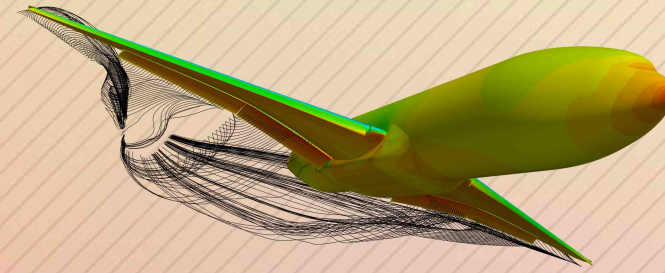


Ф. В. Новіков
Д. Ф. Новіков
В. О. Жовтобрюх

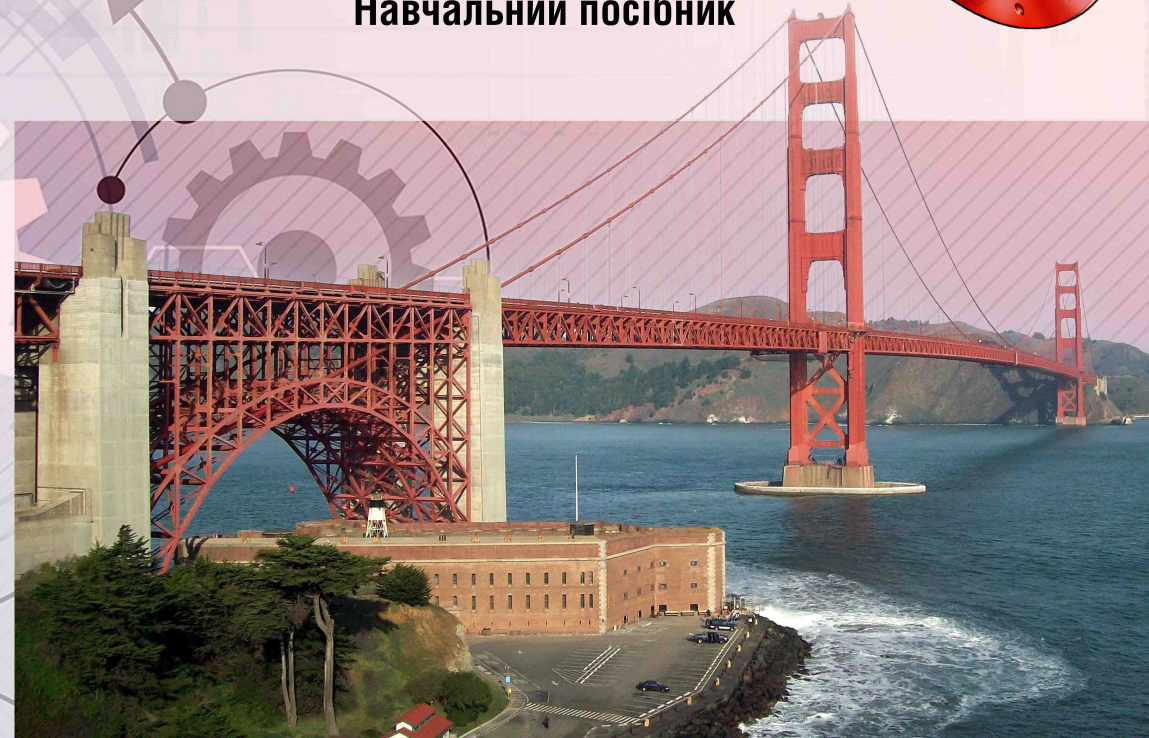
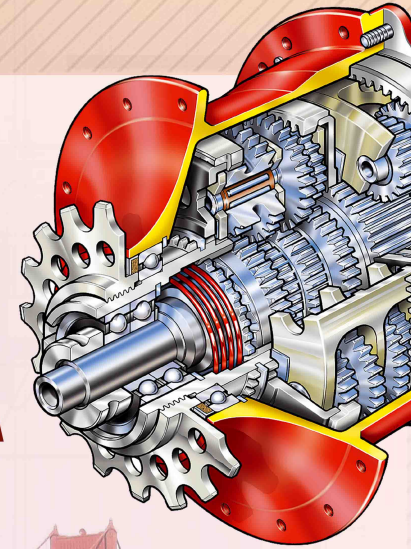


Ф. В. Новіков
Д. Ф. Новіков
В. О. Жовтобрюх

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник



ДНІПРО | ЛІРА | 2023

ISBN 978-966-981-791-4



9 789669 817914

ЛІРА
ВИДАВНИЦТВО
ДРУКАРНЯ
— ДНІПРО —

Ф. В. Новіков
Д. Ф. Новіков
В. О. Жовтобрюх

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Дніпро | **ЛІРА** | 2023

УДК 621(07.034)

H73

Рецензенти:

- О. О. Клочко**, докт. техн. наук, професор, професор кафедри "Технологія машинобудування та металорізальні верстати" Національного технічного університету "Харківський політехнічний інститут";
- Ю. В. Яровий**, канд. техн. наук, доцент, доцент кафедри цифрових технологій в інжинірингу Національного університету "Одеська політехніка"

Новіков Ф. В., Новіков Д. Ф., Жовтобрюх В. О.

H73

Технічна механіка : навч. посіб. / Ф. В. Новіков, Д. Ф. Новіков, В. О. Жовтобрюх. Дніпро : ЛІРА, 2023. 328 с.

ISBN 978-966-981-791-4

Розглянуто загальні питання, визначення та теоретичні основи технічної механіки, яка містить теоретичну механіку – статику, кінематику і динаміку; опір матеріалів; деталі машин. Значну увагу приділено загальним законам руху і рівноваги матеріальних тіл. Наведено розрахунки реакцій опор і механічних напружень в елементах конструкцій в умовах розтягання, стиску, зрізу (зсуву), зминання, вигину, крутіння та обґрунтовано можливості визначення їх конструктивних параметрів за умов забезпечення міцності та жорсткості. Проведено аналіз характеристик основних типів деталей машин (передач, деталей обертання, з'єднань) та методів їх розрахунку. Розглянуто параметри якості деталей машин та методи їх оцінювання, технологічне забезпечення виготовлення деталей машин. Наведено приклади розв'язання задач із технічної механіки, які допоможуть студентам під час виконання завдань самостійної роботи.

Рекомендовано для студентів інженерних та економічних спеціальностей вищих навчальних закладів, а також для фахівців і керівників підприємств, які підвищують свою кваліфікацію.

УДК 621(07.034)

ISBN 978-966-981-791-4

© Новіков Ф. В., Новіков Д. Ф.,
Жовтобрюх В. О., 2023

© ЛІРА, 2023

Вступ

Механічні процеси на протязі всього цивілізованого розвитку людства займали провідну роль у створенні основ науки, техніки і технологій. Поява перших паровозів і теплоходів, а з часом літаків і космічних кораблів – все це пов'язано із становленням і розвитком механіки як науки. І зараз механіка займає провідну роль у створенні нових зразків техніки і технологій, особливо, у створенні високоефективних машин і систем. Згідно сучасних наукових поглядів, механіка – це наука про механічні рухи і взаємодії матеріальних тіл. Основу класичної механіки, як науки, складає технічна механіка – це частина механіки, в якій вивчають закономірності, що застосовують під час створення машин, механізмів і технічних споруд. Тому вивчення навчальної дисципліни "Технічна механіка" має важливе практичне значення для підготовки фахівців, які в подальшому будуть займатися проектуванням і виготовленням різних механічних систем.

Навчальна дисципліна "Технічна механіка" містить такі розділи: теоретична механіка (статика, кінематика і динаміка), опір матеріалів і деталі машин. Кожен із цих розділів у вищих навчальних закладах вивчають як самостійну навчальну дисципліну, так і в межах навчальної дисципліни "Технічна механіка". Безсумнівно, вивчення цих розділів у межах навчальної дисципліни "Технічна механіка" більш ефективно, оскільки дозволяє із єдиних теоретичних позицій отримати всі необхідні знання щодо розрахунку елементів конструкцій машин і систем на міцність, жорсткість і стійкість в умовах дії статичних та динамічних навантажень. У результаті з'являється можливість пройти довгий шлях від вибору розрахункової схеми досліджуваного об'єкту до визначення його оптимальних конструктивних параметрів на основі єдиного теоретичного підходу до вирішення задач технічної механіки.

Слід зазначити, що "Технічна механіка" – це достатньо складна навчальна дисципліна. Її вивчення розпочинається ще у школі у межах вивчення законів фізики. Подальше вивчення у вищих навчальних закладах, як показує багаторічний досвід, викликає у студентів значні труднощі із розуміння сутності механічних закономірностей та, особливо, їх математичного викладення і теоретичного аналізу. Це постійно вимагає розроблення нових більш досконалих навчально-методичних

підходів до вивчення основних положень технічної механіки, оволодіння правилами розв'язування задач та можливостями їх практичного застосування.

Метою даного навчального посібника є ознайомлення студентів із основними термінами і теоретичними підходами до визначення параметрів, які складають основу технічної механіки. При цьому важливо навчити студентів розв'язувати технічні задачі, які пов'язані, по-перше, із законами теоретичної механіки, а це – загальні закони руху та рівноваги матеріальних тіл. По-друге, із розрахунками елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість, які вивчаються у розділі "Опір матеріалів". По-третє, із розрахунками і конструюванням деталей та вузлів різних механізмів та машин, які вивчаються у розділі "Деталі машин". Важливо також навчити студентів правильно (обгрунтовано) вибирати розрахункові схеми реальних об'єктів (деталей машин), які підлягають дослідженню під час конструювання і проектування, та вміти знаходити раціональні рішення з погляду забезпечення їх надійної роботи після виготовлення.

Виходячи із цього, у навчальному посібнику зосереджено увагу на самостійну творчу працю студентів та вміння розв'язувати задачі. Наведено 12 практичних робіт, пов'язаних із вивченням визначень, аксіом, теорем, теоретичних підходів до розрахунку параметрів технічної механіки та вирішенням на конкретних прикладах задач із теоретичної механіки (статики, кінематики і динаміки), опору матеріалів і деталей машин. Для цього розглянуто задачі із визначення рівнодіючої, реакцій різних типів зв'язків та рівноваги плоскої і просторової систем сил, реакцій балкових опор, центра тяжіння; законів руху твердих тіл із позицій кінематики і динаміки; механічних напружень під час розтягання, стиску, зрізу (зсуву), зминання, вигину і крутіння; конструктивних параметрів деталей машин за умов міцності і жорсткості. Обгрунтовано можливості розв'язання практичних задач механічних технологій (обробки матеріалів різанням) із застосуванням методів технічної механіки, що є перспективним напрямом її розвитку. У кінці кожної із 12 робіт наведено задачі для самостійного вирішення.

Розглянуті у навчальному посібнику матеріали набули застосування у Харківському національному економічному університеті імені Семена Кузнеця під час проведення лекційних і лабораторних занять за навчальною дисципліною "Технічна механіка".

Робота 1. Основні поняття статички. Основні аксіоми статички

Мета роботи – ознайомити студентів із основними термінами та аксіомами статички; навчити визначати геометричним і аналітичним способами рівнодіючу плоскoї системи сил, що сходяться, та надати практичні навички їх застосування під час визначення рівноваги матеріальних точок і твердих тіл.

Загальні відомості

Основні поняття статички

Статика – це частина теоретичної механіки, яка вивчає умови рівноваги матеріальної точки або тіла під дією прикладених сил.

У статистиці розглядаються наступні два основні завдання:

1) заміна даної системи сил, прикладених до твердого тіла, іншою системою сил, їй еквівалентною;

2) встановлення загальних умов, за яких матеріальна точка і тверде тіло під дією прикладених сил залишаються у стані спокою або у стані рівномірного прямолінійного поступального руху, тобто визначення умов рівноваги сил, прикладених до матеріальної точки і твердого тіла.

Тому основними поняттями, із якими, перш за все, доводиться зустрічатися під час вивчення статички, є поняття *матеріальної точки, твердого тіла і сили*. Під *матеріальною точкою* у теоретичній механіці розуміють всяке тіло, розміри якого за всіма напрямками вельми малі, тому відмінністю в рухах окремих точок цього тіла можна нехтувати.

У статистиці тверде тіло розглядається як абсолютно тверде тіло. *Абсолютно твердим тілом* називається таке тіло, відстань між кожними двома точками якого залишаються завжди незмінними. Абсолютно тверде тіло завжди зберігає незмінною свою геометричну форму, тобто не деформується. Однак, не існує абсолютно твердих тіл. У всякому твердому тілі виникають за відповідних умов ті або інші деформації. Наприклад, сталева балка, яка лежить на двох опорах, випробовує деформацію вигину під дією покладеного на неї вантажу. Виходячи із цього, під час вибору абсолютно твердого тіла приймають наступні положення:

1) якщо деформації, що відбуваються у твердому тілі, не великі, то у першому наближенні ними можна нехтувати;

2) приймаючи тіло абсолютно твердим, значно спрощуються дослідження дії сил на тіло і умов, за якими сили знаходяться у рівновазі.

Слід зазначити, що після вивчення статички абсолютно твердого тіла можна потім перейти (у опорі матеріалів) до вирішення більш складних задач щодо рівноваги тіла, що деформується.

Матеріальні точки, які зв'язані між собою, і рухаються у взаємозв'язку, утворюють *механічну систему матеріальних точок* – систему. Якщо під час руху системи відстані між її точками залишаються постійними, то система називається *незмінною*.

Положення рухомого об'єкту щодо іншого фізичного тіла визначається в механіці за допомогою обраної системи координат (прямокутних координат), яка пов'язана із фізичним тілом (із Землею). Ця система координат, пов'язана із фізичним тілом, щодо якого визначається положення рухомого об'єкту, називається в механіці *системою відліку*.

Інерційна система відліку – це система відліку, відносно якої справедливі основні закони класичної механіки. Тому під час вивчення механічного руху на практиці систему відліку, що пов'язана із Землею, можна вважати інерційною системою.

Силами в механіці називаються взаємодії матеріальних тіл, у результаті яких відбувається зміна кінематичного стану цих тіл. Дія сили на тверде тіло визначається трьома чинниками: *точкою дотику, напрямом сили, чисельним значенням сили*.

Точкою дотику сили називається та матеріальна частинка (матеріальна точка) даного тіла, на яку ця сила діє (якій безпосередньо передається рух від іншого тіла).

