<\varepsilon)=P(a-\varepsilon<X<a+\varepsilon)=\Phi\left(\frac{a+\varepsilon-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{a-\varepsilon-a}{\sigma}\right)=$$

$$=\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)-\Phi\left(-\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Таким чином, $\boldsymbol{P(|X-a|<\varepsilon)=2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right)}$.

Приклад 10.11. Деталь, виготовлена на верстаті, вважається стандартною, якщо відхилення її розміру від проєктного не більше 10 мм. Випадкові відхилення розподілені за нормальним законом: $\sigma = 5$, $a = 0$. Знайдемо, який процент стандартних деталей виготовляється на верстаті.

Розв'язання. За умовою $\varepsilon = 10$, $\sigma = 5$. Маємо:

$$P(|X| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right) = 2\Phi\left(\frac{10}{5}\right) = 2\Phi(2) = 2 \cdot 0{,}477 = 0{,}954.$$

Отже, на верстаті виготовляється приблизно 95 % стандартних деталей.

Правило трьох сигм. Нехай $\varepsilon = \sigma \cdot t$, тоді $P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$.

Якщо $t = 1$, то $\varepsilon = \sigma$, тоді: $P(|X - a| < \sigma) = 2\Phi(1) = 0{,}6826$.

Це означає, що 68 % значень випадкової величини знаходяться на проміжку $(a \pm \sigma)$.

Якщо $t = 2$, то $\varepsilon = 2\sigma$, тоді: $P(|X - a| < 2\sigma) = 2\Phi(2) = 0{,}9544$. Це означає, що 95 % значень випадкової величини знаходяться на проміжку $(a \pm 2\sigma)$.

І останнє: $t = 3 \Rightarrow \varepsilon = 3\sigma$, маємо:

$$P(|X - a| < 3\sigma) = 2\Phi(3) = 0{,}9973.$$

Звідси **правило трьох сигм**: нормально розподілена величина X приймає всі свої значення на проміжку $(a \pm 3\sigma)$ з достовірністю приблизно дорівнює 100 %.

Тобто з 10 000 значень нормально розподіленої випадкової величини лише 27 вийдуть за межі інтервалу $(a \pm 3\sigma)$.

Приклад 10.12. На верстаті виготовляють кулі, діаметр яких є випадковою величиною X, розподіленою за нормальним законом, з середнім значенням $a = 2$ мм і $\sigma = 0{,}1$ мм. Які розміри діаметра куль можна гарантувати з надійністю 99,73 %?

Розв'язання. За умовою задачі $P = 0{,}9973$, $3\sigma = 0{,}3$. Тобто $a - 3\sigma < X < a + 3\sigma$, $2 - 0{,}3 < X < 2 + 0{,}3$, $1{,}7 < X < 2{,}3$.

У вивченні розподілів, які відрізняються від нормального, виникає необхідність оцінити цю відмінність. Із цією метою вводять такі характеристики, як *асиметрія* і *ексцес*. Для нормального розподілу вони дорівнюють нулю. Великі значення асиметрії й ексцесу вказують на значне відхилення від нормального розподілу; за малих значень асиметрії і ексцесу можна допустити близькість цього розподілу до нормального.

Асиметрією розподілу називають величину:

$$A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3},$$

де μ_3 – центральний момент третього порядку;

σ – середнє квадратичне відхилення.

Асиметрія A_S характеризує відхилення кривої розподілу $f(x)$ від центру симетрії нормального розподілу $x = a$, тобто моди. Якщо $A_S > 0$, то максимум функції $f(x)$ відходить вліво; якщо $A_S < 0$ – вправо, причому значення максимуму зберігається (рис. 10.8).

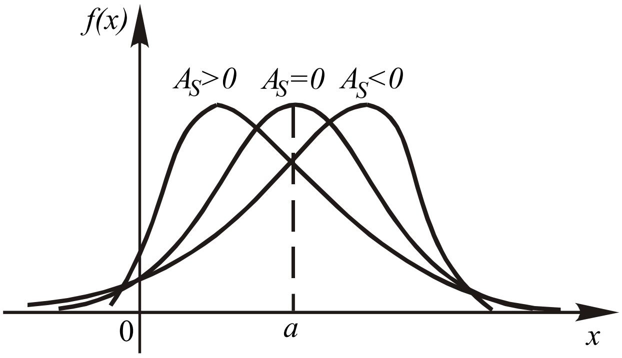


Рис. 10.8. **Асиметрія розподілу**

Ексцесом розподілу називають величину:

$$E_S = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3,$$

де μ_4 – центральний момент четвертого порядку.

Ексцес розподілу характеризує зміщення максимуму кривої розподілу вздовж осі симетрії $x = a$ (рис. 10.9).

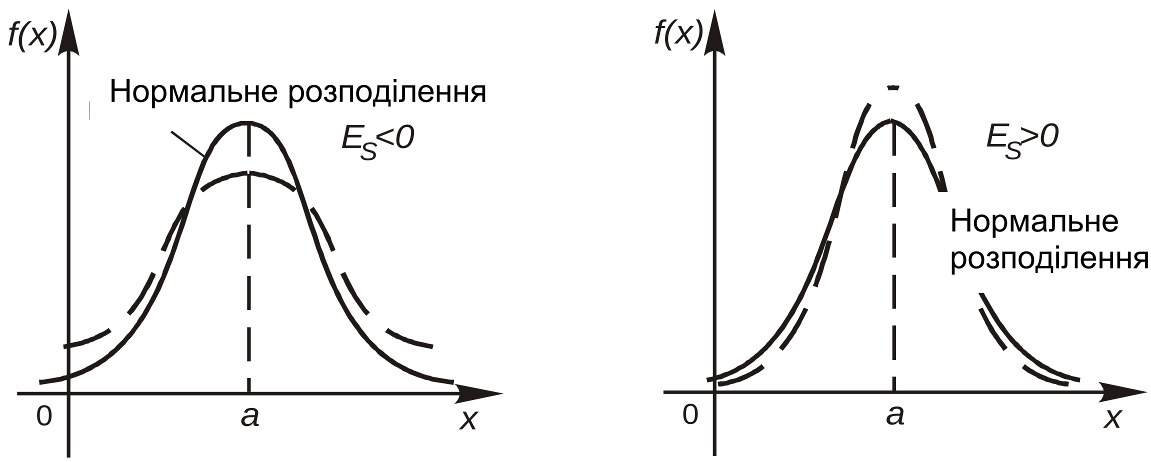


Рис. 10.9. **Ексцес розподілу**

Приклад 10.13. Дано $\mu_3 = 0{,}4$, $\mu_4 = 6{,}17$, $\sigma^2 = 1{,}66$. Знайдемо A_S, E_S.

Розв'язання:

1) асиметрія: $A_S = \dfrac{0{,}4}{1{,}66\sqrt{1{,}66}} \approx 0{,}19$;

2) ексцес: $E_S = \dfrac{6{,}17}{1{,}66^2} - 3 = -0{,}76$.

Можна сказати, що крива розподілу буде відходити вліво ($A_S > 0$) відносно $x = a$ і максимум буде меншим, ніж у кривої нормального розподілу ($E_S < 0$).

Нормально розподілені випадкові величини широко застосовуються на практиці.

Якщо $X = \dfrac{X_1 + X_2 + ... + X_n}{n}$, де X_i – незалежні випадкові величини, $M(X_i) = a$, $D(X_i) = \dfrac{\sigma^2}{n}$, $\sigma(X_i) = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$, то

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right),$$

тобто $$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon\sqrt{n}}{\sigma}\right).$$

Отже, з ймовірністю P можна стверджувати, що інтервал $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ покриває невідомий параметр a з надійністю $P = 2\Phi(t)$ і точністю оцінки $\varepsilon = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$. Оцінку $|X - a| < t\dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ називають **класичною.**

З формули $\varepsilon = \dfrac{t\sigma}{\sqrt{n}}$, яка визначає точність класичної оцінки, можна зробити висновки:

1) з ростом n число ε спадає, тобто точність оцінки збільшується;

2) збільшення ймовірності $P = 2\Phi(t)$ приводить до росту параметра t ($\Phi(t)$ – зростаюча функція) і тим самим до росту ε.

Тобто збільшення ймовірності класичної оцінки спричиняє зменшення її точності.

10.8. Розподіли Стьюдента та Фішера – Снедекора

Нехай X_0 і $X_1, X_2, \ldots, X_n$ – попарно незалежні випадкові величини, кожна з яких розподілена за нормальним законом з параметрами $a=0, \sigma=1$.

Послідовність випадкових величин $X_1, X_2, ..., X_n$ перетворена у випадкову величину $\chi^2(n)=X_1^2+X_2^2+...+X_n^2$. Випадкова величина розподілена за законом "χ^2-квадрат" (розподіл Пірсона) з n ступенями свободи, $M(\chi^2(n))=n, D(\chi^2(n))=2n$.

Закон розподілу, за яким розподілена випадкова величина $t=\dfrac{X_0}{\sqrt{\chi^2(n)/n}}$, називається **розподілом Стьюдента**.

Параметром розподілу є n – кількість ступенів свободи випадкової величини t.

Основні числові характеристики розподілу Стьюдента:

$$M(t)=0, \; D(t)=\frac{n}{n-2} \quad \text{за } n>2.$$

Значення випадкової величини t знаходять за додатком В.

Нехай є дві випадкові величини, які мають розподіл Пірсона ($X_1^2+X_2^2+...+X_n^2=\chi^2(n)$ та $X_1^2+X_2^2+...+X_m^2=\chi^2(m)$, де $X_1, X_2, ..., X_n$ – попарно незалежні випадкові величини, розподілені за нормальним законом): $\chi^2 \sim \chi^2(n)$ і $\chi^2 \sim \chi^2(m)$ з різним числом ступенів свободи.

Розподіл випадкової величини $F=\dfrac{\chi^2(n)/n}{\chi^2(m)/m}$ називається **розподілом Фішера – Снедекора** із двома параметрами n і m.

Основні числові характеристики розподілу Фішера:

$$M(F)=\frac{m}{m-2} \text{ за } m>2, \; D(F)=\frac{2m^2(n+m-2)}{n\cdot(m-2)^2(m-4)} \text{ за } m>4.$$

Значення випадкової величини $F(n;m)$ визначаються за додатком Г. За $n>30$ і $m>30$ розподіл випадкової величини $F(n;m)$ наближається до нормального.

10.9. Системи двох випадкових величин. Коваріація і коефіцієнт кореляції

Для двовимірної випадкової величини $Z = (X, Y)$ можна знайти математичне сподівання і дисперсію кожного компонента: $M(X) = m_x$, $M(Y) = m_y$, $D(X) = \sigma_x^2$, $D(Y) = \sigma_y^2$.

Однак ці характеристики недостатньо повно характеризують величину Z, тому що не відтворюють ступінь залежності між компонентами. Цю роль виконують кореляційний момент (коваріація) μ_{xy} і коефіцієнт кореляції r_{xy}.

Кореляційним моментом (коваріацією) μ_{xy} двох випадкових величин X і Y називається математичне сподівання добутку відхилень випадкових величин від своїх математичних сподівань:

$$\mu_{xy} = M\big((X - m_x)(Y - m_y)\big).$$

Коваріація має такі властивості:

1) $\mu_{xy} = \mu_{yx}$ – властивість симетрії;

2) $\mu_{xy} = 0$, якщо X і Y – незалежні величини;

3) $|\mu_{xy}| \le \sigma_x \sigma_y$;

4) $\mu_{xx} = D(X)$.

Для обчислення кореляційного моменту замість визначення використовують перетворену формулу: $\mu_{xy} = M(XY) - M(X) \cdot M(Y)$.

Приклад 10.14. Закон розподілу дискретної двовимірної випадкової величини заданий у табл. 10.1.

Таблиця 10.1

Закон розподілу випадкової величини

$Y \backslash X$	1	2	$\sum\limits_{j=1}^{n} p_{ij}$
2	0,4	0,3	0,7
4	0,2	0,1	0,3
$\sum\limits_{i=1}^{m} p_{ij}$	0,6	0,4	1=1

Знайдемо μ_{xy} двох випадкових величин X і Y.

Розв'язання. Обчислимо математичні сподівання випадкових величин X і Y за їхніми розподілами. Так, для випадкової величини X за першим і четвертим рядками таблиці визначаємо:

$$M(X)=\sum_{j=1}^{n}x_j p_j =1\cdot 0{,}6+2\cdot 0{,}4=1{,}4.$$

Для випадкової величини Y за першим і останнім стовпцями таблиці обчислюємо:

$$M(Y)=\sum_{i=1}^{m}y_i p_i =2\cdot 0{,}7+4\cdot 0{,}3=2{,}6.$$

Визначаємо математичне сподівання добутку випадкових величин X і Y:

$$M(XY)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}x_j y_i p_{ij} =1\cdot 2\cdot 0{,}4+2\cdot 2\cdot 0{,}3+4\cdot 1\cdot 0{,}2+4\cdot 2\cdot 0{,}1=3{,}6.$$

Обчислюємо кореляційний момент:

$$\mu_{xy}=3{,}6-1{,}4\cdot 2{,}6=-0{,}04.$$

Кореляційний момент не дорівнює нулю, тому компоненти X і Y двовимірної випадкової величини не можна вважати незалежними.

Коефіцієнтом кореляції r_{xy} двох випадкових величин X і Y називається відношення кореляційного моменту до добутку середньоквадратичних відхилень цих величин:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Коефіцієнт кореляції є безрозмірною величиною. Він дорівнює нулю для незалежних випадкових величин.

Властивості коефіцієнта кореляції:

1) $r_{xy}=r_{yx}$;

2) $r_{xx}=1,\quad r_{yy}=1$;

3) $\left|r_{xy}\right|\le 1$;

4) $r_{xy} = 0$ – величини незалежні;

5) $r_{xy} = \pm 1$ – між X та Y існує лінійна кореляційна залежність.

10.10. Закон великих чисел. Центральна гранична теорема

До закону великих чисел відносять: нерівність Чебишева, теорему Чебишева, центральну граничну теорему Ляпунова. Не будемо доводити ці теореми, сформулюємо деякі висновки.

Якщо в якості випадкових величин розглядати результати окремих випробувань, то середнє значення цих результатів має розподіл близький до нормального.

Зміст теореми Ляпунова для її використання на практиці полягає в такому: якщо випадкова величина дорівнює сумі дуже великого числа взаємно незалежних випадкових величин, вплив кожної з яких на суму незначний, то вона має розподіл, близький до нормального (*асимптотично нормальний*). Зокрема, середнє значення має розподіл близький до нормального.

Таким чином, центральна гранична теорема визначає роль, яку відіграє нормальний розподіл.

Основні висновки із закону великих чисел: за достатньо великої кількості спостережень можна вважати, що випадкова величина має розподіл, близький до нормального (висновок теореми Ляпунова). Водночас в якості математичного сподівання випадкової величини можна прийняти середнє вибіркове $\overline{X}_{виб} \to a$ (теорема Чебишева), а в якості ймовірності події – відносну частоту (теорема Бернуллі) $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{m}{n} - p\right| \le \varepsilon\right) = 1$.

11. Первинне опрацювання статистичних даних

11.1. Генеральна та вибіркова сукупності

Множина об'єктів, з яких добувається вибірка, називається **сукупністю**. Уся сукупність, що підлягає вивченню за ознакою, називається **генеральною сукупністю**. Генеральну сукупність можна вивчати шляхом суцільного вивчення всіх об'єктів або спостереження за частиною об'єктів.

Частина об'єктів, яку вибирають з генеральної сукупності, називається **вибіркою** або **вибірковою сукупністю**.

Загальна кількість об'єктів генеральної сукупності або вибіркової сукупності називається їхнім **об'ємом**. Об'єм генеральної сукупності позначають N, а об'єм вибіркової сукупності – n. Результати досліджень будь-якої ознаки генеральної сукупності будуть достовірніші, якщо вибірку створити випадково.

Приклад 11.1. Нехай з 2 000 виробів відібрано для дослідження 100. Тоді обсяг генеральної сукупності N = 2 000, а обсяг вибірки n = 100.

Вибірка називається ***випадковою***, якщо з генеральної сукупності елементи беруться навмання і кожний з них може потрапити в неї з однаковою ймовірністю. На практиці випадкову вибірку можна отримати так: усі елементи нумерують від 1 до N, після чого вибирається послідовність n випадкових чисел ($1 \le n \le N$). Вибірку також можна отримати з використанням датчика випадкових чисел.

Відбір об'єктів може бути повторним або безповторним.

Повторним називають відбір, коли відібраний об'єкт повертають у генеральну сукупність (до відбору наступного об'єкта). **Безповторним** називають відбір, коли відібраний об'єкт не повертають у генеральну сукупність. Відбір об'єктів відбувається випадковим чином.

Якщо випадкова вибірка досить повно характеризує генеральну сукупність, то вона є **репрезентативною (представницькою)**.

За вибіркою обчислюють її числові характеристики математичне сподівання $M(X)$ і дисперсію $D(X)$. Якщо одна з двох вибірок має меншу дисперсію, то вона повніше відображає генеральну сукупність.

11.2. Варіаційний ряд

Нехай маємо вибірку з генеральної сукупності $x_1, x_2, \dots, x_l$. Наприклад: 10, 5, 15, 7, 20. Якщо записати цю вибірку у вигляді зростаючої або спадної послідовностей, то отримаємо **дискретний варіаційний ряд**. У нашому прикладі це 5, 7, 10, 15, 20.

Деякі значення дискретної випадкової величини можуть повторюватися. Тоді варіаційний ряд записують у вигляді таблиці, де вказують **варіанти** – можливі значення (x_i) випадкової величини X і їх частоти (m_i). **Частотою** називають число появи окремих значень випадкової величини (варіант).

x_i	x_1	x_2	…	x_l
m_i	m_1	m_2	…	m_l

, $\sum_{i=1}^{l} m_i = n$.

Наприклад, вибірку 10, 5, 5, 7, 15, 15, 15, 20 можна подати дискретним варіаційним рядом:

x_i	5	7	10	15	20
m_i	2	1	1	3	1

, $n = 2+1+1+3+1 = 8$.

Замість частот (m_i) можна вказувати відносні частоти (w_i).

Відносною частотою w_i називають відношення частоти появи ознаки до загального обсягу вибірки:

$$w_i = \frac{m_i}{n}, \qquad \sum_{i=1}^{l} w_i = 1.$$

Тоді маємо:

x_i	x_1	x_2	...	x_l
w_i	w_1	w_2	…	w_l

Відносна частота показує, яку частину сукупності становлять члени з однаковими значеннями ознаки.

