DOI: 10.26565/2310-9513-2021-13-06
УДК 313.42

ДИНАМІКА ЕКСПОРТНО-ІМПОРТНОЇ ВЗАЄМОДІЇ*

Воронін Анатолій Віталійович
канд. техн. наук, доцент
кафедра вищої математики та економіко-математичних методів
Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця
проспект Науки 9а, м. Харків, Україна, 61166
e-mail: anatolii.voronin@m.hneu.edu.ua
ORCID http://orcid.org/0000-0003-2570-0508
Железнякова Еліна Юріївна
канд. фіз.-мат.наук, доцент
кафедра вищої математики та економіко-математичних методів
Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця
проспект Науки 9а, м. Харків, Україна, 61166
e-mail: elina.zhelezniakova@m.hneu.edu.ua
ORCID http://orcid.org/0000-0001-6409-4761

Ця робота присвячена динамічній інтерпретації базових положень кількісної теорії грошей. А саме, побудові моделей цінових змін на товарну продукцію при виконанні експортно-імпортної діяльності як у дискретному, так і у неперервному часі. При цьому використано цілу низку гіпотез, що визначають умови порушення рівноважних станів торговельного балансу за допомогою класичного макроекономічного рівняння Фішера. Наведено огляд наукових праць, який виділяє основні чинники для реалізації зовнішньоекономічної діяльності: валютні курси та девальвація. Аналіз розглянутих джерел свідчить про наявність проблеми стійкості спостерігаємих динамічних процесів в околі стану рівноваги, які мають традиційну назву умови Маршала-Лернера. Докладне вивчення критеріїв стійкості дискретної динамічної моделі с квадратичною нелінійністю демонструє значний багатовид траєкторій досліджуваного процесу. Такими, зокрема, є зростаюча або спадна аперіодична поведінка, коливальні процеси фіксованого періоду, біфуркації подвоєння періоду та хаотичні траєкторії. Зазначені границі розподілу різноманітних типів еволюційних змін у термінах еластичностей як важливих показників експортно-імпортних операцій. Для моделей динаміки ціноутворення у неперервному часі був виконаний докладний аналіз структурної нестійкості рівноважних станів. Виділено сідло-вузлову біфуркацію та не менш важливу біфуркацію Андронова-Хопфа, що пов'язана з утворенням навколо стану рівноваги граничного циклу. Доведено, що знайдений цикл є єдиним та стійким. Для дискретної моделі формування ціни виконано відповідні розрахунки для демонстрації різних видів еволюційної поведінки. Надана дискретна модель на базі рівняння Фішера може бути використана для якісного прогнозування (за траєкторіями) динаміки внутрішнього ціноутворення без застосування традиційної методології економетричного аналізу часових рядів. Для цієї моделі характерним є те, що вона зведена до єдиного комплексного параметра і це суттєво спрощує визначення відповідних типів динамічних режимів в околі рівноважних станів.

Ключові слова: динамічна модель, теорія стійкості, біфуркація, різницеве рівняння.

Класична трактовка кількісної теорії грошей базується на таких поняттях як швидкість обертання грошей, кількість грошей у обертанні, абсолютний рівень цін та реальний рівень виробництва. У сучасній економічній літературі існує змістовний феноменологічний опис структури формування внутрішніх цін на товари та послуги, який формується за рахунок вивчення динамічних властивостей грошових потоків за умовами реалізації експортно-імпортної діяльності. При цьому важливим є показник торговельного балансу, знак якого визначає напрямок цінових змін. Динаміка вищеозначеного процесу є досить складною, де найбільш важливою проблемою є стійкість рівноважного стану за умовою цінових коливань.

Аналіз досліджень та публікацій. Багато наукових праць за цією проблематикою стосується впливу валютних курсів на торговельний баланс держави. Особлива увага приділяється ефекту девальвації як важливому чиннику, що ініціює зменшення імпортних операцій та зростання обсягу експорту. Серед публікацій з відповідними теоретичними

* ***Cite as***: Voronin A., Zhelezniakova E. (2021). Gender Policy of the European Union in Ukraine: New Trends and Constant Challenges, *The Journal of V. N. Karazin Kharkiv National University. Series: International Relations. Economics. Country Studies. Tourism.* 13, 60-69. https://doi.org/10.26565/2310-9513-2021-13-06

постулатами треба відзначити наукові праці з обґрунтованим статистичним аналізом досліджуваної проблеми. Насамперед треба вказати на наукові досягнення таких вчених як Дербенцев В. Д., Кучеренко С. А. [6], Василенко Ю. [2], Шевчук В. [11], Михайличенко С. Ю. [8], Харенко К. М. [9], Шаповаленко Н. В. [10], Шкрабаренко Ю. М. [12].

Аналіз використаних джерел демонструє наявність так званої «умови Маршала-Лернера» [16,17], яка є визначальним критерієм стійкої поведінки цінової динаміки в околі рівноважного стану торговельного балансу.

Метою роботи є удосконалення умов структурної стійкості досліджуваних динамічних моделей кількісної теорії грошового обертання.

Методи дослідження базуються на математичній теорії стійкості динамічних систем як у дискретному так і у неперервному часі.

Основні результати дослідження. Базова математична модель для динаміки внутрішньої ціни будується за допомогою класичного макроекономічного рівняння Фішера [13]. При цьому необхідно зазначити виконання деяких умов:

1) розглянуто схему вільної торгівлі без впливу урядових установ та монопольних агентів;
2) рівень національного доходу вважається наданим та ціновий показник визначається на базі кількісної теорії грошового обертання;
3) упродовж розглянутого періоду часу зміни у пропозиції грошової маси зумовлено тільки надлишком або дефіцитом торговельного балансу;
4) діє припущення щодо фіксованості обмінних валютних курсів, яке дозволяє вважати їх одиничними заради уніфікації міжнародних розрахунків;
5) транспортні та страхові витрати, інші трансакції не враховуються.

В роботі використано наступні позначення [3, 4]: Q – пропозиція грошей; V – швидкість обертання грошей; Y – рівень національного доходу; P – показник внутрішньої ціни; P_M – показник зовнішньої ціни; M – кількість імпорту; X – кількість експорту. Вважаємо, що V, Y, P_M є сталими величинами.