Під *напрямом даної сили* розуміють напрям того руху, який отримує під дією цієї сили матеріальна точка, що спочатку знаходилася у стані спокою.

Пряма, вздовж якої направлена дана сила, називається *лінією дії цієї сили*. Наприклад, сила тяжіння направлена вертикально вниз.

Сила – це векторна величина. За одиницю сили приймається 1 Н. Відповідно, 1 кН = 10^3 Н; 1 МН = 10^6 Н.

Позначення різних типів сил:

\bar{F} – зовнішня сила;

F_x, F_y – відповідно, проекції сили на вісі x і y ;

\bar{R} – реакція опори або зв'язку;

\bar{F}_Σ – рівнодіюча сила.

Модуль – це чисельне значення векторної величини. Векторні величини графічно зображуються у вигляді відрізків, що мають певну довжину і певний напрям, тобто у вигляді векторів. Напрямок вектора вказується стрілкою, що стоїть на її кінці.

Два вектори вважаються рівними, якщо вони мають рівні модулі та однаковий напрям.

Вектор позначають однією жирною буквою або двома світлими буквами (позначають початок і кінець вектора) із рискою вгорі. Модуль вектора позначають світлою буквою або тими ж двома буквами, але без риси вгорі. Наприклад, модуль вектора \mathbf{F} дорівнює F або модуль вектора \mathbf{AB} дорівнює AB .

Сукупність сил, прикладених до твердого тіла, називається *система сил*. Якщо до тіла прикладена система сил, що урівноважується, то це означає, що ці сили знаходяться у рівновазі, або взаємно урівноважуються.

Коли одну систему сил, прикладених до даного твердого тіла, можна замінити іншою системою, не порушуючи при цьому його спокою або не змінюючи його руху, то такі дві системи сил називаються *еквівалентними*.

Рівнодіючою називається сила, яка надає таку саму дію на тіло, як і декілька сил. Рівнодіюча сила рівна геометричній сумі всіх сил, що діють на тіло:

$$\bar{F}_\Sigma = \sum_{i=1}^n \bar{F}_i,$$

де $i = 1, 2 \dots; n$ – порядковий номер сили.

Урівноваженою називається така сила, яка рівна за величиною рівнодіючій силі, але направлена у протилежну сторону.

Основні аксіоми статички

У основі вивчення рівноваги твердих тіл лежать деякі прості положення, які є *аксіомами статички*. Аксіоми виражають основні факти, підтверджені досвідом, під час вивчення дії сил на тверде тіло. Основні

аксіоми статички сформульовано видатним англійським вченим Ньютоном (1642 – 1727 рр.).

Аксіома 1 (принцип інерції або перший закон Ньютона).

Матеріальна точка знаходиться у рівновазі, якщо рівнодіюча всіх сил, що діють на неї, рівна нулю, тобто:

$$\vec{F}_{\Sigma} = \Sigma \vec{F}_i = 0.$$

Здібність твердого тіла зберігати рух за відсутності сил, що діють, або в поступовій зміні цього руху, коли на тіло починають діяти сили, називається *інерцією або інертністю*. На підставі цієї аксіоми *станом рівноваги* вважається такий стан, коли тіло знаходиться у спокої або рухається прямолінійно і рівномірно, тобто за інерцією.

Аксіома 2 (принцип рівності двох сил). Дві сили, що діють на одне тіло, є *взаємоурівноваженими*, якщо вони рівні за величиною, протилежні за напрямом і лежать на одній прямій.

Умова, сформульована у цій аксіомі, є *необхідною умовою рівноваги двох сил*. Це означає, що якщо система двох сил знаходиться у рівновазі, то ці сили повинні бути рівні за модулем та діяти за однією прямою у протилежні сторони.

Справедливе зворотне формулювання аксіоми, а саме: якщо дві сили однакові за модулем і діють вздовж однієї прямої в протилежні сторони, то така система сил обов'язково знаходиться у рівновазі.

Аксіома 3 (принцип приєднання або виключення взаємоурівноважених сил). Механічний стан тіла не зміниться, якщо до нього приєднати або виключити взаємоурівноважену систему сил.

Слідство із аксіоми. Механічний стан твердого тіла не порушиться від перенесення сили уздовж лінії її дії. Це справедливо для абсолютно твердого тіла.

Аксіома 4 (принцип паралелограма). *Рівнодіюча двох сил*, прикладених до тіла в одній точці і направлених один до одного під кутом, дорівнює геометричній сумі цих сил і зображується діагоналлю паралелограма, побудованого на цих силах як на сторонах (рис. 1.1).

За теоремою косинусів (рис. 1.1):

$$F_{\Sigma}^2 = F_1^2 + F_2^2 - 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha.$$

Звідки

$$F_{\Sigma} = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2 \cdot F_1 \cdot F_2 \cdot \cos \alpha}.$$

Силу різання P також можна подати тангенціальною P_z і радіальною P_y складовими сили різання, які повернено відносно складових сили різання N і $f \cdot N$ на кут, що дорівнює передньому куту ріжучого інструмента γ . Тому кут між векторами складових сили різання N і P_z дорівнює передньому куту ріжучого інструмента γ , а кут між векторами сили різання P і тангенціальною P_z складовою сили різання дорівнює так званому куту дії $\omega = (\psi - \gamma)$.

Плоска система сил, що сходяться

Плоскою системою сил, що сходяться, називається система сил, лінії дії яких лежать у одній площині і перетинаються у одній точці (рис. 1.3, а).

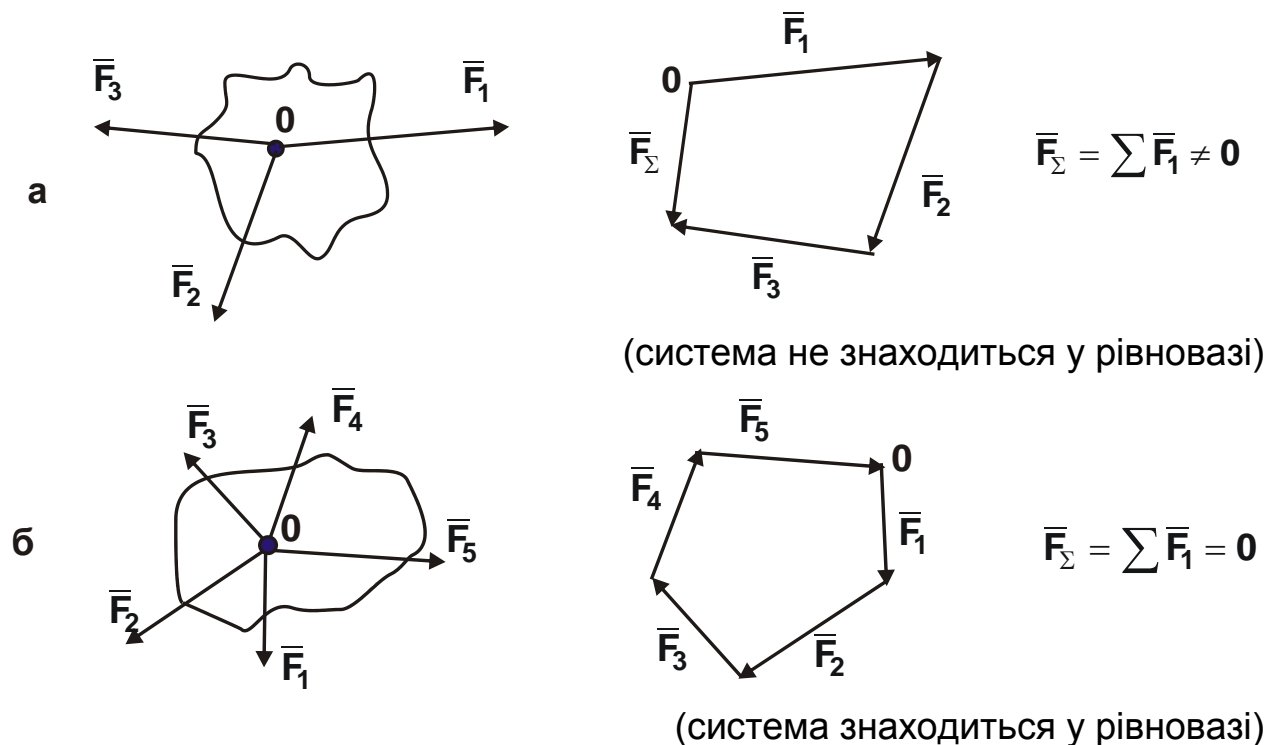


Рисунок 1.3 – Силевий багатокутник

Щоб з'ясувати, чи буде дане тіло знаходитися у рівновазі під дією плоскої системи сил, що сходяться, необхідно знайти її рівнодіючу силу. Якщо рівнодіюча сила рівна нулю, система сил знаходиться у рівновазі, якщо не рівна нулю – не знаходиться у рівновазі.

Існує два способи визначення рівнодіючої сили плоскої системи сил, що сходяться: *геометричний* і *аналітичний*.

Геометричний спосіб визначення рівнодіючої сили плоскої системи сил, що сходяться, – це *побудова силового багатокутника*. Сутність цього способу полягає у наступному: у довільно вибрану точку переноситься об'єкт рівноваги, у цю точку поміщається початок першого вектора, перенесеного паралельно самому собі; на кінець першого вектора переноситься початок другого вектора, на кінець другого вектора – початок третього тощо.

Якщо побудований силовий багатокутник виявиться незамкнутим, значить, дана система сил не знаходиться у рівновазі (рис. 1.3,а). Таким чином, *геометрична умова рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, полягає у замкнутості силового багатокутника*, тобто коли кінець останнього вектора співпадає із початком першого вектора (рис. 1.3,б).

Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої сили плоскої системи сил, що сходяться, полягає у наступному: всі сили плоскої системи сил, що сходяться, проєктуються на дві взаємно перпендикулярні вісі координат x і y :

$$F_x = \bar{F} \cdot \cos \alpha;$$

$$F_y = \bar{F} \cdot \sin \alpha,$$

а потім знаходиться алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на вісі координат x і y .

Якщо алгебраїчна сума проєкцій всіх сил дорівнює нулю, то дана система сил знаходиться у *рівновазі*:

$$\Sigma F_{ix} = 0;$$

$$\Sigma F_{iy} = 0.$$

Віссю координат називається довільно обраний направлений відрізок прямої (рис. 1.4).

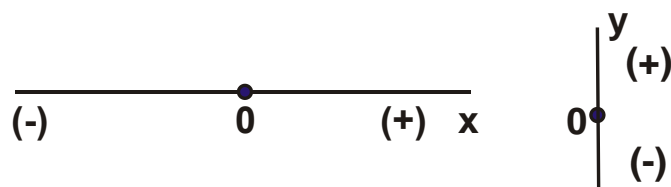


Рисунок 1.4 – Вісі координат

Проекція сили на вісь координат – це відрізок вісі, що відсікається перпендикулярами, опущеними з початку і з кінця вектора (рис. 1.5).

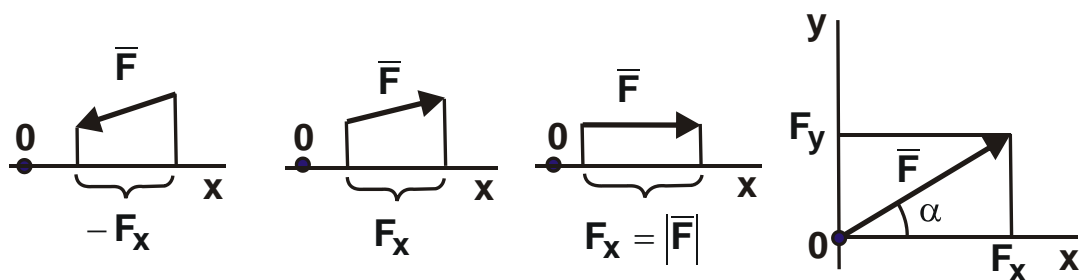


Рисунок 1.5 – Проекції сили на вісі координат

Приклад 1.1. На матеріальну точку діють у одній площині три однакові за величиною сили. Кут між ними складає 120° (рис. 1.6). Необхідно знайти рівнодіючу цих сил.

Дано:

$$|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2| = |\vec{F}_3|$$

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 120^\circ$$

Знайти:

$$\vec{F}_{\text{рівн}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3$$

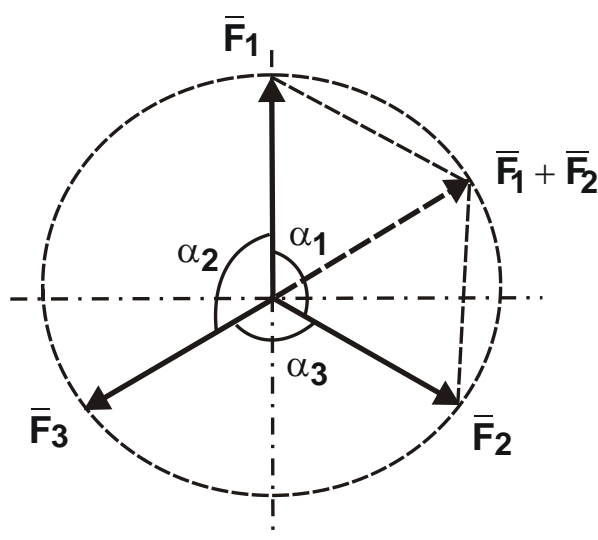


Рисунок 1.6 – Розрахункова схема

Рішення. Знайдемо векторну суму сил \vec{F}_1 і \vec{F}_2 за правилом паралелограма, яка буде дорівнювати його діагоналі. Діагональ буде дорівнювати стороні паралелограма, оскільки трикутники, які складають паралелограм, будуть правильними – для них всі кути дорівнюють 60° . Таким чином, маємо $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \vec{F}_3$. Тоді рівнодіюча трьох сил дорівнює: $\vec{F}_{\text{рівн}} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0$.

Порядок виконання самостійної роботи

Для виконання самостійної роботи кожен студент отримує від викладача свій варіант завдання (рис. 1.7, табл. 1.1), який полягає у побудові силового багатокутника та визначенні аналітичним способом величини і напрямку рівнодіючої плоскої системи сил, що сходяться. На

основі отриманих результатів розрахунку слід зробити висновок – знаходиться плоска система сил у рівновазі чи ні.

