МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до самостійної роботи за темою "Комбінаторний аналіз"

для студентів галузі знань
12 "Інформаційні технології"
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2022

УДК 519.1(07.034)
Д48

Укладач Т. В. Денисова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.
Протокол № 6 від 22.12.2021 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Дискретна математика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи за темою "Комбінаторний аналіз" для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня / уклад. Т. В. Денисова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2022. – 48 с.
Д48

Подано теоретичний матеріал із комбінаторного аналізу та запитання для самоконтролю його засвоєння. Уміщено варіанти задач самостійної контрольної роботи, зразки їхнього розв'язання і тестові завдання.

Рекомендовано для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня усіх форм навчання.

УДК 519.1(07.034)

Вступ

Тема "Комбінаторний аналіз" є важливою складовою частиною обов'язкової навчальної дисципліни "Дискретна математика", яку широко застосовують у математичній кібернетиці, комп'ютерній математиці, програмуванні, а також під час створення засобів передавання й оброблення інформації, автоматизованих систем керування та проєктування.

Комбінаторний аналіз (КА) – галузь математики, предметом якої є теорія скінченних множин.

Основні задачі комбінаторного аналізу:

1) визначення кількості та виду підмножин або кортежів, складених з елементів заданої множини, розрізнюваних у певному сенсі;

2) визначення кількості способів, якими можна здійснити певний вибір.

На сьогодні комбінаторний аналіз є основним інструментом для оцінювання складності алгоритмів, дослідження операцій, побудови складних ітераційних алгоритмів, дискретної оптимізації, кодування, шифрування та низки інших задач. Комбінаторні методи застосовують у теорії ймовірностей, теорії випадкових процесів, математичній статистиці, лінійному та динамічному програмуванні, обчислювальній математиці.

Комбінаторний аналіз тісно пов'язаний з теорією графів, теорією скінченних автоматів. Його здобутки використовують під час планування й аналізу наукових експериментів, складання та декодування шифрів.

Згідно з робочою програмою навчальної дисципліни, від загального обсягу на самостійну роботу студентів відведено 60 %. Саме такими обставинами зумовлено необхідність розроблення методичних рекомендацій, що запропоновані, та їхню актуальність. Головною *метою* їхнього складання є ознайомлення студентів із фундаментальними поняттями, ідеями та методами комбінаторного аналізу, сприяння розвитку їхнього логічного й аналітичного мислення, надання допомоги щодо використання здобутих знань і набутих умінь під час розв'язування конкретних практичних задач фахової спрямованості, підготовка до вивчення спеціальних дисциплін і самостійного опрацьовування математичної та науково-технічної літератури.

1. Теоретичні відомості

1.1. Прямий (декартів) добуток множин

Під **множиною** розуміють сукупність об'єктів (предметів), які об'єднано в цю сукупність за певними ознаками. Об'єкти, що утворюють множину, називають її **елементами**.

Наприклад, можна говорити про: множину відмінників у студентській групі; множину нервових клітин тіла людини; множину точок на заданій лінії; множину трикутників на площині; множину навчальних тижнів у семестрі; множину букв у слові тощо.

Множини позначають як правило великими літерами латинського або грецького алфавітів: $A, B, C,$ …, Φ, Ψ, Ω, …, а їхні елементи – малими: a, b, c, …, φ, ψ, ω.

Якщо A – множина, а x – її елемент, то пишуть: $x \in A$, де $\in$ – *символ (знак) належності*; читають: "x належить множині A". У протилежному випадку, коли x не є елементом множини A, пишуть $x \notin A$ або $x \overline{\in} A$ і читають: "x не належить множині A".

Множини A і B називають **рівними**, якщо вони містять одні й ті самі елементи, і пишуть: $A = B$. За суттю рівні множини є однією і тією самою множиною.

Згідно з означенням рівних множин порядок (розташування) елементів у множині несуттєвий, тобто неважливо, на якому місці (у поданні множини) розташований той чи інший елемент. Але в багатьох випадках (задачах застосовного характеру) доводиться зважати на цю обставину.

Наприклад, множини $M = \{1,3\}$ і $N = \{3,1\}$ рівні між собою. Якщо ж їхні елементи трактувати як координати точки на площині, то здобудемо дві різні точки: $M(1,3)$ і $N(3,1)$.

Нехай A – скінченна множина, яка містить n елементів, тобто $|A| = n$, $n \in \mathbf{N}$, де $|A|$ – кількість елементів множини A, $\mathbf{N} = \{1, 2, 3, 4, ..., n, ...\}$ – множина натуральних чисел. Таку множину A будемо називати ***n*-елементною множиною**, або просто ***n*-множиною**.

Для скінченних множин можна застосувати також термін "потужність", а саме: потужність $P(A)$ скінченної множини A дорівнює кількості її елементів: $P(A) = |A|$.

Дво-, три-, …, n-елементну множину із фіксованим (певним) порядком елементів називають відповідно **упорядкованою парою**, **трійкою**, …, ***n*-кою** або **дво-**, **три-**, …, ***n*-елементним кортежем** (**кортежем довжини *n***, або ***n*-кортежем**). Для позначення n-кортежу використовують круглі дужки, між якими записують через кóму або крапку з комою його елементи.

Приклади: множина студентів, які стоять у черзі в буфеті; множина букв (слів) у слові (реченні); шеренга військових, які вишикувані за рангуванням.

Із множини $\{a,b\}$ можна утворити 2-кортежі: (a,b), (b,a); для множини $\{a,b,c\}$ маємо: (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a); n-множина $A=\{x_1,x_2,x_3,...,x_n\}$ "породжує" такі n-кортежі:

$$(x_1,x_2,x_3,...,x_n),\ (x_2,x_1,x_3,...,x_n),\ \ldots,\ (x_n,x_{n-1},x_{n-2},...,x_1).$$

На відміну від множини, в кортежі допускають наявність однакових елементів: однакові букви у слові, однакові координати вектора тощо. Прикладами нескінченних кортежів є відомі зі шкільної математики числові послідовності, зокрема послідовність натуральних чисел.

Нехай A і B – дві непорожні скінченні множини з кількістю елементів n і m відповідно, тобто $|A|=n$, $|B|=m$, $n\in\mathbf{N}$, $m\in\mathbf{N}$. Надалі будемо замість записів $A=\{x_1,x_2,...,x_n\}$, $B=\{y_1,y_2,...,y_m\}$ стисло писати: $A=\{x_i\}_1^n$, $B=\{y_j\}_1^m$. З елементів множин A і B можна утворювати різні впорядковані пари (x,y) – двоелементні кортежі.

Прямим, або **декартовим**, **добутком** множин A і B називають множину всіх упорядкованих пар (x,y) – таких, що перший елемент пари належить множині A, а другий – множині B:

$$A\times B=\{(x,y)\,|\,\forall x\in A,\forall y\in B\},\qquad (1)$$

де $\times$ – *символ (знак) прямого добутку*;

| – символ (знак), який читають: "із властивістю", "які мають властивість";

$\forall$ – символ, який називають *квантором загальності* і читають: "будь-який", "який би не був", "для всіх", "всі" (квантор – від лат. *quantum* – скільки).

Щоб знайти декартів добуток множин A і B, діють (згідно з означенням) так: беруть елемент $x_1 \in A$ і залучають до нього в пару по черзі всі елементи y_j $(j=\overline{1,m})$ із множини B; потім у такий самий спосіб утворюють пари з елементами $x_2 \in A$, $x_3 \in A$, …; процес побудови пар продовжують доти, поки не буде перебрано всі елементи множини A.

Потужність прямого добутку множин A і B визначають співвідношенням:

$$|A\times B|=|A|\cdot|B|=n\cdot m. \tag{2}$$

Наприклад, для множин $A=\{a,b,c,d\}$ і $B=\{4,5\}$ маємо:

$$A\times B=\{(a,4),(a,5),(b,4),\ (b,5),(c,4),(c,5),(d,4),(d,5)\};$$
$$|A\times B|=4\cdot 2=8.$$

Зрозуміло, що прямий добуток множин також може містити пари з однаковими першим і другим елементами.

На підставі означення (1) робимо висновок, що для операції прямого добутку не виконуються закони комутативності та асоціативності:

$$A\times B\neq B\times A,$$
$$A\times(B\times C)\neq(A\times B)\times C,$$

але справедливі розподільні закони відносно об'єднання, перетину та різниці:

$$A\times(B\bigcup C)=(A\times B)\bigcup(A\times C),\quad A\times(B\bigcap C)=(A\times B)\bigcap(A\times C),$$
$$A\times(B\setminus C)=(A\times B)\setminus(A\times C).$$

Операцію прямого добутку можна узагальнити на довільну скінченну кількість множин.

Прямим, або **декартовим**, **добутком *n* множин** A_1, A_2, …, A_n, $n\in\mathbf{N}$, називають множину всіх n-елементних кортежів $(x_1,x_2,...,x_n)$, таких, що $x_i\in A_i$, $\forall i=\overline{1,n}$:

$$A_1\times A_2\times...\times A_n=\{(x_1,\ x_2,...,\ x_n)\,|\,x_1\in A_1,\ x_2\in A_2,\ ...,\ x_n\in A_n\}. \tag{3}$$

У частинних випадках маємо:

$A^2 = A \times A$ – **декартів квадрат** множини A;

$A^3 = A \times A \times A$ – **декартів куб** множини A;

$A^n = \underbrace{A \times A \times \ldots \times A}_{n \text{ разів}}$ $(n \geq 1)$ – ***n*-й декартів степінь** множини A.

Наприклад, для множини $A = \{1, 2\}$ маємо:

$$A = \{1, 2\} \Rightarrow A^2 = \{1, 2\} \times \{1, 2\} = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\};$$

$$A^3 = A^2 \times A = \{(1,1,1), (1,1,2), (1,2,1), (1,2,2), (2,1,1), (2,1,2), (2,2,1), (2,2,2)\}.$$

1.2. Основні правила комбінаторного аналізу

Нехай A_i – скінченні множини з потужностями $P(A_i) = |A_i| = n_i$, $i = \overline{1, k}$, а $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k$ – їхній прямий добуток, тобто множина кортежів довжини k: $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$, $x_i \in A_i$.

Надалі терміни "кортеж", "рядок", "вибірка" сприйматимемо як синоніми; k – довжина кортежу (рядка), об'єм вибірки.

Правило добутку. Якщо елемент $x_1 \in A_1$ можна вибрати n_1 способами й після кожного такого вибору x_1 елемент $x_2 \in A_2$ можна вибрати n_2 способами, після вибору x_1 і x_2 елемент $x_3 \in A_3$ можна вибрати n_3 способами і т. д., нарешті, елемент $x_k \in A_k$ можна вибрати n_k способами незалежно від вибору всіх попередніх елементів, то вибір кортежу $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ можна здійснити $\Pi = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k$ способами.

Обґрунтування: потужність прямого добутку множин A_i $(i = \overline{1, k})$ дорівнює добутку потужностей цих множин:

$$P(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_k) = n_1 \cdot n_2 \cdot \ldots \cdot n_k. \quad (4)$$

Наприклад, якщо у шафі 6 видів головного вбрання (x), 5 видів верхнього одягу (y), 4 види взуття (z), то кількість способів скласти комплект (x, y, z) дорівнює: $\Pi = 6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$.

Правило суми. Якщо елемент $x_1 \in A_1$ можна вибрати n_1 способами, а елемент $x_2 \in A_2$ – n_2 способами, причому ніякий спосіб вибору x_1 не збігається із жодним зі способів вибору x_2; елемент $x_3 \in A_3$ можна вибрати n_3 способами, причому ніякий вибір x_1, x_2 не збігається з вибором x_3 і т. д., нарешті, елемент $x_k \in A_k$ – n_k способами, які не збігаються зі способами вибору x_1, x_2, …, x_{k-1}, то вибір x_1 або x_2 або, ... x_k можна здійснити $S = n_1 + n_2 + ... + n_k$ способами.