Класичне рівняння моделі Фішера має вигляд

$$Q \cdot V = P \cdot Y . \tag{1}$$

Стосовно обсягу експорту необхідно зауважити, що він $X = X(P)$ є спадною функцією внутрішньої ціни $\frac{dX}{dP} < 0$, а обсяг імпорту $M = M(P)$ навпаки є зростаючою функцією внутрішньої ціни $\frac{dM}{dP} > 0$.

Співвідношення $P \cdot X(P) - P_M \cdot M(P) = 0$ визначає умову рівноваги торговельного балансу і вважається, що існують додатні розв'язки цього алгебраїчного рівняння для внутрішньої ціни P^*.

Порушення рівноважного стану супроводжується зміною пропозиції грошової маси та може бути надано за допомогою рівняння:

$$\Delta Q_k = P_k \cdot X(P_k) - P_M \cdot M(P_k) , \tag{2}$$

де k – дискретний момент часу, P_k – внутрішня ціна у відповідний момент часу, $\Delta Q_k = Q_{k+1} - Q_k$.

Відповідно до формули (1) легко отримати

$$\Delta P_k = \frac{V}{Y} \Delta Q_k , \ \Delta P_k = P_{k+1} - P_k . \tag{3}$$

Поєднуючи (2) та (3), знаходимо різницеве рівняння для внутрішньої ціни P_k :

$$\Delta P_k = \frac{V}{Y} \left(P_k \cdot X(P_k) - P_M \cdot M(P_k) \right) . \tag{4}$$

Не порушуючи цілісності, припустимо, що функції експорту $X(P)$ та імпорту $M(P)$ є лінійними по відношенню до внутрішньої ціни P :

$$\begin{aligned} X(P) &= X_0 - X_1 P, \\ M(P) &= M_0 + M_1 P. \end{aligned} \tag{5}$$

X_0, X_1, M_0, M_1 є додатними числами. Також тут виконуються умови щодо функції експорту, яка є спадною, та зростання функції імпорту за внутрішньою ціною.

Якщо виконати підстановку (5) у різницеве рівняння (4), то отримаємо таке рекурентне співвідношення для P_k :

$$P_{k+1} = P_k + \frac{V}{Y} \left[P_k \cdot (X_0 - X_1 P_k) - P_M \cdot (M_0 + M_1 P_k) \right]$$

або (6)

$$P_{k+1} = P_k - \frac{V}{Y} \left[X_1 P_k^2 - (X_0 - P_M M_1) P_k + P_M \cdot M_0 \right].$$

Умови існування рівноважних станів (стаціонарних точок) рівняння (6) визначаються за допомогою квадратного рівняння:

$$X_1 P^2 - (X_0 - P_M M_1) P + P_M \cdot M_0 = 0 , \tag{7}$$

корені якого такі:

$$P_{1,2}^* = \frac{X_0 - P_M M_1 \pm D}{2 X_1}, \quad P_1^* < P_2^*,$$

$$D^2 = (X_0 - P_M M_1)^2 - 4 X_1 P_M M_0 .$$

Рівняння (7) може мати додатні корені, якщо $X_0 - P_M M_1 > 0$.

При цьому можливі такі варіанти:

1) $P_1^* \neq P_2^*$, $(X_0 - P_M M_1)^2 > 4 X_1 P_M M_0$;
2) $P_1^* = P_2^*$, $(X_0 - P_M M_1)^2 = 4 X_1 P_M M_0$;

3) Не існує дійсних розв'язків (7), $\left(X_0 - P_M M_1\right)^2 < 4X_1 P_M M_0$.

Будемо вважати найбільш вірогідною реалізацією першого варіанту за наявністю двох рівноважних станів $P_1^*, P_2^* > 0$.

Для подальшого аналізу поведінкових властивостей рекурентного рівняння (6) запровадимо нову змінну $\tilde{P}_k = P_k - P_1^*$, яка є відхиленням внутрішньої ціни від першого рівноважного стану. Визначимо $X^* = X_0 - X_1 P_1^*$ та $M^* = M_0 + M_1 P_1^*$ як відповідні значення експорту та імпорту у рівноважному стані P_1^* $\left(X^* = M^*\right)$.

У нових позначеннях рекурентне рівняння (6) з урахуванням необхідних перетворень набуває такий вигляд:

$$\tilde{P}_{k+1} = \left[1 + \frac{VX^*}{Y}\left(1 - \frac{X_1 P_1^*}{X^*} - \frac{P_M M_1}{X^*}\right)\right]\tilde{P}_k - X_1 \tilde{P}_k^2 . \quad (8)$$

Якщо ввести поняття еластичності функції експорту за ціною $\eta_X = \dfrac{X_1 P_1^*}{X^*}$ та відповідно функції імпорту $\eta_M = \dfrac{P_M M_1}{M^*}$ і враховуючи, що $X^* = M^*$, то рівняння (8) трансформується таким чином:

$$\tilde{P}_{k+1} = \left[1 + \frac{VX^*}{Y}\left(1 - \eta_X - \eta_M\right)\right]\tilde{P}_k - \frac{VX_1}{Y}\tilde{P}_k^2 . \quad (9)$$

З квадратного рівняння (7) нескладно довести, що

$$X^*\left(1 - \eta_X - \eta_M\right) = X^* - X_1 P_1^* - P_M M_1 = D .$$

Таким чином рівняння (9) перетворюється на

$$\tilde{P}_{k+1} = \left(1 + \frac{VD}{Y}\right)\tilde{P}_k - \frac{VX_1}{Y}\tilde{P}_k^2 . \quad (10)$$

Вираз (10) є рекурентне квадратичне рівняння, яке за допомогою лінійної заміни змінної $\tilde{P}_k = \dfrac{Y + VD}{VX_1} u_k$ перетворюється у класичну форму рекурентного логістичного рівняння:

$$u_{k+1} = \alpha u_k \left(1 - u_k\right), \quad (11)$$

$$\alpha = 1 + \frac{VD}{Y} = 1 + \frac{VX^*}{Y}\left(1 - \eta_X - \eta_M\right). \quad (12)$$

Аналіз цього нелінійного рівняння, розв'язок якого може бути отриманий у результаті послідовних ітерацій квадратичної функції, є достатньо нетривіальним. Траєкторії мають такий різноманітний характер, що у змозі ілюструвати значний набір еволюційних змін у досліджуваному об'єкті. Розв'язками можуть бути послідовності, які зростають або спадають, а також осциляційні процеси довільного періоду. Можливі також розв'язки, в яких деякий час не спостерігається ніякої закономірності, щоб потім перетворитися у сталу або періодичну послідовність. Також існує і така динамічна поведінка, у якої немає ніяких проявів регулярності [1].