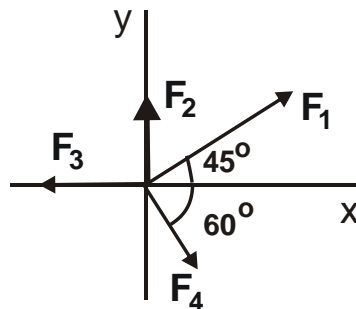


Рисунок 1.7 – Розрахункова схема плоскої системи сил, що сходяться

Таблиця 1.1 – Значення зосереджених сил плоскої системи сил, що сходяться

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1 , кН	5	8	10	20	10	12	9	11	18	4
F_2 , кН	12	10	14	10	12	5	5	15	10	20
F_3 , кН	10	5	6	9	8	10	12	5	15	7
F_4 , кН	11	14	7	4	15	20	10	9	6	15

Звіт по роботі

У звіті студент наводить основні терміни та поняття, ескізи плоских систем сил, що сходяться, та побудованих силових багатокутників, результати розрахунків та зроблені висновки.

Література: [9 – 11, 13, 14, 16, 17, 20].

Питання для самоконтролю

- Інерцією називається можливість твердого тіла рухатися:
 - а) під дією сили інерції;
 - б) під дією прискорення;
 - в) під дією змінної сили;
 - г) при відсутності сили.
- Дія і протидія є дві сили, прикладені :
 - а) до одного тіла;
 - б) до двох різних тіл;
 - в) до одного тіла і направлені по одній прямій;

- г) до одного тіла і направлені в різні боки.
3. Рівнодійну двох сил, лінії дії яких лежать в одній площині та перетинаються, можна визначити:
- а) за правилом паралелограма;
 - б) за умови рівноваги;
 - в) за проекціями на координатні осі;
 - г) за проекцією на одну з координатних осей.
4. Урівноважувальна сила:
- а) рівна за величиною рівнодіючій силі і спрямована в один бік;
 - б) рівна за величиною рівнодіючій силі й спрямована в протилежний бік;
 - в) рівна силі, з якою два тіла діють один з одним;
 - г) рівна еквівалентній силі.
5. Проекція векторної суми на вісь дорівнює:
- а) алгебраїчній сумі проекцій складових векторів;
 - б) проекції рівнодіючого вектору;
 - в) урівноважувальній силі;
 - г) рівнодіючій силі.
6. Рівнодійна та урівноважувальна сили системи сил направлені відносно одна одної:
- а) в один бік;
 - б) в протилежні боки й лежать на одній прямій;
 - в) довільно;
 - г) в один бік й лежать на одній прямій.
7. Плоска система сил, які сходяться, знаходиться у рівновазі (система урівноважена), якщо:
- а) рівнодіюча системи дорівнює нулю;
 - б) алгебраїчна сума проекцій складових системи на дві координатні осі дорівнює нулю;
 - в) лінія дії всіх сил перетинаються в одній точці;
 - г) відомі модуль та напрям рівнодіючої системи.
8. Сила тяжіння тіла – це:
- а) рівнодіюча системи паралельних сил тяжіння окремих частин тіла;
 - б) рівнодіюча системи зовнішніх сил;
 - в) урівноважувальна сила;
 - г) еквівалентна сила.

Робота 2. Зв'язки та їх реакції. Системи сил і умови їх рівноваги

Мета роботи – навчити студентів визначати реакції різних типів зв'язків та розв'язувати задачі рівноваги плоскої системи сил, що сходяться.

Загальні відомості

Вільне і невільне тіло, поняття зв'язку і реакції зв'язку

Тіло, яке може отримати будь-яке переміщення в просторі, називається *вільним*.

Тіло, руху якого перешкоджають інші тіла, називається *скованим*.

Зв'язками називають обмеження, що накладаються на положення і швидкості точок тіла у просторі.

Сила, з якою тіло діє на зв'язок, називається *силою тиску*. Сила, з якою зв'язок діє на тіло, називається *силою реакції або просто реакцією*. Згідно з аксіомою взаємодії, ці сили за модулем рівні і діють вздовж однієї прямої у протилежні боки. Сили реакції та тиску прикладені до різних тіл і тому не є системою сил.

Сили, що діють на тіло, діляться на *активні й реактивні*. Активні сили прагнуть переміщати тіло, до якого вони прикладені, а реактивні сили перешкоджають цьому переміщенню.

Під час вирішення більшості завдань статички сковане тіло умовно зображають як вільне тіло за допомогою так званого *принципу звільнення*, який формулюється так: всяке сковане тіло можна розглядати як вільне тіло, якщо відкинути зв'язки, замінивши їх реакціями. У результаті застосування цього принципу отримуємо тіло, що вільне від зв'язків і знаходиться під дією деякої системи активних і реактивних сил.

Типи зв'язків і напрями їхніх реакцій

Правило для визначення *напрямую реакції* можна сформулювати так: напрям *реакції зв'язку* протилежний напрямку переміщення, що знищується даним зв'язком. Тому розглянемо напрям реакцій основних видів зв'язку (їх шість), що зустрічаються у різних конструкціях:

1. У вигляді *гладкої поверхні* (поверхня столу, рівного шляху). Реакція зв'язку направлена перпендикулярно поверхні зв'язку (рис. 2.1).

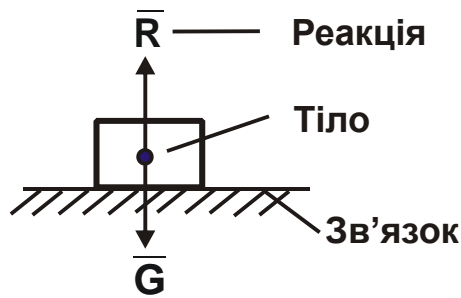


Рисунок 2.1 – Напрямок реакції гладкої поверхні

Реакція зв'язку R направлена перпендикулярно опорній поверхні у бік тіла, оскільки зв'язок не дає тілу переміщатися тільки у бік опорної поверхні і перпендикулярно їй та проходить через центр тяжіння тіла.

2. У вигляді шорсткої поверхні. Умовно зображується похилою площиною (рис. 2.2). Повна реакція зв'язку \bar{R} направлена під кутом β (\bar{R}_n – нормальна реакція опори). Якщо розкласти силу тяжіння G на складові G' і F_T , тобто складові, які паралельні і перпендикулярні опорній площині, то отримано:

$$G' = G \cdot \cos \alpha; \quad (2.1)$$

$$G' = R_n = G \cdot \cos \alpha; \quad (2.2)$$

$$F_T = f \cdot R_n = f \cdot G \cdot \cos \alpha; \quad (2.3)$$

$$f \cdot R = f \cdot G' \cdot \cos \alpha, \quad (2.4)$$

де f – коефіцієнт тертя ковзання тіла на похилій площині.

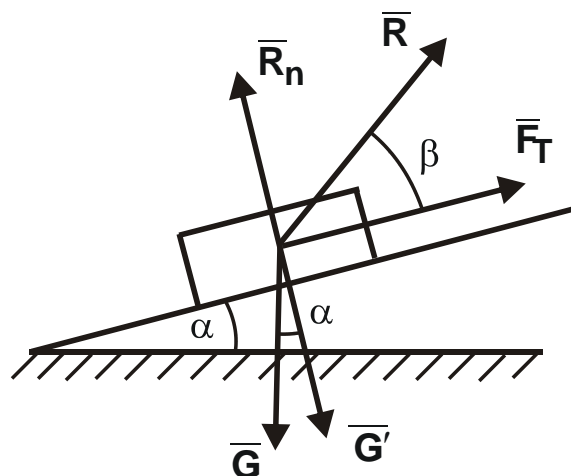


Рисунок 2.2 – Напрямок реакції шорсткої поверхні

Із залежностей (2.1) – (2.4) витікає умова рівноваги тіла на похилій площині:

$$G \cdot \sin \alpha = f \cdot G \cdot \cos \alpha \quad (2.5)$$

або

$$\operatorname{tg} \alpha = f = \operatorname{tg} \varphi, \quad (2.6)$$

де φ – умовний кут тертя.

Як видно, виконується умова $\alpha = \varphi$. Отже, за умови $\alpha < \varphi$ тіло не буде ковзати на похилій площині під дією власної сили тяжіння.

3. У вигляді *прямого жорсткого стержня із шарнірним закріпленням кінців*. Реакція стержня направлена уздовж його осі (рис. 2.3).

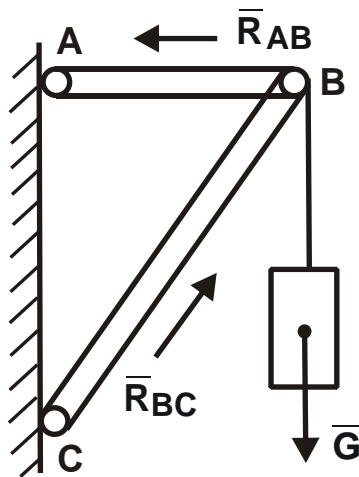


Рисунок 2.3 – Напрямок реакції прямого жорсткого стержня

У цьому випадку реакція стержня направлена уздовж лінії BC (AB), тобто уздовж прямої, що сполучає шарніри. *Шарнір* – рухоме з'єднання двох тіл, що допускає тільки обертання навколо загальної вісі (циліндровий шарнір) або загальної точки (кульовий шарнір).

4. У вигляді *точкової опори*. Реакція направлена перпендикулярно поверхні опори (рис. 2.4).

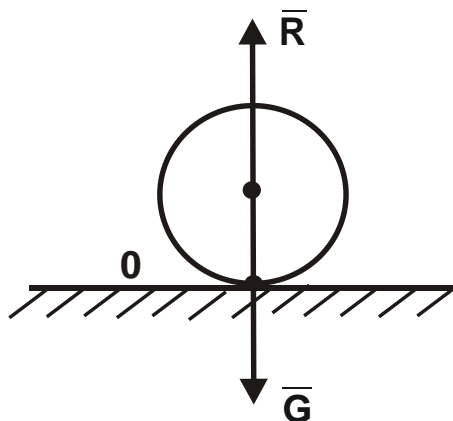


Рисунок 2.4 – Напрямок реакції точкової опори

У цьому випадку реакція \bar{R} направлена уздовж нормалі до поверхні тіла і в бік тіла (проходить через точку дотику чи центр тяжіння тіла), оскільки нормаль до поверхні тіла є єдиний напрям переміщення, який не допускають ці зв'язки. Реакція R рівна силі тяжіння G і направлена у протилежний бік.

5. У вигляді *ребра двохгранного кута*. Реакція направлена перпендикулярно поверхні тіла опори (рис. 2.5).

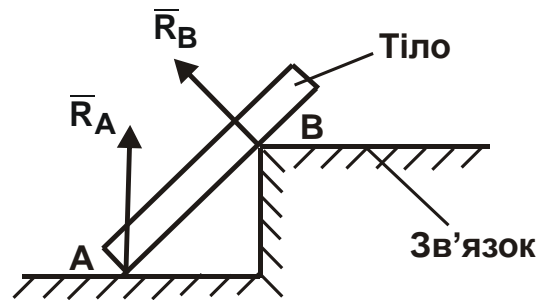


Рисунок 2.5 – Напрямок реакції ребра двохгранного кута

Тіло опирається на нерухому лінію (наприклад, на ребро двохгранного кута). У цьому випадку реакція опори за відсутності тертя направлена вздовж нормалі до поверхні даного тіла \bar{R}_B . Реакція \bar{R}_A направлена вздовж нормалі до опорної поверхні.

6. У вигляді *гнучкого зв'язку* (ремінь, канат, ланцюг). Реакція \bar{R} направлена уздовж зв'язку і прикладена до тіла у точці прикріплення до нього нитки і направлена уздовж цієї нитки (рис. 2.6).

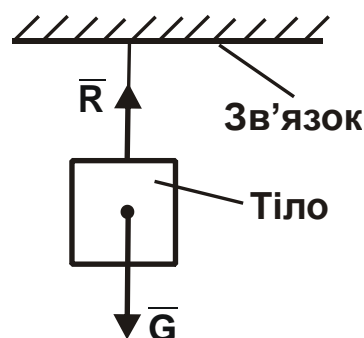


Рисунок 2.6 – Напрямок реакції гнучкого зв'язку

Реакція \bar{R} гнучкого зв'язку не дозволяє тілу віддалятися від точки підвісу.

Системи сил і умови їх рівноваги

Плоскою системою сил, що сходяться, називається система сил, лінії дії яких лежать у одній площині й перетинаються у одній точці (рис. 2.7).

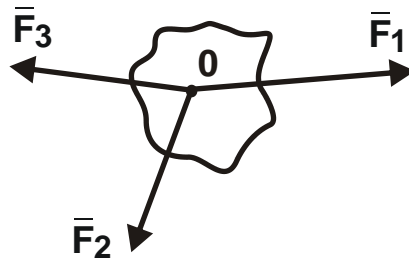


Рисунок 2.7 – Плоска система сил, що сходяться

Щоб тіло знаходилося у рівновазі під дією плоскої системи сил, що сходяться, необхідно, щоб рівнодіюча сила дорівнювала нулю.

Розглянемо момент сили відносно точки та плоску систему пар сил і умови рівноваги.

Якщо на тіло, закріплене у деякій точці А, діє сила \vec{F} , то тіло буде обертатися відносно цієї точки. Обертальний рух тіла характеризується *обертальним моментом* M .

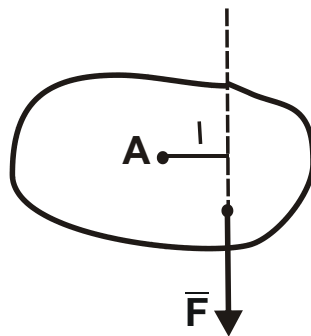


Рисунок 2.8 – Обертальний момент відносно точки А

Моментом сили \vec{F} відносно точки А називається величина, яка чисельно дорівнює добутку сили на плече (рис. 2.8):

$$M_A(\vec{F}) = \vec{F} \cdot l,$$

де l – плече (перпендикуляр, що опущено із точки А на лінію дії сили).

За одиницю обертального моменту приймається 1 Н·м. Відповідно, 1 кН·м = 10^3 Н·м.

Парою сил називається система двох сил, рівних за величиною, протилежних за напрямом та які не лежать на одній прямій (рис. 2.9).