Обґрунтування: потужність об'єднання множин A_i $(i = \overline{1,k})$, що попарно не перетинаються $(A_i \cap A_j = \varnothing \quad \forall i \neq j)$, дорівнює сумі потужностей цих множин:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_k) = P(A_1) + P(A_2) + ... + P(A_k) = \\ = n_1 + n_2 + ... + n_k. \qquad (5)$$

Наприклад, підрахуємо, скільки існує чисел, кратних трьом або семи, серед перших двадцяти натуральних чисел $(n \leq 20)$. Отже: $A = \{1, 2, ..., 20\}$, $A_1 = \{3, 6, ..., 18\} = \{3n\}_1^6$ – множина чисел, кратних 3, $A_2 = \{7, 14\} = \{7n\}_1^2$ – множина чисел, кратних 7.

Оскільки $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, то

$$S = \left[\frac{20}{3}\right] + \left[\frac{20}{7}\right] = 6 + 2 = 8,$$

де $[\cdot]$ – ціла частина числа.

Якщо множини A_1 і A_2 мають спільні елементи $(A_1 \cap A_2 \neq \varnothing)$, то треба враховувати кількість n_{12} таких елементів, і тоді $S = n_1 + n_2 - n_{12}$, щоб не рахувати їх двічі.

Отже, якщо взяти $A = \{1, 2, ..., 30\}$ $(n \leq 30)$, то

$$S = \left[\frac{30}{3}\right] + \left[\frac{30}{7}\right] - \left[\frac{30}{3 \cdot 7}\right] = 10 + 4 - 1 = 13,$$

оскільки число 21 можна вибрати як число, кратне 3, і як число, кратне 7, а враховувати його треба тільки один раз.

Узагальненням формули (5), коли $A_i \bigcap A_j \neq \varnothing$ $(i \neq j)$, є так звана *формула включень і виключень:*

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le n} P(A_i \bigcap A_j) + \sum_{1 \le i < j < k \le n} P(A_i \bigcap A_j \bigcap A_k) + \ldots +$$

$$+ (-1)^{n-1} P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right). \quad (6)$$

Цю формулу часто застосовують у задачах, пов'язаних із властивостями об'єктів, а саме: нехай маємо N об'єктів і деяку сукупність властивостей $\{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$. Позначимо через $N(\alpha_i)$ кількість об'єктів, які мають властивість α_i; $N(\alpha_i \alpha_j)$ – кількість об'єктів, які мають властивості α_i і α_j; $N(\alpha_i \alpha_j \alpha_k)$ – кількість об'єктів, які мають властивості α_i, α_j і α_k й таке інше. Якщо треба підкреслити, що враховано об'єкти, які не мають властивості α_i, то пишуть $\overline{\alpha}_i$. *Наприклад*, символьний запис $N(\overline{\alpha}_1 \alpha_3 \alpha_5)$ означає кількість об'єктів, які мають властивості α_3, α_5 і не мають властивості α_1.

Правило (принцип, формула) включень і виключень: кількість об'єктів, які не мають жодної з властивостей α_1, α_2, …, α_n, визначають за формулою:

$$N(\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2 \ldots \overline{\alpha}_n) = N - \sum_{i} N(\alpha_i) + \sum_{i<j} N(\alpha_i \alpha_j) - \sum_{i<j<k} N(\alpha_i \alpha_j \alpha_k) +$$

$$+ \ldots + (-1)^n N(\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n). \quad (7)$$

Зокрема, для $n = 3$ маємо:

$$N(\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\alpha}_3) = N - N(\alpha_1) - N(\alpha_2) - N(\alpha_3) + N(\alpha_1 \alpha_2) +$$
$$+ N(\alpha_1 \alpha_3) + N(\alpha_2 \alpha_3) - N(\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3).$$

Якщо записати формально: $\overline{\alpha}_i = 1 - \alpha_i$, $N(1) = N$, і розглянути послідовність символів $\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2 \ldots \overline{\alpha}_n$ як алгебраїчний добуток, а праву частину (7) – як алгебраїчну суму, то формулу (7) можна подати у символьному вигляді, що дає змогу підрахувати кількість об'єктів, які мають одні й не мають інших властивостей.

У випадку трьох властивостей $(n=3)$ дістанемо:

$$N(\overline{\alpha}_1\overline{\alpha}_2\overline{\alpha}_3)=N((1-\alpha_1)(1-\alpha_2)(1-\alpha_3))=N(1-\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3+$$
$$+\alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2\alpha_3)=N(1)-N(\alpha_1)-N(\alpha_2)-N(\alpha_3)+$$
$$+N(\alpha_1\alpha_2)+N(\alpha_1\alpha_3)+N(\alpha_1\alpha_3)-N(\alpha_1\alpha_2\alpha_3)\,. \qquad (8)$$

Якщо якийсь об'єкт не має першої властивості із трьох, то з урахуванням, що $\overline{\alpha}_1=1-\alpha_1$, матимемо:

$$N(\overline{\alpha}_1\alpha_3\alpha_5)=N((1-\alpha_1)\alpha_3\alpha_5)=N(\alpha_3\alpha_5-\alpha_1\alpha_3\alpha_5)=$$
$$=N(\alpha_3\alpha_5)-N(\alpha_1\alpha_3\alpha_5).$$

Задача 1. У групі 18 студентів, з яких 6 осіб займаються футболом, 8 – плаванням, а 7 – баскетболом; 4 особи – футболом і плаванням, 3 – плаванням і баскетболом, 2 – футболом та баскетболом, а 1 особа – і футболом, і плаванням, і баскетболом. Скільки студентів групи: не займаються жодним із цих видів спорту; займаються лише плаванням?

Розв'язання. За умовою задачі встановлюємо властивості, якими володіють (або ні) студенти групи: $\alpha_1=\Phi$ – займатися футболом, $\alpha_2=\Pi$ – займатися плаванням, $\alpha_3=Б$ – займатися баскетболом, загальну кількість студентів N та кількість студентів, які володіють однією двома, або всіма трьома з цих властивостей: $N=18$, $N(\Phi)=6$, $N(\Pi)=8$, $N(Б)=7$, $N(\Phi\Pi)=4$, $N(\Pi Б)=3$, $N(\Phi Б)=2$, $N(\Phi\Pi Б)=1$.

Кількість студентів $N(\overline{\Phi}\overline{\Pi}\overline{Б})$, які не займаються жодним видом спорту, визначаємо за формулою (8):

$$N(\overline{\Phi}\overline{\Pi}\overline{Б})=N-N(\Phi)-N(\Pi)-N(Б)+N(\Phi\Pi)+N(\Pi Б)+N(\Phi Б)-$$
$$-N(\Phi\Pi Б)=18-6-8-7+4+3+2-1=5.$$

Знайдемо кількість студентів, які займаються лише плаванням $N(\overline{\Phi}\Pi\overline{Б})$, для чого покладаємо формально $\overline{\Phi}=1-\Phi$, $\overline{Б}=1-Б$:

$$N(\overline{\Phi}\Pi\overline{Б})=N((1-\Phi)\Pi(1-Б))=N(\Pi-\Pi Б-\Phi\Pi+\Phi\Pi Б)=$$
$$=N(\Pi)-N(\Pi Б)-N(\Phi\Pi)+N(\Phi\Pi Б)=8-3-4+1=2.$$

1.3. Комбінаторні конфігурації: основні типи, формули для підрахунку їхньої кількості

1.3.1. Комбінаторні конфігурації без повторень

Нехай $A=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – n-елементна множина (n-множина), тобто $P(A)=|A|=n$. Будь-яку множину (упорядковану, невпорядковану), складену з елементів множини A відповідно до заданих вимог (деяких правил, законів), називають **комбінаторною конфігурацією** (**КК**), або **сполукою**. До основних конфігурацій без повторень відносять переставлення, розміщення, комбінації.

Переставленням (без повторень) із *n* елементів називають будь-який n-елементний кортеж, який дістають за різних упорядкувань n-елементної множини.

Кількість усіх переставлень із n елементів позначають символом P_n і знаходять за формулою:

$$P_n = n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot n. \tag{9}$$

Дійсно, перший елемент переставлення можна вибрати n способами і після кожного такого вибору другий елемент можна вибрати $(n-1)$-м способом. Після кожного вибору першого і другого елементів третій елемент можна вибрати $(n-2)$-ма способами і т. д., нарешті, n-й елемент після вибору всіх попередніх елементів можна вибрати одним способом. Тоді за правилом добутку отримуємо:

$$P_n = n\cdot(n-1)\cdot ...\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = n!.$$

Наприклад, множина $A=\{a,b,c\}$ $(n=3)$ породжує такі переставлення із трьох елементів:

$$(a,b,c),\ (a,c,b),\ (b,a,c),\ (b,c,a),\ (c,a,b),\ (c,b,a);$$
$$P_3 = 3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6.$$

Нагадаємо, що за означенням $0!=1$; $1!=1$.

Зауважимо, що переставлення відрізняються одне від одного тільки порядком розташування елементів.

Розміщенням без повторень із n елементів по m $(m < n)$ називають будь-який m-елементний кортеж, складений із елементів n-множини.

Кількість усіх розміщень без повторень із n елементів по m позначають символом A_n^m і знаходять за формулою:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}. \tag{10}$$

Дійсно, перший елемент m-елементного кортежу можна вибрати n способами і після кожного такого вибору другий елемент можна вибрати $(n-1)$-м способом. Після кожного вибору першого та другого елементів третій елемент можна вибрати $(n-2)$-ма способами і т. д., нарешті, m-й елемент після вибору всіх попередніх елементів можна вибрати $(n-(m-1))$-м способом. Отже, за правилом добутку отримуємо:

$$A_n^m = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}.$$

Зазначимо, що розміщення без повторень відрізняються одне від одного або порядком розташування елементів, або самими елементами (хоча б одним). Переставлення без повторень із n елементів можна розглядати як розміщення без повторень з n елементів по n і тоді $P_n = A_n^n$.

Наприклад, множина $A = \{a, b, c\}$ $(n = 3)$ породжує такі розміщення без повторень із трьох елементів по два:

$$(a, b),\ (a, c),\ (b, c),\ (b, a),\ (c, a),\ (c, b);$$
$$A_3^2 = 3 \cdot 2 = 6.$$

Комбінацією без повторень із n елементів по m $(m < n)$ називають будь-яку m-елементну підмножину, утворену із елементів n-множини.

Кількість усіх комбінацій без повторень із n елементів по m позначають символом C_n^m і знаходять за формулою:

$$C_n^m = \frac{A_n^m}{P_m} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m} = \frac{n!}{m!\,(n-m)!}. \tag{11}$$

Кожну комбінацію без повторень із n елементів по m можна впорядкувати $P_m = m!$ способами. Таким чином, кожна комбінація породжує $m!$ розміщень із n елементів по m, а кількість усіх розміщень $A_n^m = C_n^m \cdot m!$ (за правилом добутку); звідси дістаємо формулу (11).

З означення випливає, що комбінації, на відміну від розміщень, – це невпорядковані підмножини заданої множини. Отже, комбінації відрізняються одна від одної тільки за складом (хоча б одним елементом).

Наприклад, множина $A = \{a, b, c\}$ $(n = 3)$ породжує такі комбінації без повторень із трьох елементів по два:

$$\{a, b\},\ \{a, c\},\ \{b, c\};\quad C_3^2 = \frac{3 \cdot 2}{1 \cdot 2} = 3.$$

У випадку $m > n/2$ для обчислення кількості комбінацій без повторень C_n^m зручно користуватися тотожністю: $C_n^m = C_n^{n-m}$.