Рекурентне рівняння (11) має дві нерухомі точки (рівноважні стани):

$$u_1^* = 0, \; u_2^* = 1 - \frac{1}{\alpha} .$$

Позначимо праву частину рівняння (11) через

$$f(u) = \alpha u (1 - u),$$

та знайдемо її похідну $f'(u)$:

$$f'(u) = \alpha(1 - 2u).$$

У нерухомій точці $u_1 = 0$ похідна

$$f'(u) = f'(0) = \alpha .$$

Вважаючи α додатною величиною, отримаємо умову стійкості тривіального рівноважного стану $u_1 = 0$. Ця умова існує, якщо $0 < \alpha < 1$. З урахуванням (12) отримаємо:

$$\eta_X + \eta_M > 1 . \quad (13)$$

Нерівність (13) і є так званою умовою Маршала-Лернера [16].

За властивостями логістичного рівняння (11) має сенс розглядати значення α тільки на інтервалі $0 \le \alpha \le 4$ [1, 7]. Тому можна вважати нерухому точку $u_1 = 0$ стійкою при $0 \le \alpha < 1$ та нестійкою якщо

$$1 \le \alpha < 4 . \quad (14)$$

У іншій нерухомій точці $u_2 = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$ похідна $f'(u_2)$ має вигляд

$$f'(u_2) = f'\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right) = 2 - \alpha .$$

Умовою стійкості точки $u_2 = 1 - \dfrac{1}{\alpha}$ є нерівність $|2 - \alpha| < 1$, яка рівнозначна виразу $1 < \alpha < 3$.

Також, користуючись формулою (12) перетворимо подвійну нерівність (14) до іншої форми

$$1 - \frac{2Y}{VX^*} < \eta_X + \eta_M < 1 . \quad (15)$$

Стійкості точки u_2 не існує, якщо $0 < \alpha < 1$ та $3 < \alpha < 4$.

Узагальнемо властивості розв'язків рівняння (11) згідно [1, 7] у випадку $0 < \alpha \le 4$.

1) Якщо $0<\alpha\le 1$, то існує тільки єдина нерухома точка $u_1=0$, яка є стійкою.

2) У випадку $1<\alpha\le 3$ нерухома точка точка $u_1=0$ втрачає стійкість, а друга точка $u_2=1-\dfrac{1}{\alpha}$ стійка. Значення $\alpha=2$ є границею між монотонними та періодичними стійкими траєкторіями.

3) При $3\le\alpha\le 1+\sqrt{6}$ обидві точки u_1 та u_2 є нестійкими, але з'являється притягувальний цикл періоду 2, сформований з двох точок

$$u^1,u^2=\frac{\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-2\alpha-3}}{2\alpha}.$$

4) Якщо $1+\sqrt{6}\le\alpha<3{,}569...$, то всі задані точки u_1, u_2, u^1,u^2 є нестійкими, але з'являється притягувальний цикл періоду 4. Далі відбувається послідовне подвоєння періоду циклів – 8, 16, … до граничного $\alpha=3{,}569...$.

5) При $3{,}569\le\alpha<3{,}83$ усі нерухомі точки та цикли є нестійкими.

6) Якщо $3{,}83<\alpha<4$, то з'являються коливальні розв'язки довільного періоду. Наприклад періоду 3.

7) При $\alpha=4$ з'являються так звані хаотичні послідовності, суттєво залежні від початкових значень (11).

Треба зауважити, що при $\alpha=4$ існує аналітичний розв'язок рівняння (11), яке має наступний вигляд:

$$u_{k+1}=4u_k\left(1-u_k\right). \qquad (16)$$

Розв'язком (16) є

$$u_k=\sin^2\left(2^n\cdot\arcsin\sqrt{u_0}\right) \qquad (17)$$

де $u_0\in[0;1]$ початкове значення $(k=0)$.

Також рівняння (16) має дві нерухомі точки:

$$u_1=0,\ u_2=\frac{3}{4}.$$

Інша формула для розв'язку (16) існує у формі поліномів Чебишева [5].

Заради спрощення економічної інтерпретації отриманих результатів доцільно зменшити кількість параметрів базової математичної моделі (6)-(11). Нехай $\eta=\eta_X+\eta_M$ є сумарною еластичністю експорту та імпорту, а параметр $\xi=\dfrac{Y}{VX^*}$ характеризує відношення величини національного доходу до відповідного значення експорту в умовах рівноваги торговельного балансу. У нових позначеннях параметр α дорівнює:

$$\alpha=1+\frac{1-\eta}{\xi}, \qquad (18)$$

де α,η,ξ – безрозмірні величини.

Якщо розглядати деякий фіксований інтервал відносно α, наприклад, $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$, який характеризує відповідну динамічну поведінку для рівняння (11), то він може бути перетворений у термінах η і ξ:

$$1-(\alpha_2-1)\xi<\eta<1-(\alpha_1-1)\xi, \qquad (19)$$

де α_1, α_2 – задані числа.

Враховуючи, що α змінюється у межах $0<\alpha\le 4$, отримаємо

$$1-3\xi<\eta<1+\xi. \qquad (20)$$

Також є необхідним надати інтерпретацію існування другого рівноважного стану рівняння (11) $u_2^*=1-\dfrac{1}{\alpha}$. За допомогою (18) формула для u_2^* буде такою:

$$u_2^*=\frac{1-\eta}{\xi+1-\eta}.$$

Для того, щоб u_2^* будо додатним числом необхідно виконання умови $\eta<1$. Це не задовольняє умовам Маршала-Лернера, але підтверджує результати попереднього аналізу стійкості другого стану рівноваги (15), яке трансформується до вигляду:

$$1-2\xi<\eta<1.$$

На рис. 1 – 6 наведено графічні ілюстрації вищеозначеного аналізу якісних властивостей логістичного рівняння (11) при різних значеннях α та відповідних початкових умовах.