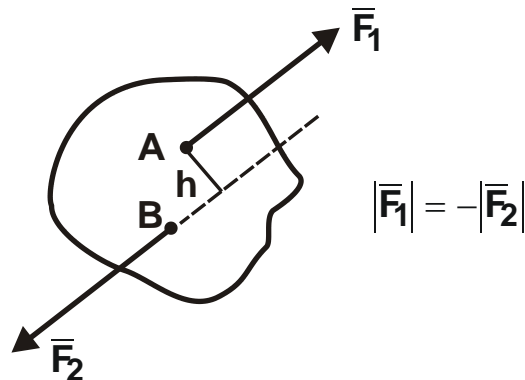


Рисунок 2.9 – Пара сил

Пара сил надає на тіло дію, що приводить до його обертання та характеризується обертальним моментом M .

Обертальний момент пари сил дорівнює добутку однієї з сил пари на плече:

$$M = \bar{F}_1 \cdot h ,$$

де h – плече пари сил (перпендикуляр, проведений між лініями дії сил).

Пара сил на розрахункових схемах зображується дугоподібною стрілкою (рис. 2.10).

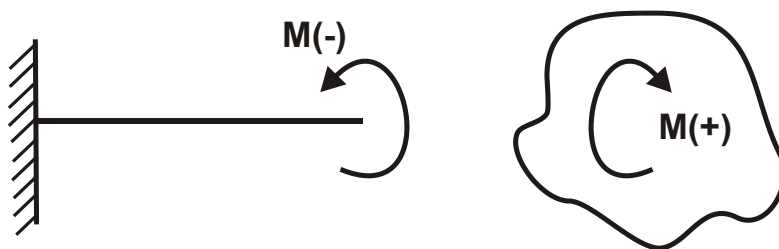


Рисунок 2.10 – Зображення на розрахункових схемах пари сил

Пару сил не можна замінити однією рівнодіючою силою. Пара сил не має проєкцій на осі координат.

Якщо на тіло діє декілька пар сил, то їх можна замінити однією рівнодіючою парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар сил, що діють на тіло (рис. 2.11):

$$M_{\Sigma} = \Sigma M_i;$$

$$M_{\Sigma} = M_1 - M_2 = \bar{F}_1 \cdot h_1 - \bar{F}_3 \cdot h_2.$$

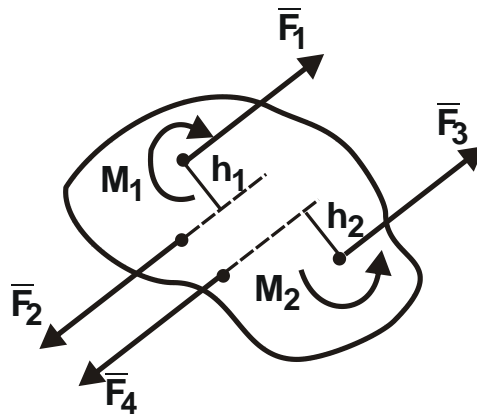


Рисунок 2.11 – Рівнодіюча пар сил, діючих на площині

Дві пари сил називаються *еквівалентними*, якщо вони надають тілу однакову дію. У еквівалентних пар сил обертальні моменти повинні бути однакові як за величиною, так і за напрямом.

Умова рівноваги плоскої системи пар сил: алгебраїчна сума моментів складових пар сил повинна дорівнювати нулю, тобто $\Sigma M_i = 0$.

Плоска система довільно розташованих сил та умова рівноваги

Для приведення сили до даної точки необхідно дану силу \bar{F} перенести паралельно самій собі у довільно обрану точку O . Для того, щоб механічний стан тіла не змінився, силу \bar{F}' урівноважують силою \bar{F}'' (рис. 2.12).

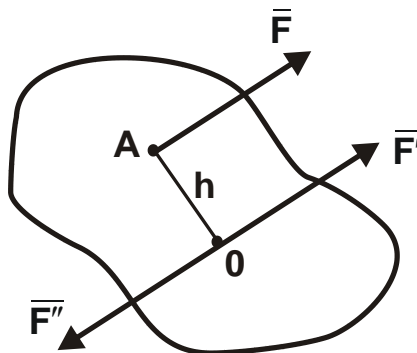


Рисунок 2.12 – Схема перенесення сили у будь-яку точку

У результаті приведення сили \bar{F} до точки O отримано систему сил, що складається із сили \bar{F}' , яка дорівнює і паралельна даній силі \bar{F} , і пари сил (\bar{F} і \bar{F}''), момент якої дорівнює моменту даної сили \bar{F} відносно точки O :

$$M = M_O(\bar{F}).$$

Плоскою системою довільно розташованих сил називається система сил, лінії дій яких лежать в одній площині, але не перетинаються в одній точці (рис. 2.13).

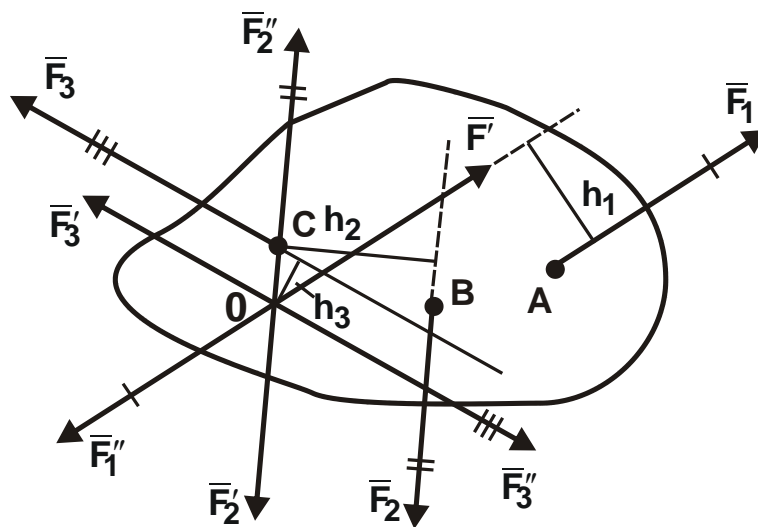


Рисунок 2.13 – Схема плоскої системи довільно розташованих сил

Для того, щоб привести дану систему довільно розташованих сил до довільно обраної точки O (рис. 2.13), необхідно:

- 1) перенести по черзі кожену силу в цю точку;
- 2) урівноважити сили (\bar{F}_1' , \bar{F}_2' , \bar{F}_3') силами (\bar{F}_1'' , \bar{F}_2'' , \bar{F}_3'').

У результаті приведення сил (\bar{F}_1 , \bar{F}_2 , \bar{F}_3) до точки O отримано нову систему сил, яка складається із плоскої системи сил, що сходяться. При цьому сили рівні та паралельні даним силам, тобто:

$$\bar{F}_1 = \bar{F}_1'; \quad \bar{F}_2 = \bar{F}_2'; \quad \bar{F}_3 = \bar{F}_3'. \quad (2.7)$$

Цю знов отриману систему сил, що сходяться (2.7), слід замінити рівнодіючою силою, яка рівна геометричній сумі даних сил і називається *головним вектором системи*:

$$\bar{F}_{\text{гол}} = \bar{F}_{\Sigma} = \Sigma \bar{F}_i. \quad (2.8)$$

У результаті приведення отримано ще одну систему пар сил:

$$\begin{cases} \bar{F}_1, \bar{F}_1'', \\ \bar{F}_2, \bar{F}_2'', \\ \bar{F}_3, \bar{F}_3'', \end{cases} \quad (2.9)$$

моменти яких рівні моментам даних сил відносно точки O , тобто:

$$\begin{cases} M_1 = M_0(\bar{F}_1), \\ M_2 = M_0(\bar{F}_2), \\ M_3 = M_0(\bar{F}_3). \end{cases} \quad (2.10)$$

Знов отриману систему пар сил (2.9) слід замінити однією рівнодіючою парою, момент якої дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових пар сил і називається *головним моментом системи*:

$$M_{\text{гол}} = \Sigma M_0(\bar{F}_i) \quad (2.11)$$

Отже, щоб тіло під дією плоскої системи довільно розташованих сил знаходилося у рівновазі, необхідно, щоб *головний вектор і головний момент системи дорівнювали нулю*:

$$\bar{F}_{\text{гол}} = \bar{F}_{\Sigma} = \Sigma \bar{F}_i = 0; \quad (2.12)$$

$$M_{\text{гол}} = \Sigma M_0(\bar{F}_i) = 0. \quad (2.13)$$

Виражаючи головний вектор системи сил, що сходяться, в аналітичній формі, отримано два рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_{ix} = \Sigma F_{iy} = 0. \quad (2.14)$$

Головний момент системи слід замінити алгебраїчною сумою моментів даних сил відносно точки приведення:

$$\Sigma M_0(\bar{F}_i) = 0. \quad (2.15)$$

Умова рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил: алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на вісі x і y та алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно точки приведення повинні дорівнювати нулю.

Перша (основна) форма рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad \Sigma F_{iy} = 0; \quad \Sigma M_0(\bar{F}_i) = 0. \quad (2.16)$$

Друга форма рівняння рівноваги:

$$\Sigma F_{ix} = 0; \quad \Sigma M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \Sigma M_B(\bar{F}_i) = 0. \quad (2.17)$$

Третя форма рівняння рівноваги:

$$\Sigma M_A(\bar{F}_i) = 0; \quad \Sigma M_B(\bar{F}_i) = 0; \quad \Sigma M_C(\bar{F}_i) = 0. \quad (2.18)$$

Просторова система сил

Просторовою системою сил, що сходяться, називається система сил, лінії дії яких не лежать в одній площині, але перетинаються в одній точці. Рівнодіюча такої системи сил зображується діагоналлю прямокутного паралелепіпеда, побудованого (рис. 2.14) на цих силах як на сторонах, та визначається залежністю:

$$\vec{F}_\Sigma = \Sigma \vec{F}_i. \quad (2.19)$$

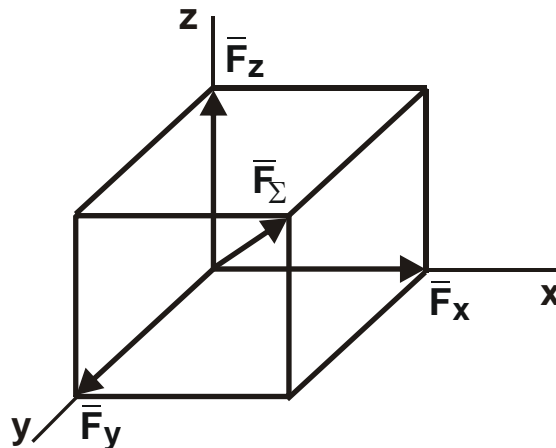


Рисунок 2.14 – Рівнодіюча просторової системи сил, що сходяться

Умова рівноваги просторової системи сил, що сходяться: алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні вісі координат повинні дорівнювати нулю, тобто

$$\begin{aligned} \Sigma F_{ix} &= 0, \\ \Sigma F_{iy} &= 0, \\ \Sigma F_{iz} &= 0. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Щоб визначити момент сили \vec{F} відносно осі z , необхідно спроектувати силу \vec{F} на площину H , перпендикулярну вісі z (рис. 2.15), потім знайти момент проєкції F_H відносно точки O , яка є точкою перетину площини H із віссю z . Момент проєкції \vec{F} і буде моментом сили \vec{F} відносно осі z :

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}_H) = \vec{F}_H \cdot l. \quad (2.21)$$

Моменти сил, які перпендикулярні або паралельні осі z , дорівнюють нулю (рис. 2.16):

$$M_z(\vec{F}_1) = 0; \quad M_z(\vec{F}_2) = 0. \quad (2.22)$$

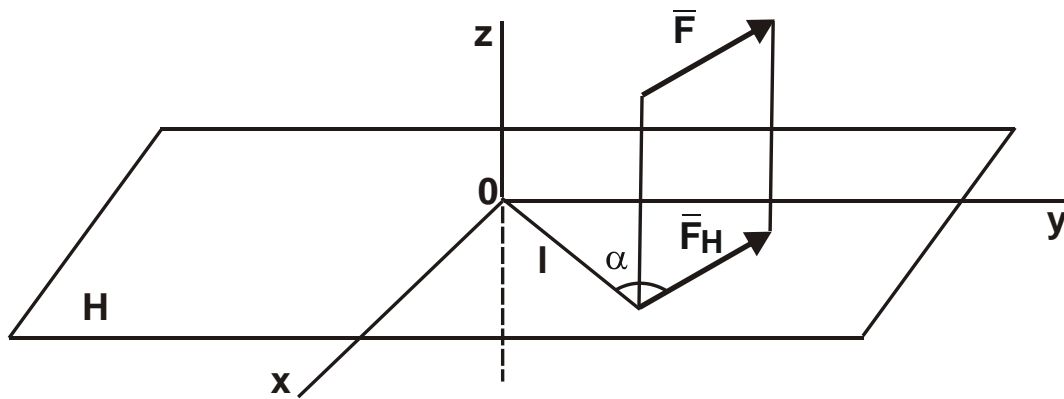


Рисунок 2.15 – Схематичне зображення моменту сили відносно вісі

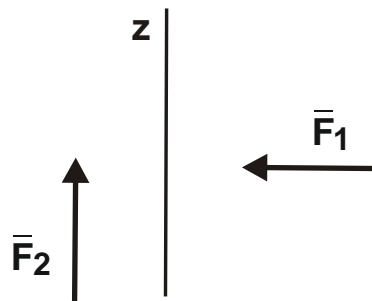


Рисунок 2.16 – Моменти сил відносно вісі, які дорівнюють нулю

Просторовою системою довільно розташованих сил називається система сил, лінії дії яких не лежать в одній площині й не перетинаються в одній точці.

Рівнодіюча такої системи сил також дорівнює геометричній сумі цих сил, але зображується діагоналлю складних об'ємних фігур (тетраєдр, октаєдр та ін.).

Умова рівноваги просторової системи довільно розташованих сил: алгебраїчна сума проєкцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні вісі координат повинна дорівнювати нулю, і алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно тих самих осей координат повинна дорівнювати нулю, тобто

$$\begin{aligned}
 \sum F_{ix} &= 0, & \sum M_x(\bar{F}_i) &= 0, \\
 \sum F_{iy} &= 0, & \sum M_y(\bar{F}_i) &= 0, \\
 \sum F_{iz} &= 0, & \sum M_z(\bar{F}_i) &= 0.
 \end{aligned}
 \tag{2.23}$$

Теорема щодо моменту рівнодіючої відносно вісі (теорема Варіньона)

Теорема. Момент рівнодіючої відносно вісі дорівнює алгебраїчній сумі моментів складових сил відносно тієї ж вісі.