1.3.2. Комбінаторні конфігурації з повтореннями

Під час розв'язання застосовних задач досить часто доводиться стикатися з кортежами, *елементи яких повторюються*: код Морзе – кортеж з елементів множини $\{$крапка $(\cdot)$, тире $(-)\}$; інформаційний код у комп'ютері – кортеж з елементів множини $\{0,1\}$; слово в лінгвістиці – рядок із літер абетки тощо. До основних КК з повтореннями (як і до КК без повторень) відносять переставлення, розміщення, комбінації.

Нехай $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – деяка n-множина (основна множина, генеральна сукупність), кожний елемент якої x_i можна вибрати будь-яку скінченну кількість разів k_i, $i = \overline{1, n}$.

Якщо утворено m-елементний кортеж (m-кортеж), у якому елемент x_1 повторюється k_1 разів, x_2 – k_2 разів, ..., x_n – k_n разів, то кажуть, що цей m-кортеж має *специфікацію* (*склад*) $(k_1, k_2, ..., k_n)$, тобто:

$$(k_1, k_2, ..., k_n):\ (\underbrace{x_1\ x_1 ... x_1}_{k_1}\ \underbrace{x_2\ x_2 ... x_2}_{k_2} ... \underbrace{x_n\ x_n ... x_n}_{k_n}) \text{ – } m\text{-кортеж,} \qquad (12)$$

де $k_1 + k_2 + ... + k_n = \sum_{i=1}^{n} k_i = m$.

Переставленням із повтореннями з n елементів по m називають будь-який m-кортеж із заданою специфікацією $(k_1, k_2, ..., k_n)$, утворений із елементів n-множини.

Кількість усіх переставлень із повтореннями з n елементів по m складу $(k_1, k_2, ..., k_n)$ позначають символом $P_m(k_1, k_2, ..., k_n)$ і знаходять за формулою:

$$P_m(k_1, k_2, ..., k_n) = \frac{m!}{k_1!\, k_2! \ldots k_n!}. \qquad (13)$$

Дійсно, якби всі члени кортежу (12) були різними, то можна було б утворити $m!$ переставлень без повторень. Кількість усіх таких конфігурацій можна знайти, відштовхуючись від переставлень із повтореннями у такий спосіб: у кожному з них елемент x_1 переставити $k_1!$ способами і незалежно від цього елемент x_2 переставити $k_2!$ способами, …, елемент x_n – $k_n!$ способами. Тоді за правилом добутку маємо:

$$m! = P_m(k_1, k_2, ..., k_n) \cdot k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_n!,$$

звідси й дістаємо формулу (13).

Зауваження:

1. На елементи специфікації k_i, $i = \overline{1, n}$, а отже, й на число $m \in \mathbf{N}$, жодних обмежень у загальному випадку не накладають. Зокрема, для специфікації $(k_1, k_2, ..., k_n) = (1, 1, ..., 1)$, тобто коли $m = n$, маємо переставлення без повторень, оскільки кожний елемент із основної множини $A = \{x_i\}_1^n$ беруть тільки один раз, і тоді:

$$P_m(k_1, k_2, ..., k_n) = P_n(1, 1, ..., 1) = P_n = n!.$$

2. Переставлення з повтореннями, як і переставлення без повторень, відрізняються одне від одного лише порядком розташування елементів і мають один і той самий склад елементів.

Наприклад, множина $A = \{x_1, x_2\} = \{a, b\}$ $(n = 2)$ породжує такі переставлення з повтореннями з двох елементів по чотири $(m = 4)$ зі специфікацією $(k_1, k_2) = (2, 2)$:

$$(aabb),\ (abab),\ (baba),\ (bbaa),\ (abba),\ (baab);$$

$$P_4(2,2)=\frac{4!}{2!\,2!}=\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{1\cdot 2\cdot 1\cdot 2}=6.$$

Розміщенням із повтореннями з n елементів по m називають будь-який m-кортеж, складений із елементів n-множини.

Кількість усіх розміщень із повтореннями позначають символом $\overline{A}_n^m$ і знаходять за формулою:

$$\overline{A}_n^m=n^m. \qquad (14)$$

Дійсно, кожний елемент m-кортежу $(x_{i_1},x_{i_2},...,x_{i_m})$, де індекси i_1, i_2, …, i_m можуть набувати одного із значень 1, 2, …, n, можна вибрати з множини $A=\{x_1,\ x_2,...,\ x_n\}$ n способами. Тоді за правилом добутку:

$$\overline{A}_n^m=\underbrace{n\cdot n\cdot ...\cdot n}_{m \text{ разів}}=n^m.$$

Зауваження:

1. Розміщення з повтореннями, як і розміщення без повторень, відрізняються одне від одного або порядком розташування елементів, або самими елементами (хоча б одним).

2. На число $m\in\mathbf{N}$ у загальному випадку жодних обмежень не накладають, тобто може бути $m<n$, $m>n$, $m=n$.

3. За умови, що всі елементи m-кортежу різні, приходимо до розміщень без повторень $(m<n)$ або переставлень без повторень $(m=n)$.

Наприклад, множина $A=\{a,b\}$ $(n=2)$ породжує такі розміщення з повтореннями із двох елементів по три ($m=3$):

$$(aaa),\ (aab),\ (aba),\ (baa),\ (abb),\ (bab),\ (bba),\ (bbb);$$

$$\overline{A}_2^3=2^3=8.$$

Якщо для того ж $m=3$ ввести специфікацію $(k_1,k_2)=(2,1)$, то дістанемо переставлення з повтореннями, які складають підмножину множини розміщень із повтореннями:

$$(aab),\ (aba),\ (baa);\quad P_3(2,1)=\frac{3!}{2!\cdot 1!}=3.$$

Будемо казати, що m-кортежі, складені з елементів n-множини, утворюють **клас еквівалентності**, якщо вони мають однаковий склад елементів (однакову специфікацію).

Так, на множині кортежів у попередньому прикладі маємо такі чотири класи еквівалентності:

I: (aaa);

II: (aab), (aba), (baa);

III: (abb), (bab), (bba);

IV: (bbb),

кожен із яких, як бачимо, є переставленням із повтореннями певного складу.

Комбінацією з повтореннями з n елементів по m називають будь-який клас еквівалентності на множині m-кортежів, складених з елементів n-множини. Інакше, комбінація з повтореннями – це множина переставлень із повтореннями певного складу.

Зрозуміло, що комбінації з повтореннями відрізняються одна від одної тільки складом елементів, а порядок розташування елементів значення не має.

Кількість усіх комбінацій із повтореннями з n елементів по m позначають символом $\overline{C}_n^m$ і знаходять за формулою:

$$\overline{C}_n^m = P_{n+m-1}(m, n-1) = \frac{(n+m-1)!}{m! \cdot (n-1)!} = C_{n+m-1}^m. \qquad (15)$$

Дійсно, кожній комбінації з повтореннями поставимо у відповідність упорядковану множину з m одиниць і $(n-1)$-го нуля у такий спосіб: пишемо стільки одиниць, скільки разів входить у конфігурацію елемент x_1, потім пишемо 0, після цього стільки одиниць, скільки разів входить у конфігурацію елемент x_2, потім знову 0 і т. д.; якщо якесь x_i не входить у кортеж, то теж пишемо 0:

$$\begin{array}{ccccccccc} (x_1\, x_1 \ldots x_1 & & x_2\, x_2 \ldots x_2 & & x_4\, x_4 \ldots x_4 & & x_n\, x_n \ldots x_n) \\ (1\ 1\ \ldots\ 1 & 0 & 1\ 1\ \ldots\ 1 & 00 & 1\ 1\ \ldots\ 1 & 0 \ldots 0 & 1\ 1\ \ldots\ 1) \end{array}$$

Отже, між комбінаціями з повтореннями з n елементів по m і $(m+n-1)$-кортежами із нулів та одиниць встановлено взаємно-однозначну відповідність (бієкцію), тоді кількість комбінацій із повтореннями з n елементів по m дорівнює кількості різних способів упорядкування $(m+n-1)$-множини згідно зі специфікацією $(m, n-1)$, що й дає формулу (15).

1.3.3. Загальні рекомендації щодо розв'язання задач на підрахунок кількості основних комбінаторних конфігурацій

Розв'язання задач на знаходження кількості комбінаторних конфігурацій *без повторень* доцільно проводити за такою схемою:

1) визначаємо кількість елементів (потужність, обсяг) основної множини (чи декількох основних множин);

2) підраховуємо кількість елементів, які входять у вибірку (тобто довжину рядка або потужність підмножини);

3) з'ясовуємо, які вибірки нам потрібні (упорядковані чи невпорядковані);

4) у разі підрахунку кількості кортежів використовуємо формули (9), (10) для P_n, A_n^m, а підмножин – формулу (11) для C_n^m.

Для формалізації текстової задачі також бажано для всіх розглядуваних множин ввести певні позначення.

Під час розв'язання задач на знаходження кількості комбінаторних конфігурацій *із повтореннями* рекомендовано:

1) усвідомити, про що йдеться: про підрахунок кількості всіх кортежів певної довжини; про підрахунок кількості кортежів заданого складу (специфікації); про підрахунок кількості можливих складів кортежів;

2) у першому випадку встановити довжину потрібного кортежу та застосувати формулу для $\overline{A}_n^m$ (14);

у другому – знайти склад вибірки з елементів основної множини та використати формулу для $P_m(k_1, k_2, ..., k_n)$ (13);

у третьому – знайти кількість елементів основної множини, обсяг вибірки й використати формулу для $\overline{C}_n^m$ (15).

Абстрагуючись від природи об'єктів, які розглядають, для розв'язання задач комбінаторного аналізу застосовують так звану **модель комірок** (урн, ящиків) і **куль** (предметів): елементи основної множини A – комірки, елементи кортежів (чи підмножин A) – кулі.

Тлумачення кількості конфігурацій із повтореннями мовою "комірок і куль" виглядає так:

$\overline{A}_n^m$ – це кількість способів, якими можна розкласти m різних куль у n комірок;

$P_m(k_1, k_2, ..., k_n)$ – це кількість способів, якими можна розкласти m різних куль у n комірок так, щоб до i-ї комірки потрапило k_i куль $(i = \overline{1, n})$;

$\overline{C}_n^m$ – це кількість способів, якими можна розкласти m однакових куль у n комірок.

Підсумовуючи розглянуте, зведемо результати у схему, зображену на рис. 1.

Задача 2. Для участі в конкурсі танцюристів треба з 10 хлопців і 10 дівчат виділити дві пари: дует бального танцю та дует сучасного танцю. Скількома способами це можна зробити, якщо всі хлопці й усі дівчата вміють танцювати як бальні, так і сучасні танці?

Розв'язання. Маємо дві основні множини: X – множина хлопців, D – множина дівчат з потужностями $P(X) = P(D) = 10$. У кожній із них нас цікавлять 2-елементні впорядковані підмножини, адже один і той самий хлопець (чи дівчина) в різних дуетах дають різні варіанти вибору пар. Із 10 хлопців одного виконавця бального танцю і одного виконавця сучасного танцю можна вибрати A_{10}^2 способами. Аналогічно маємо A_{10}^2 способів вибрати виконавців із множини дівчат.