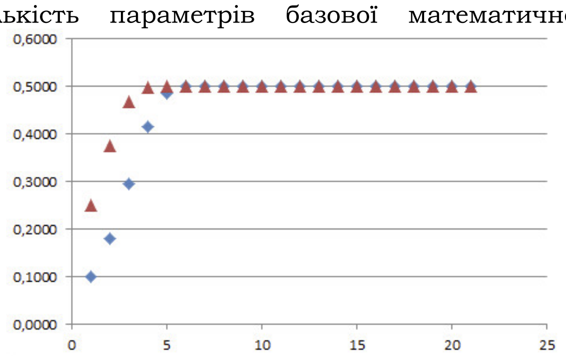

Рис.1. Стійка рівновага тривіального стану
$\alpha=1$; $u_0=0{,}1$; $u_0=0{,}25$

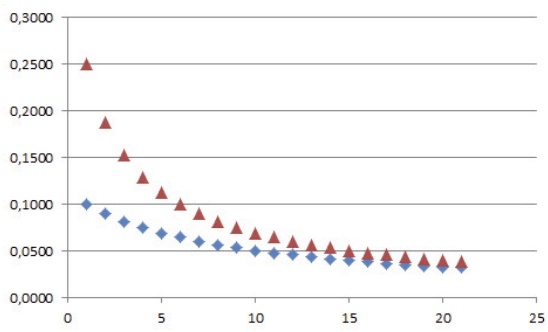

Рис.2. Лімітаційний рух в околі тривіального стану рівноваги
$\alpha=2$; $u_0=0{,}1$; $u_0=0{,}25$

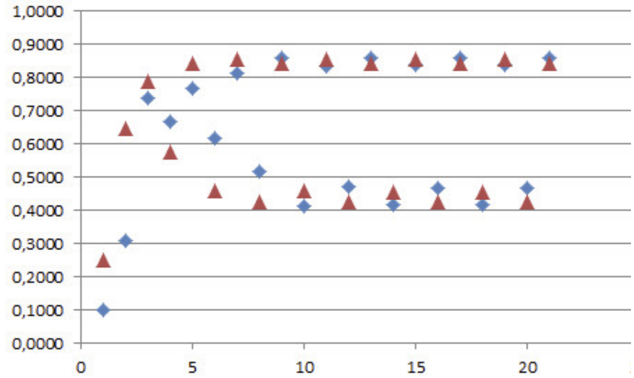

Рис.3. Регулярні коливання в околі нетривіальної рівноваги

$\alpha = 3$; $u_0 = 0,1$; $u_0 = 0,25$

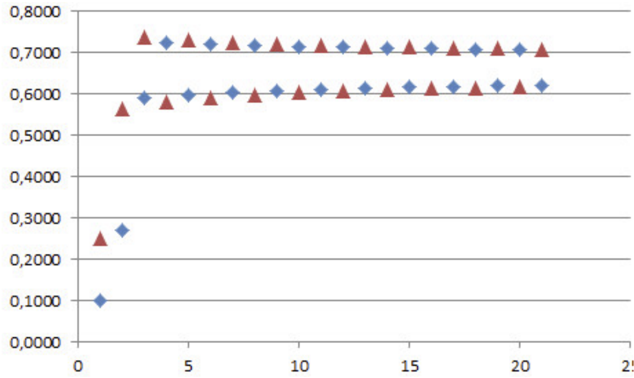

Рис.4. Притягувальний цикл періоду 2

$\alpha = 1+\sqrt{6}$; $u_0 = 0,1$; $u_0 = 0,25$

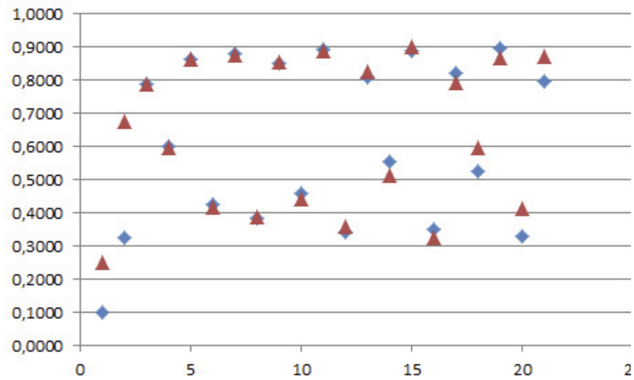

Рис.5. Осциляційні режими довільного періоду

$\alpha = 3,6$; $u_0 = 0,1$; $u_0 = 0,25$

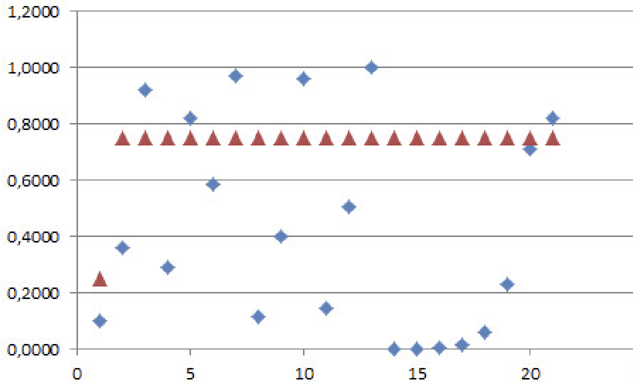

Рис.6. Динамічний хаос

$\alpha = 4$; $u_0 = 0,1$; $u_0 = 0,25$

Таким чином, якщо межами інтервалів для α є α_1 та α_2, то за допомогою формули (19) легко отримати відповідні межі для сумарної еластичності η, які будуть визначати інтервали існування різних типів динамічної поведінки рівняння (11), у тому числі й детермінованого хаосу.

Розглянемо процес формування внутрішньої ціни $P(t)$ у неперервному часі t. Припустимо, що порушення рівноваги торговельного балансу реалізується так:

$$\frac{dQ(t)}{dt} = P(t)X\big(P(t)\big) - P_M M\big(P(t)\big), \qquad (21)$$

де Q, P, X, M є вищеозначеними.