Аналітично ця теорема виражається системою рівнянь:

$$\begin{aligned}\sum M_x(\bar{F}_i) &= M_x(\bar{F}_\Sigma); \\ \sum M_y(\bar{F}_i) &= M_y(\bar{F}_\Sigma); \\ \sum M_z(\bar{F}_i) &= M_z(\bar{F}_\Sigma),\end{aligned}\tag{2.24}$$

де \bar{F}_Σ – рівнодіюча сила.

Нижче наведено приклади, засновані на виконанні умови рівноваги системи довільно розташованих сил.

Приклад 2.1. До вертикальної гладкої стіни на тросі, що становить зі стіною кут α , підвішено однорідний шар (рис. 2.17). Визначити натяг F тросу та силу тиску P шара на стіну, якщо сила тяжіння шара G .

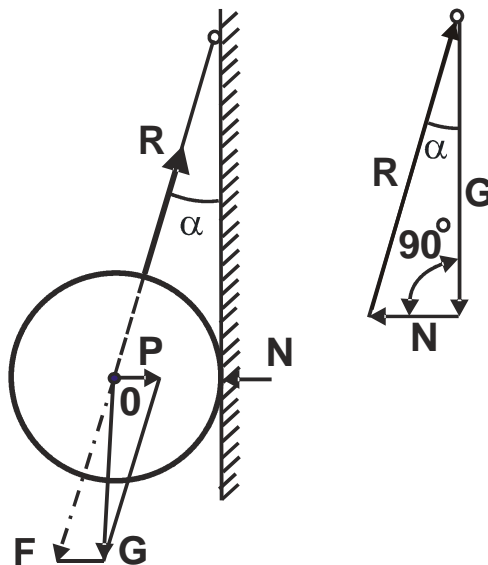


Рисунок 2.17– Розрахункова схема

Рішення. Розглянемо рівновагу шара. Для цього відкинемо зв'язки й замінимо їх реакціями. Реакція N гладкої стіни перпендикулярна стіні й проходить через центр шара. Оскільки шар однорідний, то сила тяжіння шара G прикладено у його геометричному центрі. Реакція R спрямована уздовж троса і, відповідно до теореми щодо рівноваги

трьох непаралельних сил, її лінія дії також повинна проходити через центр шара.

До системи трьох сил, що сходяться, необхідно застосувати геометричну умову рівноваги:

$$\sum \vec{F}_i = 0.$$

Тоді

$$\vec{G} + \vec{N} + \vec{R} = 0.$$

Побудуємо замкнутий силовий багатокутник, починаючи із зображення у довільному масштабі вектора відомої сили тяжіння шара G . Напрямок обходу трикутника (тобто напрям стрілок) визначається цією силою. Із трикутника отримано:

$$N = G \cdot \operatorname{tg} \alpha; \quad R = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Сила тиску P шара на стіну, за аксіомою взаємодії, за модулем дорівнює реакції N стіни, але спрямована у протилежний бік:

$$P = N = G \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Натяг F троса за модулем дорівнює її реакції R :

$$F = R = \frac{G}{\cos \alpha}.$$

Цю саму задачу можна розв'язати шляхом розкладання сили тяжіння шара G за реальними напрямками (напрямами реакцій) на складові P (сила тиску шару на стіну) і F (натяг тросу), причому, за аксіомою взаємодії маємо $F = R$; $P = N$. Із паралелограма (рис. 2.17) легко визначити шукані величини. Такий метод розв'язання задачі називають *методом розкладання*.

Приклад 2.2. На рис. 2.18 схематично зображено підйомний кран. У точці D на відстані 5 м від осі AB крана підвішено вантаж $P = 50$ кН. Сила тяжіння крана $G = 30$ кН. Визначити реакції підп'ятника A та підшипника B .

Рішення. Розглянемо рівновагу крана. Реакція R_B підшипника B спрямована перпендикулярно його вісі, реакцію підп'ятника A слід розкласти на дві складові: X_A і Y_A .

Таким чином, до крану прикладено плоску систему п'яти довільно розташованих сил, із яких три невідомо. Для розв'язання задачі слід застосувати до цієї системи аналітичні умови рівноваги і скласти три рівняння:

$$\begin{aligned} \sum M_A = 0; & \quad +R_B \cdot 7 - G \cdot 1,5 - R \cdot 5 = 0; \\ \sum X = 0; & \quad -R_B + X_A = 0; \\ \sum Y = 0; & \quad Y_A - P - G = 0. \end{aligned}$$

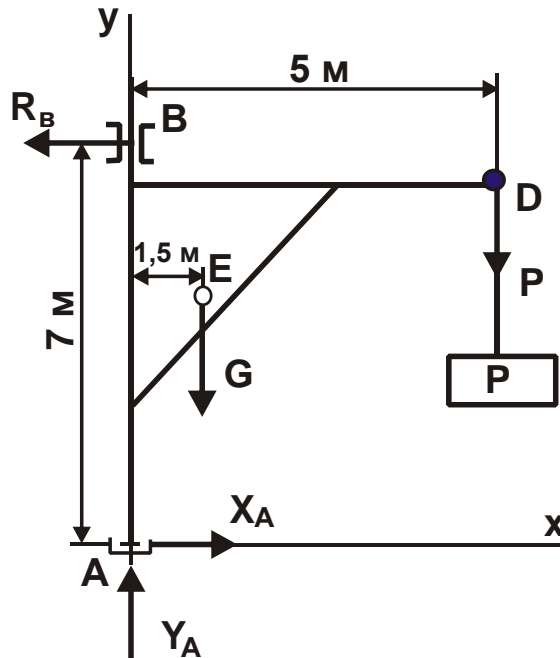


Рисунок 2.18 – Розрахункова схема реакції підп'ятника А та підшипника В

Розв'язуючи перше рівняння, отримано:

$$R_B = \frac{G \cdot 1,5 + P \cdot 5}{7} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 1,5 + 50 \cdot 10^3 \cdot 5}{7} = 42,1 \cdot 10^3 \text{ Н} = 42,1 \text{ кН.}$$

Виходячи із другого рівняння, отримано:

$$X_A - R_B = 42,1 \text{ кН.}$$

Виходячи із третього рівняння, отримано:

$$Y_A = P + G = 50 + 30 = 80 \text{ кН.}$$

Приклад 2.3. Визначити реакції стержнів, що утримують вантажі $F_1 = 70 \text{ кН}$ і $F_2 = 100 \text{ кН}$ (рис. 2.19,а). Масою стержнів знехтувати.

Рішення. Для розв'язання цієї задачі необхідно:

1. Вибрати тіло (точку), рівновагу якого слід розглядати.
2. Звільнити тіло (шарнір В) від зв'язків і зобразити діючі на нього активні сили і реакції відкинутих зв'язків. Причому реакції стержнів слід направити від шарніра В, оскільки прийнято вважати, що стержні розтягнуті.

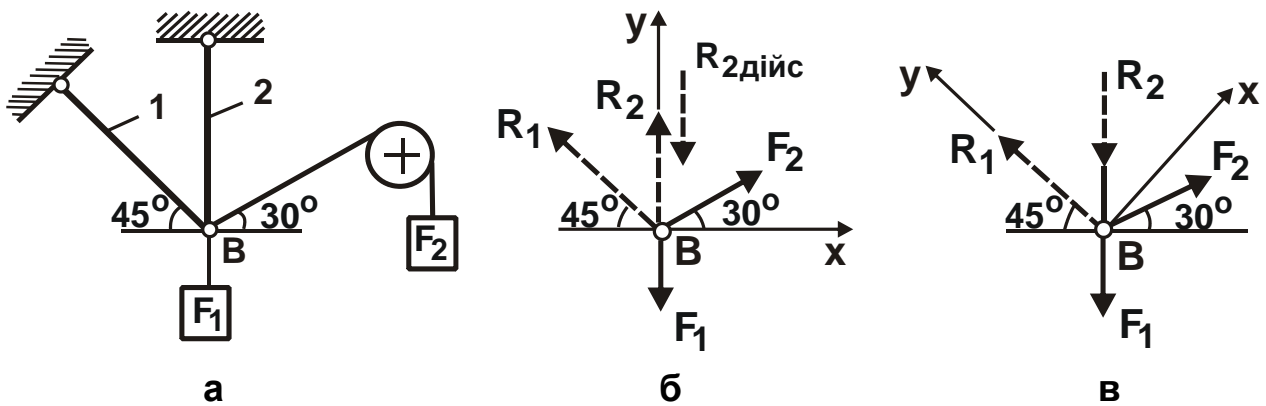


Рисунок 2.19 – Розрахункові схеми реакцій стержнів

3. Вибрати вісі координат і скласти рівняння рівноваги, використовуючи умови рівноваги системи збіжних сил на площині $\sum x_i = 0$; $\sum y_i = 0$. Вибираючи вісі координат, слід враховувати, що отримані рівняння можна вирішити більш просто, якщо одну із осей направити перпендикулярно однієї з невідомих сил.

4. Визначити реакції стержнів за зазначеною системою рівнянь.

5. Перевірити правильність отриманих результатів шляхом вирішення рівняння рівноваги щодо заново обраних координат.

Для виконання зазначених умов розв'язання даної задачі на рис. 2.19,б,в графічно показано напрями дії на стержень активних сил і реакцій відкинутих зв'язків, та запропоновано наступну послідовність розв'язання задачі:

1. Спочатку слід розглянути рівновагу шарніра В (рис. 2.19,б).

2. Необхідно звільнити шарнір В від зв'язків та зобразити діючі на нього активні сили і реакції зв'язків (рис. 2.19,б).

3. Під час вибору системи координат слід поєднати вісь у в напрямі з реакцією R_2 (рис. 2.19,б) та скласти рівняння рівноваги для системи сил, що діють на шарнір В:

$$\sum X_i = R_1 \cdot \cos 45^\circ + F_2 \cdot \cos 30^\circ = 0; \quad (2.25)$$

$$\sum Y_i = R_1 \cdot \sin 45^\circ + R_2 + F_2 \cdot \sin 30^\circ - F_1 = 0. \quad (2.26)$$

4. Для визначення реакції стержнів R_1 і R_2 слід розв'язати рівняння (2.25) і (2.26).

Виходячи із рівняння (2.25), маємо:

$$R_1 = \frac{F_2 \cdot \cos 30^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{100 \cdot 0,866}{0,707} = 122 \text{ кН.}$$

Підставляючи знайдене значення R_1 у рівняння (2.26), отримано:

$$R_2 = F_1 - F_2 \cdot \sin 30^\circ - R_1 \cdot \sin 45^\circ = 70 - 100 \cdot 0,5 - 122 \cdot 0,707 = -66,6 \text{ кН.}$$

Знак "мінус" перед значенням R_2 указує на те, що спочатку обраний напрям реакції невірний – слід направити реакцію R_2 у протилежний бік, тобто до шарніру В (на рис. 2.19,б дійсний напрям реакції R_2 показано штриховим вектором).

5. Для перевірки правильності отриманих результатів необхідно вибрати нове розташування осей координат x і y (рис. 2.19,в) та відносно цих осей скласти рівняння рівноваги:

$$\sum X_i = -R_1 \cdot \cos 45^\circ + F_2 \cdot \cos 15^\circ - F_1 \cdot \cos 45^\circ = 0; \quad (2.27)$$

$$\sum Y_i = R_1 - F_1 \cdot \cos 45^\circ - R_2 \cdot \cos 45^\circ - F_2 \cdot \cos 75^\circ - F_1 = 0. \quad (2.28)$$

Виходячи із рівняння (2.27), встановлено:

$$R_1 = \frac{F_2 \cdot \cos 15^\circ - F_1 \cdot \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{100 \cdot 0,965 - 70 \cdot 0,707}{0,707} = 66,6 \text{ кН.}$$

Після підстановки знайденого значення R_2 у рівняння (2.28), отримано:

$$\begin{aligned} R_1 &= F_1 \cdot \cos 45^\circ + R_2 \cdot \cos 45^\circ + F_2 \cdot \cos 75^\circ = \\ &= 70 \cdot 0,707 + 66,6 \cdot 0,707 + 100 \cdot 0,258 = 122 \text{ кН.} \end{aligned}$$

Значення реакцій R_1 і R_2 , які отримано під час розв'язання рівнянь (2.25) і (2.26), збігаються за величиною та напрямом зі значеннями, визначеними із рівнянь (2.27) і (2.28). Отже, задачу розв'язано правильно.

Тертя

Тертя – явище опору відносному переміщенню, що виникає між двома тілами у зонах зіткнення поверхонь уздовж дотичної до них. Отже, *тертям* називається опір руху тіла. Сила, із якою тіло чинить опір руху, називається *силою тертя*.

Сила тертя завжди направлена у бік, протилежний руху. Сила тертя залежить від матеріалу тіл, що труться, чистоти обробки і наявності мастила і не залежить від величини поверхонь, що труться.

Тертя буває: *сухе, напіврідинне, рідинне*.

Розрізняють *тертя спокою, руху, ковзання і кочення*.

Тертям спокою називається тертя двох тіл за умови попереднього зміщення, тобто за умови незначного відносного переміщення тіл до переходу від спокою до відносного руху.

Тертям руху називається тертя двох тіл, що знаходяться у стані відносного руху.

Сила тертя спокою більше, ніж сила тертя руху.

Тертям ковзання називається тертя руху, за умови якого швидкості дотичних тіл у точках торкання різні.

Сила тертя дорівнює добутку сили нормального тиску на коефіцієнт тертя ковзання (рис. 2.2):

$$F_{\text{тр}} = R_n \cdot f,$$

де $R_n = G \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \cos \alpha$ – сила нормального тиску;

f – коефіцієнт тертя ковзання.

Коефіцієнтом тертя ковзання називається відношення сили тертя до сили нормального тиску:

$$f = \frac{F_{\text{тр}}}{R_n}.$$

Матеріали, які характеризуються дуже малим тертям, називають *антифрикційними* (бабіт, бронза, графіт). Їх застосовують для виготовлення підшипників тощо.

Матеріали, які характеризуються великим тертям, називаються *фрикційними* (спеціальні пластмаси із застосуванням азбесту і міді). Їх застосовують для накладок гальмівних колодок, для накладок дисків зчеплення.