За великого обсягу вибірки $(n \geq 30)$ користуватися дискретним варіаційним рядом незручно. У цьому випадку, а також у вибірці, якщо дані отримані в результаті вимірювання неперервної випадкової величини, формують **інтервальний варіаційний ряд**. Для його побудови весь інтервал розподілу ознаки розділяють на k рівних частин довжиною h. Потім підраховують частоту m_i або відносну частоту w_i попадання у кожний інтервал. За значення випадкової величини вважають середину інтервалу, тобто неперервну величину приводять до дискретної.

$(x_{i-1}; x_i)$	$(x_0; x_1)$	$(x_1; x_2)$	...	$(x_{i-1}; x_i)$	...	$(x_{k-1}; x_k)$
m_i	m_1	m_2	...	m_i	...	m_k
x'_i	x'_1	x'_2	...	x'_i	...	x'_k

де $x'_i = \dfrac{x_{i-1} + x_i}{2}$, $h = x_i - x_{i-1}$.

Якщо варіаційний ряд задається у вигляді наведених таблиць, то його називають **статистичним розподілом вибірки,** який є переліком варіант випадкової величини X $(x_1, x_2, \dots, x_l)$ і відповідних їм частот m_i або відносних частот w_i $(i = \overline{1,l})$.

Для інтервальних рядів статистичний розподіл задається у вигляді послідовності інтервалів $(x_{i-1};\ x_i)$ і відповідних їм частот (за частоту беруть кількість появи ознаки в цьому інтервалі).

Числові характеристики вибірки. Нехай заданий варіаційний ряд:

x_i	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_k
m_i	m_1	m_2	$\dots$	m_i	$\dots$	m_k

Для характеристики варіаційного ряду використовують такі величини.

1. **Вибіркове середнє** $\overline{x}$: $\overline{x} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{k} x_i m_i}{n}$, $n = \sum\limits_{i=1}^{k} m_i$ характеризує середнє значення ознаки X.

2. **Вибіркова дисперсія** D:

$$D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_i - \overline{x}\right)^2 m_i \text{ або } D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i^2 m_i - (\overline{x})^2 = \overline{x^2} - (\overline{x})^2.$$

Дисперсія в статистиці характеризує міру розсіювання ознаки X.

3. **Вибіркове середнє квадратичне відхилення** σ: $\sigma = \sqrt{D}$ є водночас мірою варіації і показником однорідності статистичної сукупності.

Оскільки $M(\overline{x}_{виб}) = \overline{x}_{ген}$, то вибіркове середнє $\overline{x}$ є незміщеною оцінкою.

Вибіркова дисперсія D є зміщеною оцінкою.

Дійсно, якщо $X_1, X_2, \dots, X_n$ – однаково розподілені випадкові величини – такі, що $D(X_1) = D(X_2) = \dots = D(X_n) = \sigma^2$, то

$$D\left(\frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}\right) = \frac{\sigma^2}{n}, \quad \text{тому } \sigma(\overline{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

За даними вибірки потрібно оцінити генеральну дисперсію $D_{ген}$.

Досить легко виправити вибіркову дисперсію:

$$S^2 = \frac{n}{n-1} D_в = \frac{\sum_{i=1}^{l} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 m_i}{n-1},$$

де S^2 – виправлена вибіркова дисперсія.

4. **Коефіцієнт варіації:** $\nu = \frac{\sigma}{\bar{x}} \cdot 100\,\%$ є відносною мірою зміни ознаки. Його використовують для порівняння випадкових, різних за природою величин.

5. **Початкові моменти** s**-го порядку**: $\nu_s = \overline{X^s} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i^s m_i}{n}$.

6. **Центральні моменти** s**-го порядку**: $\mu_k = \overline{\left(X - \overline{X}\right)^s} = \frac{\sum_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}\right)^s m_i}{n}$.

7. **Асиметрія**: $A_S = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$ характеризує відхилення вліво або вправо випадкової величини від свого центрального положення.

8. **Ексцес**: $E_S = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$ характеризує відхилення вгору або вниз випадкової величини від свого центрального положення.

9. **Мода** M_o – це варіанта з максимальною частотою, тобто:

$$M_o = x_i \left(\underset{1 \le i \le k}{m_i} = \max \right).$$

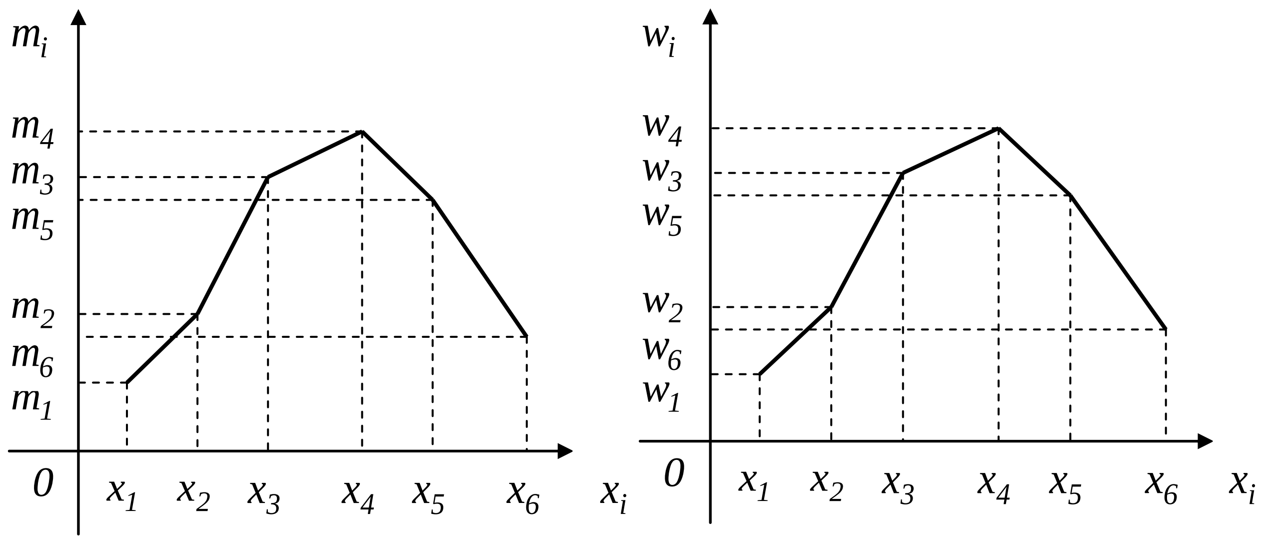
10. **Медіана** M_e – це варіанта, яка поділяє варіаційний ряд на дві рівні за кількістю елементів частини.

11.3. Емпірична функція розподілу та гістограма

Статистичний ряд розподілу випадкової величини X, отриманий за емпіричними даними, називають також **емпіричним законом розподілу**. Такий ряд можна зобразити графічно. Для цього на осі абсцис наносять варіанти x_i, а на осі ординат – частоти m_i (рис. 11.1а) (або відносні частоти – w_i рис. 11.1б), тобто маємо точки $M_i\left(x_i, m_i\right)$ $\left(N_i\left(x_i, w_i\right)\right)$.

З'єднавши точки M_i (або N_i), отримаємо ламану лінію, яку називають **полігоном розподілу** (див. рис. 11.1).

Емпіричною функцією розподілу вибірки називається функція $F^*(x)$, яка визначає відносну частоту події, що задовольняє умові $X < x$, $F^*(x) = \frac{m_x}{n}$, де m_x – сума частот варіант для значень аргументу, менших за x; n – обсяг вибірки.



а) полігон частот

б) полігон відносних частот

Рис. 11.1. **Полігони розподілу**

Таким чином, емпірична функція розподілу визначається шляхом послідовного додавання відносних частот усіх варіант, менших за x.

Графіком емпіричної функції розподілу є **кумулята**, або графік накопичених відносних частот. Цей графік є ступеневою фігурою, яка має точки розриву при значеннях абсцис, рівних за числовими значеннями, які приймає випадкова величина.

Для генеральної сукупності функцію розподілу позначимо $F(x)$. Відмінність між емпіричною і теоретичною функціями полягає в тому, що теоретична функція $F(x)$ визначає ймовірність події $X < x$, а емпірична $F^*(x)$ – відносну частоту цієї події.

Згідно з теоремою Бернуллі можна сказати, що при великих n, числа $F^*(x)$ і $F(x)$ мало відрізняються між собою в тому розумінні, що:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left|F(x) - F^*(x)\right| < \varepsilon\right) = 1 \quad (\varepsilon > 0).$$

Отже, емпіричну функцію розподілу вибірки можна використати для оцінювання теоретичної функції розподілу в генеральній сукупності.

Функція $F^*(x)$ має такі ж властивості, що і функція $F(x)$:

1) значення емпіричної функції належить відрізку $[0;1]$;

2) $F^*(x)$ – неспадна функція: $F^*(x_2) \geq F^*(x_1)$, якщо $x_2 > x_1$;

3) якщо x_1 – найменша варіанта, то $F^*(x) = 0$ при $x \leq x_1$; якщо x_k – найбільша варіанта, то $F^*(x) = 1$ при $x > x_k$.

Приклад 11.2. Нехай задана вибірка рядом розподілу:

x_i	1	6	11	16
m_i	20	10	40	30

Знайдемо та побудуємо емпіричну функцію розподілу $F^*(x)$.

Розв'язання. Знайдемо обсяг вибірки:

$$\sum_{i=1}^{4} m_i = 20 + 10 + 40 + 30 = 100.$$

Найменше значення величини X: $x_1 = 1$, тому $F^*(1) = 0$, якщо $X < 1$. Значення $X < 6$ спостерігалося 20 разів; отже, $F^*(x) = \frac{20}{100} = 0,2$, якщо $1 \leq x < 6$. Значення $X < 11$, тобто 1 і 6 спостерігалися $20 + 10 = 30$ разів; отже: $F^*(x) = \frac{30}{100} = 0,3$, якщо $6 \leq x < 11$. Значення $X < 16$, тобто 1, 6 і 11 спостерігалися $20 + 10 + 40 = 70$ разів; отже: $F^*(x) = \frac{70}{100} = 0,7$, якщо $11 \leq x < 16$. Найбільшим значенням величини X є $x_4 = 16$, отже: $F^*(x) = 1$, якщо $X \geq 16$.

Таким чином, можна записати емпіричну функцію розподілу вибірки у вигляді:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & \text{якщо } x < 1; \\ 0,2, & \text{якщо } 1 \leq x < 6; \\ 0,3, & \text{якщо } 6 \leq x < 11; \\ 0,7, & \text{якщо } 11 \leq x < 16; \\ 1, & \text{якщо } x \geq 16. \end{cases}$$

Графік цієї функції зображений на рис. 11.2.

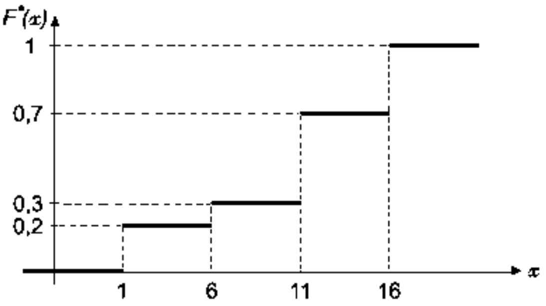


Рис. 11.2. **Емпірична функція розподілу**

У випадку інтервальних варіаційних рядів, отриманих для неперервної випадкової величини, графічним зображенням є **гістограма**.

Розрізняють гістограму частот і гістограму відносних частот.

Гістограмою частот називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, площа кожного з яких дорівнює частоті попадання випадкової величини у відповідний інтервал. Таким чином, основами прямокутників є інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють щільності частоти $\frac{m_i}{h}$. Для побудови гістограми на осі абсцис відкладають інтервали, а над ними проводять відрізки, паралельні осі абсцис на відстані $\frac{m_i}{h}$. Площа i-го прямокутника дорівнює $\frac{m_i}{h} \cdot h = m_i$ – частоті варіанти i-го інтервалу. Таким чином, площа гістограми дорівнює сумі всіх частот, тобто обсягу вибірки.

Гістограмою відносних частот називають східчасту фігуру, яка складається з прямокутників, основами яких є інтервали довжиною h, а висоти дорівнюють відношенню $\frac{w_i}{h}$ (щільність відносної частоти).

Для побудови гістограм відносних частот на осі абсцис відкладають інтервали; над ними проводять відрізки, які паралельні осі абсцис на відстані $\frac{w_i}{h}$ від неї. Площа гістограми відносних частот дорівнює сумі всіх відносних частот, тобто 1. Приклад гістограми відносних частот наведений на рис. 11.3.

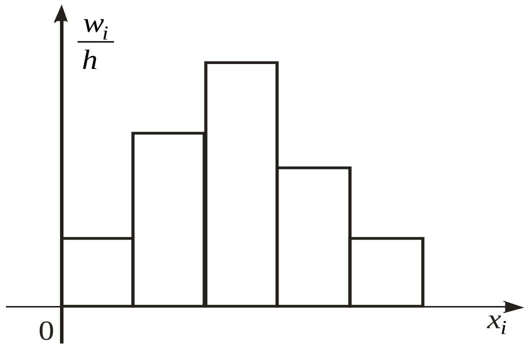


Рис. 11.3. **Гістограма відносних частот** $\frac{w_i}{h}$

Можна будувати також гістограми частот m_i і відносних частот w_i.

Приклад 11.3. Для інтервального варіаційного ряду з обсягом вибірки $n = 20$ необхідно побудувати гістограму частот та знайти відносні частоти.

$x_{i-1} \div x_i$	9 – 10	10 – 11	11 – 12	12 – 13	13 – 14	14 – 15	15 – 16
m_i	2	6	4	3	3	1	1
w_i	0,1	0,3	0,2	0,15	0,15	0,05	0,05

Розв'язання. Гістограма частот відображена на рис. 11.4.

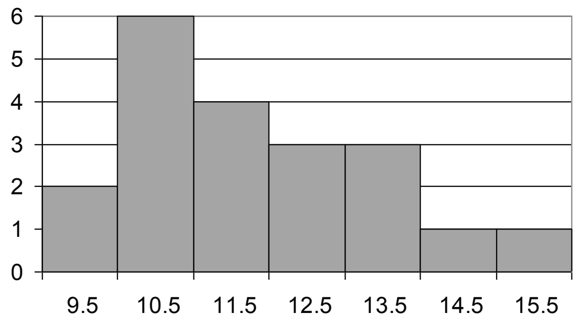


Рис. 11.4. **Гістограма частот** m_i

11.4. Зв'язок між характеристиками генеральної і вибіркової сукупностей

За наявності декількох вибірок у генеральній сукупності з груповими середніми $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, ... , $\bar{x}_k$ і обсягами n_1, n_2, ... , n_k введемо термін загального середнього $\bar{x}_{\text{ген.}}$ для всієї сукупності. Загальне середнє дорівнює середньому арифметичному групових середніх, зважених за обсягами груп: $\bar{x}_{\text{ген.}} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k} \bar{x}_j \cdot n_j}{N}$, де j – номер групи, N – обсяг усієї сукупності $\bar{x}_{\text{ген.}} = \dfrac{\sum\limits_{j=1}^{k} \bar{x}_j \cdot n_j}{N}$.

Для того щоб охарактеризувати розсіювання значень ознаки X генеральної сукупності навколо свого середнього значення, вводять генеральну дисперсію і генеральне середньоквадратичне відхилення за формулами:

$$S^2_{\text{ген.}} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{k} \left(x_i - \bar{x}_{\text{ген.}}\right)^2 \cdot N_i}{N}; \qquad \sigma_{\text{ген.}} = \sqrt{S^2_{\text{ген.}}},$$

де можливі значення ознаки $x_1, x_2, \ldots, x_k$ мають, відповідно, частоти $N_1, N_2, \ldots, N_k$ $\left(\sum\limits_{i=1}^{k} N_i = N\right)$.

Приклад 11.4. Знайдемо загальну середню заробітну плату за годину на всьому підприємстві, якщо величина годинної заробітної плати робітників у цехах задана таблицями:

1-й цех

x_i	m_i
1	4
2	3
4	1
5	2

2-й цех

x_i	m_i
1	6
2	2
3	8
4	4

3-й цех

x_i	m_i
1	5
2	8
3	3
5	4

де x_i – заробітна плата (грн);

m_i – кількість робітників: $n_1 = 10$, $n_2 = 20$, $n_3 = 20$, $N = 50$.

Розв'язання. Спочатку знайдемо групові середні за цехами:

$$\bar{x}_1 = \frac{1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 + 4 \cdot 1 + 5 \cdot 2}{10} = 2{,}4;$$

$$\bar{x}_2 = \frac{1 \cdot 6 + 2 \cdot 2 + 3 \cdot 8 + 4 \cdot 4}{20} = 2{,}5; \quad \bar{x}_3 = \frac{1 \cdot 5 + 2 \cdot 8 + 3 \cdot 3 + 5 \cdot 4}{20} = 2{,}5.$$

Таким чином, середня заробітна плата за годину на підприємстві дорівнює:

$$\bar{x}_{\text{ген.}} = \frac{2{,}4 \cdot 10 + 2{,}5 \cdot 20 + 2{,}5 \cdot 20}{50} = 2{,}48.$$

11.5. Точкові оцінки параметрів сукупності

Оцінка називається ***точковою***, якщо вона задається одним числом. До неї належать характеристики вибіркової сукупності, які є точковими оцінками відповідних характеристик генеральної сукупності.

Нехай розподіл ознаки X генеральної сукупності заданий таблицею:

x_i	x_1	x_2	...	x_k
M_i	M_1	M_2	...	M_k

де x_i – значення ознаки X;

M_i – частота цього значення $(i = 1, 2, ..., k)$.

Обсяг генеральної сукупності дорівнює N $(N = M_1 + M_2 + ... + M_k)$.

Середнє арифметичне (аналог математичного сподівання) розподілу ознаки X у генеральній сукупності називається ***генеральним середнім***. Якщо застосовується вибірковий метод, то ставиться задача оцінити його за даними вибірки.

Нехай розподіл ознаки X вибіркової сукупності задано таблицею:

x_i	x_1	x_2	...	x_l
m_i	m_1	m_2	...	m_l

де m_i – частота значення x_i $(i = 1, 2, ..., l)$;

обсяг вибірки, дорівнений n $(n = m_1 + m_2 + ... + m_l)$.

Середню арифметичну розподілу вибірки знайдемо за формулою:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{l} x_i m_i}{n}.$$

Вибіркове середнє $\bar{x}$ є незміщеною оцінкою середнього генерального $\bar{x}_{\text{ген.}}$, тобто $M(\bar{x}_{\text{виб}}) = \bar{x}_{\text{ген.}}$.

Вибіркова дисперсія є зміщеною оцінкою генеральної дисперсії $D_{\text{ген.}}$, тобто математичне сподівання вибіркової дисперсії не дорівнює генеральній дисперсії.