За допомогою диференціювання за змінною t співвідношення (1) маємо:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{V}{Y}\frac{dQ(t)}{dt}. \qquad (22)$$

З (21) та (22) можна отримати диференціальне рівняння для змінної ціни $P(t)$:

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{V}{Y}\Big(P(t)X\big(P(t)\big) - P_M M\big(P(t)\big)\Big). \qquad (23)$$

Якщо розглянути явні вирази функцій експорту та імпорту за формулами (5), то буде отримано диференціальне рівняння першого порядку з квадратичною нелінійністю:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{V}{Y}\left(-X_1P^2 + \left(X_0 - P_M M_1\right)P - P_M M_0\right). \qquad (24)$$

Виділяючи повний квадрат у правій частині та виконуючи необхідні перетворення, представимо диференціальне рівняння (24) у спрощеній формі:

$$\frac{d\bar{P}}{d\tau} = \mu - \bar{P}^2, \qquad (25)$$

$$\bar{P} = P - \frac{X_0 - P_M M_1}{2X_1}, \quad \mu = \left(\frac{X_0 - P_M M_1}{2X_1}\right)^2 - \frac{P_M M_0}{X_1},$$

$$\tau = \frac{VX_1}{Y}t.$$

Диференціальне рівняння (25) є модельним для сідловузлової біфуркації [14]. Наявність нерухомих точок (рівноважних станів) повністю визначається параметром μ.

Якщо $\mu > 0$, то існують дві нерухомі точки $\bar{P}_{1,2} = \pm\sqrt{\mu}$.

Якщо $\mu = 0$ є двократний нульовий корінь $\bar{P}_1 = \bar{P}_2 = 0$.

Якщо $\mu < 0$ нерухомих точок не існує.

Рівняння (25) має аналітичні розв'язки:

1) $\mu > 0$, $\bar{P}(\tau) = \sqrt{\mu}\tanh\left(\sqrt{\mu}\left(C_1 - \tau\right)\right)$,

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{\mu}} arc\tanh\frac{\bar{P}_0}{\sqrt{\mu}}; \quad (26.а)$$

2) $\mu = 0$, $\bar{P}(\tau) = \dfrac{\bar{P}_0}{1+\bar{P}\tau}$; (26.б)

3) $\mu < 0$, $\bar{P}(\tau) = \sqrt{-\mu}\, tg\left(\sqrt{-\mu}\left(C_2 - \tau\right)\right)$,

$$C_1 = \frac{1}{\sqrt{-\mu}} arctg\frac{\bar{P}_0}{\sqrt{-\mu}},\ \bar{P}(0) = \bar{P}_0. \quad (26.в)$$

При різних значеннях параметра μ розв'язки диференціального рівняння (25) суттєво відрізняються за своїми властивостями. Тому навіть при малих варіаціях μ в околі нуля відбувається якісна заміна еволюції ціни $\bar{P}(\tau)$, а розвиток ситуації можна бути продіагностувати методами якісної теорії динамічних систем без застосування складних комп'ютерних розрахунків [3].

Додатково розглянемо іншу ситуацію, коли рівновага торговельного балансу порушується з урахуванням ефекту післядії, тобто існує «динамічна пам'ять» процесу ціноутворення від початку $t = 0$ до поточного моменту часу t. Формально це може виглядати так:

$$\frac{dQ}{dt} = \int_0^t K(t-\tau)F\left(P(\tau)\right)d\tau, \quad (27)$$

$$F\left(P(\tau)\right) = P(t)X\left(P(t)\right) - P_M M\left(P(t)\right). \quad (28)$$

Функція $K(t-\tau)$ називається ядром інтегрального перетворення і є кількісною характеристикою так званої «динамічної пам'яті» досліджуваного процесу. Функція $K(t-\tau)$ є спадною функцією аргументу t.

Функція експортно-імпортного балансу (28) з урахуванням спів-відношень (5) має остаточний вигляд:

$$F(P) = -X_1P^2 + \left(X_0 - P_M M_1\right)P - P_M M_0. \quad (29)$$

Функцію $K(t-\tau)$ виберемо, наприклад, в операторній формі фільтру другого порядку:

$$K(\lambda) = \frac{b\lambda + a_0}{\lambda^2 + a_1\lambda + a_0}, \quad (30)$$

яка задовольняє умові нормування:

$\int_0^\infty K(x)dx = 1$ та a_1, a_0, b – додатні числа.

Таким чином, за допомогою (22) отримуємо інтегро-диференціальне рівняння для $P(t)$:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{V}{Y}\int_0^t K(t-\tau)F\left(P(\tau)\right)d\tau. \quad (31)$$

Якщо у формулі (30) параметр λ вважати диференціальним оператором та виконати перетворення (31), то буде отримане звичайне диференціальне рівняння третього порядку:

$$\frac{d^3P}{dt^3} + a_1\frac{d^2P}{dt^2} + a_0\frac{dP}{dt} = \frac{V}{Y}\left(b\frac{dF}{dP}\cdot\frac{dP}{dt} + a_0F(P)\right), \quad (32)$$

$$\frac{dF}{dP} = X_0 - P_M M_1 - 2X_1P.$$

Диференціальне рівняння (32) має два рівноважних стана $P_{1,2}^*$ визначених формулою (7).

За допомогою заміни $\tilde{P}(t) = P(t) - P_1^*$, отримаємо диференціальне рівняння для відхилення ціни $\tilde{P}(t)$ від нерухомої точки P_1^*. Після необхідних перетворень маємо:

$$\frac{d^3\tilde{P}}{dt^3} + a_1\frac{d^2\tilde{P}}{dt^2} + \left(a_0 - \frac{VDb}{Y}\right)\frac{d\tilde{P}}{dt} - \frac{a_0VD}{Y}\tilde{P} + \\ + \frac{2VX_1b}{Y}\tilde{P}\frac{d\tilde{P}}{dt} + \frac{2VX_1a_0}{Y}\cdot\frac{\tilde{P}^2}{2} = 0, \quad (33)$$

де $D = X^*\left(1 - \eta_X - \eta_M\right)$.