За умови змащування поверхні ковзання тіло починає рухатися із меншим тертям. Розкладемо силу тяжіння G (рис. 2.2) на дві складові G' і G'' (рис. 2.20):

$$G' = G \cdot \cos \alpha = R_n;$$

$$G'' = G \cdot \sin \alpha = F_{\text{тр}}.$$

Коефіцієнт тертя ковзання:

$$f = \frac{F_{\text{тр}}}{R_n} = \frac{G''}{G'} = \frac{G \cdot \sin \alpha}{G \cdot \cos \alpha} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Отже, коефіцієнт тертя ковзання дорівнює тангенсу кута тертя α .

Якщо коефіцієнт тертя ковзання однаковий для всіх напрямів руху, то безліч (геометричне місце) повних реакцій утворює круговий

конус, який називається *конусом тертя* (рис. 2.21). Якщо для різних напрямів руху коефіцієнт тертя неоднаковий (наприклад, під час ковзання вздовж і поперек волокон дерева), то конус тертя буде некруговим.

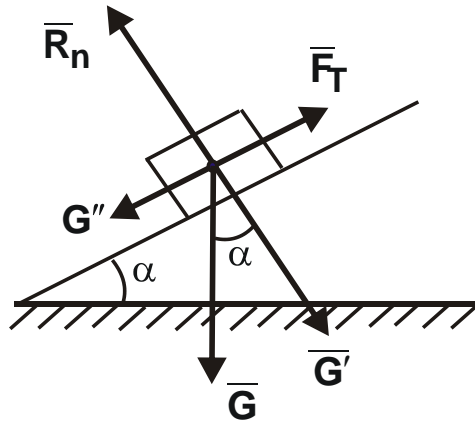


Рисунок 2.20 – Розрахункова схема визначення коефіцієнта тертя ковзання через силу тяжіння

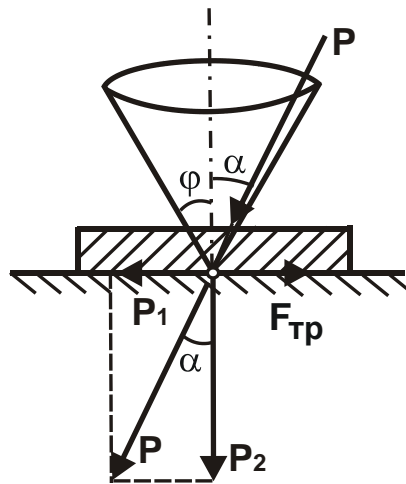


Рисунок 2.21 – Конус тертя

Властивістю конуса тертя є те, що для рівноваги тіла, яке розташоване на шорсткій поверхні, рівнодіюча прикладених до нього активних сил повинна проходити всередині конуса тертя.

Дійсно, якщо рівнодіючу P активних сил, прикладених до тіла, розкласти на складові: рушійну силу P_1 та силу нормального тиску P_2 , то

$$P_1 = P_2 \cdot \operatorname{tg} \alpha .$$

Сила тертя ковзання дорівнює:

$$F_{\text{тр}} = f \cdot P_2 = P_2 \cdot \text{tg} \varphi.$$

Отже, за умови $\alpha < \varphi$ має місце:

$$P_1 < F_{\text{тр}}.$$

Це указує на те, що рух стає неможливим.

Тертям кочення називається тертя руху, під час якого швидкості дотичних тіл у точках торкання однакові за величиною і напрямом. Якщо рух двох дотичних тіл відбувається за умовою одночасного кочення і ковзання, то у цьому випадку виникає тертя із проковзуванням.

Тертя кочення викликане деформацією поверхні кочення. Поверхня, на якій котиться каток, деформується на величину δ (рис. 2.22). Деформується і саме тіло, що котиться (наприклад, колесо автомобіля).

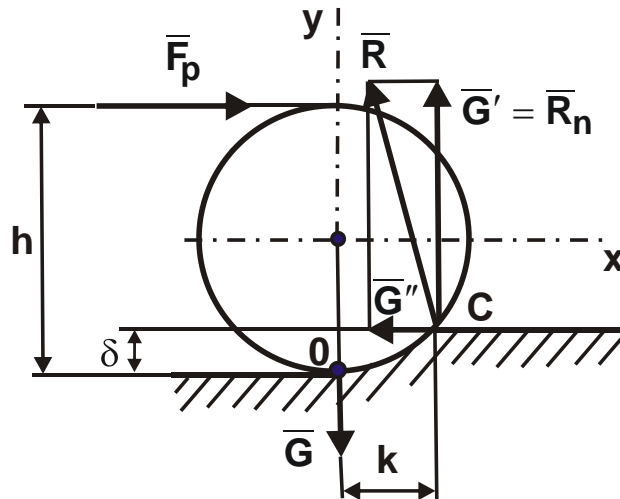


Рисунок 2.22 – Розрахункова схема визначення тертя кочення

Складемо рівняння рівноваги:

$$\Sigma M_0(\bar{F}_i) = 0; \quad F_p \cdot h - R_n \cdot k = 0,$$

де h – відстань від поверхні до лінії дії сили;

k – коефіцієнт тертя кочення.

Коефіцієнт тертя кочення дорівнює відрізку OC (рис. 2.22) і має розмірність довжини (виражається у сантиметрах або міліметрах).

Оскільки сила F_p дорівнює силі тертя F_T , тобто $F_p = F_T$, то

$$F_T = \frac{R_n \cdot k}{h}.$$

Якщо $h = d$, то

$$F_T = \frac{R_n \cdot k}{d},$$

де d – діаметр катка.

Якщо $h = r$, то

$$F_T = \frac{2 \cdot R_n \cdot k}{d},$$

де $r = 0,5 \cdot d$ – радіус катка.

Тертя кочення, зазвичай, менше тертя ковзання. Тому на практиці замість підшипників ковзання застосовують кулькові та роликові підшипники кочення. Також на практиці мають місце випадки поєднання тертя ковзання із тертям кочення, наприклад, у зубчастих передачах або голчастих підшипниках.

Порядок виконання роботи

1. Розв'язати самостійно наступну задачу:

Через невагомий блок перекинута трос АВ (рис. 2.23). До кінця В троса прив'язано вантаж вагою P , кінець троса А закріплено на вертикальній стіні під кутом α до неї. Визначити залежність реакції осі блоку від кута α та визначити значення R_0 за умов $\alpha_1 = 60^\circ$; $\alpha_2 = 90^\circ$; $\alpha_3 = 120^\circ$.

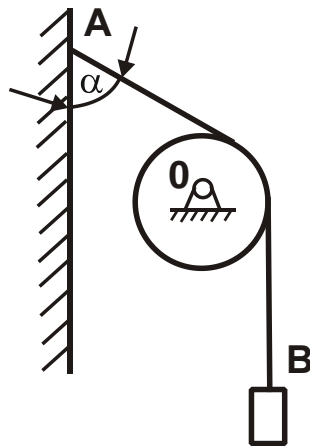


Рисунок 2.23 – Розрахункова схема реакції осі блоку

Відповідь: $R_{01} = P$; $R_{02} = P\sqrt{2}$; $R_{03} = P\sqrt{3}$.

2. Кожний студент вибирає свій варіант завдання (рис. 2.24, табл. 2.1) та визначає умови рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, у вигляді двох шарнірно з'єднаних між собою стержнів, які утримують два вантажі.

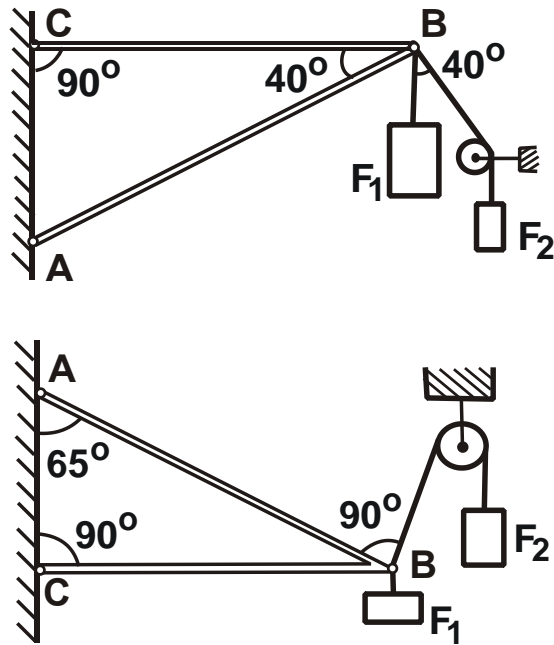


Рисунок 2.24 – Ескізи для завдань

Таблиця 2.1 – Значення ваги вантажів F_1 і F_2

Пара- метри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1 , кН	5	8	10	20	10	12	9	11	18	4
F_2 , кН	12	10	14	10	12	5	5	15	10	20

Звіт по роботі

У звіті студент наводить класифікацію зв'язків і їх реакції та рішення свого варіанта задачі рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, і робить висновки.

Література: [9 – 11, 13, 14, 16, 17, 20].

Питання для самоконтролю

- Сила, з якою тіло діє на зв'язок, називається
 - силою тиску;
 - силою тертя ;
 - силою реакції;
 - силою тяжіння.
- Реакції завжди направлені за нормаллю до опорної поверхні для зв'язків (опор) типу:

- а) гладка поверхня;
 - б) гнучкий зв'язок;
 - в) жорсткий стержень;
 - г) ребро кута та гладка поверхня;
 - д) шорстка поверхня.
3. Напрямок реакції шорсткої поверхні:
- а) перпендикулярний поверхні;
 - б) паралельний поверхні;
 - в) під кутом до поверхні;
 - г) у напрямку сили тяжіння.
4. Момент рівнодіючої плоскої системи сил відносно довільної точки дорівнює:
- а) сумі моментів складових сил відносно тієї ж точки;
 - б) сумі моментів складових сил відносно довільно вибраних точок;
 - в) сумі проекцій моментів на вісі координат;
 - г) сумі проекцій моментів на вісі координат відносно вибраної точки.
5. Момент сили відносно вісі дорівнює нулю, якщо
- а) сила паралельна вісі;
 - б) лінія дії сили перетинає вісь;
 - в) сила та вісь розташовані в одній площині й паралельні;
 - г) сила та вісь розташовані в одній площині та лінія дії сили перетинає вісь.
6. Геометрична умова рівноваги плоскої системи сил, що сходяться, полягає:
- а) у рівності нулю моментів сил;
 - б) у рівності нулю пари сил;
 - в) у замкнутості силового багатокутника;
 - г) у рівності нулю проекцій всіх сил на одну із координатних осей.
7. Для рівноваги системи довільно розташованих сил у площині необхідно, щоб:
- а) головний вектор цих сил дорівнював нулю;
 - б) головний момент цих сил дорівнював нулю;
 - в) головний вектор і головний момент цих сил щодо будь-якого центру дорівнювали нулю;
 - г) головний момент цих сил не дорівнював нулю.

Робота 3. Балкові опори та їхні реакції

Мета роботи – навчити студентів розв'язувати задачі із визначення реакцій балкових опор за умов рівноваги плоскої і просторової систем довільно розташованих сил. Студентам необхідно набути навичок визначення реакцій опор, оскільки із цього починається вирішення багатьох завдань із опору матеріалів і деталей машин.

Загальні відомості

Типи балкових опор

У розрахункових схемах завдань теоретичної механіки присутні елементи різних конструкцій, званих брусами.

Брусом прийнято вважати тверде тіло, у якого довжина значно більше поперечних розмірів.

Безліч (геометричне місце) центрів тяжіння всіх поперечних перетинів називається *віссю бруса*.

Брус із прямолінійною віссю, що покладений на опори і вигинається прикладеними до нього навантаженнями, називається *балкою*.

Під час зображення балки на кресленні прийнято показувати тільки її вісь. Всі навантаження у цьому випадку зводяться до вісі балки і діють у площині креслення.

Під час розрахунку балок на міцність в умовах вигину ураховують не тільки зовнішні (активні) навантаження, але і реакції опор балок.

Існує три типи балкових опор: *шарнірно-рухома опора*, *шарнірно-нерухома опора* і *жорстке закладення (затискання)*.

Шарнір – це рухоме з'єднання двох тіл, що допускає обертання лише навколо загальної осі (циліндровий шарнір) або загальної точки (кульовий шарнір).

1. Схематично шарнірно-рухома опора зображено на рис. 3.1.

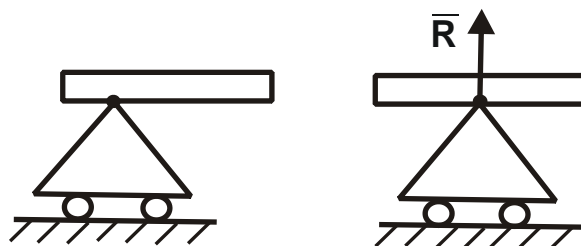


Рисунок 3.1 – Шарнірно-рухома опора

Шарнірно-рухома опора також дозволяє балці безперешкодно змінювати свою довжину зі зміною температури і тим самим усуває можливість появи температурної деформації та напруження.

2) Схематично шарнірно-нерухома опора показано на рис. 3.2. Водночас, опорний шарнір повинен бути розташований на рівні осі балки. Якщо ж ця умова не виконується, то під час проведення розрахунків можна отримати значну погрішність. Це пов'язано із подовженням або укороченням волокон балки в умовах вигину, чому перешкоджає шарнірно-нерухома опора.

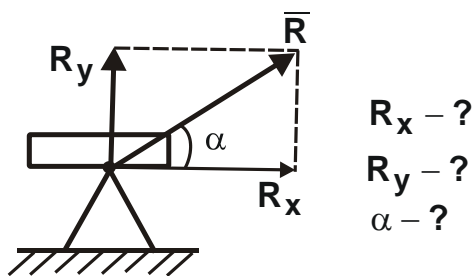


Рисунок 3.2 – Шарнірно-нерухома опора

3. Опору із жорстким затисканням або закладенням показано на рис. 3.3. Вона не дозволяє балці ні повертатися, ні переміщатися. Однак, щодо реакції цієї опори нічого не відомо. Тому для неї необхідно визначити три складові реакції: R_x , R_y , M .