Щоб визначити оцінку незміщеної, помножимо на $\frac{n}{n-1}$ вибіркову дисперсію. Величину $S_x^2 = \frac{n}{n-1} D$ називають **виправленою статистичною дисперсією вибірки**. Вона є незміщеною оцінкою генеральної дисперсії:

$$M\left(S_x^2\right) = D_{\text{ген.}}.$$

Приклад 11.5. Вибіркова сукупність задана таблицею розподілу:

x_i	3	3,5	4	4,5	5
m_i	5	4	9	4	8

Знайдемо виправлену вибіркову дисперсію.

Розв'язання. За визначенням виправлена вибіркова дисперсія:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} D_{\text{виб}}.$$

Обсяг вибірки: $n = 5 + 4 + 9 + 4 + 8 = 30$.

Вибіркова дисперсія: $D = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{5} \left(x_i - \bar{x}\right)^2 m_i$.

Вибіркове середнє: $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i m_i}{n}$.

Знаходимо вибіркове середнє:

$$\bar{x} = \frac{3 \cdot 5 + 3{,}5 \cdot 4 + 4 \cdot 9 + 4{,}5 \cdot 4 + 5 \cdot 8}{30} = 4{,}1$$

і вибіркову дисперсію:

$$D = \frac{(3-4{,}1)^2 \cdot 5 + (3{,}5-4{,}1)^2 \cdot 4 + (4-4{,}1)^2 \cdot 9 + (4{,}5-4{,}1)^2 \cdot 4 + (5-4{,}1)^2 \cdot 8}{30},$$

$$D = 0{,}49.$$

Виправлена вибіркова дисперсія: $S_x^2 = \frac{30}{29} \cdot 0{,}49 \approx 0{,}505$.

11.6. Інтервальні оцінки. Надійний інтервал

Точковою називають оцінку, яка визначається одним числом. За малого обсягу вибірки точкова оцінка може значно відрізнятися від оцінюваного параметра, тобто приводити до грубих помилок. Тому слід використовувати **інтервальну** оцінку (надійний інтервал).

Надійним інтервалом називається інтервал, який покриває всі значення випадкової величини з заданою надійністю або з заданим рівнем значущості.

Визначимо надійний інтервал для математичного сподівання. Оскільки за теоремою Ляпунова за достатньо великої кількості випробувань усі закони зводяться до нормального, то у побудові надійного інтервалу можна допустити, що вибірка належить нормально розподіленої генеральної сукупності. Використовуючи теорему Лапласа для відхилень випадкової величини від свого математичного сподівання, отримаємо:

$$P(|X - a| < \varepsilon) = 2\Phi\left(\frac{\varepsilon}{\sigma}\right).$$

Нехай $\varepsilon = \sigma t$, тоді $P(|X - a| < \sigma t) = 2\Phi(t)$.

Якщо обрати кілька вибірок з генеральної сукупності й обчислити $\bar{x}_1$, $\bar{x}_2$, …, $\bar{x}_k$, то $\bar{x}$ можна розглядати як випадкову величину, $a = \bar{x}_{\text{ген.}}$, $\sigma = \frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}$, $P\left(|\bar{x} - a| < \frac{\sigma_{\text{в}} t}{\sqrt{n}}\right) = 2\Phi(t)$, де n – обсяг вибіркової сукупності.

Тобто з надійністю $P=2\Phi(t)$ можна побудувати надійний інтервал:

$$\bar{x}-\frac{\sigma_{\text{в}}t}{\sqrt{n}}\le a\le \bar{x}+\frac{\sigma_{\text{в}}t}{\sqrt{n}}.$$

Для $n>30$ параметр t знаходять у таблиці функції $\Phi(t)$ додатка Б, для $n\le 30$ параметр $t=t_{\alpha}(\alpha,n)$ з додатка В (для цього замість $\sigma_{\text{в}}$ треба поставити виправлене середньоквадратичне відхилення S_x^2).

З надійністю $P=2\Phi(t)$ і точністю ε можна знайти необхідний обсяг вибірки. З формули $\varepsilon=\frac{\sigma_{\text{в}}t}{\sqrt{n}}$ отримаємо: $n=\frac{\sigma^2{}_{\text{в}}t^2}{\varepsilon^2}$.

Якщо генеральна сукупність обмежена, тоді треба зробити поправку на дисперсію і прийняти:

$$\sigma=\frac{\sigma_{\text{в}}}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}},\quad \varepsilon=\frac{\sigma_{\text{в}}t}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}},$$

де N – обсяг генеральної сукупності.

Відповідним чином знайдемо n.

Остаточно: $n=\dfrac{1}{\dfrac{\varepsilon^2}{\sigma^2t^2}+\dfrac{1}{N}}=\dfrac{\sigma^2t^2N}{\varepsilon^2N+\sigma^2t^2}=\dfrac{\sigma^2t^2}{\varepsilon^2+\dfrac{\sigma^2t^2}{N}}$.

Приклад 11.6. Випадкова величина має $\bar{x}=12{,}57$, $\sigma_{\text{в}}=5$, $n=100$. Побудуємо надійний інтервал з надійністю 95 %.

Розв'язання. $P=2\Phi(t)=0{,}95$, тоді $\Phi(t)=0{,}475$.

За таблицею значень функції $\Phi(t)$ отримуємо $t=1{,}96$. Тоді:

$$12{,}57-\frac{5\cdot 1{,}96}{\sqrt{100}}\le a\le 12{,}57+\frac{5\cdot 1{,}96}{\sqrt{100}},$$

$$11{,}59\le a\le 13{,}56.$$

Таким чином, з надійністю 95 % будь-яке число із цього інтервалу можна розглядати як генеральне математичне сподівання.

Приклад 11.7. Нехай $\overline{x}_{\text{в}} = 2$, $\varepsilon = 0{,}2$, $\sigma_{\text{в}} = 1$. Необхідно визначити, якого обсягу слід обрати вибірку, щоб побудувати надійний інтервал довжиною не більше 2ε, з надійністю 99 %.

Розв'язання. $P = 2\Phi(t) = 0{,}99$, тоді $\Phi(t) = 0{,}495$. За таблицею значень функції $\Phi(t)$ отримуємо $t = 2{,}58$.

За формулою $\varepsilon = \dfrac{\sigma_{\text{в}} t}{\sqrt{n}}$ отримуємо $n = \dfrac{\sigma_{\text{в}}^2 t^2}{\varepsilon^2}$, звідки

$$n = \frac{1 \cdot (2{,}58)^2}{(0{,}2)^2} = 166{,}41, \text{ отже } n = 167.$$

Знайдемо **надійний інтервал для оцінки середньоквадратичного відхилення** випадкової величини. Якщо обрати кілька вибірок з генеральної сукупності й обчислити $\sigma_{\text{в}}, \sigma_{2\text{в}}, \ldots, \sigma_{k\text{в}}$, то $\sigma_{\text{в}}$ можна розглядати як випадкову величину. Оберемо в якості випадкової величини середньоквадратичне відхилення S (s^2 – виправлена вибіркова дисперсія), тоді:

$$P\left(\left| s - \sigma_{\text{ген.}} \right| < \varepsilon\right) = \gamma,$$

тобто маємо надійний інтервал з надійністю $P = \gamma$:

$$s - \varepsilon \le \sigma_{\text{ген.}} \le s + \varepsilon,$$

$$s\left(1 - \frac{\varepsilon}{s}\right) \le \sigma_{\text{ген.}} \le s\left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right),$$

$$s(1 - q) \le \sigma_{\text{ген.}} \le s(1 + q), \text{ де } q = \frac{\varepsilon}{s}.$$

Значення величини $q = q(\gamma, n)$, яка залежить від заданої надійності й обсягу вибірки, знаходять у додатку Д.

Приклад 11.8. Нехай $n = 50$, $s = 2{,}82$. З надійністю 95 % побудуємо надійний інтервал для $\sigma_{\text{ген.}}$.

Розв'язання. За додатком Д знаходимо $q(0{,}95; 50) = 0{,}21$. Тоді:

$$2{,}82(1 - 0{,}21) \le \sigma_{\text{ген.}} \le 2{,}82(1 + 0{,}21),$$
$$2{,}228 \le \sigma_{\text{ген.}} \le 3{,}412.$$

Таким чином, з надійністю 95 % будь-яке число з цього інтервалу можна обрати як генеральне середньоквадратичне відхилення.

11.7. Статистичні оцінки та їх властивості

Допустимо, що експериментальним шляхом знайдена характеристика θ^*, яка слугує оцінкою невідомого параметра θ закону розподілу випадкової величини X.

Наближене значення параметра генеральної сукупності, обчислене за вибіркою, називається ***оцінкою параметра***.

Як правило, основними оцінками параметрів генеральної сукупності є середнє вибіркове $\bar{x}$, яке є аналогом математичного сподівання $M(X)$, і вибіркова дисперсія σ^2 – аналог дисперсії $D(X)$.

Нехай маємо параметр θ, а θ^* – його вибіркова оцінка.

Для того щоб оцінка θ^* досить повно характеризувала параметр генеральної сукупності, необхідно, щоб вона мала такі властивості: незміщеність, спроможність, ефективність.

Оцінка θ^* параметра θ називається ***незміщеною***, якщо її математичне сподівання дорівнює оцінюваному параметру, тобто:

$$M\left(\theta^*\right)=\theta \text{ (наприклад } \bar{x}_{\text{ген.}} \approx M\left(\bar{x}\right)\text{).}$$

Оцінка називається ***спроможною***, якщо вона при $n \to \infty$ сходиться за ймовірністю до оцінюваного параметра, тобто:

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\theta^* \to \theta\right)=1.$$

Оцінка називається ***ефективною***, якщо за заданого об'єму спостережень, вона має найменшу дисперсію.

11.8. Загальне поняття про перевірку гіпотез. Основна і альтернативна гіпотези

У використанні методів математичної статистики можна допустити певний відсоток помилкових розв'язків, оскільки вони ґрунтуються на випадкових величинах і приймаються в умовах невизначеності. Частку помилкових розв'язків, якою можна знехтувати, називаються **рівнем значущості**.

Найчастіше вона становить 5 % або 1 %, тобто $\alpha = 0{,}05$ або $\alpha = 0{,}01$. Інакше кажучи, треба вибрати таку ймовірність, яку дослідник визнає достатньою для встановлення меж випадкового коливання явища. Таку ймовірність називають надійністю та беруть, зазвичай, 0,95 або 0,99.

Для порівняння декількох статистичних характеристик, обчислених за результатами вибірок, виникає потреба встановити, чи істотна між ними різниця, чи ні. **Істотною** називають різницю, яка за величиною перевищує ту, яку можна пояснити випадковими коливаннями.

Нехай X – неперервна або дискретна випадкова величина. Твердження про відсутність істотної різниці між її емпіричною й теоретичною характеристиками називають **нульовою гіпотезою** (H_0). Уводять **альтернативну гіпотезу** (H_1) – протилежну нульовій гіпотезі.

Правило, за яким перевіряють нульову гіпотезу (прийняти її або відхилити), називають **критерієм згоди**. Якщо рівень значущості критерію згоди є дуже низьким $(\alpha < 0{,}05)$, то це свідчить про істотну відмінність, і нульову гіпотезу відхиляють. Множина значень X, для яких нульову гіпотезу відхиляють, називають **критичною областю**.

11.9. Помилки першого та другого роду. Потужність критерію

Правило, за яким ухвалюється рішення щодо прийняття або відхилення нульової гіпотези H_0, називається **статистичним критерієм**. Перевірку статистичних критеріїв виконують на основі результатів вибірки. Тобто статистичний критерій установлює, за якими результатами випадкової вибірки висунута гіпотеза приймається, за якими – відхиляється.

У ході перевірки гіпотез можливі помилки двох родів. Помилка **першого роду** полягає в тому, що нульова гіпотеза H_0 відхиляється, тоді як вона в дійсності правильна, причому рівень значущості $\alpha = 0{,}01$ або надійність 99 %. Помилка **другого роду** полягає в тому, що нульова гіпотеза H_0 приймається, а в дійсності вона неправильна; водночас рівень значущості $\alpha = 0{,}05$ або надійність 95 %.

Для визначення кращого критерію перевірки гіпотези H_0 необхідно серед усіх критеріїв, які мають однакову ймовірність помилки першого роду, обрати той, для якого ймовірність помилки другого роду найменша. Помилку першого роду, яку можна допустити, задають попередньо.

Значення параметра, за яких гіпотеза H_0 відхиляється, утворюють критичну область.

Задача перевірки гіпотези зводиться до знаходження критичної області за даного рівня значущості.

Ймовірність недопущення помилки другого роду називають **потужністю критерію**. Якщо зі збільшенням обсягу вибірки ця ймовірність наближається до одиниці, то такий статистичний критерій називають **критерієм згоди**.

Вибір конкретного методу перевірки гіпотези H_0 залежить від характеру досліджуваної гіпотези, властивостей вихідної інформації та інших умов.

11.10. Критерій Стьюдента щодо перевірки гіпотези про істотність відмінності двох вибіркових середніх. Критерій згоди щодо частоти

Нехай маємо дві вибірки з генеральної сукупності.

Потрібно із заданим рівнем значущості α перевірити нульову гіпотезу H_0, що полягає в тому, що відмінність середніх незначуща, тобто гіпотеза $H_0 : M(\overline{X_1}) = M(\overline{X_2})$ – вибірки належать однієї генеральній сукупності.

Позначимо випадкову величину по першій вибірці X_1, обсяг вибірки – n_1; по другій вибірці – X_2, її обсяг – n_2. Якщо ці вибірки з однієї генеральної сукупності, то їх середні $\overline{X}_1$ і $\overline{X}_2$ повинні бути рівними, тобто:

$$M\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) = 0 \text{ і } D\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) = D\left(\overline{X}_1\right) + D\left(\overline{X}_2\right).$$

Дисперсія середнього арифметичного n однаково розподілених випадкових величин у n раз менше їх загальної дисперсії, тобто:

$$D\left(\overline{X}_1\right) = \frac{S_1^2}{n_1}, \quad D\left(\overline{X}_2\right) = \frac{S_2^2}{n_2},$$

де S_1^2, S_2^2 – виправлені вибіркові дисперсії випадкових величин X_1 і X_2, відповідно.

За теоремою Лапласа маємо:

$$P\left(\left|\overline{X_1} - \overline{X_2} - 0\right| \le \sigma t\right) = 2\Phi(t), \quad \sigma^2 = D\left(\overline{X}_1 - \overline{X}_2\right) = \frac{S_1^2}{n_1} + \frac{S_2^2}{n_2}.$$

$$P\left(\left|\overline{X_1}-\overline{X_2}\right|<t\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}\right)=2\Phi(t), \quad t=\frac{\left|\overline{X_1}-\overline{X_2}\right|}{\sqrt{\frac{S_1^2}{n_1}+\frac{S_2^2}{n_2}}}.$$

Якщо $t<t_{кр\alpha}$, то з рівнем значущості α гіпотеза H_0 ухвалюється; якщо $t>t_{кр\alpha}$, то гіпотеза H_0 відхиляється з надійністю $P=1-\alpha$.

На практиці прийняті такі значення $t_{кр\alpha}$:

якщо $t<1{,}96$, то з рівнем значущості $0{,}05$ нульова гіпотеза H_0 ухвалюється, тобто вибірки належать однієї генеральній сукупності;

якщо $t>2{,}58$, то з надійністю 99 % гіпотеза H_0 відхиляється, тобто вибірки належать різним генеральним сукупностям;

область $1{,}96<t<2{,}58$ вважається областю невизначеності.

Якщо n_1 і n_2 малі, то $t_{кр\alpha}$ знаходять за таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (див. додаток В).

Приклад 11.9. Зроблено дві серії пострілів по 15 у кожній. X – довжина відстані від центру мішені.

x_{1i}	–3	–2	–1	0	1	2	3
m_{1i}	1	3	2	2	2	3	2

x_{2i}	–2	–1	0	1	2
m_{2i}	2	5	3	4	1

Перевіримо, чи значуща відмінність середніх.

Розв'язання. $\overline{x_1}=0{,}2$, $\overline{x_2}=-0{,}2$, $D(X_1)=3{,}63$, $D(X_2)=1{,}36$;

$$S_1^2=3{,}89,\ S_2^2=1{,}46.$$

$$t=\frac{|0{,}2+0{,}2|}{\sqrt{\frac{3{,}89}{15}+\frac{1{,}46}{15}}}=0{,}67<1{,}96,$$

тобто гіпотеза H_0 не буде відхилена.

Звідси випливає, що відмінність середніх незначуща.

Критерій згоди щодо частоти. Нехай p – імовірність події n – обсяг вибірки з генеральної сукупності, m – частота події в цій вибірці. Гіпотеза H_0 – частота m близька до теоретичної.

За теоремою Лапласа будуємо критичну область частот:

$$M(X) = np,$$

$$P(|m - np| < \sigma t) = 2\Phi(t), \text{ тобто з надійністю } P = 2\Phi(t),$$

$$np - \sigma t < m < np + \sigma t.$$

Якщо емпірична частота не належить цьому інтервалу, то з рівнем значущості $\alpha = 1 - p$ гіпотеза H_0 відхиляється.

Приклад 11.10. Обсяг вибірки $n = 280$, подія з'явилася $m = 151$ разів. Ймовірність події $p = 1/2$. Чи можна вважати вибіркову частоту достатньо близькою до теоретичної частоти (гіпотеза H_0)?

Розв'язання. Теоретична частота $np = 280 \cdot 1/2 = 140$.

$$\sigma(X) = \sqrt{npq} = \sqrt{280 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}} = \sqrt{70} \approx 8{,}37.$$

Вибираємо надійність 95 %, тобто $P = 0{,}95$, $2\Phi(t) = 0{,}95$.

За додатком Б $t = 1{,}96$, тоді

$$140 - 8{,}37 \cdot 1{,}96 \le m \le 140 + 8{,}37 \cdot 1{,}96,$$

$$123{,}6 \le m \le 156{,}4.$$

Частота $m = 151$ належить отриманому інтервалу.

Це означає, що гіпотеза H_0 ухвалюється – вибіркова частота з надійністю 95 % близька до теоретичної.

11.11. Критерій згоди щодо закону розподілу

Часто закон розподілу випадкової величини в генеральній сукупності є невідомим, але певні припущення щодо його характеру можна зробити виходячи з гістограми у вибірковій сукупності. У цьому випадку перевіряють нульову гіпотезу H_0: генеральна сукупність розподілена за передбачуваним законом.

Критерієм згоди називають критерій перевірки гіпотези щодо передбачуваного невідомого закону розподілу.

Розглянемо деякі критерії згоди.