Введемо нові позначення для змінних та постійних параметрів:

$$\tilde{P} = x_1,\ \frac{d\tilde{P}}{dt} = x_2,\ \frac{d^2\tilde{P}}{dt^2} = x_3,\ A_1 = -\frac{VD}{Y},\ A_2 = \frac{2VX_1}{Y}.$$

У цьому випадку диференціальне рівняння (33) перетвориться у систему трьох диференціальних рівнянь першого порядку з квадратичними нелінійностями:

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = x_2, \\ \dfrac{dx_2}{dt} = x_3, \\ \dfrac{dx_3}{dt} = -a_0A_1x_1 - \left(a_0 + bA_1\right)x_2 - \\ -a_1x_3 - a_0A_2\dfrac{x_1^2}{2} - bA_2x_1x_2. \end{cases} \quad (34)$$

Матриця лінійної частини системи (34) має вигляд:

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0A_1 & -a_0 - bA_1 & -a_1 \end{pmatrix}$$

і володіє характеристичним поліномом:

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + \left(a_0 + bA_1\right)\lambda + a_0A_1 = 0. \quad (35)$$

Необхідною умовою наявності коренів кубічного рівняння (35) з від'ємною дійсною частиною є додатність усіх коефіцієнтів. При тому умови $A_1 > 0$ або $\eta_X + \eta_M > 1$ потрібно виконати, що відповідає вищеозначеним умовам Маршала-Лернера. Достатньою умовою стійкості рівноважного стану $\left(x_1 = x_2 = x_3 = 0\right)$ є також нерівність $a_0A_1 > a_1\left(a_0 + bA_1\right)$, що забезпечує умову від'ємності дійсної частини власних чисел системи (34), які є коренями (35).

Розглянемо більш детально поведінку динамічної системи (34) на межі області стійкості тривіального рівноважного стану:

$$a_1\left(a_0 + bA_1\right) = a_0 A_1 . \quad (36)$$

Підставляючи рівність (36) у кубічне рівняння (35) одержуємо таку факторизацію:

$$\left(\lambda + a_1\right)\left(\lambda^2 + a_0 + b \cdot A_1\right) = 0 ,$$

яка дає корені

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \lambda_3 = -a_1 , \quad (37)$$

де $\omega^2 = a_0 + bA_1$, $i^2 = -1$.

Наявність таких власних чисел системи (34) дозволяє висунути гіпотезу про можливість існування граничного циклу в околі тривіальної рівноваги, так званої, біфуркації Андронова-Хопфа [14].

Для того, щоб виконати конкретний аналіз цієї біфуркаційної поведінки системи (34), треба представити досліджувану систему у вигляді нормальної форми Пуанкаре [14, 15]. Необхідно зробити відповідну заміну змінних, щоб отримати структуру лінійної частини у вигляді матриці

$$\Psi = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Така заміна формується так:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix},$$

де R є квадратною матрицею третього порядку, що складена із власних векторів відповідно до власних чисел (37). Після необхідних обчислень власних векторів маємо таку структуру матриці R:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\omega & -a_1 \\ -\omega^2 & 0 & a_1^2 \end{pmatrix}$$

і зв'язок між «старими» та «новими» змінними такий:

$$\begin{aligned} x_1 &= y_1 + y_3, \\ x_2 &= -\omega y_2 - a_1 y_3, \\ x_3 &= -\omega^2 y_1 + a_1^2 y_3. \end{aligned} \quad (38)$$

В результаті достатньо кропітких перетворень одержимо нормальну форму Пуанкаре для системи диференціальних рівнянь (34) у нових змінних y_1, y_2, y_3:

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\omega y_2 + F_1\left(y_1, y_2, y_3\right), \\ \dot{y}_2 = \omega y_1 + F_2\left(y_1, y_2, y_3\right), \\ \dot{y}_3 = -a_1 y_3 + F_3\left(y_1, y_2, y_3\right), \end{cases} \quad (39)$$

де

$$F_1\left(y_1, y_2, y_3\right) = \frac{A_2}{\omega^2 + a_1^2} f\left(y_1, y_2, y_3\right),$$

$$F_2\left(y_1, y_2, y_3\right) = \frac{A_2 a_1}{\left(\omega^2 + a_1^2\right)\omega} f\left(y_1, y_2, y_3\right),$$

$$F_3\left(y_1, y_2, y_3\right) = -F_1\left(y_1, y_2, y_3\right),$$

$$\begin{aligned} f\left(y_1, y_2, y_3\right) &= a_0 \frac{y_1^2}{2} + \left(a_0 - 2a_1 b\right)\frac{y_3^2}{2} - \\ &- b\omega y_1 y_2 + \left(a_0 - a_1 b\right) y_1 y_3 - b\omega y_2 y_3 \end{aligned}.$$

Наявність нормальної форми (39) дає можливість знайти безпосередньо першу величину Ляпунова для з'ясування стійкості або нестійкості граничного циклу або довести існування двократних циклів.

Для цього необхідно виконати послідовність необхідних обчислень згідно алгоритму, що надано у [15] з використанням тих же позначень параметрів.

Перша величина Ляпунова визначається за формулою:

$$l_1(0) = \frac{i}{2\omega}\left(g_{20} g_{11} - 2\left|g_{11}\right|^2 - \frac{1}{3}\left|g_{02}\right|^2\right) + \frac{g_{21}}{2}. \quad (40)$$

Дійсна частина (40) має такий вигляд:

$$\mathrm{Re}\, l_1(0) = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{i \cdot g_{20} \cdot g_{11}}{\omega} + \mathrm{Re}\, g_{21}\right). \quad (41)$$

Комплексно-значні параметри g_{20}, g_{11}, g_{21} складаються з елементів системи (39) і є достатньо громіздкими. Тому наведемо остаточний вираз для (41) у вигляді:

$$\mathrm{Re}\, l_1(0) = \frac{-A_2^2\left(8a_0^3 + a_0^2 a_1^2 + 4a_1^2 a_0\left(a_0 - a_1 b\right) + 2a_1^2\left(a_0 - a_1 b\right)^2\right)}{16 a_1\left(\omega^2 + a_1^2\right)^2\left(4\omega^2 + a_1^2\right)},$$

$$\omega^2 = \frac{a_0^2}{a_0 - a_1 b}. \quad (42)$$

Легко бачити, що із формули (42) випливає від'ємність дійсної частини першої величини Ляпунова. Це означає стійкість граничного циклу, який утворюється навколо тривіального рівноважного стану. Треба відзначити, що надана процедура є ефективним алгоритмом аналізу біфуркації народження циклу, якщо досліджувана система звичайних диференціальних рівнянь є достатньо простою для виконання обчислень.