За правилом добутку знаходимо загальну кількість S способів виділення дуетів бального й сучасного танців:

$$S = A_{10}^2 \cdot A_{10}^2 = (10 \cdot 9)^2 = 810.$$

Якщо скористатися правилом добутку, то неважко навести міркування, що відповідають такому поданню S:

$$S = (10 \cdot 10) \cdot (9 \cdot 9).$$

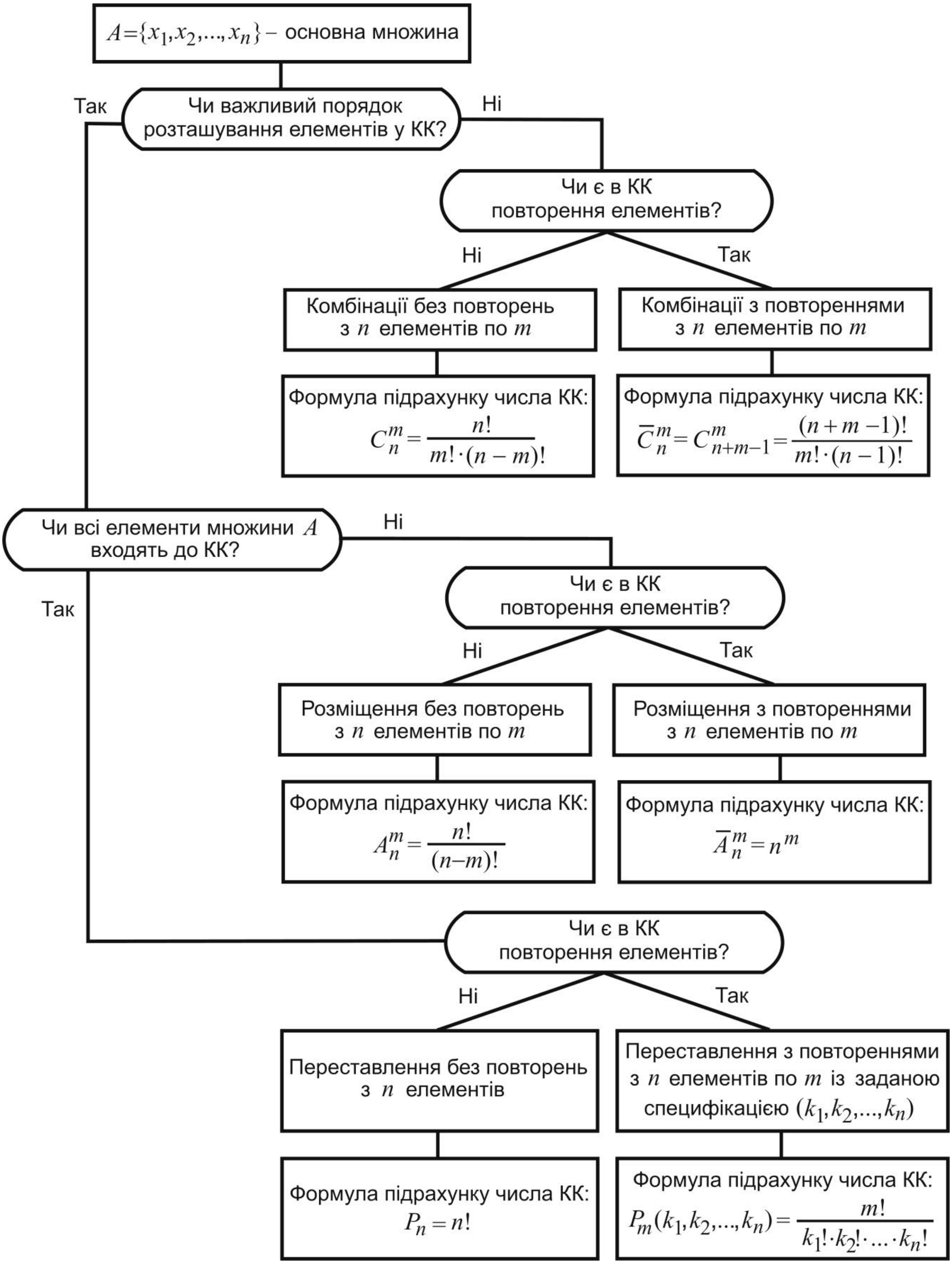

Рис. 1. **Схема визначення типу КК**

1.4. Комбінаторні задачі перелічення та переліку, метод рекурентних формул і твірних функцій

У процесі вивчення тих чи інших конфігурацій природно постає два питання – як (якими методами) краще:

а) підрахувати кількість конфігурацій, тобто відповісти на запитання, скільки їх;

б) установити вид конфігурацій, тобто відповісти на запитання, які вони?

Задачі комбінаторного аналізу, у яких ставлять питання про методи підрахунку кількості (встановлення виду) комбінаторних конфігурацій, називають **задачами перелічення (переліку)**.

1.4.1. Метод рекурентних формул

Сутність методу визначає його назва: рекурентний (від лат. *recurrentes* – той, що повертається) – той, що дає змогу дістати значення якоїсь величини за знайденими раніше іншими значеннями тієї самої величини.

Нехай a_1, a_2, …, a_n, … – числова послідовність (нумерація членів може починатися не з одиниці, а з нуля). Формулу, за допомогою якої можна обчислити будь-який член послідовності $a_n = f(n)$ через декілька попередніх (можливо, один), називають **рекурентною формулою**.

Наприклад:

1) рекурентна формула послідовності натуральних чисел:

$$a_n = a_{n-1} + 1,\ n = 1, 2, \dots;\quad a_0 = 0 \text{ – початкова умова;}$$

2) рекурентна формула послідовності Фібоначчі:

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n,\ n = 0, 1, 2, \dots;\quad a_0 = a_1 = 1 \text{ – початкові умови.}$$

Теорема (рекурентні формули для кількості конфігурацій): для підрахунку кількості конфігурацій мають місце співвідношення:

$$P_n = n\,P_{n-1},\quad n = 1, 2, \dots;\ P_0 = 1; \tag{16}$$

$$A_n^m = A_{n-1}^m + m\,A_{n-1}^{m-1},\quad n, m = 1, 2, \dots;\ A_n^0 = 1,\ A_n^m = 0\quad \forall n < m; \tag{17}$$

$$C_n^m = C_{n-1}^m + C_{n-1}^{m-1},\ \ n \ge m;\ \ C_n^0 = C_n^1 = 1,\ \ C_n^m = 0 \quad \forall n < m; \tag{18}$$

$$\overline{C}_n^{\,m} = \overline{C}_n^{\,m-1} + \overline{C}_{n-1}^{\,m},\ \ m, n \in \mathbf{N};\ \ \overline{C}_n^{\,0} = 1,\ \ \overline{C}_n^{\,1} = n; \tag{19}$$

$$\overline{A}_n^{\,m} = n\,\overline{A}_n^{\,m-1},\ \ m, n \in \mathbf{N};\ \ \overline{A}_n^{\,0} = 1. \tag{20}$$

Доведення проводять безпосередньою перевіркою кожного співвідношення, використовуючи відповідні формули для кількості конфігурацій.

Доведемо, *наприклад*, формулу (18).

З одного боку,

$$A_n^m = n\,(n-1)\,...(n-m+1),$$

з іншого – маємо:

$$A_{n-1}^m + mA_{n-1}^{m-1} = (n-1)(n-2)\,...\,(n-1-m+1) + m(n-1)(n-2)\,...\,(n-1-m+2) =$$

$$= (n-1)(n-2)\ ...\ (n-m) + m\,(n-1)(n-2)\ ...\ (n-m+1) =$$

$$= (n-1)(n-2)...(n-m+1)(n-m+m) = n\,(n-1)\ ...\ (n-m+1) = A_n^m.$$

Підрахунок кількості конфігурацій за допомогою рекурентних співвідношень (16) – (20) називають **методом рекурентних формул**.

Такий підхід полегшує технічний бік використання формул для P_n, A_n^m, C_n^m, $\overline{A}_n^{\,m}$, $\overline{C}_n^{\,m}$, $P_m(k_1, k_2, ..., k_n)$ у випадку великих значень m і n. Чисельну реалізацію методу рекурентних формул здійснюють за допомогою комп'ютерів, для чого розроблено спеціальні пакети програм.

1.4.2. Метод твірних функцій розв'язання задач перелічення та переліку

Метод рекурентних співвідношень дає змогу розв'язувати численні комбінаторні задачі. Але в багатьох випадках такі співвідношення складно встановити, ще складніше – реалізувати. Цих труднощів часто вдається уникнути, якщо використати так звані твірні функції.

Зі шкільної (елементарної) алгебри відомо, що:

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2,$$

$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3.$$

Запишемо ліві частини цих рівностей у вигляді добутку відповідної кількості співмножників і розкриємо дужки, причому будемо записувати всі множники в тому порядку, в якому вони зустрічаються:

$$(a+x)^2=(a+x)(a+x)=aa+ax+xa+xx, \tag{21}$$

$$\begin{aligned}(a+x)^3=(a+x)(a+x)(a+x)=aaa+aax+axa+axx+xaa+\\+xax+xxa+xxx.\end{aligned} \tag{22}$$

Видно, що до правої частини формули (21) входять усі розміщення з повтореннями із двох елементів $\{a,x\}$ по два, а до правої частини (22) – розміщення з повтореннями із двох елементів по три.

Те ж саме буде і в загальному випадку:

$$(a+x)^n=\underbrace{(a+x)(a+x)\ldots(a+x)}_{n \text{ разів}}. \tag{23}$$

Після розкриття дужок у формулі (23) дістанемо всілякі розміщення з повтореннями з двох елементів по n.

Як бачимо, у такий спосіб можна одночасно розв'язати як задачу перелічення, так і задачу переліку.

Зведемо тепер подібні члени відносно степенів x, тобто об'єднаємо еквівалентні за складом доданки. Кожний доданок, у який входить m елементів x $(0\le m\le n)$ і $(n-m)$ елементів a, дає переставлення з повтореннями із двох елементів по n зі специфікацією $(k_1,k_2)=(m,n-m)$, а кількість таких переставлень дорівнює:

$$P_n(m,n-m)=\frac{n!}{m!\cdot(n-m)!}=C_n^m. \tag{24}$$

Звідси випливає, що після зведення подібних членів вираз $x^m a^{n-m}$ увійде до правої частини формули (23) із коефіцієнтом C_n^m:

$$(a+x)^n=C_n^0a^n+C_n^1a^{n-1}x+\ldots+C_n^ma^{n-m}x^m+\ldots+C_n^nx^n. \tag{25}$$

Рівність (25) називають **формулою бінома Ньютона**.

Якщо узяти $a = 1$, то для фіксованого n матимемо:

$$(1+x)^n = C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + ... + C_n^m x^m + ... + C_n^n x^n, \tag{26}$$

тобто многочлен, коефіцієнти якого при x^m співпадають із членами послідовності $a_m = C_n^m$, $m = 0, 1, 2, ..., n$.

Функцію (многочлен) $(1+x)^n$ називають **твірною функцією** (**енумератором**) для послідовності C_n^m, $m = 0, 1, 2, ..., n$.

Дамо тепер означення твірної функції для довільної числової послідовності a_0, a_1, …, a_m, …, або $\{a_m\}_0^\infty$.

Многочлен

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_m x^m + ... = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^m, \tag{27}$$

коефіцієнти якого при степенях x^m співпадають із членами послідовності a_m $(m = 0, 1, 2, ...)$, називають **поліноміальною твірною функцією** (**поліноміальним енумератором**) для послідовності $\{a_m\}_0^\infty$.