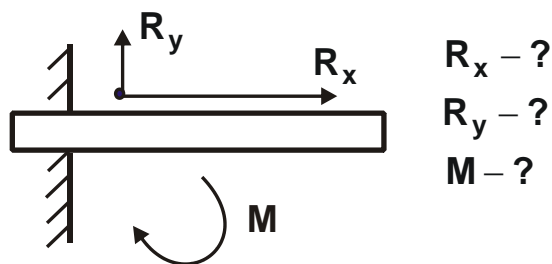


Рисунок 3.3 – Опора із жорстким закладенням

Жорстке закладення можна отримати із шарнірно-нерухомої опори шляхом звільнення від шарніра. У результаті здійснюється перешкода обертанню кінцевого перетина балки, тобто вводиться нова реакція, яка перешкоджає цьому обертанню. Такою реакцією може бути тільки пара сил. Тому затиснений кінець балки дає три невідомі реакції.

Балка із одним затисненим кінцем називається *консольною балкою* або *простою консоллю* (рис. 3.3). Усі реакції і момент вва-

жаються прикладеними на затисненому кінці балки: у точці А – центрі тяжіння опорного перетину.

Для визначення невідомих реакцій використовують рівняння статки, які виражають умову, що балка у цілому під дією всіх сил і реакцій, прикладених до неї, знаходиться у рівновазі. Оскільки всі сили знаходяться у одній площині, то рівнянь рівноваги для них можна написати три. Тому завдання визначення реакцій за умов статки вирішується за наявності лише трьох невідомих реакцій. Такі балки називаються *статично визначеними*.

Якщо число невідомих реакцій більше, ніж число рівнянь статки, можливих для даного завдання, то балки називаються *статично невизначеними*. Для визначення реакцій у таких балках складають додаткові рівняння – *рівняння деформацій (переміщень)*.

На рис. 3.4 зображено схему двохопорної (однопролітної) балки. Балка опирається на шарнірно-рухому опору С та шарнірно-нерухому опору А. Балка навантажена так, як графічно зображені зовнішні навантаження. Балка є статично визначена.

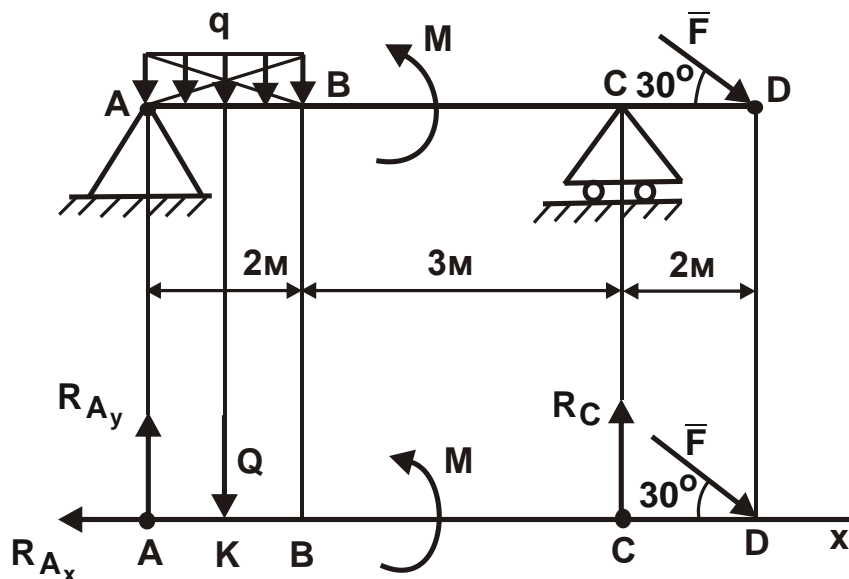


Рисунок 3.4 – Схема навантаження двохопорної балки

Зовнішні навантаження, які прикладено до балки, можуть бути трьох видів.

1. *Сконцентровані сили* – навантаження \bar{F} (рис. 3.4), які прикладено у певних перетинах балки (умовно прикладено у точці). Насправді, їх прикладено до майданчика, розмірами якого нехтують.

2. На практиці зустрічаються сили, прикладені за об'ємом або за поверхнею тіла, наприклад, сила тяжіння, тиск вітру або води тощо. Такі сили називаються *розподіленими*.

Плоска система розподілених сил характеризується її інтенсивністю, що, зазвичай, позначається q . *Інтенсивність* – це сила, що припадає на одиницю довжини навантаженої ділянки. Інтенсивність у системі СІ виражається у Н/м.

Розподілене навантаження, що має постійну інтенсивність, називається *рівномірно розподіленим* (рис. 3.4 – ділянка АВ).

Під час розв'язання задач статки розподілене навантаження замінюють її рівнодіючою. Модуль рівнодіючого рівномірно розподіленого навантаження дорівнює:

$$Q = q \cdot AB.$$

Прикладено рівнодіючу Q у центрі тяжіння перетину рівномірно розподіленого навантаження.

3. *Моменти навантаження* M , які діють тоді, коли деякі або всі прикладені сили приводяться до пари, що діє у площини вигину балки – на ділянці ВС (рис. 3.4).

Момент, що діє, не входить у рівняння проекцій сил на вісі, а у рівняння моментів включається безпосередньо своєю величиною і знаком без введення якого-небудь плеча або розкладання на пару сил. Під час розрахунку балок на вигин вісь x слід направляти вздовж вісі балки зліва направо, вісь y – вгору. Під час плоского вигину прикладене навантаження діятиме у площині xOy .

Нижче наведено приклади вирішення задач із визначення рівноваги плоскої системи довільно розташованих сил.

Приклад 3.1. Горизонтальну балку АС закріплено за допомогою нерухомого шарніра у точці А та рухомого шарніра у точці В (рис. 3.5).

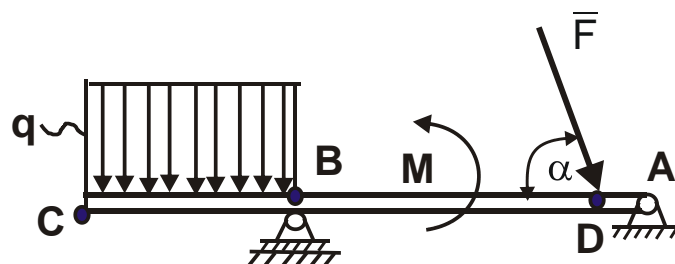


Рисунок 3.5 – Розрахункова схема

На балку діють у точці D зосереджена сила \bar{F} , пара сил із позитивним моментом M і на ділянці балки $BC = l$ рівномірно розподілені сили інтенсивністю q (Н/м). Потрібно написати умови рівноваги балки і визначити реакції опор A і B .

3) Оскільки всі аксіоми та теореми статички формулюються для зосереджених сил, прикладених до твердого тіла, то слід розглянути спосіб переходу від паралельно розподілених сил до зосереджених сил. Розподілені сили характеризуються інтенсивністю q , тобто силою, що припадає на одиницю об'єму, площі або довжини. У розглянутому прикладі паралельно розподілені сили постійної інтенсивності діють на ділянці балки BC , тому слід замінити їх зосередженою силою (рис. 3.6).

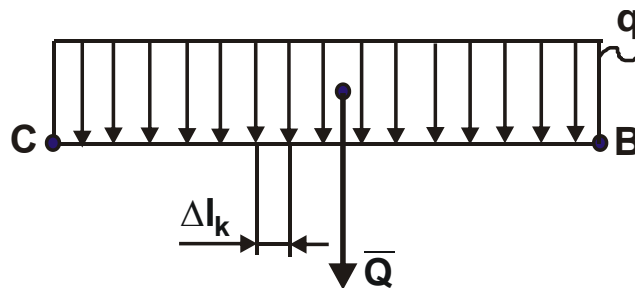


Рисунок 3.6 – Загальний вигляд зосередженої сили

Для цього ділянку BC необхідно представити відрізками Δl_k достатньо малих розмірів порівняно із довжиною BC . На кожен відрізок Δl_k діє сила $\bar{q} \cdot \Delta l_k$, яку за достатньої малості довжини відрізка Δl_k можна вважати зосередженою елементарною силою. Тому на відрізьку BC буде діяти система елементарних зосереджених паралельних сил, які відповідно до теореми щодо складання двох паралельних сил $\bar{q} \cdot \Delta l_k$ можна послідовно скласти і замінити однією рівнодіючою силою, за модулем рівною:

$$Q = \sum_{k=1}^n q \cdot \Delta l_k = q \cdot \sum_{k=1}^n \Delta l_k = q \cdot l.$$

Сила \bar{Q} спрямована паралельно розподіленим силам і прикладена у середині відрізка BC .

2. Звільнимо балку AC від зв'язків. Докладемо до точки A реакцію шарніру $\bar{R}_A = \bar{x}_A + \bar{y}_A$, а до точки B – реакцію $\bar{R}_B = \bar{y}_B$.

3. Графічно зобразимо розрахункову схему, на якій відзначимо всі сили, що діють на балку AC (рис. 3.7).

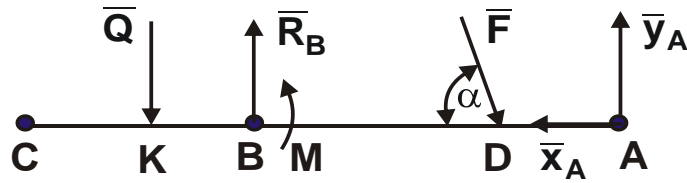


Рисунок 3.7 – Розрахункова схема

4. Необхідно підрахувати число невідомих: \bar{x}_A ; \bar{y}_A ; \bar{y}_B .

5. Далі слід скласти рівняння рівноваги плоскої системи сил, що діють на балку AC:

- $\sum F_{kx} = 0$; $-x_A + F \cdot \cos \alpha = 0$; $x_A = F \cdot \cos \alpha$;
- $\sum F_{ky} = 0$; $y_A + y_B - F \cdot \sin \alpha = 0$; $y_A = F \cdot \sin \alpha + Q - y_B$;
- $\sum m_A(\bar{F}_k) = 0$; $-y_B(AB) + M + Q(AK) + F(AD \sin \alpha)$;

$$y_B = \frac{1}{AB} [M + Q(AK) + F(AD \sin \alpha)].$$

Приклад 3.2. Горизонтальна балка довжиною $l = 4$ м закріплена на опорах (рис. 3.8) і навантажена парою сил із моментом $m = 420$ Н·м. Не враховуючи силу тяжіння балки, визначити реакції опор A і B.

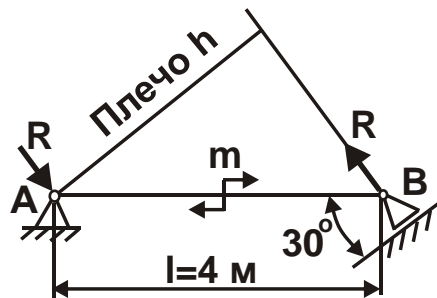


Рисунок 3.8 – Розрахункова схема

Рішення. Відкинемо опори, замінивши їх реакціями, та розглянемо рівновагу балки. Оскільки пару сил можна урівноважити тільки парою сил, то реакції R опор A і B повинні утворювати пару сил, причому, реакція шарнірно-рухомої опори B перпендикулярна опорній площині.

Для розв'язання задачі слід застосувати умови рівноваги плоскої системи пар і скласти рівняння рівноваги:

$$\sum m_i = 0.$$

Тоді

$$-m + R \cdot h = 0,$$

де $h = l \cdot \cos 30^\circ$.

Звідки

$$R = \frac{m}{h} = \frac{m}{l \cdot \cos 30^\circ} = \frac{420}{4 \cdot 0,866} \approx 120 \text{ Н.}$$

Приклад 3.3. Консольна балка (рис. 3.9) довжиною $l = 2$ м навантажена на кінці силою $F = 3000$ Н. Не враховуючи силу тяжіння балки, визначити реакції закладення.



Рисунок 3.9 – Розрахункова схема

Рішення. Для розв'язку задачі слід відкинути закладення, замінивши його реакціями, та розглянути рівновагу балки. Реакції закладення є реактивна сила R і реактивний момент m . Оскільки реактивний момент можна урівноважити тільки парою сил, то навантаження F і реакція R повинні утворювати пару сил, отже, $R = F = 3000$ Н.

Далі слід застосувати умову рівноваги плоскої системи пар сил і скласти рівняння рівноваги:

$$\sum m_i = 0.$$

Тоді

$$m - F \cdot l = 0.$$

Звідки

$$m = F \cdot l = 3000 \cdot 2 = 6000 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Приклад 3.4. Визначити реакцію опор балки згідно із рис. 3.10, а.

Послідовність вирішення задачі:

1. Зобразити балку разом із навантаженнями.
2. Вибрати розташування координатних осей, поєднавши вісь x із балкою, а вісь y направити перпендикулярно осі x .
3. Провести необхідні перетворення заданих активних сил: силу, нахилену до осі балки під кутом α , замінити двома взаємно перпенди-

кулярними складовими, а рівномірно розподілене навантаження – її рівнодіючою, яка діє у середині ділянки розподілу навантаження.

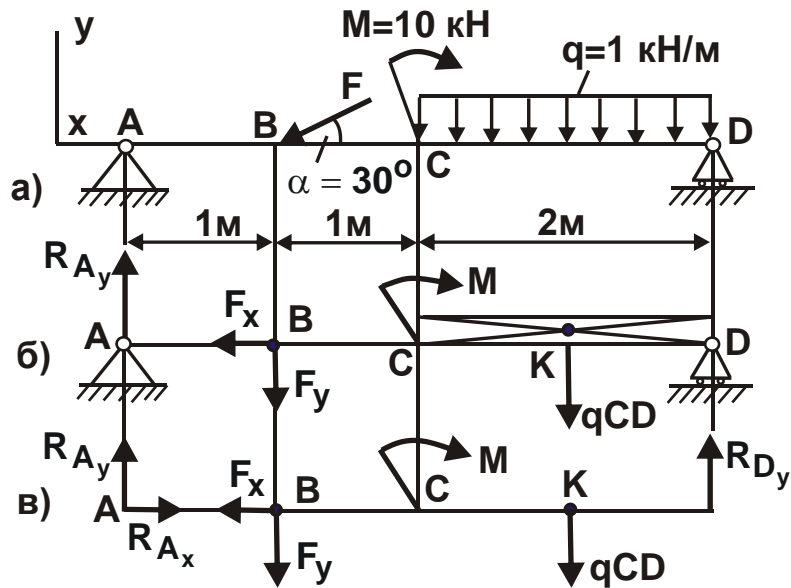


Рисунок 3.10 – Розрахункова схема реакцій опор балки

4. Звільнити балку від опор, замінивши їх дію реакціями опор, які спрямовані вздовж обраних осей координат.