Критерій згоди Пірсона (χ^2-квадрат). Згідно з цим критерієм спостережуваний емпіричний розподіл вибіркової сукупності, який виражено емпіричними частотами m_i згрупованого ряду, порівнюється з припустимим теоретичним розподілом генеральної сукупності, який відображено теоретичними частотами $\tilde{m}_i$.

Якщо число спостережень дуже велике $(n \to \infty)$, то закон розподілу випадкової величини (незалежно від того, якому закону розподілу підпорядкована генеральна сукупність) наближається до розподілу χ^2 з k ступенями свободи, а сам критерій називають критерієм згоди χ^2 "хі-квадрат", або критерієм Пірсона.

Для перевірки нульової гіпотези H_0 потрібно обчислити величину:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{s} \frac{(m_i - \tilde{m}_i)^2}{\tilde{m}_i},$$

де s – кількість інтервалів згрупованого ряду розподілу;

m_i – емпіричні частоти;

$\tilde{m}_i$ – теоретичні частоти.

Спостережень m_i у кожному інтервалі повинне бути не менше 5 % від загального числа спостережень: $m_i \geq 0{,}05n$. Якщо їх буде менше, то необхідно укрупнити інтервали.

Знайдена величина χ^2 порівнюється з критичними значеннями $\chi^2_\alpha(k)$ додатка Е. Число ступенів свободи k визначається за формулою:

$$k = s - r - 1,$$

де s – кількість укрупнених інтервалів;

r – число параметрів теоретичного закону розподілу (для нормального закону $r = 2$, для показникового – $r = 1$, для рівномірного – $r = 2$).

Величина α визначає рівень значущості. Для критерію Пірсона будемо розглядати два рівні значущості: $\alpha = 0{,}05$ і $\alpha = 0{,}01$.

Якщо $\chi^2 < \chi^2_{0,05}(k)$, то нульова гіпотеза H_0 ухвалюється. Тобто передбачуваний закон розподілу відповідає емпіричним даним. Проте ми помиляємося в п'ятьох випадках зі ста, ухвалюючи, ймовірно, помилкову гіпотезу (помилка другого роду).

Якщо $\chi^2 > \chi^2_{0,01}(k)$, то нульову гіпотезу слід відкинути, тобто передбачуваний закон розподілу не відповідає емпіричним даним. Тут ми помиляємося в одному випадку зі ста, відкидаючи, можливо, правильну гіпотезу (помилка першого роду).

Якщо $\chi^2_{0,05}(k) < \chi^2 < \chi^2_{0,01}(k)$, то це область невизначеності, тоді можна використовувати інші критерії.

Обчислення теоретичних частот $\tilde{m}_i$. Якщо маємо вибірку випадкової величини X, то за її значеннями знаходять $x_{\max}$ і $x_{\min}$. Тоді розмах варіювання $R = x_{\max} - x_{\min}$, його можна округлити. Знайдемо крок варіювання $h = \dfrac{R}{S}$, де S – число інтервалів. Обчислення $\tilde{m}_i$ розміщено в табл. 11.1.

Таблиця 11.1

Обчислення $\tilde{m}_i$

Інтервали	x_i	m_i	$h_i = \Delta x_i$	$t_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$	$\varphi(t_i)$	$f_i = \dfrac{\varphi(t_i)}{\sigma}$	$\tilde{p}_i = hf_i$	$\tilde{m}_i = n\tilde{p}_i$
$x_0^* - x_1^*$	x_1	m_1	h_1	t_1	$\varphi(t_1)$	f_1	$\tilde{p}_1$	$\tilde{m}_1$
$x_1^* - x_2^*$	x_2	m_2	h_2	t_2	$\varphi(t_2)$	f_2	$\tilde{p}_2$	$\tilde{m}_2$
...	...	...	...	...	...	...	...	...
$x_{S-1}^* - x_s^*$	x_s	m_s	h_s	t_s	$\varphi(t_s)$	f_s	$\tilde{p}_s$	$\tilde{m}_s$

У табл. 11.1 $x_i = \dfrac{x_{i-1}^* + x_i^*}{2}$ – середина інтервалу; m_i – емпіричні частоти; $t_i = \dfrac{x_i - \bar{x}}{\sigma}$ – стандартизована величина; $\varphi(t_i)$ – диференціальна функція Лапласа; $\tilde{p}_i = h_i f_i$ – теоретичні ймовірності; $\tilde{m}_i$ – теоретичні частоти.

Критерій згоди Пірсона за Романовським. За достатньо великої кількості випробувань ($n > 30$) величина χ^2 має близький до нормального закон розподілу.

Її числові характеристики: $M\left(\chi^2\right) = k$, $D\left(\chi^2\right) = 2k$, де k – число ступенів свободи.

Обчислимо величину:

$$t = \left|\frac{\chi^2 - k}{\sqrt{2k}}\right|.$$

Якщо $t \le 1{,}96$, то з надійністю 95 % гіпотеза H_0 ухвалюється, тобто закон розподілу відповідає теоретичному;

якщо $t \ge 2{,}58$, то з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$ гіпотеза H_0 відхиляється;

якщо $t \in (1{,}96; 2{,}58)$ – це область невизначеності.

Малі вибірки. Критерій Стьюдента. Розглянуті вибірки вважалися великими. Якщо потрібно оцінити генеральну сукупність за результатами малого числа спостережень (при $n < 30$), то формули для великих вибірок, які засновані на нормальному законі розподілу ймовірностей, дають значні неточності.

Результати малої вибірки оцінюють виправленою вибірковою дисперсією:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1} D(X) = \frac{\sum\limits_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 m_i}{n-1}.$$

Тоді надійний інтервал для математичного сподівання визначається за формулою:

$$\bar{x} - \frac{S_x t_\gamma}{\sqrt{n-2}} < a < \bar{x} + \frac{S_x t_\gamma}{\sqrt{n-2}} \quad \text{і} \quad P\left(\left|\frac{\bar{x} - a}{S_x / \sqrt{n-2}}\right| < t_\gamma\right) = \gamma,$$

де t_γ – t-критерій Стьюдента, який залежить від рівня значущості та числа ступенів свободи $k = n - 1$;

γ – надійність.

Значення t_γ наведені в додатку В.

Якщо $t_{\gamma} < t_{\text{крит.}}(\alpha, k)$, то з надійністю γ гіпотеза H_0 ухвалюється, тобто вибіркове середнє незначно відрізняється від генерального середнього;

якщо $t_{\gamma} > t_{\text{крит.}}(\alpha, k)$, то з рівнем значущості $1-\gamma$ гіпотеза H_0 відхиляється.

Приклад 11.11. Проведено 18 випробувань, де $\bar{x} = 20{,}2$; $S_x = 0{,}8$; $\gamma = 0{,}95$. Побудуємо надійний інтервал для математичного сподівання.

Розв'язання. $k = 18 - 1$, $\alpha = 1 - \gamma = 0{,}05$. За таблицею критерію Стьюдента (додаток В) $t_{\text{крит.}}(17; 0{,}05) = 2{,}13$. Тоді:

$$20{,}2 - \frac{2{,}13 \cdot 0{,}8}{\sqrt{16}} < a < 20{,}2 + \frac{2{,}13 \cdot 0{,}8}{\sqrt{16}},$$

$$19{,}774 < a < 20{,}626.$$

Для $n \to \infty$ розподіл Стьюдента збігається з нормальним.

11.12. Критерій Фішера про рівність двох дисперсій для нормально розподіленої випадкової величини

Нехай маємо дві вибірки з нормальної генеральної сукупності, вибіркові незміщені дисперсії S_1^2, S_2^2.

Обчислимо статистику критерію Фішера – Снедекора:

$$F = \frac{S_{max}^2}{S_{min}^2}.$$

Гіпотеза H_0 полягає в тому, що відмінність дисперсій незначуща.

З таблиці критерію F (додаток Г) знайдемо $F_{\text{крит.}}(\alpha, k_1, k_2)$, де k_1, k_2 – число ступенів свободи більшої і меншої дисперсій, α – рівень значущості.

Якщо $F > F_{\text{крит.}}(\alpha, k_1, k_2)$, то з рівнем значущості α гіпотеза H_0 відхиляється;

якщо $F < F_{\text{крит.}}(\alpha, k_1, k_2)$, то з надійністю $1-\alpha$ гіпотеза H_0 ухвалюється.

Приклад 11.12. Маємо дві вибірки випадкових величин X і Y. Для випадкової величини X маємо: $n_1 = 10$, $S_x = 1{,}23$.

Для випадкової величини Y маємо: $n_2 = 18$, $S_y = 0{,}41$.

Тоді $F = \frac{S_{\max}^2}{S_{\min}^2} = \frac{1{,}23}{0{,}41} = 3$, $k_1 = 10 - 1 = 9$, $k_2 = 18 - 1 = 17$, $\alpha = 0{,}05$, $F_{\text{крит.}}(0{,}05;9;17) = 2{,}5$.

$F > F_{\text{крит.}}$, тобто відмінність дисперсій значуща.

Крім розв'язання основної проблеми, дисперсійний аналіз також дозволяє перевіряти гіпотезу про однорідність декількох вибіркових сукупностей.

12. Елементи теорії кореляції та регресії

12.1. Функціональна та статистична залежності

Вивчення залежностей між змінними почнемо з двох змінних, які позначимо X і Y. Існують два основні види залежностей: функціональна та стохастична (статистична).

Функціональна залежність між двома змінними x і y буде в тому випадку, коли кожному значенню однієї змінної x відповідає певне значення другої змінної – y і має місце рівняння $y = f(x)$.

Для випадкових величин X і Y не завжди можна встановити функціональну залежність. Між такими величинами існує залежність, за якої зі зміною однієї величини змінюється розподіл іншої величини. Така залежність називається **стохастичною (статистичною)**. У статистичній залежності розрізняють дві компоненти:

1) **стохастична** – зв'язана безпосередньо з залежністю між функціональною ознакою і фактором;

2) **випадкова** – пов'язана із впливом випадкових факторів на залежність між функціональною ознакою і фактором. Відсутність другої компоненти приводить до функціональної залежності.

У статистичних зв'язках важливі причинно-наслідкові зв'язки, тобто яку зі змінних слід вважати функціональною ознакою, а яку – незалежним фактором.

Для реальних статистичних даних не можна отримати просту геометричну лінію. Завжди будуть відхилення залежної змінної, які обумовлені помилками вимірювань, впливом неврахованих факторів. Кореляційна залежність є частковим випадком статистичних зв'язків. Залежно від причинно-наслідкових зв'язків лінії, які зв'язують змінні x і y, будуть різними.

Кореляційною залежністю називається така залежність між двома випадковими величинами, за якої зі зміною однієї з них змінюється середнє значення іншої.

Введемо поняття "умовне середнє" $\overline{y}_{x_i}$. Нехай маємо випадкову величину Y, пов'язану з величиною X, і кожному значенню X відповідає кілька значень Y.

Наприклад, для $x=2$ величина Y приймає значення: $y_1=2$, $y_2=8$, $y_3=10$. Знайдемо середнє арифметичне значення Y, яке відповідає $x=2$:

$$\overline{y}_{x=2}=\frac{6+8+10}{3}=8.$$

Умовним середнім $\overline{y}_{x_i}$ називають середнє арифметичне значень Y, які відповідають $x=x_i$.

Кореляційною залежністю Y **від** X називають функціональну залежність умовного середнього $\overline{y}_x$ від x.

За кореляційною залежністю Y від X будують рівняння умовного середнього $\overline{y}_x$ від x:

$$\overline{y}_x=f(x).$$

За результатами одного випробування можуть бути отримані залежності: $\overline{y}_x$ і $\overline{x}_y$. Тобто необхідно вказати, яку зі змінних вважати фактором, а яку функціональною ознакою (де причина, а де наслідок).

Рівняння $\overline{y}_x=f(x)$ називають **рівнянням регресії** Y **на** X, функцію $f(x)$ – **регресією** Y **на** X, а графік – **лінією регресії** Y **на** X. Можна ввести іншу залежність: $\overline{x}_y=\varphi(y)$ – рівняння регресії X на Y.

Поняття регресії і кореляції безпосередньо зв'язані між собою. Тоді як у кореляційному аналізі оцінюється сила стохастичного зв'язку, у регресійному аналізі досліджується його форма. Обидва види аналізу призначені для з'ясування причинних співвідношень між явищами та для визначення наявності або відсутності зв'язку.

Розрізняють такі **види кореляції і регресії**:

1) за характером розрізняють додатну та від'ємну кореляцію і регресію. **Додатна** – коли з ростом (зменшенням) аргументу x росте (зменшується) функція y. Наприклад: між продуктивністю праці та заробітною платою; між виконанням виробничого плану та витратами робочого часу; між технічним рівнем виробництва та продуктивністю праці. **Від'ємна** – коли з ростом (зменшенням) однієї змінної значення другої зменшуються (ростуть). Наприклад: між продуктивністю праці та вартістю виробу; між обсягом продукції і витратами на одиницю виробу;

2) щодо числа змінних: **парна** і **множинна** кореляція і регресія. Наприклад, прибуток підприємства (y) від продуктивності праці (x): $\overline{y}=f(x)$ – парна регресія; продуктивність праці (y) від рівня механізації виробництва (x_1), фонду робочого часу (x_2), матеріалоємності (x_3), кваліфікації робітників (x_4): $\overline{y}=f(x_1,x_2,x_3,x_4)$ – множинна регресія;

3) щодо форми зв'язку: **лінійна** та **нелінійна** кореляція і регресія. Наприклад, залежність суми витрат виробництва (y) від кількості випущеної продукції (x): $y=ax+b$ – лінійна залежність; собівартість одиниці продукції (y) від кількості випущеної продукції (x) за якийсь період: $y=\frac{a}{x}+b$ – нелінійна залежність (a – сума витрат на прямі виробничі потреби; b – постійні витрати на одиницю продукції).

Кореляційний і регресійний аналіз – це суміжні розділи математичної статистики, які призначені для вивчення статистичної залежності між випадковими величинами.

12.2. Основні задачі теорії кореляції. Кореляційна таблиця, кореляційне поле, емпіричні лінії регресії

У теорії кореляції вирішують **дві *основні задачі***.

Задача 1. а) визначення наявності кореляційного зв'язку (якщо значення $\overline{y}_x$ однакові для всіх значень X, то кореляційна залежність відсутня);

б) установлення форми залежності (виду функції регресії) і визначення параметрів рівняння регресії.

Задача 2. Визначення тісноти (сили) кореляційного зв'язку. Тіснота зв'язку оцінюється за величиною розсіювання значень величини Y навколо умовного середнього $\overline{y}_x$ і характеризує ступінь впливу змінності величини X на змінність величини Y.

Для визначення наявності кореляційному зв'язку емпіричні дані заносять у кореляційну таблицю, якщо число випробувань велике. **Кореляційна таблиця** формується для згрупованих спостережень і показує інтервали зміни величин X і Y і частоти спільної появи даної пари значень x і y (табл. 12.1).

Таблиця 12.1

Кореляційна таблиця

	Інтервали X	$x_0^* - x_1^*$	$x_1^* - x_2^*$	.	$x_{i-1}^* - x_i^*$	.	$x_{l-1}^* - x_l^*$	m_{y_j}
Інтервали Y	x_i / y_k	x_1	x_2	.	x_i	.	x_l	
$y_0^* - y_1^*$	y_1	m_{11}	m_{12}	.	m_{1i}	.	m_{1l}	m_{y_1}
$y_1^* - y_2^*$	y_2	m_{21}	m_{22}	.	m_{2i}	.	m_{2l}	m_{y_2}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$y_{k-1}^* - y_k^*$	y_k	m_{k1}	m_{k2}	.	m_{ki}	.	m_{kl}	m_{y_k}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
$y_{s-1}^* - y_s^*$	y_s	m_{s1}	m_{s2}		m_{si}		m_{sl}	m_{y_s}
m_{x_i}		m_{x_1}	m_{x_2}	.	m_{x_i}	.	m_{x_l}	n

Позначимо n – загальну кількість спостережень; m_{ki} – частоту спільної появи двох випадкових величин x_i і y_k, причому $\sum_k \sum_i m_{ki} = n$. На горизонталі кореляційної таблиці розмістимо інтервали фактора X; на вертикалі – інтервали функціональної ознаки Y. На перетинанні стовпця x_i

і рядка y_k заносимо частоту m_{ki}. Через x_i і y_k позначені середини інтервалів.

У крайній стовпець і рядок запишемо суму за рядками та стовпцям $m_{x_i} = \sum_{k=1}^{s} m_{ki}$ і $m_{y_k} = \sum_{i=1}^{l} m_{ki}$, причому $\sum_{i=1}^{l} m_{x_i} = \sum_{k=1}^{s} m_{y_k} = n$.

З табл. 12.1 бачимо, що кожному значенню однієї з величин X або Y відповідає ряд розподілу іншої величини. Наприклад, для $X = x_1$ маємо ряд:

y	y_1	y_2	...	y_k	...	y_s
m	m_{11}	m_{21}	...	m_{k1}	...	m_{s1}

Для $X = x_2$, відповідно, маємо:

y	y_1	y_2	...	y_k	...	y_s
m	m_{12}	m_{22}	...	m_{k2}	...	m_{s2}

Обчислимо умовне середнє:

$$\overline{y}_{x=x_1} = \frac{y_1 m_{11} + y_2 m_{21} + \ldots + y_k m_{k1} + \ldots + y_s m_{s1}}{m_{11} + m_{21} + \ldots + m_{k1} + \ldots + m_{s1}} = \frac{\sum_{k=1}^{s} y_k m_{k1}}{m_{x_1}},$$

$$\overline{y}_{x=x_2} = \frac{y_1 m_{12} + y_2 m_{22} + \ldots + y_k m_{k2} + \ldots + y_s m_{s2}}{m_{11} + m_{22} + \ldots + m_{k2} + \ldots + m_{s2}} = \frac{\sum_{k=1}^{s} y_k m_{k2}}{m_{x_2}}.$$

Узагальнимо: $\overline{y}_{x=x_i} = \dfrac{\sum_{k=1}^{s} y_k m_{ki}}{m_{x_i}}$.

Тобто маємо залежність:

x	x_1	x_2	...	x_i	...	x_l
$\overline{y}_x$	$\overline{y}_{x_1}$	$\overline{y}_{x_2}$	...	$\overline{y}_{x_i}$	...	$\overline{y}_{x_l}$

Аналогічно, для $Y = y_k$ умовне середнє $\overline{x}_{y=y_k}$ обчислюється за формулою $\overline{x}_{y=y_k} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{l} x_i m_{ki}}{m_{y_k}}$. І залежність має вигляд:

y	y_1	y_2	...	y_k	...	y_s
$\overline{x}_y$	$\overline{x}_{y_1}$	$\overline{x}_{y_2}$	...	$\overline{x}_{y_k}$	...	$\overline{x}_{y_s}$

Кореляційні таблиці дають можливість судити про наявність кореляційної залежності: якщо $\overline{y}_x$ $\left(\overline{x}_y\right)$ змінюються від стовпця до стовпця (від рядка до рядка), то між величинами X і Y є кореляційний зв'язок.