У математичному аналізі многочлени з нескінченною кількістю членів називають **рядами**. Якщо розглядувана послідовність скінченна $\{a_0, a_1, ..., a_m\}$, то отримуємо звичайний многочлен – скінченний ряд. Прикладом ряду є сума членів нескінченно спадної геометричної прогресії з першим членом, що дорівнює одиниці, та знаменником $|x| < 1$:

$$P(x) = 1 + x + x^2 + ... + x^m + ... = \frac{1}{1-x}. \tag{28}$$

Отже, многочлен $P(x) = \dfrac{1}{1-x}$ є поліноміальним енумератором послідовності $1, 1, …, 1, ...$, а многочлен

$$P(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = (1 + x + ... + x^m + ...)^2 = 1 + 2x + 3x^2 + ... + (m+1)\,x^m + ... -$$

твірною функцією послідовності натуральних чисел $a_m = m+1$ $(m = 0, 1, 2, ...)$.

Ряд виду

$$P(x)=a_0+a_1\frac{x}{1!}+a_2\frac{x^2}{2!}+\ldots+a_m\frac{x^m}{m!}+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}a_m\frac{x^m}{m!}, \qquad (29)$$

коефіцієнти якого при $\frac{x^m}{m!}$ співпадають із членами послідовності a_m $(m=0,1,2,...)$, називають **експоненціальною твірною функцією** (**експоненціальним енумератором**) для послідовності $\{a_m\}_0^{\infty}$.

Термін "експоненціальний" обумовлено тим, що показникова функція e^x (експонента) у вигляді ряду має подання:

$$e^x=1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^m}{m!}+\ldots=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}. \qquad (30)$$

Отже, e^x – експоненціальний енумератор послідовності $1,1,...,1,...$. Якщо ж рівність (30) розглядати як поліноміальний енумератор, то він відповідає послідовності:

$$\frac{1}{0!},\ \frac{1}{1!},\ \frac{1}{2!},\ \ldots,\ \frac{1}{m!},\ \ldots.$$

Для n-го степеня функції e^x маємо:

$$(e^x)^n=e^{nx}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(nx)^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}n^m\frac{x^m}{m!}=\sum_{m=0}^{\infty}\overline{A}_n^m\frac{x^m}{m!}, \qquad (31)$$

тобто функція e^{nx} є експоненціальним енумератором для послідовності кількості розміщень із повтореннями з n елементів по m, де n – фіксоване, а на m обмеження не накладають: $m=0,1,2,...$.

Розв'язання задач перелічення та переліку за допомогою енумераторів називають **методом твірних функцій**.

Насамкінець наведемо таблицю енумераторів для послідовностей кількості основних комбінаторних конфігурацій (табл. 1), у якій позначено: $\mathbf{N}_0=\mathbf{N}\bigcup\{0\}$, Π – знак (символ) добутку.

Таблиця 1

Таблиця енумераторів

№ з/п	Кількість конфігурацій	Енумератор $P(x)$
1	C_n^m; $m, n \in \mathbf{N}_0$; $0 \le m \le n$	$P(x) = (1+x)^n = (1+x)(1+x)\ldots(1+x) = \sum\limits_{m=0}^{n} C_n^m x^m$
2	$\overline{C}_n^m$; $m, n \in \mathbf{N}_0$	$P(x) = \dfrac{1}{(1-x)^n} = (1+x+\ldots+x^m+\ldots)^n = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \overline{C}_n^m x^m$
3	A_n^m; $m, n \in \mathbf{N}_0$; $0 \le m \le n$	$P(x) = (1+x)^n = \sum\limits_{m=0}^{n} \dfrac{n!}{m!(n-m)!} x^m = \sum\limits_{m=0}^{n} A_n^m \dfrac{x^m}{m!}$
4	$\overline{A}_n^m$; $m, n \in \mathbf{N}_0$	$P(x) = e^{nx} = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \dfrac{n^m}{m!} x^m = \sum\limits_{m=0}^{\infty} \overline{A}_n^m \dfrac{x^m}{m!}$
5	$b_k = P_k(q_1, q_2, \ldots, q_n)$; $k = 0, 1, \ldots, m \in \mathbf{N}_0$, $q_i \le k_i \in \mathbf{N}_0$, $i = \overline{1, n}$, $q_1 + q_2 + \ldots + q_n = k$	$P(x) = \left(1 + x + \dfrac{x^2}{2!} + \ldots + \dfrac{x^{k_1}}{k_1!}\right)\left(1 + x + \ldots + \dfrac{x^{k_2}}{k_2!}\right)\cdot\ldots\times$ $\times\left(1 + x + \ldots + \dfrac{x^{k_n}}{k_n!}\right) = \prod\limits_{i=1}^{n} \sum\limits_{j=0}^{k_i} \dfrac{x^j}{j!} = \sum\limits_{k=0}^{m} b_k \dfrac{x^k}{k!}$

1.5. Задача розбиття натуральних чисел

Розбиттям натурального числа n називають всяку скінченну незростаючу послідовність n_1, n_2, …, n_m натуральних чисел, сума членів якої дорівнює n, тобто

$$n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m = \sum_{i=1}^{m} n_i, \quad 1 \le m \le n, \tag{32}$$

де n_i $(i = \overline{1, m})$ – **частини** розбиття $(n_i \in \{1, 2, \ldots, n\})$;

n – **характеристика** розбиття;

m – **кількість частин** розбиття.

Розбиття $n \in \mathbf{N}$ позначають m-кортежем $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ або коротшим символічним записом: $(1^{t_1} 2^{t_2} \ldots r^{t_r})$, у якому $1, 2, \ldots, r$ – частини розбиття

$(1 \le r \le n)$, а числа t_i $(i = \overline{1,r})$ указують, скільки тих чи інших однакових частин містить розбиття; t_i, які дорівнюють одиниці, не пишуть.

Неважко здогадатися, що

$$\sum_{i=1}^{r} t_i = m, \quad \sum_{i=1}^{r} i \cdot t_i = n. \tag{33}$$

Наприклад, для числа $n = 20$ можна вказати таке розбиття на шість частин: $(5,5,5,2,2,1)$ або $(1\,2^2\,5^3)$.

Кількість усіх послідовностей $\{n_i\}_1^m$, які дають розбиття n на частини, називають **функцією розбиття**, або **денумератором**, і позначають символом $p(n)$ або $D(n)$. Прийнято тлумачити порожню послідовність як розбиття нуля і вважати $p(0) = 1$. Також вважають, що $p(n) = 0$, якщо $n < 0$, або коли $n < m$.

Далі наведено п'ять перших значень функції розбиття $p(n)$ і самі розбиття:

$p(1) = 1$: $1 = (1)$;

$p(2) = 2$: $2 = (2)$, $1+1 = (1^2)$;

$p(3) = 3$: $3 = (3)$, $2+1 = (12)$, $1+1+1 = (1^3)$;

$p(4) = 5$: $4 = (4)$, $3+1 = (13)$, $2+2 = (2^2)$, $2+1+1 = (1^2\,2)$,
$1+1+1+1 = (1^4)$;

$p(5) = 7$: $5 = (5)$, $4+1 = (14)$, $3+2 = (23)$, $3+1+1 = (1^2\,3)$,
$2+2+1 = (12^2)$, $2+1+1+1 = (1^3\,2)$, $1+1+1+1+1 = (1^5)$.

Значення функції $p(n)$ швидко зростають: $p(10) = 42$, $p(20) = 627$, $p(50) = 204\,226$, $p(100) = 190\,569\,292$.

Задача знаходження $p(n)$ є задачею перелічення, а встановлення виду частин – задачею переліку. У багатьох випадках розглядають не всі розбиття, а лише ті, які задовольняють певні умови: розбиття з парними (непарними) частинами, розбиття з парною (непарною) кількістю частин, розбиття з різними частинами тощо.

Для підрахунку $p(n)$ теж використовують рекурентні співвідношення і твірні функції.

Рекурентні формули Ейлера (Леонард Ейлер (1707 – 1782) – видатний математик, механік, фізик і астроном, академік Петербурзької академії наук протягом 24 років):

1) якщо на частини розбиття ніякі обмеження не накладають, то:

$$p(n)=\sum_{m\geq 1}(-1)^{m-1}p(n-\frac{1}{2}m\,(3m\mp 1))=p(n-1)+p(n-2)-$$

$$-p(n-5)-p(n-7)+\ldots+(-1)^{m-1}p(n-\frac{1}{2}m\,(3m-1))+$$

$$+(-1)^{m-1}p(n-\frac{1}{2}m\,(3m+1))+\ldots; \qquad (34)$$

2) якщо n розбивають на k частин, то:

$$p(n,k)=p(n-k,k)+p(n-k,k-1)+\ldots+p(n-k,1)=$$

$$=\sum_{i=0}^{k-1}p(n-k,k-i) \qquad (35)$$

за умов, що $p(n,k)=0$ для $n<k$, $p(n,n)=p(n,1)=1$.

Наприклад, згідно з формулами (34), (35), дістаємо:

$$p(6)=p(5)+p(4)-p(1)=7+5-1=11;$$
$$p(6,2)=p(4,2)+p(4,1)=p(2,2)+p(2,1)+1=1+1+1=3,$$

а самі розбиття мають вигляд:

$$5+1=(15),\quad 4+2=(24),\quad 3+3=(3^2);$$

3) якщо всі частини розбиття обмежені числом k ($n_i\leq k$, $i=\overline{1,m}$), тобто всі числа n_i перебувають серед чисел $1,2,\ldots,k$, то

$$p(n;\overline{1,k})=p(n-k;\overline{1,k})+p(n;\overline{1,k-1}). \qquad (36)$$

Застосуємо, *наприклад*, формулу (36) для $n=5$, $k=3$:

$$p(5;\overline{1,3})=p(5-3;\overline{1,3})+p(5;1,2),$$

де

$$p(2;\overline{1,3}) = p(2-3;\overline{1,3}) + p(2;1,2) = 0 + p(2-2;1,2) + p(2;1) = 0+1+1 = 2\,;$$
$$p(5;1,2) = p(3;1,2) + p(5;1) = p(3-2;1,2) + p(3;1) + 1 = 1+1+1 = 3.$$

Отже, $p(5;\overline{1,3}) = 2+3 = 5$.

Твірні функції (енумератори) денумераторів:

1) якщо обмеження на частини не накладають, то:

$$P(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^m)^{-1} = \prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m} = \frac{1}{1-x}\cdot\frac{1}{1-x^2}\cdot\frac{1}{1-x^3}\cdot\ldots =$$
$$= (1+x+x^2+\ldots)(1+x^2+x^4+\ldots)\cdot\ldots\cdot(1+x^m+x^{2m}+\ldots)\cdot\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n\,; \qquad (37)$$

2) якщо всі частини розбиття різні $(n_1 \neq n_2 \neq \ldots \neq n_m)$ із денумератором $p_{\neq}(n)$, то:

$$P(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1+x^m) = (1+x)(1+x^2)\cdot\ldots\cdot(1+x^m)\cdot\ldots = \sum_{n=0}^{\infty}p_{\neq}(n)\,x^n\,; \qquad (38)$$

3) якщо частини розбиття парні (непарні) з денумератором $p_{\text{п}}(2n)$ $(p_{\text{н}}(n))$, то:

$$P(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}p_{\text{п}}(2n)\,x^{2n}\,; \qquad (39)$$
$$\left(P(x) = \prod_{m=1}^{\infty}(1-x^{2m-1})^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}p_{\text{н}}(n)x^n\right); \qquad (40)$$

4) якщо всі частини розбиття обмежені числом k, то:

$$P(x) = \prod_{m=1}^{k}(1-x^m)^{-1} = \prod_{m=1}^{k}\frac{1}{1-x^m} = \sum_{n=0}^{\infty}p(n\,;\overline{1,k})\,x^n. \qquad (41)$$

Зауваження:

1) якщо дослідника цікавлять не всі частини розбиття, які лежать у межах від 1 до k, а лише деякі з них, то у формулі (41) беруть тільки співмножники з відповідними показниками степеня $m \in \{1,2,\ldots,k\}$;

2) у разі використання формул (37) – (40) на практиці (коли задано певну характеристику розбиття n) беруть лише співмножники, добуток яких забезпечує наявність степенів від x^0 до x^n (з урахуванням, можливо, додаткових вимог до виду частин розбиття, як описано вище).