Висновки. У розглянутому дослідженні продемонстровано низку динамічних моделей кількісної теорії грошей як у дискретному, так і у неперервному часі. Необхідно підкреслити структурну нестійкість усіх наданих моделей, що обумовлено виконанням класичного формалізму стійкості – умови Маршала-Лернера. Визначені усі типи біфуркаційної поведінки, що можна спостерігати для найбільш важливого економічного параметра – сумарної еластичності експортно-імпортних операцій. Це надає можливість діагностувати небажані траєкторії економічної поведінки.

THE DYNAMICS OF EXPORT-IMPORT INTERACTION

Anatoliy Voronin, Candidate of Technical Sciences, Docent, Department of Higher Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, 9-a Nauki ave, Kharkov, Ukraine, 61166, e-mail: anatolii.voronin@m.hneu. edu.ua, ORCID http:// orcid.org /0000-0003-2570-0508
Elina Zhelezniakova, Candidate of Physics and Mathematics Sciences, Docent, Department of Higher Mathematics and Economic and Mathematical Methods, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, 9-a Nauki ave, Kharkov, Ukraine, 61166, e-mail: elina.zhelezniakova@m.hneu. edu.ua, ORCID http:// orcid.org / 0000-0001-6409-4761

This work is devoted to the dynamic interpretation of the basic provisions of the quantitative theory of money. Namely, the construction of models of price changes for marketable products in the performance of export-import activities both in discrete and continuous time. A number of hypotheses are used to determine the conditions for the violation of the equilibrium states of the trade balance using the classical macroeconomic Fisher equation. An overview of scientific works is presented, which highlights the main factors for the implementation of foreign economic activity: exchange rates and devaluation. The analysis of the considered sources testifies to the presence of the problem of stability of the observed dynamic processes in the vicinity of the state of equilibrium, which have the traditional name of the Marshall-Lerner condition. A detailed study of the stability criteria of a discrete dynamic model with quadratic nonlinearity demonstrates a significant variety of trajectories of the studied process. These are, in particular, increasing or decreasing aperiodic behavior, oscillating processes of a fixed period, bifurcations of doubling the period and chaotic trajectories. The limits of distribution of various types of evolutionary changes in terms of elasticities as important indicators of export-import operations are indicated. For models of pricing dynamics in continuous time, a detailed analysis of the structural instability of equilibrium states was performed. Saddle-nodal bifurcation and no less important Andronov-Hopf bifurcation, which is associated with the formation of a boundary cycle around the equilibrium state, are distinguished. It is proved that the found cycle is unique and stable. For a discrete model of price formation, appropriate calculations are performed to demonstrate different types of evolutionary behavior. The given discrete model based on the Fisher equation can be used for qualitative forecasting (by trajectories) of the dynamics of internal pricing without the use of traditional methodology of econometric analysis of time series. This model is characterized by the fact that it is reduced to a single complex parameter and this greatly simplifies the definition of the corresponding types of dynamical regimes in the vicinity of equilibrium states.
Keywords: dynamic model, stability theory, bifurcation, difference equation.

ДИНАМИКА ЭКСПОРТНО-ИМПОРТНЫХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

Воронин Анатолий Витальевич, канд. техн. наук, доцент, кафедра высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный университет имени Семена Кузнеца, проспект Науки 9а, г.. Харьков, Украина, 61166, e-mail: anatolii.voronin@m.hneu. edu.ua, ORCID http://orcid.org/0000-0003-2570-0508
Железнякова Элина Юрьевна, канд. физ.-мат.наук, доцент, кафедра высшей математики и экономико-математических методов, Харьковский национальный университет имени Семена Кузнеца, проспект Науки 9а, г.. Харьков, Украина, 61166, e-mail: elina.zhelezniakova@m.hneu. edu.ua, ORCID http://orcid.org/0000-0001-6409-4761

Эта работа посвящена динамической интерпретации базовых положений теории. А именно, построению моделей ценовых изменений на товарную продукцию при выполнении экспортно-импортной деятельности как в дискретном, так и в непрерывном времени. При этом использован целый ряд гипотез, определяющих условия нарушения равновесных состояний торгового баланса с помощью классического макроэкономического уравнения Фишера. Приведен обзор научных трудов, который выделяет основные факторы для реализации внешнеэкономической деятельности: валютные курсы и девальвация. Анализ рассмотренных источников свидетельствует о наличии проблемы устойчивости наблюдаемых динамических процессов в окрестности состояния равновесия, которые имеют традиционное название условия Маршала-Лернера. Подробное изучение критериев устойчивости дискретной динамической модели с квадратичной нелинейностью демонстрирует значительный разновидностей траекторий исследуемого процесса. Таковыми, в частности, является растущая или убывающая апериодическая поведение, колебательные процессы фиксированного периода, бифуркации удвоения периода и хаотические траектории. Указанные границы раздела различных типов эволюционных изменений в терминах эластичности как важных показателей экспортно-импортных операций. Для моделей динамики ценообразования в непрерывном времени был выполнен подробный анализ структурной неустойчивости равновесных состояний. Выделено седло-узловую бифуркацию и не менее важную бифуркацию Андронова-Хопфа, связанную с образованием вокруг состояния равновесия предельного цикла. Доказано, что найденный цикл является единственным и устойчивым. Для дискретной модели формирования цены выполнено соответствующие расчеты для демонстрации различных видов эволюционной поведения. Предоставленная дискретная модель на базе уравнения Фишера может быть использована для качественного прогнозирования (по траекториям) динамики внутреннего ценообразования без применения традиционной методологии эконометрического анализа временных рядов. Для этой модели характерно то, что она сведена к единому комплексному параметру и это существенно упрощает определение соответствующих типов динамических режимов в окрестности равновесных состояний.

Ключевые слова: динамическая модель, теория устойчивости, бифуркация, разностное уравнение.