Кореляційне поле – це графічне зображення кореляційної таблиці. Кореляційним полем називається точкова діаграма, у якій кожна точка є результатом окремого спостереження за двома змінними величинами (рис. 12.1).

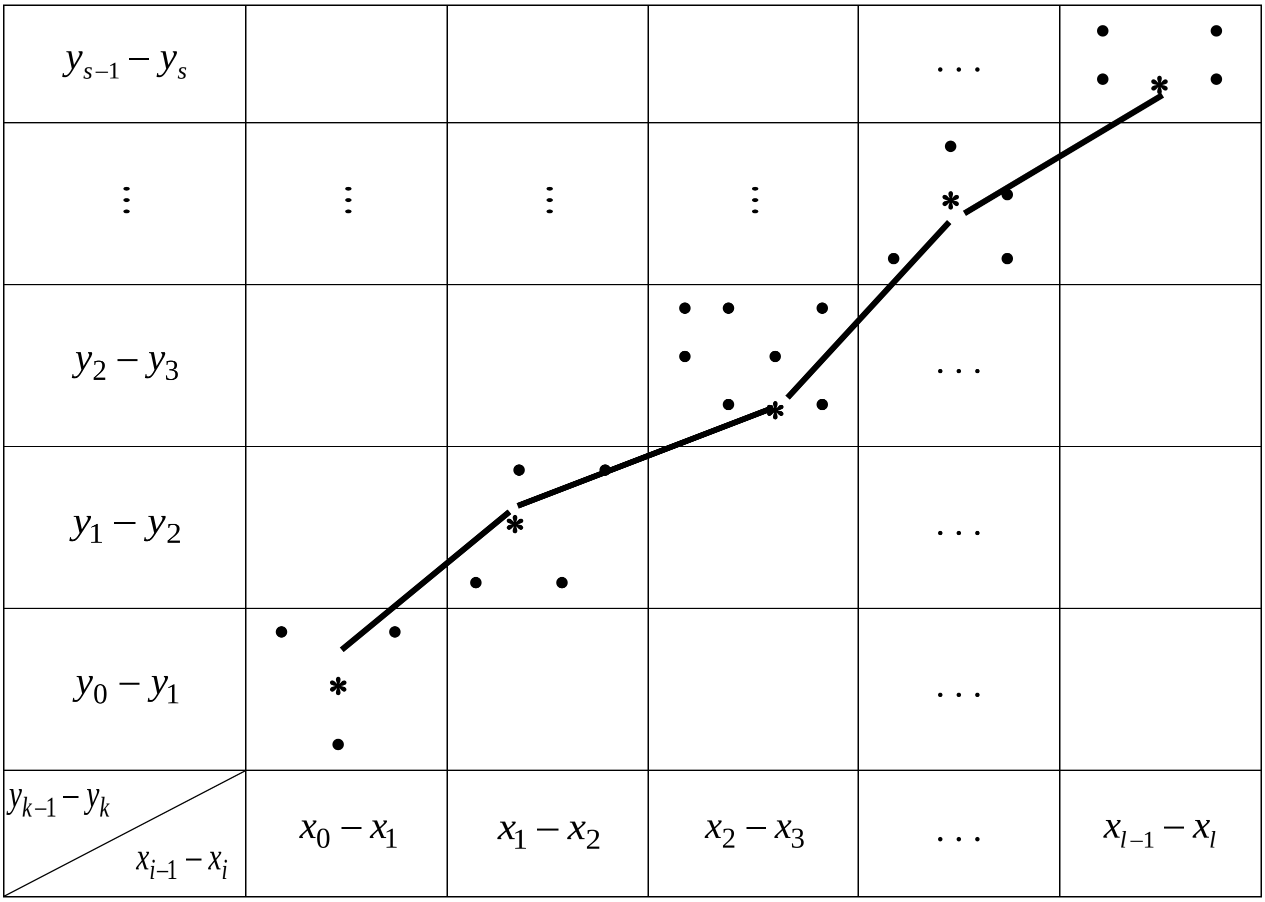


Рис. 12.1. **Кореляційне поле та емпірична лінія регресії**

Кореляційне поле можна побудувати за кореляційною таблицею. Якщо ж маємо тільки спостереження, то кореляційне поле створюється разом зі складанням кореляційної таблиці.

Записуємо інтервали величин X і Y; у кожну клітинку на перетинанні стовпця і рядка заносимо точки, кількість яких відповідає величинам m_{ki}.

Якщо на кореляційному полі згустки (центри групування) зміщуються, то можна судити про наявність кореляційного зв'язку між величинами X і Y.

На кожному інтервалі знайдемо $\overline{x}_{y_k}$ і $\overline{y}_{x_i}$. Нанесемо точки $\left(x_i, \overline{y}_{x_i}\right)$ або $\left(\overline{x}_{y_k}, y_k\right)$ і з'єднаємо їх ламаними лініями.

Ламана лінія $\left(\overline{y}_x\right)$, яка з'єднує точки з координатами $\left(x_i, \overline{y}_{x_i}\right)$, називається **емпіричною лінією регресії** Y **на** X. Ламана лінія $\left(\overline{x}_y\right)$, яка з'єднує точки з координатами $\left(\overline{x}_{y_k}, y_k\right)$, називається **емпіричною лінією регресії** X **на** Y. Для незгрупованих спостережень створюють тільки кореляційне поле.

12.3. Лінійна регресія. Визначення параметрів лінійного рівняння парної регресії

Розглянемо першу основну задачу теорії кореляції. Емпірична лінія регресії, що будується на фоні кореляційного поля, показує, як у середньому змінюється величина Y зі збільшенням величини X. Якщо число спостережень збільшувати, то окремі точки будуть наближатися до лінії регресії.

Граничне положення емпіричної лінії регресії, до якої вона наближається при необмеженому числі спостережень, називається граничною **теоретичною лінією регресії**.

Вид рівняння теоретичної лінії $\overline{y}_x = f(x)$ або $\overline{x}_y = \varphi(y)$ можна встановити за зовнішнім виглядом емпіричної лінії регресії. Якщо її можна згладжувати прямою, то це лінійна залежність; якщо параболою – то квадратична залежність і таке інше. У визначенні форми кореляційному зв'язку між двома змінними перевага надається лінійній залежності $\hat{y}_x = ax + b$ або $\hat{x}_y = a_1 y + b_1$. На вибір впливає кілька причин: по-перше –

простота, а як наслідок, менш складні розрахунки; по-друге – для малих проміжків зміни аргументу криволінійної залежності можна з достатньою точністю наблизити прямолінійними, тобто замість однієї параболи можна розглядати дві прямі; по-третє, якщо величини X і Y нормально розподілені, то форма кореляційної залежності є лінійною.

Нехай маємо емпіричні дані:

x	x_1	x_2	$\dots$	x_i	$\dots$	x_n
y	y_1	y_2	$\dots$	y_i	$\dots$	y_n

Побудуємо теоретичне рівняння регресії у вигляді:

$$\hat{y} = ax + b.$$

Параметри a і b визначимо за методом найменших квадратів так, щоб сума квадратів відхилень $\hat{y}_{i теор.}$ від $\hat{y}_{i емп.}$ була мінімальною:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{y}_{i теор.} - \hat{y}_{i емп.}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^{\,2}(\min).$$

Позначимо:

$$\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i^2 = F(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)^2 \quad \to \min .$$

Згідно з необхідною умовою екстремума функції двох змінних маємо:

$$\frac{\partial F(a,b)}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F(a,b)}{\partial b} = 0.$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot x_i = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{n}(ax_i + b - y_i)\cdot 1 = 0. \end{cases}$$

Запишемо цю систему у вигляді:

$$\begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + b\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + bn = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases}.$$

Поділимо на n обидва рівняння:

$$\begin{cases} a\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n} + b\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{n} \\ a\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} + b = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} \end{cases}.$$

Оскільки $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i}{n} = \overline{x}$; $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2}{n} = \overline{x^2}$; $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} y_i}{n} = \overline{y}$; $\dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\, y_i}{n} = \overline{xy}$,

маємо: $\begin{cases} a\overline{x^2} + b\overline{x} = \overline{xy} \\ a\overline{x} + b = \overline{y} \end{cases}$.

Помножимо друге рівняння на $\overline{x}$ і віднімемо з першого рівняння:

$$\begin{array}{r} a\overline{x^2} + b\overline{x} = \overline{xy} \\ -\quad a\left(\overline{x}\right)^2 + b\overline{x} = \overline{y}\cdot\overline{x} \\ \hline \end{array}.$$

Тоді $a = \dfrac{\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y}}{\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2}$. З другого рівняння системи $b = \overline{y} - a\overline{x}$. Параметр a називається **коефіцієнтом регресії** Y **на** X і позначається $\rho_{y/x}$. Величина $(\overline{xy} - \overline{x}\cdot\overline{y})$ називається **коваріацією** (або кореляційним моментом) і позначається μ_{xy}. $\overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2 = \sigma_x^2$ – **дисперсія** випадкової величини X.

Таким чином: $\rho_{y/x}=\dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}$, $b=\overline{y}-\rho_{y/x}\overline{x}$.

Теоретичне рівняння регресії Y на X має вигляд: $\hat{y}=\rho_{y/x}x+b$.

Аналогічно можна отримати теоретичне рівняння регресії X на Y:

$$\hat{x}=\rho_{x/y}y+b_1,$$

де $\rho_{x/y}=\dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_y^2}$, $\sigma_y^2=\overline{y^2}-\left(\overline{y}\right)^2$, $b_1=\overline{x}-\rho_{x/y}\overline{y}$.

Емпірична та теоретична лінії регресії зображуються на кореляційному полі. Якщо теоретичне рівняння регресії обчислене правильно, то помилки ε_i незначні. Точка $M\left(\overline{x},\overline{y}\right)$ – центр регресії, крізь який проходять обидві теоретичні лінії регресії.

Якщо дані згруповані, то за кореляційною таблицею обчислимо:

$$\overline{x}=\frac{\sum\limits_i x_i\, m_{x_i}}{n};\ \overline{y}=\frac{\sum\limits_k y_k m_{y_k}}{n};\ \overline{x^2}=\frac{\sum\limits_i x_i^2 m_{x_i}}{n};\ \overline{xy}=\frac{\sum\limits_i\sum\limits_k x_i\, y_k m_{ik}}{n}.$$

Приклад 12.1. Задана кореляційна таблиця, у якій наведені результати іспитів з фізики (y) і математики (x) в одній з академічних груп I курсу (табл. 12.2).

Таблиця 12.2

Початкові дані

y \ x	2	3	4	5	l_k
2	1	2			3
3	1	6	3		10
4		5	5		10
5			1	1	2
h_i	2	13	9	1	25

Складемо лінійне парне рівняння регресії $\hat{y}_x=\rho_{y/x}x+b$.

Розв'язання. Обчислимо:

$$\overline{x}=\frac{2\cdot 2+3\cdot 13+4\cdot 9+5\cdot 1}{25}=\frac{84}{25}=3{,}36;$$

$$\overline{y}=\frac{2\cdot 3+3\cdot 10+4\cdot 10+5\cdot 2}{25}=\frac{86}{25}=3{,}44;$$

$$\overline{x^2}=\frac{4\cdot 2+9\cdot 13+16\cdot 9+25\cdot 1}{25}=\frac{294}{25}=11{,}76;$$

$$\overline{y^2}=\frac{4\cdot 3+9\cdot 10+16\cdot 10+25\cdot 2}{25}=\frac{312}{25}=12{,}48;$$

$$\overline{xy}=\frac{\sum\limits_{i}\sum\limits_{k}m_{ki}x_i y_k}{n}=\frac{1}{25}\big((1\cdot(2\cdot 2)+2\cdot(3\cdot 2))+(1\cdot(2\cdot 3)+6\cdot(3\cdot 3)+3\cdot(4\cdot 3))+$$

$$+(5\cdot(3\cdot 4)+5\cdot(4\cdot 4))+(1\cdot(4\cdot 5)+1\cdot(5\cdot 5))\big)=\frac{1}{25}(16+96+140+45)=\frac{297}{25}=11{,}88;$$

$$\rho_{y/x}=\frac{11{,}88-3{,}36\cdot 3{,}44}{11{,}76-3{,}36^2}=\frac{11{,}88-11{,}56}{11{,}76-11{,}29}=\frac{0{,}32}{0{,}47}\approx 0{,}68;$$

$$\overline{b}=3{,}44-0{,}68\cdot 3{,}36=3{,}44-2{,}28=1{,}16;$$

$$\overline{y}_x=0{,}68x+1{,}16.$$

Перевірка: $x=3$; $\overline{y}_x=0{,}68\cdot 3+1{,}16=3{,}2$;

$$\overline{y}_{\text{емп.}}=\frac{2\cdot 2+3\cdot 6+4\cdot 5}{13}=3{,}23;\ \varepsilon_1=0{,}03;\ x=4;$$

$$\overline{y}_x=0{,}68\cdot 4+1{,}16=3{,}88;\ \overline{y}_{\text{емп.}}=\frac{3\cdot 3+4\cdot 5+5\cdot 1}{9}=3{,}78;\ \varepsilon_1=0{,}1.$$

Приклад 12.2. Залежність між змінними величинами X і Y отримана на основі експерименту:

x_i	1	1,5	2	2,5	3
y_i	2,15	2,3	2,6	2,8	2,5

У припущенні лінійної залежності $\hat{y}_x=\rho_{y/x}x+b$ між X і Y знайдемо коефіцієнти $\rho_{y/x}$ і b.

Розв'язання. Вихідні дані та результати обчислень помістимо в табл. 12.3.

Таблиця 12.3

Результати обчислень

n	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	2,15	1	2,15
2	1,5	2,3	2,25	3,45
3	2	2,6	4	5,2
4	2,5	2,8	6,25	7
5	3	2,5	9	7,5
$\sum$	10	12,35	22,5	25,3

Виконавши обчислення, отримуємо:

$$\overline{x} = \frac{10}{5} = 2; \quad \overline{y} = \frac{12{,}35}{5} = 2{,}47; \quad \overline{x^2} = \frac{22{,}5}{5} = 4{,}5; \quad \overline{xy} = \frac{25{,}3}{5} = 5{,}06.$$

$$\rho_{y/x} = 0{,}24, \quad b = 1{,}99.$$

Шукане рівняння має вигляд: $\overline{y}_x = 0{,}24x + 1{,}99$. На рис. 12.2 зображені емпіричні точки та знайдена теоретична пряма лінія регресії $\hat{y}_x$.

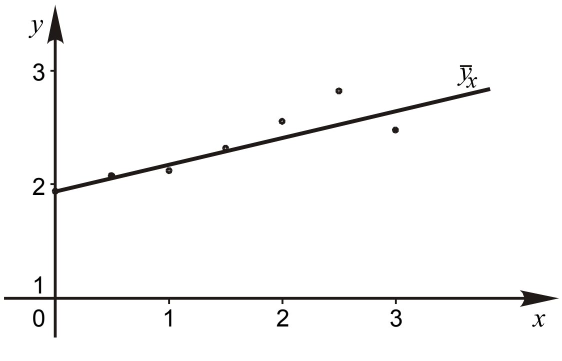


Рис. 12.2. **Теоретична пряма лінія регресії $\hat{y}_x$ і емпіричні точки**

Перевіримо рівняння:

$$\overline{y}_{x=1,5} = 0{,}24 \cdot 1{,}5 + 1{,}99 = 2{,}35;$$

$$\overline{y}_{x=2,5} = 0{,}24 \cdot 2{,}5 + 1{,}99 = 2{,}6.$$

Відхилення: $\varepsilon_1 = |2{,}35 - 2{,}3| = 0{,}05$; $\varepsilon_2 = |2{,}8 - 2{,}6| = 0{,}2$.

Коефіцієнт регресії та його тлумачення. Коефіцієнт регресії за знаком збігається зі знаком коваріації: якщо знак $\rho_{y/x}$ "+", то регресія додатна, якщо знак "–", то регресія від'ємна. Коефіцієнт регресії $\rho_{y/x}$ – величина розмірна. Він показує, на скільки одиниць свого виміру зміниться середнє значення функціональної ознаки $\hat{y}_x$, якщо фактор X збільшиться на одиницю свого виміру.

Дійсно, нехай x отримав приріст Δx, тоді $\hat{y}_x$ – приріст $\Delta\hat{y}_x$. Нові дані x і $\hat{y}_x$ підставимо в рівняння регресії $\hat{y} = \rho_{y/x}x + b$:

$$\hat{y} + \Delta\hat{y} = \rho_{y/x}(x + \Delta x) + b.$$

Віднімемо з нового рівняння вихідне, отримаємо: $\Delta\hat{y}_x = \rho_{y/x}\Delta x$.

Якщо $\Delta x = 1$, то $\Delta\hat{y}_x = \rho_{y/x}$.

Приклад 12.3. $\hat{y}_x = -4{,}8x + 7$, одиниці виміру X – гривні, а Y – кілограми. Коефіцієнт $\rho_{y/x} = -4{,}8$ показує, що зі збільшенням фактора X на 1 грн ознака $\hat{y}_x$ зменшиться на 4,8 кг.

12.4. Тіснота зв'язку в парній лінійній кореляційній залежності

Емпіричне кореляційне відношення, його властивості. Звернемося до кореляційної таблиці. Розсіювання функціональної ознаки Y характеризує дисперсія:

$$\sigma_y^2 = \frac{\sum\limits_k \left(y_k - \overline{y}\right)^2 \cdot m_{y_k}}{n}.$$

Існує два види розсіювання:

а) розсіювання, яке обумовлено впливом фактора X $\left(\sigma_{\bar{y}_x}^2\right)$;

б) розсіювання, яке обумовлено впливом інших факторів, крім X $\left(\sigma_{y/x}^2\right)$:

$$\sigma_y^2 = \sigma_{\bar{y}_x}^2 + \sigma_{y/x}^2.$$

Це основне дисперсійне рівняння. Якщо $\sigma_{\bar{y}_x}^2 = 0$, то розсіювання Y повністю обумовлене впливом побічних факторів, тобто між фактором X і ознакою Y немає кореляційного зв'язку;

якщо $\sigma^2_{y/x}=0$, то розсіювання Y обумовлене тільки фактором X, тобто між X і Y існує функціональний зв'язок.