Задача 3. Знайдіть кількість способів, якими можна: а) дістати 8 копійок монетами по $1, 2, 5$ копійок; б) розбити число 8 на різні частини.

Розв'язання:

а) застосуємо формулу (41) для $m = 1, 2, 5$, тоді:

$$P(x) = \frac{1}{1-x} \cdot \frac{1}{1-x^2} \cdot \frac{1}{1-x^5} = (1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + x^8 + \ldots) \times$$
$$\times (1 + x^2 + x^4 + x^6 + x^8 + \ldots) \cdot (1 + x^5 + x^{10} + \ldots).$$

Коефіцієнт при x^8 дорівнює 7 (*переконайтеся*), отже:

$$p(8; 1, 2, 5) = 7: \ (125),\ (1^3\,5),\ (2^4),\ (1^2\,2^3),\ (1^4\,2^2),\ (1^6\,2),\ (1^8);$$

б) якщо число 8 розбивати на різні частини, то беремо (див. формулу (38)):

$$P(x) = (1 + x)(1 + x^2) \cdot \ldots \cdot (1 + x^8).$$

Тоді маємо $p_{\neq}(8) = 2$, адже коефіцієнт при x^8 дорівнює 2 (*переконайтеся*). Відповідні розбиття такі: (125), (134).

Для розв'язання задачі переліку всіх видів розбиття існує декілька алгоритмів. Згідно з одним із них, для переходу від розбиття $(n_1, n_2, \ldots, n_m)$ до наступного розбиття дотримуються правил:

1) якщо $n_m > 1$, то наступне розбиття $(n_1, n_2, \ldots, n_{m-1} - 1, 1)$;

2) якщо $n_{m-k} = c > 1$, а $n_{m-k+1} = n_{m-k+2} = \ldots = n_m = 1$, то наступне розбиття отримуємо заміною частин n_{m-k}, …, n_m на частини $c-1$, $c-1$, …, $c-1$, d, де $0 < d \le c-1$, а кількість t однакових частин $(c-1)$ визначають співвідношенням: $t(c-1) + d = c + k = n_{m-k} + \ldots + n_m$.

Наприклад, для $n = 21$ маємо: (21), $(20,1)$, $(19,1,1)$, $(18,1,1,1)$, $(17,1,1,1,1)$, …, $(11,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1)$, $(10,10,1)$, …, $(1,1,\ldots,1)$.

Спробуйте розв'язати за допомогою запропонованого алгоритму задачу переліку для $n = 8$.

Методи комбінаторного аналізу широко використовують у теорії ймовірностей, теорії графів, математичній логіці та багатьох інших розділах математики. Вони є потужним знаряддям під час розв'язання практичних задач перелічення, переліку й розбиття множин об'єктів різноманітної природи.

2. Запитання для самоконтролю засвоєння матеріалу

Відповіді на всі запитання сформулюйте словесно, запишіть у символьній формі, обґрунтуйте (на підставі означень, теорем, правил, формул тощо), наведіть відповідні конкретні приклади.

1. Що називають комбінаторним аналізом (комбінаторикою, теорією сполук)? У чому полягають основні задачі комбінаторного аналізу?

2. Як формулюють основні правила комбінаторики: а) добутку; б) суми; в) включень та виключень? Як виглядає їхній символьний запис?

3. Що називають комбінаторною конфігурацією (сполукою)?

4. Яку комбінаторну конфігурацію називають: переставленням без повторень із n елементів, розміщенням без повторень із n елементів по m ($m < n$), комбінацією без повторень із n елементів по m ($m < n$)?

5. За якою формулою обчислюють кількість усіх комбінаторних конфігурацій без повторень кожного типу?

6. Що розуміють під кортежем із заданою специфікацією?

7. Що розуміють під класом еквівалентності на множині m-елементних кортежів?

8. Яку комбінаторну конфігурацію називають: переставленням із повтореннями з n елементів по m, розміщенням із повтореннями з n елементів по m, комбінацією з повтореннями з n елементів по m?

9. За якої специфікації переставлення з повтореннями перетворюються на переставлення без повторень?

10. За якою формулою обчислюють кількість усіх комбінаторних конфігурацій із повтореннями кожного типу?

11. У чому полягає сутність моделі "урн і куль" для інтерпретації (моделювання) комбінаторних конфігурацій?

12. У чому полягає принципова відмінність між постановками задач перелічення і переліку в комбінаторному аналізі?

13. Який вигляд мають рекурентні формули для підрахунку кількості основних конфігурацій – формули для P_n, A_n^m, C_n^m, $\overline{A}_n^m$, $\overline{C}_n^m$?

14. Що називають твірною функцією (енумератором) числової послідовності? Що називають енумератором для послідовності C_n^m, $m=\overline{0,n}$?

15. Які нумератори називають поліноміальними, а які – експоненціальними?

16. Як виглядають енумератори для послідовностей кількості основних комбінаторних конфігурацій?

17. У чому полягає задача розбиття натуральних чисел? Що називають функцією розбиття, або денумератором?

18. Який вигляд має рекурентна формула Ейлера для визначення функції розбиття (денумератора) у випадку: а) коли на частини розбиття жодних обмежень не накладають; б) коли всі частини розбиття обмежені певним числом k або якщо число n розбивають на k частини?

19. Який вигляд мають твірні функції (енумератори) денумераторів для випадків, коли: а) обмеження на частини розбиття не накладають; б) усі частини розбиття обмежені певним числом; в) усі частини розбиття різні; г) частини розбиття парні (непарні)?

3. Варіанти задач самостійної контрольної роботи

За умовами задач, поданих у текстовому вигляді, підрахуйте кількість відповідних комбінаторних конфігурацій без повторень або з повтореннями.

Варіант 1

1. Скільки існує способів розставити п'ять книг різних авторів на одній полиці?

2. У деякому поселенні 1000 мешканців. Покажіть, що принаймні двоє з них мають однакові ініціали.

3. На одній прямій взято п'ять точок, а на паралельній прямій – сім точок. Скільки трикутників з вершинами в цих точках можна побудувати?

Варіант 2

1. Скільки існує способів розмістити сім картин на одній стіні, щоб дві вибрані картини не висіли поруч?

2. У англійців прийнято давати дітям декілька імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо загальне число імен дорівнює 300, а дитині дають не більше трьох різних імен?

3. Скільки можна побудувати різних прямокутних паралелепіпедів, довжини ребер яких виражаються натуральними числами від 1 до 10?

Варіант 3

1. На протязі чотирьох тижнів студенти здають чотири екзамени, із них – два екзамени з математики. Скількома способами можна розподілити екзамени за тижнями так, щоб екзамени з математики не йшли поруч?

2. Кожну клітину квадратної таблиці 4×4 можна пофарбувати в чорний або білий колір. Скільки різних варіантів розфарбовувань цієї таблиці існує?

3. Скількома способами можна розкласти у шість ящиків 20 однакових куль так, щоб жоден ящик не залишився порожнім?

Варіант 4

1. Скільки різних "слів" можна одержати, переставляючи літери у слові "математика"?

2. Скільки треба мати словників, щоб можна було безпосередньо робити переклади з будь-якої з п'яти мов: російської, української, англійської, німецької, французької на будь-яку іншу з них?

3. Скільки існує точок перетину діагоналей, які лежать усередині опуклого дванадцятикутника, якщо ніякі три з них не перетинаються в одній точці?

Варіант 5

1. Скільки існує способів забудови вулиці десятьма будинками, серед яких три будинки зводяться за проєктом P_1, п'ять будинків – за проєктом P_2 і два будинки – за проєктом P_3?

2. Скількома способами можна скласти трикольоровий смугастий прапор, якщо є матеріал п'яти різних кольорів? Розв'яжіть задачу за умови, що одна зі смуг прапора має бути червоною?

3. У буфеті є шість різних сортів тістечок. Скількома способами можна купити сім тістечок?

Варіант 6

1. Скількома способами можна скласти п'ятизначне число, до складу якого входять дві двійки і три шістки?

2. На залізничній станції є сім світлофорів. Скільки різних сигналів можна подати за їхньою допомогою, якщо кожний світлофор подає три сигнали – червоний, жовтий, зелений?

3. Є дванадцять точок площини, з яких ніякі три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує трикутників з вершинами в цих точках?

Варіант 7

1. Скільки існує способів розташувати чотири різні конденсатора на телевізійній платі?

2. Є вісім точок площини, з яких ніякі три з них не лежать на одній прямій. Скільки існує векторів з початком і кінцем у будь-яких двох з цих точок?

3. Скількома способами можна скласти букет із дев'яти квітів, якщо є чотири види квіток?

Варіант 8

1. Скількома способами можна позначити вершини чотирикутника за допомогою букв A, B, C, D?

2. Скільки цілих додатних чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9?

3. Із 20 співробітників лабораторії п'ятеро мають їхати у відрядження. Скільки може бути різних складів групи, що від'їжджає, якщо завідувач лабораторією і два провідних інженера не мають від'їжджати одночасно?

Варіант 9

1. Міська рада закупила сім сортів квітів для озеленення міста. Було вирішено оформляти клумби у вигляді семи кіл, що мають один центр і різні радіуси. Скільки різних клумб можна зробити?

2. У ліфт дванадцятиповерхового будинку зайшло на першому поверсі десять чоловік. Скількома способами вони можуть вийти з ліфта?

3. Скількома способами можна купити вісім тістечок у кондитерській, де є шість різних сортів тістечок?

Варіант 10

1. У мами два яблука, три груші та два апельсина. Кожен день протягом тижня вона видає дитині по одному фрукту. Скількома способами це можна зробити?

2. Є десять точок площини, з яких ніякі три не лежать на одній прямій. Скільки різних променів з початком у цих точках можна провести через будь-яку іншу з цих точок?

3. Скільки існує способів вибрати з групи, що складається з семи чоловіків і чотирьох жінок, шість осіб так, щоб серед них було не менше трьох жінок?

Варіант 11

1. Скільки різних "слів" можна одержати, переставляючи літери у слові "катет"?

2. У пасажирському поїзді дев'ять вагонів. Скількома способами можна розсадити в поїзді чотири особи, за умови, що всі вони мають їхати в різних вагонах?

3. Скількома способами можна розкласти дев'ять однакових шоколадок за трьома пакетами (допускається, що деякі пакети можуть залишитися порожніми)?

Варіант 12

1. Скількома способами можна розкласти в ряд дві білі, чотири чорні та три червоні кулі?

2. Скільки існує різних положень, у яких можуть опинитися дев'ять перемикачів, якщо кожний з них може бути включеним або виключеним?

3. На площині проведено вісім прямих, серед яких ніякі дві не є паралельними та ніякі три не перетинаються в одній точці. Скільки різних трикутників утворюють ці прямі?

Варіант 13

1. Скількома способами можна зафарбувати шість клітин так, щоб три клітини були зафарбовані червоним кольором, а решта клітин – білим, чорним, зеленим (кожна своїм кольором)?

2. Скільки звичайних дробів можна скласти з простих чисел від 3 до 20 так, щоб чисельник і знаменник дробу містили два різних числа?

3. У поштовому відділенні продають листівки чотирьох видів. Скількома способами можна придбати шість листівок?

Варіант 14

1. До банкомату одночасно підійшли сім осіб. Скількома способами вони можуть вишикуватися в чергу?