Література

1. Бобровски Б. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем. М.: Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика» 2006. 360с.
2. Василенко Ю. Моделювання імпорту в Україні товарів із країн – торгівельних партнерів (крім стран СНД та Балтії). *Вісник Національного банку України.* 2001. №6. С.34–38.
3. Великий Ю. М., Воронин А. В. Неустойчивость динамики цены в макроэкономическом уравнении Фишера. *Бизнес-информ.* 2005. №7-8. С. 61-65.
4. Воронин А. В. Циклы в задачах нелинейной макроэкономики. Х.: ИД «ИНЖЭК», 2006. 136с.
5. Воронин А. В., Гунько О. В. Хаос на рынке труда. *Інфраструктура ринку.* Вип.6. 2017. С. 254-25.
6. Derbentsev, V., Babenko, V., Khrustalev, K., Obruch, H., Khrustalova, S. Comparative Performance of Machine Learning Ensemble Algorithms for Forecasting Cryptocurrency Prices. International Journal of Engineering, Transactions A: Basics, 2021. 34(1), 140-148. http://dx.doi.org/10.5829/ije.2021.34.01a.16
7. Магницкий Н. А., Сидоров С. В. Новые методы хаотической динамики. М.: Едиториал УРСС, 2004. 320с.
8. Михайличенко С. Ю., Лук'янченко І. Г. Реальний ефективний обмінний курс гривні: економічний зміст, динаміка, моделі, застосування: Київ, КМАкадемія, 2000р. 200с.
9. Харенко К. М. Аналіз впливу обмінного курсу на торговий баланс України. *Культура народів Причерноморья.* 2013. №258. С. 90-92.
10. Шаповаленко Н. В. Оцінка впливу факторів доходу та відносних цін на зовнішньоторгівельні потоки. *Економічний аналіз: зб. наук. праць.* Тернопільський національний економічний університет, 2015. Т.19. №1. С.240-247.
11. Шевчук В. Платіжний баланс і макроекономічна рівновага в трансформаційних економіках: досвід України: Монографія. Львів, Каменяр, 2001р. 496с.
12. Шкрабаренко Ю. М. Специфіка дії умови Маршала-Лернера в контексті процесів транснаціоналізації світової економіки. *Актуальні проблеми міжнародних відносин.* Вип.122, 2014. С. 157–164.
13. Gonddfo G. Economic dynamic. Berlin and New York, Springer Verlag, 1996. P.560.
14. Guckenheimer J., Holmes P. Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields, Springer Verlog, 1983. P.560.
15. Hassard B. D., Kazarinoff N. D. and Wan Y.-H. Theory and Application of The Hapf Bifurcation. Cambridge University Press: Cambridge, 1981. 286p.
16. Lerner Abba P. Factor Price in International Trade. *Economika.* Vol.19. February, 1952. P. 11-40.
17. Mc. Kinnon R. Exchange Rate of Wage Change in International Adjustment Japan and China versus the United States. *International Economics and Economical Policy.* Vol. 2. 2005. P. 261-274.

References

1. Bobrovski B. (2006) Vvedenie v teoriyu dinamicheskih sistem s diskretnym vremenem. M.: Izhevsk: NIC «Regulyarnaya i haoticheskaya dinamika». 360 p.
2. Vasilenko Yu. (2001) Modelyuvannya importu v Ukraïni tovariv iz kraïn – torgivel'nih partneriv (krim stran SND ta Baltiï). *Visnik Nacional'nogo banku Ukraïni.* №6. P.34–38.
3. Velikij Yu. M., Voronin A. V. (2005) Neustojchivost' dinamiki ceny v makroekonomicheskom uravnenii Fishera. *Biznes-inform.* №7-8. P. 61-65.
4. Voronin A. V. (2006) Cikly v zadachah nelinejnoj makroekonomiki. H.: ID «INZhEK». 136 p.
5. Voronin A. V., Gun'ko O. V. (2017) Haos na rynke truda. *Infrastruktura rinku.* Vip.6. P.254-25.
6. Derbentsev, V., Babenko, V., Khrustalev, K., Obruch, H., Khrustalova, S. (2021). Comparative Performance of Machine Learning Ensemble Algorithms for Forecasting Cryptocurrency Prices. International Journal of Engineering, Transactions A: Basics, 34(1), 140-148. http://dx.doi.org/10.5829/ije.2021.34.01a.16
7. Magnickij N. A., Sidorov S. V. (2004) Novye metody haoticheskoj dinamiki. M.: Editorial URSS. 320 p.
8. Mihajlichenko S. Yu., Luk'yanchenko I. G. (2000) Real'nij efektivnij obminnij kurs grivni: ekonomichnij zmist, dinamika, modeli, zastosuvannya: Kiïv, KMAkademiya. 200 p.

9. Harenko K. M. (2013) Analiz vplivu obminnogo kursu na torgovij balans Ukraïni // Kul'tura narodiv Prichernomor'ya. № 258. P. 90-92.

10. Shapovalenko N. V. (2015) Ocinka vplivu faktoriv dohodu ta vidnosnih cin na zovnishn'otorgivel'ni potoki. *Ekonomichnij analiz: zb. nauk. prac'*. Ternopil's'kij nacional'nij ekonomichnij universitet, t.19. №1. P.240-247.

11. Shevchuk V. (2001) Platizhnij balans i makroekonomichna rivnovaga v transformacijnih ekonomikah: dosvid Ukraïni: Monografiya. L'viv, Kamenyar. 496 p.

12. Shkrabarenko Yu. M. (2014) Specifika diï umovi Marshala-Lernera v konteksti procesiv transnacionalizaciï svitovoï ekonomiki. *Aktual'ni problemi mizhnarodnih vidnosin*. Vip.122. P. 157–164.

13. Gonddfo G. (1996) Economic dynamic. Berlin and New York, Springer Verlag. P.560.

14. Guckenheimer J., Holmes P. (1983) Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields, Springer Verlog. P.560.

15. Hassard B. D., Kazarinoff N. D. and Wan Y.-H. (1981) Theory and Application of The Hapf Bifurcation. Cambridge University Press: Cambridge. 286 p.

16. Lerner Abba P. (1952) Factor Price in International Trade. *Economika*. Vol.19. February. P. 11-40.

17. Mc.Kinnon R. (2005) Exchange Rate of Wage Change in International Adjustment Japan and China versus the United States. *International Economics and Economical Policy*. Vol. 2. P. 261-274.

Статтю отримано 25 квітня 2021 р.