Поділимо обидві частини дисперсійного рівняння на σ^2_y.

Тоді отримаємо $1=\dfrac{\sigma^2_{\bar{y}_x}}{\sigma^2_y}+\dfrac{\sigma^2_{y/x}}{\sigma^2_y}$.

Доданок $\dfrac{\sigma^2_{y/x}}{\sigma^2_y}$ характеризує відносний вплив побічних факторів на функціональний фактор Y.

Доданок $\dfrac{\sigma^2_{\bar{y}_x}}{\sigma^2_y}$ характеризує відносний вплив фактора X на функціональний фактор Y, який характеризує тісноту кореляційного зв'язку між X і Y.

Показником тісноти зв'язку між фактором X і ознакою Y є величина $\eta_{y/x}$ – кореляційне відношення:

$$\eta_{y/x}=\sqrt{\frac{\sigma^2_{\bar{y}_x}}{\sigma^2_y}},$$

де $\sigma^2_{\bar{y}_x}=\dfrac{\sum\limits_i\left(\bar{y}_{x_i}-\bar{y}\right)^2 m_{x_i}}{n}=\dfrac{\sum\limits_i \bar{y}^2_{x_i} m_{x_i}}{n}-\left(\bar{y}\right)^2$.

Величина $\eta^2_{y/x}$ показує, яка частина повної мінливості функціональної ознаки Y пояснюється впливом фактора-аргумента X.

Приклад 12.4. $\eta^2_{y/x}=0{,}78$. Це означає, що 78 % мінливості ознаки Y обумовлене впливом фактора X і тільки 22 % мінливості ознаки Y обумовлене впливом інших неврахованих факторів.

Кореляційні відношення: $\eta_{y/x}=\dfrac{\sigma_{\bar{y}_x}}{\sigma_y}$, $\eta_{x/y}=\dfrac{\sigma_{\bar{x}_y}}{\sigma_x}$ є значеннями, отриманими за емпіричним даними.

Величина η характеризує тісноту зв'язку в кореляційній залежності та має такі **властивості**:

1) $\eta\geq 0$ (за визначенням);

2) величина η перебуває між нулем і одиницею: $0\leq\eta\leq 1$;

3) якщо $\eta = 1$, то зв'язок між X і Y функціональний (оскільки $\sigma^2_{y/x} = 0$); тобто відсутнє розсіювання в групі, для кожного x_i одне y_i;

4) якщо $\eta = 0$, то $\sigma_{\bar{y}_x} = 0$ – між X і Y немає кореляційної залежності;

5) якщо величина η ближче до нуля, то зв'язок між X і Y слабкий; якщо величина η ближче до одиниці, то зв'язок між X і Y сильний.

У парній лінійній кореляційній залежності маємо:

$$\sigma^2_{\bar{y}_x} = D\left(\rho_{y/x}x + b\right) = \rho^2_{y/x}D(x) + D(b) = \rho^2_{y/x} \cdot \sigma^2_x .$$

Тобто $\eta_{y/x} = \left|\dfrac{\rho_{y/x}\sigma_x}{\sigma_y}\right| = \left|\dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}\right| = |r|$, де r – коефіцієнт кореляції.

За визначенням $r = \dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}$.

Таким чином, якщо $\eta_{y/x} \approx |r|$, то має місце лінійна кореляційна залежність. Якщо $\eta >> r$, то залежність між X і Y нелінійна.

Дійсно, якщо залежність виду $\hat{y} = ax^2 + bx + c$, тоді $D(\hat{y}) = \sigma^2_{\hat{y}} = a^2\sigma^2\left(x^2\right) + \sigma^2(bx + c) = a^2\sigma^2\left(x^2\right) + \sigma^2_{\bar{y}}$, де $\sigma^2_{\bar{y}}$ – лінійна складова, $a^2\sigma^2\left(x^2\right)$ – додатний доданок.

Звідси:

$$\eta_{нелінійн.} = \sqrt{\frac{a^2\sigma^2\left(x^2\right) + \sigma^2_{\bar{y}}}{\sigma^2_y}},$$

тобто $\eta_{нелінійн.} >> |r|$; остаточно $|r| \le \eta \le 1$.

Оскільки кореляційний момент (коваріація) μ_{xy} – характеристика розмірна, то вводять додаткову безрозмірну характеристику – **коефіцієнт кореляції**:

$$r_{xy} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}.$$

Знаки коефіцієнтів r_{xy}, μ_{xy}, $\rho_{y/x}$, $\rho_{x/y}$ збігаються.

Властивості коефіцієнта кореляції r_{xy}:

1) якщо випадкові величини X і Y незалежні, то $r_{xy}=0$ (тому що $\mu_{xy}=0$);

2) якщо випадкові величини лінійно залежні $y=ax+b$, то $r_{xy}=1$.

Дійсно, $\sigma_y^2=a^2\sigma_x^2$; $\overline{xy}=a\overline{x^2}+b\overline{x}$; $\overline{y}=a\overline{x}+b$;

$\mu_{xy}=\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}=\overline{ax^2}+b\overline{x}-(a\overline{x}+b)\overline{x}=a\left(\overline{x^2}-\overline{x}^2\right)=a\sigma_x^2$.

Тобто $r=\dfrac{a\sigma_x^2}{\sigma_x a\sigma_x}=1$;

3) $|r_{xy}|\le 1$, $\quad -1\le r\le 1$.

Величина модуля коефіцієнта кореляції характеризує тісноту кореляційного зв'язку: зі зростанням $|r_{xy}|$ кореляційний зв'язок стає тісніше. Чим ближче $|r_{xy}|$ до одиниці, тим сильніший зв'язок між фактором X і ознакою Y; чим ближче $|r_{xy}|$ до нуля, тим зв'язок більш слабкий;

4) $r_{xy}=r_{yx}$ (за визначенням).

Наведемо формули для обчислення коефіцієнта кореляції:

$$r_{xy}=\frac{\mu_{xy}}{\sigma_x\sigma_y}=\frac{\overline{xy}-\overline{x}\cdot\overline{y}}{\sqrt{\overline{x^2}-(\overline{x})^2}\cdot\sqrt{\overline{y^2}-(\overline{y})^2}}.$$

Оскільки $\rho_{y/x}=\dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2}$, $\rho_{x/y}=\dfrac{\mu_{xy}}{\sigma_y^2}$, то $\rho_{y/x}\cdot\rho_{x/y}=\dfrac{\mu_{xy}^2}{\sigma_x^2\cdot\sigma_y^2}=r^2$.

Отже: $r_{xy}=\pm\sqrt{\rho_{y/x}\cdot\rho_{x/y}}$, знак "+", якщо $\rho_{y/x}$, $\rho_{x/y}$ додатні; знак "–", якщо $\rho_{y/x}$, $\rho_{x/y}$ від'ємні.

Запишемо рівняння регресії $\hat{y}=\rho_{y/x}x+b$. Лінія регресії проходить через центр регресії – точку $M(\overline{x},\overline{y})$.

Підставимо координати точки M у рівняння регресії:

$$\overline{y}=\rho_{y/x}\overline{x}+b.$$

Віднімемо його з вихідного рівняння, тоді маємо: $\hat{y}-\overline{y}=\rho_{y/x}(x-\overline{x})$.

$$\rho_{y/x} = \frac{\mu_{xy}}{\sigma_x^2} = \frac{\mu_{xy}\sigma_y}{\sigma_x^2\sigma_y} = r\,\frac{\sigma_y}{\sigma_x},$$

тобто $\hat{y} - \overline{y} = r\,\dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}\left(x - \overline{x}\right)$ або $\dfrac{\hat{y} - \overline{y}}{\sigma_y} = r\,\dfrac{\left(x - \overline{x}\right)}{\sigma_x}$.

Позначимо $\dfrac{\hat{y} - \overline{y}}{\sigma_y} = t_{\hat{y}}$; $\dfrac{x - \overline{x}}{\sigma_x} = t_x$, де $t_{\hat{y}}, t_x$ – стандартизовані змінні. Тоді рівняння регресії буде мати вигляд: $t_{\hat{y}} = r \cdot t_x$.

Аналогічно отримаємо спряжене рівняння, коли X – функціональний фактор, Y – фактор аргумент:

$$t_{\hat{x}} = r \cdot t_y .$$

Якщо в рівнянні позначити $\hat{y} - \overline{y} = \Delta\hat{y}$; $x - \overline{x} = \Delta x$, то:

$$\frac{\Delta\hat{y}}{\sigma_y} = r\,\frac{\Delta x}{\sigma_x}.$$

Якщо в останній рівності $\Delta x = \sigma_x$, маємо: $\dfrac{\Delta\hat{y}}{\sigma_y} = r$, звідки $\Delta\hat{y} = r\sigma_y$.

Тобто коефіцієнт кореляції показує, на яку частину свого середньоквадратичного відхилення σ_y зміниться середнє значення функціональної ознаки Y, якщо фактор X збільшиться на своє середньоквадратичне відхилення σ_x. Коефіцієнт кореляції r є безрозмірна величина (на відміну від коефіцієнта регресії).

Приклад 12.5. Якщо дано $r = -0{,}4$, $\sigma_x = 2$, $\sigma_y = 4$. Звідси $\Delta\overline{y}_x = -0{,}4 \cdot 4 = -1{,}6$. Тобто якщо фактор X збільшиться на дві одиниці, то ознака Y зменшиться на 1,6 одиниць.

Теоретичні лінії регресії $\hat{y}_x$ і $\hat{x}_y$ перетинаються в точці $M\left(\overline{x}, \overline{y}\right)$. З рівнянь регресії маємо такі кутові коефіцієнти теоретичних прямих:

$$\overline{y}_x = \rho_{y/x}x + b \;\Rightarrow\; k_1 = \rho_{y/x},$$

$$\overline{x}_y = \rho_{x/y}y + b_1 \;\Rightarrow\; k_2 = \frac{1}{\rho_{x/y}}.$$

Коефіцієнт кореляції $r^2 \leq 1$, тому:

$$\rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y} \leq 1 \Rightarrow \rho_{y/x} \leq 1/\rho_{x/y} \Rightarrow k_1 \leq k_2.$$

Тобто теоретична лінія регресії $\hat{x}_y$ проходить крутіше теоретичної лінії регресії $\hat{x}_y$. Кут між цими лініями визначається за формулою:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}.$$

Ураховуючи значення k_1 і k_2, маємо:

$$tg\varphi = \frac{\left(1/\rho_{x/y}\right) - \rho_{y/x}}{1 + \left(\rho_{y/x}/\rho_{x/y}\right)} = \frac{1 - \rho_{y/x} \cdot \rho_{x/y}}{\rho_{x/y} + \rho_{y/x}} = \frac{1 - r_{xy}^2}{r_{xy}} \cdot \frac{\sigma_x \sigma_y}{\sigma_x^2 + \sigma_y^2}.$$

Можна зробити такі висновки (рис. 12.3):

1) якщо $|r| = 1$, то $tg\varphi = 0$, $\varphi = 0$;

2) якщо $r = 0$, то $tg\varphi = \infty$, $\varphi = \pi/2$;

3) чим більше значення коефіцієнта кореляції, тем ближче одна до одної розміщені спряжені теоретичні лінії регресії;

4) чим більш слабка кореляційна залежність, тим більше кут між спряженими лініями регресії.

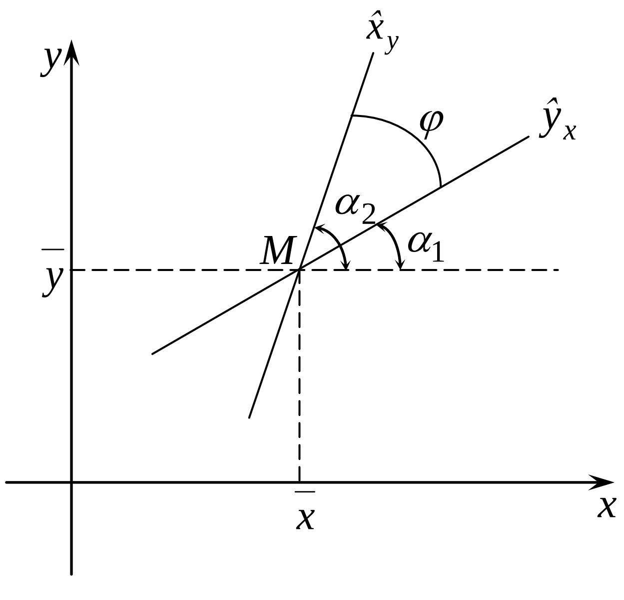


Рис. 12.3. **Взаємне розташування теоретичних ліній регресії $\hat{y}_x$ і $\hat{x}_y$**

Перевірка значущості кореляційної залежності (регресії). До емпіричних показників кореляції належать коефіцієнт кореляції r і кореляційне відношення η. Коефіцієнт кореляції – величина випадкова (якщо обрати кілька вибірок, коефіцієнт кореляції буде різним). Якщо розглядати великий об'єм вибірки, то можна допустити, що випадкова величина r задовольняє нормальному закону розподілу. Тоді має місце теорема Лапласа $P(|X-a|<t\sigma)=2\Phi(t)$.

Нехай $X=r$, $a=r_0$, то $P(|r-r_0|<t\sigma_r)=2\Phi(t)$, де $\sigma_r=\sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}$ для $n<50$; $\sigma_r=\dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ для $n>50$; n – обсяг вибірки.

Розглянемо гіпотезу H_0: $r_0=0$ – у генеральній сукупності немає кореляційного зв'язку, тоді:

$$P(|r-r_0|<t\sigma_r)=2\Phi(t), \text{ або } P\left(\frac{|r|}{\sigma_r}<t\right)=2\Phi(t).$$

Позначимо $\tau=\dfrac{|r|}{\sigma_r}=\dfrac{|r|\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r^2}}$ для $n<50$ і $\tau=\dfrac{|r|\sqrt{n}}{1-r^2}$ для $n>50$.

Якщо $\tau\le t$, то з надійністю $2\Phi(t)$ ухвалюється гіпотеза H_0 про відсутність кореляційної залежності. Якщо $\tau>t$, то з надійністю $2\Phi(t)$ гіпотеза H_0 відхиляється; тобто є кореляційний зв'язок, і він істотний.

На практиці прийняті такі критерії для $n>50$:

1) якщо $\tau>2{,}58$, то з впевненістю 99 % можна стверджувати, що кореляційна залежність істотна, регресія значуща. Кореляційна залежність існує не тільки для даної вибірки, а для всієї генеральної сукупності;

2) якщо $\tau<1{,}96$, то з впевненістю 95 % можна стверджувати, що кореляційна залежність не є істотною, регресія не є значущою. Кореляційна залежність характерна тільки для даної вибірки та може не існувати в генеральній сукупності;

3) якщо $1{,}96<\tau<2{,}58$, це область невизначеності; частіше говорять про неістотність кореляційної залежності; висновок залежить від сутності проблеми.

Якщо вибірка невелика ($n<50$), то величина τ має розподіл Стьюдента з $n-2$ ступенями свободи. За таблицею критичних точок розподілу Стьюдента (додаток В) знаходимо $t_\alpha(n-2)$. Якщо $\tau\le t_{0,05}(n-2)$, то ухвалюється гіпотеза H_0 про відсутність кореляційної залежності.

Якщо $\tau > t_{0,01}(n-2)$, то гіпотеза H_0 відхиляється, тобто є кореляційний зв'язок, і він істотний. Область невизначеності $t_{0,05}(n-2) \le \tau \le t_{0,01}(n-2)$.

Надійний інтервал для кореляційного відношення. Перевірка лінійності кореляційного зв'язку, перевірка адекватності моделі. Якщо залежність між нормально розподіленими X і Y лінійна (гіпотеза H_0), то $|r| = \eta$; тоді за теоремою Лапласа $P(|(\eta - |r|) - 0| < t\sigma_r) = 2\Phi(t)$, тобто з надійністю $2\Phi(t)$:

$$|\eta - |r|| \le t\sigma_r,$$

де $\sigma_r = \sqrt{\dfrac{1-r^2}{n-2}}$ для $n < 50$ и $\sigma_r = \dfrac{1-r^2}{\sqrt{n}}$ для $n > 50$.

Звідси надійний інтервал для кореляційного відношення має вигляд:

$$|r| - t\sigma_r \le \eta \le |r| + t\sigma_r.$$

Якщо η, обчислене за вибіркою, належить надійному інтервалу, то з надійністю $2\Phi(t)$ ухвалюється гіпотеза H_0; тобто кореляційний зв'язок лінійний.

Якщо η не належить надійному інтервалу, то з рівнем значущості $1 - 2\Phi(t)$ гіпотеза H_0 відхиляється; тобто кореляційний зв'язок нелінійний.

На практиці для $n > 50$ прийняті такі критерії:

1) якщо η належить інтервалу з надійністю $\gamma = 95\,\%$, $t = 1{,}96$, то гіпотеза H_0 ухвалюється; тобто зв'язок лінійний;

2) якщо η не належить інтервалу з надійністю $\gamma = 99\,\%$, $t = 2{,}58$, то гіпотеза H_0 відхиляється; тобто зв'язок нелінійний;

3) якщо η не належить інтервалу з надійністю $\gamma = 95\,\%$, а належить інтервалу з надійністю $\gamma = 99\,\%$, то це область невизначеності.

Якщо вибірка невелика ($n < 50$), то величину $t = t_\gamma(n-2)$ знаходимо за додатком В.

Приклад 12.6. $n = 102$, $r = 0{,}764$, $\eta = 0{,}8313$.

Розв'язання:

1) $\tau = \dfrac{0{,}764 \cdot 10}{\sqrt{1 - 0{,}764^2}} = \dfrac{7{,}64}{0{,}645} \approx 11{,}84$.

Маємо: $\tau > 2{,}58$ – регресія значуща; кореляційна залежність істотна з надійністю 99 %;

2) $\alpha = 0{,}05$ (5 %-й рівень значущості):

$$0{,}764 - 1{,}96\frac{0{,}645}{10} < \eta < 0{,}764 + 1{,}96\frac{0{,}645}{10}; \quad 0{,}638 < \eta < 0{,}890.$$

З надійністю 95 % можна стверджувати, що модель лінійна.

Для перевірки *значущості кореляційної залежності й адекватності моделі* можна використовувати дисперсійний аналіз, критерій Фішера, побудований на відношенні двох незміщених оцінок дисперсій, який залежить від числа ступенів свободи k_1 і k_2.

Значущість кореляційної залежності за критерієм Фішера визначається за допомогою статистики:

$$F_{y/x} = \frac{\eta^2}{1-\eta^2} \cdot \frac{n-k}{k-1},$$

де n – число спостережень;

k – число інтервалів по фактору X;

$k_1 = k-1$, $k_2 = n-k$ – число ступенів свободи.