2. Скількома способами можна надіти п'яти різних перснів на пальці однієї руки, виключаючи великий палець?

3. Скільки різних паралелограмів можна одержати при перетині п'яти паралельних прямих шістьма іншими паралельними прямими?

Варіант 15

1. Скількома способами можна впорядкувати числову множину $\{1,2,3,4,5,6\}$ так, щоб кожне парне число мало парний номер?

2. Є три різних крісла і п'ять рулонів тканини різного кольору. Скількома способами можна здійснити покриття крісел тканинами?

3. Скільки хорд можна провести через 15 різних точок, які лежать на одному колі?

Варіант 16

1. Скількома способами тренер може вибрати з дванадцяти бігунів чотирьох для участі в естафеті 100, 200, 300 і 400 метрів?

2. Скільки різних прямих можна провести через десять точок площини, якщо ніякі три з них не лежать на одній прямій?

3. Скільки "слів" можна одержати, переставляючи літери в слові "Міссісіпі"?

Варіант 17

1. Скількома способами можна розселити сім студентів у трьох кімнатах: одномісній, двомісній та чотирьохмісній?

2. Скільки тризначних чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, якщо всі цифри утвореного числа мають бути різними?

3. Скількома способами палітурник може зробити червону, зелену або синю обкладинку для дванадцяти однакових книг?

Варіант 18

1. Для нагородження учасників математичної олімпіади організаторами було виділено вісім примірників однієї книги, дев'ять – другої та тринадцять – третьої книги. Скількома способами можуть бути розподілені ці примірники між 30 учасниками олімпіади, якщо кожний учасник отримує однин примірник?

2. Поїзд, у якому їдуть вісім пасажирів, робить п'ять зупинок. Скількома способами можуть вийти пасажири на цих зупинках?

3. Скільки діагоналей можна провести в опуклому десятикутнику?

Варіант 19

1. Скількома способами можна зафарбувати шість клітинок так, щоб дві клітинки були зафарбовані жовтим кольором, а решта клітинок – білим, червоним, зеленим і синім (кожна своїм кольором)?

2. З 52 делегатів конференції треба обрати президію з п'яти осіб і делегацію з трьох осіб. Скількома способами можна здійснити вибір, якщо члени президії не мають входити до складу делегації?

3. Скільки існує способів покласти 15 однакових куль у п'ять урн?

Варіант 20

1. Скільки існує способів записати число 30 у вигляді добутку його простих дільників?

2. Скільки існує різних матриць третього порядку, якщо кожен елемент матриці може бути нулем або одиницею?

3. Є вісім вільних робочих місць, з яких на двох можуть працювати тільки чоловіки. Скількома способами можна розподілити чотирьох жінок і двох чоловіків на робочих місцях?

Варіант 21

1. Скільки існує способів скласти список з десяти студентів?

2. Скільки різних чисел можна утворити, перемножуючи два прості дільника числа $2\ 730$?

3. Комп'ютерний пароль складається з семи цифр. Скільки існує різних комп'ютерних паролів, які починаються з цифри 5?

Варіант 22

1. Скількома способами можна впорядкувати множину $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ так, щоб числа $1,\ 2,\ 3$ стояли поруч і в порядку зростання?

2. Два листоноші повинні віднести десять листів. Скількома способами вони можуть розділити між собою роботу?

3. Фірма виробляє шість видів продукції. Скількома способами можна відібрати на виставку чотири зразка будь-яких видів?

Варіант 23

1. Є шість однакових томів Пушкіна, п'ять – Лермонтова і чотири – Єсеніна. Скількома способами їх можна розставити в ряд?

2. Чотири студенти складають іспит. Скількома способами можуть бути поставлені їм оцінки за національною (п'ятибальною) шкалою, якщо відомо, що ніхто з них не отримав незадовільної оцінки?

3. У кімнаті дев'ять лампочок. Скільки існує різних способів освітлення кімнати, якщо одночасно горить три лампочки?

Варіант 24

1. Скількома способами можна розташувати на вітрині в ряд чотири однакових телевізора, шість відеомагнітофонів та три DVD-плеєра?

2. Десять учасників марафонського бігу розігрують одну золоту, одну срібну, одну бронзову медалі. Скількома способами ці нагороди можуть бути розподілені між спортсменами?

3. Скільки існує способів розділити 15 предметів між трьома особами так, щоб перша особа одержала сім предметів, друга – три предмета, а третя – п'ять предметів?

Варіант 25

1. Скільки натуральних чисел, менших за мільйон, можна записати за допомогою цифр 7, 8, 9, 0?

2. Скількома способами можуть сісти за круглий стіл п'ять жінок і п'ять чоловіків так, щоб жодні дві особи однієї статі не сиділи поруч?

3. У хокейному клубі вісім нападників, п'ять захисників і два голкіпера. Скільки різних варіантів команди може скласти тренер, якщо на лід виходять воротар, два захисники і трійка нападників?

4. Зразки розв'язання задач самостійної контрольної роботи

Задача 1. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти із цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо цифри утвореного числа не повторюються?

Розв'язання. За умовою задачі визначаємо основну множину – множину A, з елементів якої утворюють комбінаторні конфігурації, та її потужність $P(A)$: $A=\{1,2,3,4,5\}$ – 5-елементна множина заданих цифр; $P(A)=|A|=5$. Кожне утворене п'ятизначне число є 5-елементним кортежем (оскільки порядок цифр є суттєвим), елементи якого не повторюються (адже за умовою цифри в ньому різні) і який містить усі елементи множини A, тобто є переставленням без повторень із п'яти елементів.

Кількість таких переставлень обчислюємо за формулою (9):

$$P_5=5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$$

Задача 2. Наукове товариство налічує 25 членів. Треба обрати президента товариства, віцепрезидента, ученого секретаря та казначея. Скількома способами можна обрати керівництво товариства, якщо кожен його член може обіймати лише одну посаду?

Розв'язання. Мовою комбінаторного аналізу можна сказати, що задача полягає у знаходженні кількості способів утворення 4-елементних кортежів із 25-елементної множини A членів наукового товариства, оскільки має суттєве значення і те, кого буде обрано у керівництво товариства, і те, які посади обійматимуть обрані. Як підсумок, розглядувані комбінаторні конфігурації – це розміщення без повторень (адже кожен член товариства може обіймати лише одну посаду).

Отже, кількість шуканих способів дорівнює (див. формулу (10)):

$$A_{25}^{4}=\frac{25!}{(25-4)!}=25\cdot 24\cdot 23\cdot 22=303\,600.$$

Такий самий результат дістанемо, якщо діяти безпосередньо за правилом добутку. (*Наведіть* самостійно відповідні міркування).

Задача 3. Для проведення тестування з математики необхідно створити комісію з трьох або чотирьох викладачів кафедри. Скільки різних складів комісій можна запропонувати, якщо на кафедрі працюють п'ятнадцять викладачів?

Розв'язання. За основну множину A в цій задачі маємо множину викладачів кафедри; $P(A)=15$. Кількість способів сформувати комісію із трьох викладачів дорівнює кількості 3-елементних підмножин, утворених з елементів множини A (порядок елементів не важливий, оскільки не суттєво, у якій послідовності було обрано викладачів у комісію), тобто кількості комбінацій без повторень із п'ятнадцяти елементів по три: C_{15}^{3}.

Аналогічно знаходимо кількість способів формування комісії з чотирьох викладачів: C_{15}^4.

Загальну кількість S складів комісій із трьох або чотирьох викладачів знаходимо за правилом суми з урахуванням формули (11):

$$S = C_{15}^3 + C_{15}^4 = \frac{15!}{3! \cdot 12!} + \frac{15!}{4! \cdot 11!} = 455 + 1365 = 1820.$$

Задача 4. Скільки різних "слів" (зокрема беззмістовних) можна здобути, переставляючи букви у слові "статистика".

Розв'язання. Установлюємо, що основною множиною в цій задачі є множина типів (сортів, різновидів) використаних букв: $A = \{\text{с}, \text{т}, \text{а}, \text{и}, \text{к}\}$; $P(A) = 5$. Усі "слова", утворені переставленням букв у слові "статистика", є 10-елементними кортежами (адже зміна порядку розташування букв породжує нове "слово") і мають однаковий склад елементів (дві букви "с", три – "т", дві – "а", дві – "и" та одну букву "к"). Отже, розглядають усілякі переставлення з повтореннями із п'яти елементів множини A по десять зі специфікацією $(2,3,2,2,1)$, кількість яких знаходимо за формулою (13):

$$P_{10}(2,3,2,2,1) = \frac{10!}{2! \cdot 3! \cdot 2! \cdot 2! \cdot 1!} = 75\,600.$$

Задача 5. Скільки існує способів відповісти на три запитання вікторини, якщо на кожне запитання можна відповісти "так" чи "ні"?

Розв'язання. Визначаємо множину A та її потужність: $A = \{\text{так}, \text{ні}\}$ – множина варіантів відповідей. Для зручності позначимо: відповідь "так" через 1, а "ні" – через 0, тоді $A = \{1, 0\}$; $P(A) = 2$.

Наведемо деякі варіанти відповідей на запитання вікторини:

$1,\ 0,\ 0$ – на перше запитання отримано відповідь "так", на друге і третє – "ні";

$0,\ 1,\ 1$ – на перше запитання отримано відповідь "ні", на друге і третє – "так";

$1,\ 1,\ 1$ $(0,\ 0,\ 0)$ – на всі запитання отримано відповідь "так" ("ні").

Отже, робимо висновок, що кожний варіант відповідей на запитання вікторини є 3-елементним кортежем (порядок розташування елементів визначає позитивну або негативну відповідь на певне запитання), елементи якого можуть повторюватися (адже на декілька запитань можна дати однакову відповідь) і який може містити не всі елементи основної множини A (наприклад: $1, 1, 1$), тобто є розміщенням з повтореннями з двох елементів по три.

Кількість таких розміщень обчислюємо за формулою (14):

$$\overline{A}_2^3 = 2^3 = 8.$$

Задача 6. Підприємство виготовляє за добу 40 однотипних виробів. Скількома способами можна розподілити вироби між трьома замовниками так, щоб кожному дісталося не менш як десять виробів?

Розв'язання. Оскільки за умовою задачі кожен замовник має отримати принаймні 10 виробів, то й почнемо з того, що виділимо кожному замовникові по 10 виробів. Після цього залишається $40-3\cdot 10=10$ виробів, які можна вже розподіляти у довільний спосіб. Тобто приходимо до задачі розподілу 10 виробів між трьома замовниками, причому може трапитися так, що одному (або навіть двом) учасникам розподілу нічого не дістанеться.

Розташуємо подумки всі вироби в рядок і для розподілу їх між трьома претендентами застосуємо дві перегородки: першому замовникові віддаємо вироби, розташовані до першої перегородки, другому – ті вироби, які розташовані між першою і другою перегородками, а третьому – ті вироби, які розташовані після другої перегородки. Для формалізації запропонованого можна закодувати вироби одиницями, а перегородки – нулями, і розглядати 12-елементні кортежі, складені з десяти одиниць і двох нулів, наприклад, $(1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1)$. Переставляючи довільним чином десять виробів (одиниць) і дві перегородки (нулі), ми дістанемо всі варіанти розподілу: кожному переставленню з повтореннями із елементів множини $A=\{1,0\}$ зі специфікацією $(k_1,k_2)=(10,2)$ відповідає певний спосіб розподілу, і навпаки.