Розрахункове значення статистики Фішера необхідно порівняти з табличними величинами статистик критерію Фішера з параметрами $k-1$, $n-k$ за рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$, $\alpha = 0{,}01$: $F_{0,05}(k-1; n-k)$; $F_{0,01}(k-1; n-k)$. Якщо $F_{y/x} < F_{0,05}$, то регресія не є значущою кореляційна залежність не є істотною; якщо $F_{y/x} > F_{0,01}$, то кореляційна залежність істотна.

Значущість регресії можна перевірити також за параметром F_R:

$$F_R = \frac{r^2}{1-r^2} \cdot \frac{n-2}{1}.$$

За додатком Г знаходимо величини статистик критерію Фішера: $F_{0,01}(1; n-2)$ і $F_{0,05}(1; n-2)$. Якщо $F_R > F_{0,01}$, то регресія значуща; якщо $F_R < F_{0,05}$, то кореляційна залежність не є істотною; якщо $F_{0,05} < F_R < F_{0,01}$, то це область невизначеності.

Адекватність моделі можна перевірити:

1) за критерієм Фішера перевіряється шляхом розрахунків статистики $F_{Ad} = \frac{\eta^2 - r^2}{1-\eta^2} \cdot \frac{n-k}{k-2}$. За додатком Г знаходимо $F_{0,01}(k-2; n-k)$,

$F_{0,05}(k-2; n-k)$. Якщо $F_{Ad} > F_{0,01}$, то модель неадекватна, необхідно шукати іншу форму зв'язку; якщо $F_{Ad} < F_{0,05}$, то модель адекватна;

2) за залишковою дисперсією $\sigma^2_{ост} = \frac{1}{n-l}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2$, де n – число спостережень, l – число параметрів моделі, які визначаються за методом найменших квадратів ($l = 2$ для парного рівняння регресії, $l = m+1$, m – число факторів), y_i – емпіричні значення, $\hat{y}_i$ – теоретичні значення. Чим менше залишкова дисперсія, тим краще рівняння регресії відповідає емпіричним даним;

3) за критерієм Фішера через порівняння міжгрупової та внутрішньогрупової дисперсії.

Приклад 12.7. $n = 60$, $k = 9$, $\sigma^2_{\bar{y}_x} = 1{,}598$, $\sigma^2_y = 2{,}383$, $r^2 = 0{,}448$.

$$\eta^2 = \frac{\sigma^2_{\bar{y}_x}}{\sigma^2_y} = \frac{1{,}598}{2{,}383} = 0{,}6706; \quad F_{y/x} = \frac{0{,}6706}{1-0{,}6706} \cdot \frac{60-9}{9-1} \approx 13{,}19.$$

За таблицею критерію Фішера: $F_{0,05}(8;51) = 2{,}10$; $F_{0,01}(8;51) = 2{,}82$. Маємо: $F_{y/x} > F_{0,01}$ – кореляційна залежність істотна, регресія значуща.

Перевіримо адекватність моделі:

$$F_{Ad} = \frac{0{,}6706 - 0{,}448}{1-0{,}6706} \cdot \frac{60-9}{9-2} = 4{,}94; \; F_{0,05}(7;51) = 2{,}26; \; F_{0,01}(7;51) = 3{,}14.$$

Маємо: $F_{Ad} > F_{0,01}$ – модель не є адекватною.

Навколо лінії регресії будуємо надійний чохол 95 % надійністю $\bar{x} \pm 3\sigma_x$; $\bar{y} \pm 2\sigma_y$ (рис. 12.4).

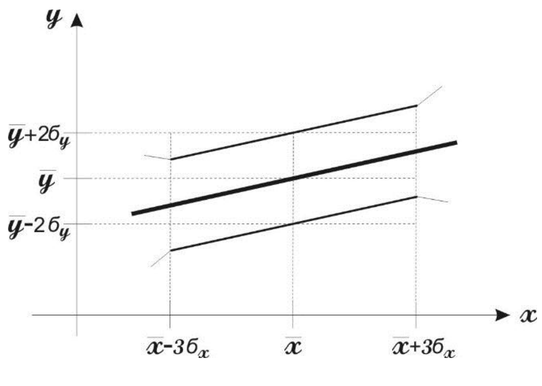


Рис. 12.4. **Надійний чохол для лінії регресії**

12.5. Елементи теорії експертних оцінок. Коефіцієнти рангової кореляції Спірмена та Кендалла

Коефіцієнт кореляції може застосовуватися, якщо випадкові величини X і Y мають числові значення. В економічних дослідженнях часто зустрічаються якісні ознаки, між якими теж існує взаємозалежність, яку потрібно оцінити. Для цього застосовуються коефіцієнти рангової кореляції Спірмена та Кендалла.

Нехай маємо вибіркову сукупність обсягом n, де (x_i, y_i) – окремі спостереження двовимірної випадкової величини (X, Y). Кожному значенню x_i $(i=\overline{1,n})$ компонента X поставимо у відповідність **ранг** x_i', тобто номер елемента у варіаційному ряді $x^{(1)}, x^{(2)}, ..., x^{(n)}$. Аналогічно, для компоненти Y визначимо ранги y_i' його елементів y_i $(i=\overline{1,n})$. Кожній парі (x_i, y_i) відповідає пара рангів (x_i', y_i'). Якщо якісні випадкові величини, то їм ставлять ранги у порядку спадання якості.

Вибірковий коефіцієнт кореляції Спірмена обчислюється за формулою:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum(x_i' - y_i')^2}{n(n^2-1)}.$$

Властивості вибіркового коефіцієнта кореляції Спірмена:

1) значення вибіркового коефіцієнта кореляції Спірмена знаходяться між –1 і 1. Причому чим ближче до нуля його абсолютна величина, тим меншою є залежність між випадковими величинами X і Y;

2) якщо ранги елементів співпадають за всіма значеннями i, то вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена дорівнює 1;

3) якщо рангу $x_1'=1$ відповідає ранг $y_1'=n$, рангу $x_2'=2$ – ранг $y_2'=n-1$, …, а рангу $x_n'=n$ – ранг $y_n'=1$, то вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена дорівнює –1.

Для перевірки значущості рангової кореляції зв'язку застосовується таке правило. Для того щоб з рівнем значущості α перевірити нульову гіпотезу (в генеральної сукупності кореляційного зв'язку немає, $H_0:\rho_s=0$), маючи альтернативну гіпотезу $H_1:\rho_s\neq 0$, потрібно обчислити величину:

$$T_r = \frac{r_s}{s_r}, \qquad s_r = \sqrt{\frac{1-r_s^2}{n-2}}.$$

Знайдемо $t_{кр}(\alpha;k)$ – критичну точку двосторонньої критичної області, за розподілом Стьюдента залежно від рівня значущості α і числа ступенів свободи $k=n-2$. Якщо T_r менше $t_{кр}(\alpha;k)$ з рівнем значущості $\alpha=0{,}05$, то гіпотеза H_o ухвалюється. Якщо T_r більше $t_{кр}(\alpha;k)$ з рівнем значущості $\alpha=0{,}01$, то гіпотеза H_o відхиляється: у проміжку область невизначеності.

Приклад 12.8. Знання десяти студентів перевірялись за двома групами тестів: A і B. Результати перевірки у вигляді оцінок за стобальною шкалою наведені в табл. 12.4, де перший рядок відповідає кількості балів, яка отримана за тестом A, а другий – за тестом B.

Таблиця 12.4

Оцінки за двома тестами (бали)

A	95	90	86	84	75	70	62	60	57	50
B	92	93	83	80	55	60	45	72	62	70

Знайдемо вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена між оцінками за двома тестами та з рівнем значущості 0,01 та перевіримо, чи він є статистично значущим.

Розв'язання. Надамо ранги x_i' оцінкам за тестом A (табл. 12.5).

Таблиця 12.5

Ранги оцінок за тестом A

Ранги $x_з$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Оцінка за тестом A	95	90	86	84	75	70	62	60	57	50

Надамо ранги y_i' оцінкам за тестом B, для чого спочатку розташуємо бали, що отримані за цим тестом, у спадному порядку та пронумеруємо їх (табл. 12.6).

Таблиця 12.6

Ранги оцінок за тестом B

Ранги y_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Оцінка за тестом B	93	92	83	80	72	70	62	60	55	45

Слід пам'ятати, що індекс i для значення y_i повинен дорівнювати порядковому номеру оцінки студента за тестом A.

Знайдемо ранг значення y_1. Індекс $i=1$ вказує на те, що розглядається оцінка студента, який посів за тестом A перше місце (тобто має ранг 1 за табл. 12.5). З табл. 12.4 видно, що за тестом B цей студент мав оцінку 92, яка у табл. 12.6 розташована на другому місті. Таким чином: ранг $y_1 = 2$.

Знайдемо ранг y_2. Індекс $i=2$ указує, що розглядається оцінка студента, який займає за тестом A друге місце. З табл. 12.4 видно, що студент одержав за тестом B оцінку 93, яка у табл. 12.6 розташована на першому місті. Таким чином, ранг $y_2 = 1$.

Аналогічно знайдемо інші ранги:

$y_3 = 3,\ y_4 = 4,\ y_5 = 9,\ y_6 = 8,\ \ y_7 = 10,\ y_8 = 5,\ y_9 = 7,\ y_{10} = 6$.

Запишемо сукупну послідовності рангів $(x_i^{'},\ y_i^{'})$ у табл. 12.7.

Таблиця 12.7

Ранги оцінок за двома тестами

Ранг X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг Y	2	1	3	4	9	8	10	5	7	6

Для всіх пар $(x_i^{'},\ y_i^{'})$ обчислюємо різниці рангів. Так, для першої пари маємо: $d_1 = x_1 - y_1 = 1 - 2 = -1$. Аналогічно, $d_2 = 1$, $d_3 = 0$, $d_4 = 0$, $d_5 = -4$, $d_6 = -2$, $d_7 = -3$, $d_8 = 3$, $d_9 = 2$, $d_{10} = 4$. Тепер розраховуємо суму квадратів різниць рангів:

$$\sum d_i^2 = 1 + 1 + 16 + 4 + 9 + 9 + 4 + 16 = 60.$$

Знайдемо вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Спірмена, враховуючи, що $n=10$:

$$r_s = 1 - \frac{6\sum d_i^2}{n^3 - n} = 1 - \frac{6 \cdot 60}{10^3 - 10} = 0,64.$$

Перевіримо, чи є статистично значущою рангова кореляційна залежність між оцінками за двома тестами. Для цього треба визначити критичну точку розподілу Стьюдента $T_{кр}$ і порівняти її з T_r (обираємо розподіл Стьюдента, оскільки немає нормального закону в розподілі рангів).

Для двосторонньої критичної області розподілу Стьюдента за рівнем значущості $\alpha = 0,01$ і числом ступенів свободи $k = n-2 = 10-2 = 8$ маємо: $t_{0,01}(8)$ = 3,36, $t_{0,05}(8)$ = 2,31.

Після цього обчислюємо:, $s_r = \sqrt{\dfrac{1-r_s^2}{n-2}} = 0,27$ і $T_r = \dfrac{r_s}{s_r} = 2,36$.

Оскільки $2,31 < 2,36 < 3,3$, це область невизначеності. Тобто можна прийняти або відхилити нульову гіпотезу про рівність 0 генерального коефіцієнта рангової кореляції Спірмена, що залежить від сутності питання.

Вибірковий коефіцієнт рангової кореляції Кендалла обчислюють за формулою:

$$r_b = \frac{4R}{n(n-1)} - 1,$$

де n – обсяг вибірки, $R = \sum_{i=1}^{n-1} R_i$.

R_i – обчислюють у такому порядку. Нехай ранги об'єктів:

за тестом A: $x_1, x_2, .. x_n$, $(1, 2, \dots n)$;

за тестом B: $y_1, y_2, .. y_n$,

де R_1 – число рангів більших за y_1; R_2 – число рангів більших за y_2; R_3 – число рангів більших за y_3 і т. д.

Коефіцієнт Кендалла має ті ж властивості, що і коефіцієнт Спірмена.

Для оцінювання значущості коефіцієнта обчислюють статистику T_r:

$$T_r = \frac{r_b}{s_r}, \quad s_r = \sqrt{\frac{2n+5}{9n(n-1)}}.$$

Якщо $T_r < 1{,}96$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}05$, обираємо нульову гіпотезу. Якщо $T_r > 2{,}58$ з рівнем значущості $\alpha = 0{,}01$, нульову гіпотезу відхиляємо. Якщо $1{,}96 < \mathrm{T}_r < 2{,}58$ – область невизначеності.

Приклад 12.9. За табл. 12.7. Ранги оцінок за двома тестами:

Ранг X	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг Y	2	1	3	4	9	8	10	5	7	6

$$R_1 = 8;\ R_2 = 8;\ R_3 = 7;\ R_4 = 6;\ R_5 = 1;\ R_6 = 1; R_7 = 0;\ R_8 = 2;\ R_9 = 0;$$

$$\sum R_i = 33,\ r_b = 0{,}47,\quad S_{r_b} = 0{,}22,\quad T_{r_b} = \frac{r_b}{S_{r_b}} = 2{,}18.$$

$$1{,}96 < 2{,}18 < 2{,}58.$$

Тобто це область невизначеності. Ухвалення чи відхилення нульової гіпотези залежить від сутності питання.

Коефіцієнт рангової кореляції Кендалла – це штучний коефіцієнт, який за висновками співпадає з коефіцієнтом Спірмена. Зауважимо, що коефіцієнт кореляції Спірмена, є вибірковим коефіцієнтом кореляції двох випадкових величин, які записані рангами (див. табл. 12.6): $r = \frac{\mu_{xy}}{S_x S_y}$.

В умовах сучасних комп'ютерних технологій немає сенсу використовувати додаткові формули, оскільки існує стандартна формула для коефіцієнта кореляції.

Якщо припустити що ранги – це дискретні значення двох неперервних випадкових величин X і Y, то можна використовувати кореляційний аналіз.

Приклад 12.10. Маємо ранги двох випадкових величин (табл. 12.7):

Ранг $X = x_i$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Ранг $Y = y_i$	2	1	3	4	9	8	10	5	7	6

У табл. 12.8 Excel-обчислення виконується швидко та зручно.
Обчислимо:

$$\mu_{xy} = \overline{xy} - \overline{x} \cdot \overline{y} = 35{,}5 - 5{,}5 \cdot 5{,}5 = 5{,}25.$$

$$S_x{}^2 = \overline{x^2} - \overline{x}^2 = 8{,}25, \quad S_y{}^2 = 8{,}25, \quad S_x = S_y = 2{,}87.$$

$$r = \frac{\mu_{xy}}{S_x S_y} = \frac{5{,}25}{2{,}87 \cdot 2{,}87} = 0{,}64.$$

Таблиця 12.8

Обчислення

	X	Y	X^2	Y^2	XY
	1	2	1	4	2
	2	1	4	1	2
	3	3	9	9	9
	4	4	16	16	16
	5	9	25	81	45
	6	8	36	64	48
	7	10	49	100	70
	8	5	64	25	40
	9	7	81	49	63
	10	6	100	36	60
$\sum$	55	55	385	385	355
Середні	5,5	5,5	38,5	38,5	35,5

Оцінка значущості: $S_r = \sqrt{\dfrac{1 - r_s^2}{n-2}} = \sqrt{\dfrac{1 - 0{,}64^2}{10-2}} = 0{,}27$ і $T_r = \dfrac{0{,}64}{0{,}27} = 2{,}336$.

За таблицею критерію Стьюдента $T_{кр}(0{,}05; 8) = 2{,}31$; $T_{кр}(0{,}01; 8) = 3{,}36$.

Оскільки $T_{кр}(0{,}05) < T_r < T_{кр}(0{,}01)$, це є область невизначеності.

Рекомендована література

1. Вища математика : базовий підручник для вузів / під ред. В. С. Пономаренка. – Харків : Фоліо, 2014. – 669 с.

2. Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, Т. В. Денисова та ін. ; за ред. Л. М. Малярець. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. – 772 с.

3. Вища математика для економістів : підручник / під ред. О. І. Ляшенка, О. І. Черняка. – Київ : Видавничо-поліграфічний центр "Київський університет", 2008. – 497 с.

4. Железнякова Е. Ю. Індивідуальні завдання з навчальної дисципліни "Вища математика" для студентів галузі знань 0305 "Економіка та підприємництво" денної форми навчання / Е. Ю. Железнякова, А. В. Ігначкова, Л. Д. Широкорад. – Харків : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 217 с.

5. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. У 2-х ч. Ч. 1 / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 393 с.

6. Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. у 2-х ч. Ч. 2 / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 368 с.

7. Малярець Л. М. Математика для економістів. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. У 3-х ч. Ч. 3 / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. Д. Широкорад. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 568 с.

8. Малярець Л. М. Теория вероятностей и математическая статистика в примерах и задачах : учеб. пособ. для студентов-иностранцев отрасли знаний 0305 "Экономика и предпринимательство" / Л. М. Малярец, Є. Ю. Железнякова, А. В. Игначкова. – Харьков : ХНЕУ, 2012. – 124 с.

9. Теорія ймовірностей та математична статистика : навч. посіб. / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Е. Ю. Железнякова та ін. ; за ред. Л. М. Малярець. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. – 404 с.

10. Вища математика: математичний аналіз, лінійна алгебра, аналітична геометрія : підручник [Мультимедійне інтерактивне електрон. вид. комбінованого використ. (412 Мб)] / [авт. кол. : В. С. Пономаренко, Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва та ін. ; за ред. В. С. Пономаренка]. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2015. – 576с. – Режим доступу : http://library.hneu.edu.ua/jornal_aut1.php.