Отже, загальна кількість способів розподілу виробів між трьома замовниками дорівнює (див. формулу (13)):

$$P_{12}(10,2)=\frac{12!}{10!\cdot 2!}=66.$$

Узагальнюючи розглянуте, можна *стверджувати*, що:

а) n однакових предметів можна розподілити між k особами $P_{n+k-1}(n,k-1)=C_{n+k-1}^{n}=C_{n+k-1}^{k-1}$ способами;

б) якщо кожний із k учасників має отримати не менш як d предметів, то задача розв'язується $C_{n-kd+k-1}^{k-1}=C_{n-k(d-1)-1}^{k-1}$ способами.

Задача 7. Є п'ять крісел: 1) різного виду; 2) однакового виду. Скількома способами можна розставити ці крісла уздовж трьох стін за умови, що всі крісла можна поставити уздовж однієї стіни і не важливо, як стоятимуть крісла: поруч чи на певній відстані одне від одного?

Розв'язання. Введемо позначення: $C=\{c_1,c_2,c_3\}$ – множина стін (основна множина), $P(C)=3$; $K=\{k_1,k_2,k_3,k_4,k_5\}$ – множина крісел.

Для встановлення типу комбінаторної конфігурації наведемо деякі способи розташування крісел уздовж стін c_1, c_2, c_3:

c_1, c_1, c_1, c_1 – усі крісла стоять уздовж c_1;

c_1, c_3, c_1, c_2 – перше і третє крісла стоять уздовж c_1, друге – уздовж c_3, четверте – уздовж c_2;

c_3, c_2 c_2, c_1 – перше крісло стоїть уздовж c_3, друге і третє – уздовж c_2, четверте – уздовж c_1.

1. Складаються 5-елементні кортежі, адже крісла (за умовою) різні. Кожний елемент k_j, $j=\overline{1,n}$ можна вибрати трьома способами. Отже, загальна кількість способів дорівнює:

$$S=\overline{A}_n^m=\overline{A}_3^5=3\cdot3\cdot3\cdot3\cdot3=243.$$

2. Оскільки крісла однакові (за умовою), то порядок їхнього розташування не має суттєвого значення. Отже, нам потрібна кількість можливих складів кортежів:

$$S=\overline{C}_n^m=\overline{C}_3^5=C_7^5=C_7^2=\frac{7\cdot6}{1\cdot2}=21.$$

5. Тестові завдання за темою "Комбінаторний аналіз"

1. Обчисліть: $(P_6 - A_{25}^2) \cdot \overline{C}_5^3$.

Варіанти відповідей:

А) $1\,200$; Б) $4\,200$; В) 1120; Г) $3\,325$.

2. Обчисліть: $\dfrac{\overline{A}_3^2 + P_6(2,3,1)}{C_4^3 - 1}$.

Варіанти відповідей:

А) 3; Б) 69; В) 39; Г) 23.

3. Розв'яжіть рівняння: $A_{x+1}^2 = 20$.

Варіанти відповідей:

А) 4 і -5; Б) 4; В) -4 і 5; Г) 5.

4. Розв'яжіть рівняння: $C_x^{x-1} \cdot (x-1) = 30$.

Варіанти відповідей:

А) 6; Б) -5 і 6; В) -6 і 5; Г) 5.

5. За якого значення параметра n справедлива рівність $\dfrac{P_{n+3}}{P_{n+1}} = 72$?

Варіанти відповідей:

А) -11 і 6; Б) 6; В) 11; Г) 5 і 6.

6. Розв'яжіть рівняння: $x \cdot P_{17} - P_{19} = P_{18}$.

Варіанти відповідей:

А) 360; Б) $37/17$; В) $1/17$; Г) 342.

7. За якою формулою обчислюють кількість переставлень без повторень із n елементів?

Варіанти відповідей:

А) n^2; Б) 2^n; В) $(n-1)!$; Г) $n!$.

8. За якою формулою обчислюють кількість комбінацій без повторень із n елементів по m?

Варіанти відповідей:

А) $\frac{n!}{m!}$; Б) $\frac{n!}{(n-m)!}$; В) $\frac{n!}{m!(n-m)!}$; Г) $\frac{(n-m)!}{n!}$.

9. За якою формулою обчислюють кількість розміщень без повторень із n елементів по m?

Варіанти відповідей:

А) $\frac{n!}{m!}$; Б) $\frac{n!}{(n-m)!}$; В) $\frac{n!}{m!(n-m)!}$; Г) $\frac{(n-m)!}{n!}$.

10. За якою формулою обчислюють кількість розміщень з повтореннями із n елементів по m?

Варіанти відповідей:

А) $\frac{n!}{(n-m)!}$; Б) n^m; В) m^n; Г) $n!^{m!}$.

11. За якою формулою обчислюють кількість комбінацій з повтореннями із n елементів по m?

Варіанти відповідей:

А) $\frac{n!}{m!(n-m)!}$; Б) $\frac{(n+m-1)!}{(n-m)!}$; В) $\frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$; Г) $\frac{(n+m)!}{m!(n-1)!}$.

12. За якою формулою обчислюють кількість переставлень з повтореннями із n елементів по m заданого складу?

Варіанти відповідей:

А) $\frac{n!}{k_1!k_2!...k_n!}$; Б) $\frac{m!}{k_1!k_2!...k_n!}$; В) $\frac{(n+m)!}{k_1!k_2!...k_n!}$; Г) $\frac{k_1!+k_2!+...+k_n!}{n!m!}$.

13. Якщо елемент a можна вибрати m способами й після кожного такого вибору a елемент b можна вибрати n способами, то вибір пари (a,b) у вказаному порядку можна здійснити … способами:

Варіанти відповідей:

А) $n+m$; Б) $n\cdot m$; В) $n-m$; Г) n^m.

14. Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b – n способами, причому ніякий спосіб вибору a не збігається із жодним зі способів вибору b, то вибір або елементу a, або елементу b можна здійснити … способами.

Варіанти відповідей:

А) $n+m$; Б) $n \cdot m$; В) $n-m$; Г) n^m.

15. Скільки існує тризначних чисел, усі цифри яких непарні та різні?

Варіанти відповідей:

А) 120; Б) 30; В) 50; Г) 60.

16. Скільки різних акордів, що містять три звуки, можна утворити із 12 клавіш однієї октави?

Варіанти відповідей:

А) 364; Б) 1320; В) 220; Г) 1728.

17. Скільки п'ятизначних чисел можна утворити із цифр 1, 2, 3?

Варіанти відповідей:

А) 125; Б) 243; В) 10; Г) 60.

18. Скількома способами можна розподілити дев'ять однакових олівців між трьома дітьми?

Варіанти відповідей:

А) 84; Б) 504; В) 729; Г) 165.

19. Скількома способами можна п'ять студентів вишикувати в колону по одному?

Варіанти відповідей:

А) 15; Б) 120; В) 90; Г) 60.

20. Скільки чисел можна утворити з цифр 1, 2, 3, якщо цифра 1 повторюється три рази, цифра 2 – два рази, а цифра 3 – один раз?

Варіанти відповідей:

А) 60; Б) 40; В) 20; Г) 30.

Рекомендована література

Основна

1. Андерсон Д. Дискретная математика и комбинаторика / Д. Андерсон ; пер. с англ. – Москва : Издательский дом "Вильямс", 2004. – 960 с.

2. Денисова Т. В. Дискретна математика : навч. посіб. / Т. В. Денисова, В. Ф. Сенчуков ; Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 287 с.

3. Карнаух Т. О. Вступ до дискретної математики / Т. О. Карнаух, А. Б. Ставровський. – Київ : ВПЦ "Київський університет", 2006. – 109 с.

4. Карнаух Т. О. Комбінаторика / Т. О. Карнаух. – Київ : ВПЦ "Київський університет", 2011. – 143 с.

Додаткова

5. Боднарчук Ю. В. Основи дискретної математики : навч. посіб. / Ю. В. Боднарчук, Б. В. Олійник. – Київ : НаУКМА, 2007. – 138 с.

6. Бондаренко М. Ф. Комп'ютерна дискретна математика : підручник / М. Ф. Бондаренко, Н. В. Білоус, А. Г. Руткас. – Харків : Компанія СМІТ, 2014. – 480 с.

7. Борисенко О. А. Дискретна математика : підручник для студентів вищих навчальних закладів / О. А. Борисенко. – Суми : Університетська книга, 2019. – 255 с.

8. Дискретна математика для інформатиків : навч. посіб. / С. В. Бразинська, Т. М. Дубовик ; за ред. д-ра фіз.-мат. наук, проф. А. І. Косолапа ; ДВНЗ "Укр. держ. хім.-технол. ун-т". – Дніпро : ДВНЗ УДХТУ, 2018. – 150 с.

9. Дискретна математика : методичні рекомендації до лабораторних робіт для студентів галузі знань 12 "Інформаційні технології" першого (бакалаврського) рівня / уклад. Т. В. Денисова, В. Ф. Сенчуков. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2018. – 114 с.

10. Журавчак Л. М. Дискретна математика для програмістів : навч. посіб. / Л. М. Журавчак. – Львів : Видавництво Львівської політехніки, 2019. – 420 с.

11. Журавчак Л. М. Практикум з комп'ютерної дискретної математики : навч. посіб. / Л. М. Журавчак, Н. І. Мельникова, П. В. Сердюк ; Нац. ун-т "Львів. Політехніка". – Львів : Вид-во Львів. політехніки, 2020. – 313 с.

12. Нікольський Ю. В. Дискретна математика : підручник / Ю. В. Нікольський, В. В. Пасічник, Ю. М. Щербина ; за ред. В. В. Пасічника. – 5-те вид., випр. та допов. – Львів : Магнолія-2006, 2019. – 432 с.

Інформаційні ресурси

13. Дискретна математика [Електронний ресурс] : навчальний посібник для студентів спеціальності 123 "Комп'ютерна інженерія", спеціалізації "Комп'ютерні системи та мережі" / М. А. Новотарський ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Електронні текстові дані (1 файл: 10,66 Мбайт). – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2020. – 278 с. – Режим доступу : https://ela.kpi.ua/handle/123456789/37806.

14. Дискретна математика: теорія множин і відношень, комбінаторика, числення висловлювань [Електронний ресурс] : навч. посіб. / Н. П. Тмєнова. – Київ : ВПЦ "Київський університет", 2018. – 103 с. – Режим доступу : http://pdf.lib. vntu.edu.ua/books/2020/Tmenova_2018_ 103.pdf.

15. Коцовський В. М. Основи дискретної математики : навч. посіб. / В. М. Коцовський. – Ужгород : ПП "АУТДОР-ШАРК", 2020. – 128 с. – Режим доступу : https://dspace.uzhnu.edu.ua/ jspui/handle/lib/31664.

16. Методичні вказівки до практичних занять та самостійної роботи студентів з дисципліни "Дискретна математика" галузь знань 12 "Інформаційні технології" [Електронний ресурс] / уклад. : О. П. Ясній, П. Б. Гащин, Н. Р. Крива. – Тернопіль : Тернопільський національний технічний університет імені Івана Пулюя, 2019. – 40 с. – Режим доступу : http://elartu. tntu.edu.ua/handle/lib/29428.

17. Старченко В. В. Дискретна математика. Практикум з рішення задач за темою "Комбінаторика" : метод. вказівки [Електронний ресурс] / В. В. Старченко. – Миколаїв : Вид-во ЧНУ ім. Петра Могили, 2021. – 36 с. – (Методична серія; вип. 328). – Режим доступу : https://dspace.chmnu. edu.ua/jspui/handle/ 123456789/442.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до самостійної роботи за темою "Комбінаторний аналіз"

для студентів галузі знань
12 "Інформаційні технології"
першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладач **Денисова** Тетяна Володимирівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *А. С. Ширініна*

Коректор *Н. В. Завгородня*

План 2022 р. Поз. № 55 ЕВ. Обсяг 48 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.