Додатки

Додаток А

Значення функції $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$

x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$	x	$\varphi(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,3989	0,35	3752	0,70	0,3123	1,05	2299
0,01	3989	0,36	0,3739	0,71	3101	1,06	2275
0,02	3989	0,37	3726	0,72	3079	1,07	2251
0,03	3988	0,38	3712	0,73	3056	1,08	2227
0,04	3986	0,39	3697	0,74	3034	1,09	2203
0,05	3984	0,40	0,3683	0,75	3011	1,10	0,2179
0,06	3982	0,41	3668	0,76	2989	1,11	2155
0,07	3980	0,42	3652	0,77	2966	1,12	2131
0,08	3977	0,43	3637	0,78	2943	1,13	2107
0,09	3973	0,44	3621	0,79	2920	1,14	2083
0,10	0,3970	0,45	3605	0,80	0,2897	1,15	2059
0,11	3965	0,46	3589	0,81	2874	1,16	2036
0,12	3961	0,47	3572	0,82	2850	1,17	2012
0,13	3956	0,48	3555	0,83	2827	1,18	1989
0,14	3951	0,49	3538	0,84	2803	1,19	1965
0,15	3945	0,50	0,3521	0,85	2780	1,20	0,1942
0,16	3939	0,51	3503	0,86	2756	1,21	1919
0,17	3932	0,52	3485	0,87	2732	1,22	1895
0,18	3925	0,53	3467	0,88	2709	1,23	1872
0,19	3918	0,54	3448	0,89	2685	1,24	1849
0,20	0,3910	0,55	3429	0,90	0,2661	1,25	1826
0,21	3902	0,56	3410	0,91	2637	1,26	1804
0,22	3894	0,57	3391	0,92	2613	1,27	1781
0,23	3885	0,58	3372	0,93	2589	1,28	1758
0,24	3876	0,59	3352	0,94	2565	1,29	1736
0,25	3867	0,60	0,3332	0,95	2541	1,30	0,1714
0,26	3857	0,61	3312	0,96	2516	1,31	1691
0,27	3847	0,62	3292	0,97	2492	1,32	1669
0,28	3836	0,63	3271	0,98	2468	1,33	1647
0,29	3825	0,64	3251	0,99	2444	1,34	1626
0,30	0,3814	0,65	3230	1,00	0,2420	1,35	1604
0,31	3802	0,66	3209	1,01	2396	1,36	1582
0,32	3790	0,67	3187	1,02	2371	1,37	1561

1	2	3	4	5	6	7	8
0,33	3778	0,68	3166	1,03	2347	1,38	1539
0,34	3765	0,69	3144	1,04	2323	1,39	1518
1,40	0,1497	1,79	0804	2,18	0371	2,57	0147
1,41	1476	1,80	0,0790	2,19	0363	2,58	0143
1,42	1456	1,81	0775	2,20	0,0355	2,59	0139
1,43	1435	1,82	0761	2,21	0347	2,60	0,0136
1,44	1415	1,83	0748	2,22	0339	2,61	0132
1,45	1394	1,84	0734	2,23	0332	2,62	0129
1,46	1374	1,85	0721	2,24	0325	2,63	0126
1,47	1354	1,86	0707	2,25	0317	2,64	0122
1,48	1334	1,87	0694	2,26	0310	2,65	0119
1,49	1315	1,88	0681	2,27	0303	2,66	0116
1,50	0,1295	1,89	0669	2,28	0297	2,67	0113
1,51	1276	1,90	0,0656	2,29	0297	2,68	0110
1,52	1257	1,91	0644	2,30	0,0283	2,69	0107
1,53	1238	1,92	0632	2,31	0277	2,70	0,0104
1,54	1219	1,93	0620	2,32	0270	2,71	0101
1,55	1200	1,94	0608	2,33	0264	2,72	0099
1,56	1182	1,95	0596	2,34	0258	2,73	0096
1,57	1163	1,96	0584	2,35	0252	2,74	0093
1,58	1145	1,97	0573	2,36	0246	2,75	0091
1,59	1127	1,98	0562	2,37	0241	2,76	0088
1,60	0,1109	1,99	0551	2,38	0235	2,77	0086
1,61	1092	2,00	0,0540	2,39	0229	2,78	0084
1,62	1074	2,01	0529	2,40	0,0224	2,79	0081
1,63	1057	2,02	0519	2,41	0219	2,80	0,0079
1,64	1040	2,03	0508	2,42	0213	2,81	0077
1,65	1023	2,04	0498	2,43	0208	2,82	0075
1,66	1006	2,05	0488	2,44	0203	2,83	0073
1,67	0989	2,06	0478	2,45	0198	2,84	0071
1,68	0973	2,07	0468	2,46	0194	2,85	0069
1,69	0957	2,08	0459	2,47	0184	2,86	0067
1,70	0,0940	2,09	0449	2,48	0184	2,87	0065
1,71	0925	2,10	0,0440	2,49	0180	2,88	0063
1,72	0909	2,11	0431	2,50	0,0175	2,89	0061
1,73	0893	2,12	0422	2,51	0171	2,90	0,0060
1,74	0878	2,13	0413	2,52	0167	2,91	0058

1	2	3	4	5	6	7	8
1,75	0863	2,14	0404	2,53	0163	2,92	0056
1,76	0848	2,15	0396	2,54	0158	2,93	0055
1,77	0833	2,16	0387	2,55	0154	2,94	0053
1,78	0818	2,17	0379	2,56	0151	2,95	0051
2,96	0050	3,22	0022	3,48	0009	3,73	0004
2,97	0048	3,23	0022	3,49	0009	3,74	0004
2,98	0047	3,24	0021	3,50	0009	3,75	0004
2,99	0046	3,25	0020	3,51	0008	3,76	0003
3,00	0,0044	3,26	0020	3,52	0008	3,77	0003
3,01	0043	3,27	0019	3,53	0008	3,78	0003
3,02	0042	3,28	0018	3,54	0008	3,79	0003
3,03	0040	3,29	0018	3,55	0007	3,80	0003
3,04	0039	3,30	0017	3,56	0007	3,81	0003
3,05	0038	3,31	0017	3,57	0007	3,82	0003
3,06	0037	3,32	0016	3,58	0007	3,83	0003
3,07	0036	3,33	0016	3,59	0006	3,84	0003
3,08	0035	3,34	0015	3,60	0,0006	3,85	0002
3,09	0034	3,35	0015	3,61	0006	3,86	0002
3,10	0,0033	3,36	0014	3,62	0006	3,87	0002
3,11	0032	3,37	0014	3,63	0005	3,88	0002
3,12	0031	3,38	0013	3,64	0005	3,89	0002
3,13	0030	3,39	0013	3,65	0005	3,90	0,0002
3,14	0029	3,40	0,0012	3,66	0005	3,91	0002
3,15	0028	3,41	0012	3,67	0005	3,92	0002
3,16	0027	3,42	0012	3,67	0005	3,93	0002
3,17	0026	3,43	0011	3,68	0005	3,94	0002
3,18	0025	3,44	0011	3,69	0005	3,95	0002
3,19	0025	3,45	0010	3,70	0,0004	3,96	0002
3,20	0,0024	3,46	0010	3,71	0004	3,97	0002
3,21	0023	3,47	0010	3,72	0004	3,98	0001

Значення функції $\Phi(x) = 1/\sqrt{2\pi}\int_0^x \exp\{-x^2/2\}dx$

x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$	x	$\Phi(x)$
1	2	3	4	5	6	7	8
0,00	0,0000	0,39	1517	0,78	2823	1,17	3790
0,01	0040	0,40	0,1554	0,79	2852	1,18	3810
0,02	0080	0,41	1591	0,80	0,2881	1,19	3830
0,03	0120	0,42	1628	0,81	2910	1,20	0,3849
0,04	0160	0,43	1664	0,82	2939	1,21	3869
0,05	0199	0,44	1700	0,83	2967	1,22	3883
0,06	0239	0,45	1736	0,84	2995	1,23	3907
0,07	0279	0,46	1772	0,85	3023	1,24	3925
0,08	0319	0,47	1808	0,86	3051	1,25	3944
0,09	0359	0,48	1844	0,87	3078	1,26	3962
0,10	0,0398	0,49	1879	0,88	3106	1,27	3980
0,11	0468	0,50	0,1915	0,89	3133	1,28	3997
0,12	0478	0,51	1950	0,90	0,3159	1,29	4015
0,13	0517	0,52	1985	0,91	3186	1,30	0,4032
0,14	0557	0,53	2019	0,92	3212	1,31	4049
0,15	0596	0,54	2054	0,93	3238	1,32	4066
0,16	0636	0,55	2088	0,94	3264	1,33	4082
0,17	0675	0,56	2123	0,95	3289	1,34	4099
0,18	0714	0,57	2157	0,96	3315	1,35	4115
0,19	0753	0,58	2190	0,97	3340	1,36	4131
0,20	0,0793	0,59	2224	0,98	3365	1,37	4147
0,21	0832	0,60	0,2257	0,99	3389	1,38	4162
0,22	0871	0,61	2291	1,00	0,3413	1,39	4177
0,23	0910	0,62	2324	1,01	3438	1,40	0,4192
0,24	0948	0,63	2357	1,02	3461	1,41	4222
0,25	0987	0,64	2389	1,03	3485	1,42	4236
0,26	1026	0,65	2422	1,04	3508	1,43	4251
0,27	1064	0,66	2454	1,05	3531	1,44	4265
0,28	1103	0,67	2486	1,06	3554	1,45	4279
0,29	1141	0,68	2517	1,07	3577	1,46	4292
0,30	0,1179	0,69	2549	1,08	3599	1,47	4306
0,31	1217	0,70	0,2580	1,09	3621	1,48	4319
0,32	1255	0,71	2611	1,10	0,3643	1,49	0,4332
0,33	1293	0,72	2642	1,11	3665	1,50	4345
0,34	1331	0,73	2673	1,12	3686	1,51	4357
0,35	1368	0,74	2703	1,13	3708	1,52	4370
0,36	1406	0,75	2734	1,14	3729	1,53	4382
0,37	1443	0,76	2764	1,15	3749	1,54	4394
0,38	1480	0,77	2794	1,16	3770	1,55	4406

Закінчення додатка Б

1	2	3	4	5	6	7	8
1,56	0,4406	1,81	0,4649	2,12	0,4830	2,62	0,4956
1,57	4418	1,82	4656	2,14	4838	2,64	4959
1,58	4429	1,83	4664	2,16	4846	2,66	4961
1,59	4441	1,84	4671	2,18	4854	2,68	4963
1,60	0,4452	1,85	4678	2,20	4861	2,70	0,4965
1,61	4463	1,86	4686	2,22	4868	2,72	4967
1,62	4474	1,87	4693	2,24	4875	2,74	4969
1,63	4484	1,88	4699	2,26	4881	2,76	4971
1,64	4495	1,89	4706	2,28	4887	2,78	4973
1,65	4505	1,90	0,4713	2,30	0,4893	2,80	4974
1,66	4515	1,91	4719	2,32	4898	2,82	4976
1,67	4525	1,92	4726	2,34	4904	2,84	4977
1,68	4535	1,93	4732	2,36	4909	2,86	4979
1,69	4545	1,94	4738	2,38	4913	2,88	4980
1,70	0,4554	1,95	4744	2,40	4916	2,90	0,4981
1,71	4564	1,96	4750	2,42	4922	2,92	4982
1,72	4573	1,97	4756	2,44	4927	2,94	4984
1,73	4582	1,98	4761	2,46	4931	2,96	4985
1,74	4591	1,99	4767	2,48	4934	2,98	4986
1,75	4599	2,00	0,4772	2,50	4938	3,00	49865
1,76	4608	2,02	4783	2,52	4941	3,20	49931
1,77	4616	2,04	4793	2,54	4945	3,34	49966
1,78	4625	2,06	4803	2,56	4948	3,60	49984
1,79	4633	2,08	4812	2,58	4951	3,80	49993
1,80	0,4641	2,10	4821	2,60	0,4953	4,00	49997

Критичні точки розподілу Стьюдента

Рівень значущості α (двостороння критична область)				
Число степенів свободи k	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}02$	$\alpha = 0{,}05$	$\alpha = 0{,}1$
1	63,7	31,82	12,7	6,31
2	9,92	6,97	4,30	2,92
3	5,84	4,54	3,18	2,35
4	4,60	3,75	2,78	2,13
5	4,03	3,37	2,57	2,01
6	3,71	3,14	2,45	1,94
7	3,50	3,00	2,36	1,89
8	3,36	2,90	2,31	1,86
9	3,25	2,82	2,26	1,83
10	3,17	2,76	2,23	1,81
11	3,11	2,72	2,20	1,80
12	3,05	2,68	2,18	1,78
13	3,01	2,65	2,16	1,77
14	2,98	2,62	2,14	1,76
15	2,95	2,60	2,13	1,75
16	2,92	2,58	2,12	1,75
17	2,90	2,57	2,11	1,74
18	2,88	2,55	2,10	1,73
19	2,86	2,54	2,09	1,73
20	2,85	2,53	2,09	1,73
21	2,83	2,52	2,08	1,72
22	2,82	2,51	2,07	1,72
23	2,81	2,50	2,07	1,71
24	2,80	2,49	2,06	1,71
25	2,79	2,49	2,06	1,71
26	2,78	2,48	2,06	1,71
27	2,77	2,47	2,05	1,71
28	2,76	2,46	2,05	1,70
30	2,75	2,46	2,04	1,70
40	2,70	2,42	2,02	1,68
60	2,66	2,39	2,00	1,67
120	2,62	2,36	1,98	1,66
∞	2,58	2,33	1,96	1,64
k	$\alpha = 0{,}005$	$\alpha = 0{,}01$	$\alpha = 0{,}025$	$\alpha = 0{,}05$
Рівень значущості α (одностороння критична область)				

Критичні точки розподілу *F* Фішера – Снедекора

(k_1 – кількість ступенів свободи більшої дисперсії,
k_2 – кількість ступенів свободи меншої дисперсії)
за рівня значущості $\alpha = 0,05$

k_2	k_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	161	200	216	225	230	234	237	239	241	242	243	244
2	18,5	19,0	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,4	19,4	19,4	19,4
3	10,1	9,55	9,28	9,13	9,01	8,94	8,88	8,84	8,81	8,78	8,76	8,74
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,93	5,91
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,78	4,74	4,70	4,68
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,03	4,00
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,63	3,60	3,57
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,34	3,31	3,28
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,13	3,10	3,07
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,97	2,94	2,91
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,86	2,82	2,79
12	4,75	3,88	3,49	3,26	3,11	3,00	2,92	2,85	2,80	2,76	2,72	2,69
13	4,67	3,80	3,41	3,18	3,02	2,92	2,84	2,77	2,72	2,67	2,63	2,60
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,77	2,70	2,65	2,60	2,56	2,53
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,70	2,64	2,59	2,55	2,51	2,48
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,45	2,42
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,62	2,55	2,50	2,45	2,41	2,38
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,52	2,45	2,40	2,35	2,31	2,28
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,43	2,36	2,30	2,26	2,22	2,18
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,34	2,27	2,21	2,16	2,12	2,09
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,07	2,04	2,00
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,02	1,98	1,95
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,01	1,97	1,93	1,89
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,30	2,19	2,10	2,03	1,97	1,92	1,88	1,85
200	3,89	3,04	2,65	2,41	2,26	2,14	2,05	1,98	1,92	1,87	1,83	1,80
400	3,86	3,02	2,62	2,39	2,23	2,12	2,03	1,96	1,90	1,85	1,81	1,78
∞	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	2,01	1,94	1,88	1,83	1,79	1,75

Критичні точки розподілу *F* Фішера – Снедекора

(k_1 – кількість ступенів свободи більшої дисперсії,
k_2 – кількість ступенів свободи меншої дисперсії)
за рівня значущості $\alpha = 0{,}01$

k_2	k_1								
	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	4052,2	4999,5	5403,3	5624,6	5763,7	5859,0	5928,3	5981,6	6022,5
2	98,503	99,000	99,166	99,249	99,299	99,332	99,356	99,374	99,388
3	34,116	30,817	29,457	28,710	28,237	27,911	27,672	27,489	27,345
4	21,198	18,000	16,694	15,977	15,522	15,207	14,976	14,799	14,659
5	16,258	13,274	12,060	11,392	10,967	10,672	10,456	10,289	10,158
6	13,745	10,925	9,780	9,148	8,746	8,466	8,260	8,102	7,976
7	12,246	9,547	8,451	7,847	7,160	7,191	6,993	6,840	6,719
8	11,259	8,649	7,591	7,006	6,632	6,371	6,178	6,029	5,911
9	10,561	8,022	6,992	6,422	6,057	5,802	5,613	5,467	5,351
10	10,044	7,559	6,552	5,994	5,636	5,386	5,200	5,057	4,942
11	9,646	7,206	6,217	5,668	5,316	5,069	4,865	4,745	4,632
12	9,330	6,927	5,953	5,412	5,064	4,812	4,640	4,499	4,388
13	9,074	6,701	5,739	5,205	4,862	4,620	4,441	4,302	4,191
14	8,862	6,515	5,564	5,035	4,695	4,456	4,278	4,140	4,030
15	8,683	6,359	5,417	4,893	4,556	4,318	4,142	4,005	3,895
16	8,531	6,226	5,292	4,773	4,437	4,202	4,026	3,890	3,780
17	8,400	6,112	5,185	4,669	4,336	4,102	3,927	3,791	3,682
18	8,285	6,013	5,092	4,579	4,248	4,015	3,841	3,705	3,597
19	8,185	5,926	5,010	4,500	4,171	3,939	3,765	3,631	3,523
20	8,096	5,849	4,938	4,431	4,103	3,871	3,699	3,564	3,457
21	8,017	5,780	4,874	4,369	4,042	3,812	3,640	3,506	3,398
22	7,945	5,719	4,817	4,313	3,988	3,758	3,587	3,453	3,346
23	7,881	5,664	4,765	4,264	3,939	3,710	3,539	3,406	3,299
24	7,823	5,614	4,718	4,218	3,895	3,667	3,496	3,363	3,256
25	7,770	5,568	4,676	4,177	3,865	3,627	3,457	3,324	3,217
26	7,721	5,526	4,637	4,140	3,818	3,591	3,421	3,288	3,182
27	7,677	5,488	4,601	4,106	3,785	3,558	3,388	3,256	3,149
28	7,636	5,453	4,568	4,074	3,754	3,528	3,358	3,226	3,120
29	7,598	5,421	4,538	4,045	3,725	3,500	3,330	3,198	3,092
30	7,568	5,390	4,510	4,018	3,699	3,474	3,305	3,173	3,067
40	7,314	5,179	4,313	3,828	3,514	3,291	3,124	2,993	2,888
60	7,077	4,977	4,126	3,649	3,339	3,119	2,953	2,823	2,719
120	6,851	4,787	3,949	3,480	3,174	2,956	2,792	2,663	2,559
∞	6,635	4,605	3,782	3,319	3,017	2,802	2,639	2,511	2,407

Додаток Д

Значення $q = q(\gamma, n)$

n	γ			n	γ		
	0,95	0,99	0,999		0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	150	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Додаток Е

Критичні точки розподілу χ^2 в залежності від рівня значущості і кількості ступенів свободи

Кількість ступенів свободи *k*	Рівень значущості α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,89
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,0009	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Малярець Людмила Михайлівна
Шевченко Олександра Кирилівна
Мартинова Олена Вадимівна

ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА

Навчальний посібник
для студентів спеціальності
232 "Соціальне забезпечення"
першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Відповідальний редактор *О. С. Вяткіна*

Редактор *Н. І. Ганцевич*

Коректор *Н. І. Ганцевич*

План 2021 р. Поз. № 2-ЕНП. Обсяг 201 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.