5. Скласти рівняння рівноваги статички для довільної плоскої системи сил таким чином і в такій послідовності, щоб рішенням кожного із цих рівнянь було визначення однієї з невідомих реакцій опор.

6. Перевірити правильність знайдених опорних реакцій за рівнянням, яке не було використано для вирішення завдання.

Рішення. 1. Графічно зобразимо балку із діючими навантаженнями (рис. 3.10,а).

2. Зобразимо осі координат x і y .

3. Силу F необхідно замінити її складовими $F_x = F \cdot \cos \alpha$ і $F_y = F \cdot \sin \alpha$. Рівнодіюча $q \cdot CD$ рівномірно розподіленого навантаження прикладена у середині ділянки CD, тобто у точці K (рис. 3.10,б).

4. Замінимо опори балки опорними реакціями (рис. 3.10,в).

5. Для розв'язання задачі необхідно скласти рівняння рівноваги статички та визначити невідомі реакції опор.

Із рівняння суми моментів всіх діючих на балку сил, складеного відносно однієї із точок опор, визначається одна із невідомих вертикальних реакцій:

$$\sum M_A(F_i) = F_y \cdot AB + M + q \cdot CD \cdot AK - R_D \cdot AD = 0.$$

Звідки

$$R_{Dy} = \frac{F_y \cdot AB + M + q \cdot CD \cdot AK}{AD} = \frac{10 \cdot 1 + 10 + 2 \cdot 3}{4} = 6,5 \text{ кН.}$$

Визначається також інша вертикальна реакція ($F_y = F \cdot \sin \alpha$):

$$\sum M_D(F_i) = R_{Ay} \cdot AD - F_y \cdot BD + M - q \cdot CD \cdot AK = 0.$$

Звідки

$$R_{Ay} = \frac{F \cdot \sin \alpha \cdot BD - M + q \cdot CD \cdot KD}{AD} = \frac{20 \cdot 0,5 \cdot 3 - 10 + 2}{4} = 5,5 \text{ кН.}$$

Визначається горизонтальна реакція:

$$\sum X_i = R_{Ax} - F_x = 0.$$

Звідки

$$R_{Ax} = F_x = F \cdot \cos \alpha = 20 \cdot 0,866 = 17,3 \text{ кН.}$$

6. Далі перевіряється правильність знайдених результатів:

$$\sum Y_i = R_{Ay} - F_y - q \cdot CD + R_{Dy} = 5,5 - 10 - 2 + 6,5 = 0.$$

Як видно, умова $\sum Y_i$ рівноваги виконується. Отже, реакції опор визначено правильно.

Просторова система довільно розташованих сил

Просторовою системою довільно розташованих сил називається система сил, лінії дії яких не лежать в одній площині і не перетинаються в одній точці.

Рівнодіюча такої системи сил також дорівнює геометричній сумі цих сил, але зображується діагоналлю складних об'ємних фігур (тетраєдр, октаєдр тощо).

Умова рівноваги просторової системи довільно розташованих сил: алгебраїчна сума проекцій всіх сил на три взаємно перпендикулярні вісі координат дорівнює нулю ($\sum F_{ix} = 0$; $\sum F_{iy} = 0$; $\sum F_{iz} = 0$) і алгебраїчна сума моментів всіх сил відносно тих же осей координат дорівнює нулю ($\sum M_x(\bar{F}_i) = 0$; $\sum M_y(\bar{F}_i) = 0$; $\sum M_z(\bar{F}_i) = 0$).

Приклад 3.5. На вал (рис. 3.11,а) жорстко насаджено шків 1 і колесо 2. Визначити сили F_2 , $F_{r2} = 0,4 \cdot F_2$, реакції опор А і В, якщо $F_1 = 100 \text{ Н}$.

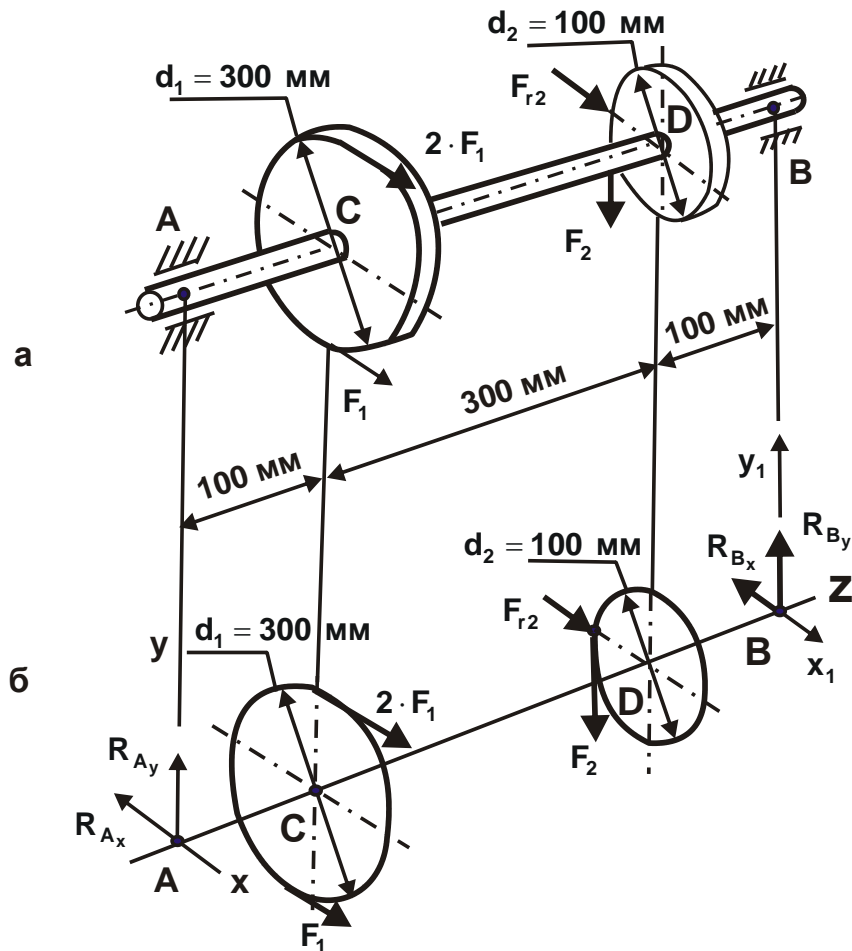


Рисунок 3.11 – Розрахункова схема

Рішення. 1. Слід зобразити вал із усіма діючими на нього силами, а також вісі координат (рис. 3.11,б).

2. Далі визначити сили F_2 та F_{r2} . За умови рівноваги вала, що має нерухому вісь, встановлено:

$$\sum M_z(F_i) = 0.$$

Тоді

$$F_1 \cdot \frac{d_1}{2} - F_2 \cdot \frac{d_2}{2} = 0.$$

Звідки

$$F_2 = \frac{F_1 \cdot d_1}{d_2} = \frac{100 \cdot 0,3}{0,1} = 300 \text{ Н};$$

$$F_{r2} = 0,4 \cdot F_2 = 0,4 \cdot 300 = 120 \text{ Н}.$$

3. Далі слід скласти шість рівнянь рівноваги:

$$\sum M_x(F_i) = 0; \quad \sum M_x(F_i) = -R_{By} \cdot AB + F_2 \cdot AD = 0; \quad (3.1)$$

$$\sum M_y(F_i) = 0; \quad \sum M_y(F_i) = 3 \cdot F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_{B_x} \cdot AB = 0; \quad (3.2)$$

$$\sum M_{x1}(F_i) = 0; \quad \sum M_{x1}(F_i) = R_{A_y} \cdot AB - F_2 \cdot DB = 0; \quad (3.3)$$

$$\sum M_{y1}(F_i) = 0; \quad \sum M_{y1}(F_i) = R_{A_x} \cdot AB - 3 \cdot F_1 \cdot CB - F_{r2} \cdot DB = 0; \quad (3.4)$$

$$\sum X_i = 0; \quad \sum X_i = 3 \cdot F_1 + F_{r2} - R_{A_x} - R_{B_x} = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum Y_i = 0; \quad \sum Y_i = R_{A_y} - F_2 + R_{B_y} = 0. \quad (3.6)$$

4. Із рівнянь (3.1) – (3.4) визначено реакції опор:

$$R_{B_y} = \frac{F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{300 \cdot 0,4}{0,5} = 240 \text{ Н};$$

$$R_{B_x} = \frac{3 \cdot F_1 \cdot AC + F_{r2} \cdot AD}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0,1 + 120 \cdot 0,4}{0,5} = 156 \text{ Н};$$

$$R_{A_y} = \frac{F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{300 \cdot 0,1}{0,5} = 60 \text{ Н};$$

$$R_{A_x} = \frac{3 \cdot F_1 \cdot CB + F_{r2} \cdot DB}{AB} = \frac{3 \cdot 100 \cdot 0,4 + 120 \cdot 0,1}{0,5} = 264 \text{ Н}.$$

5. Необхідно перевірити правильність знайдених реакцій опор за рівнянням (3.5):

$$\sum X_i = 3 \cdot F_1 + F_{r2} - R_{A_x} - R_{B_x} = 300 + 120 - 264 - 156 = 0.$$

За рівнянням (3.6), маємо:

$$\sum Y_i = R_{A_y} - F_2 + R_{B_y} = 60 - 300 + 240 = 0.$$

Отже, реакції R_{A_x} , R_{B_x} та R_{A_y} , R_{B_y} визначено правильно.

Порядок виконання роботи

Кожен студент отримує у викладача свої варіанти двох завдань із визначення реакцій опор балки (табл. 3.1, рис. 3.12) та із визначення сил F_2 і $F_{r2} = 0,4 \cdot F_2$, реакцій опор вала за умови $F_1 = 100 \text{ Н}$ (рис. 3.13). На їх основі необхідно провести розрахунки та зробити висновки.

Таблиця 3.1 – Значення зосередженої сили F , вигинного моменту M та навантаження q для визначення реакцій опор балок

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F , кН	5	8	10	7	4	5	9	11	10	4
M , кН·м	12	10	14	10	12	12	15	15	18	20
q , кН/м	2	5	6	3	1	2	6	5	5	2

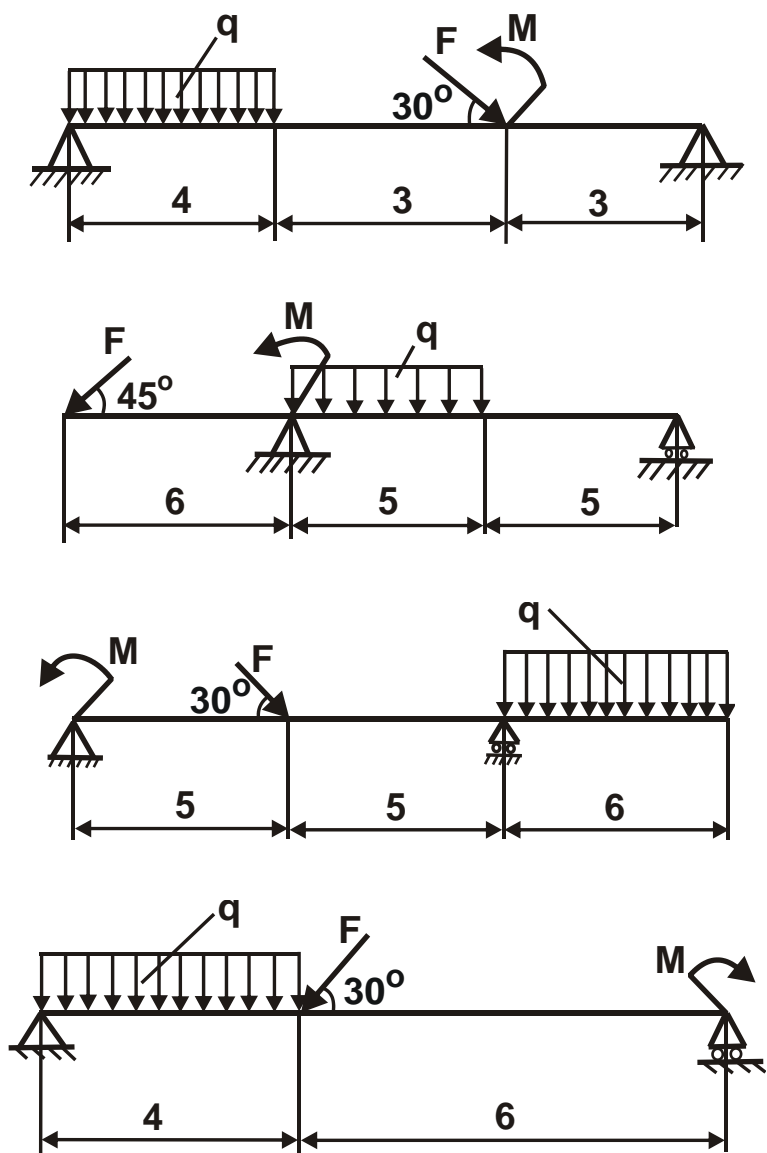


Рисунок 3.12 – Розрахункові схеми для визначення реакцій опор балок

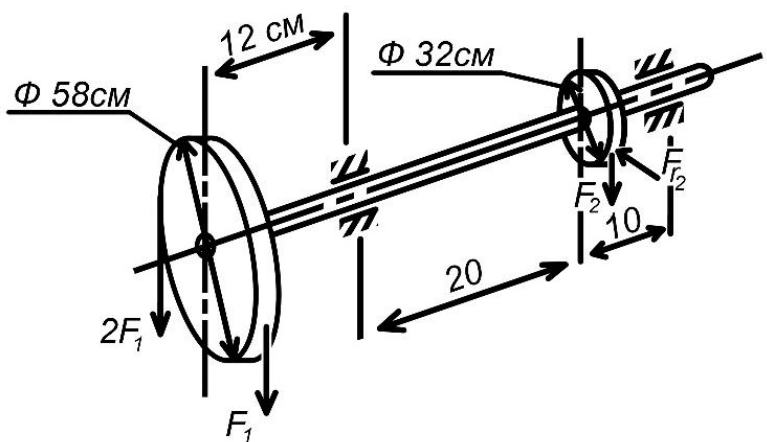


Рисунок 3.13 – Розрахункові схеми вала, на який жорстко насаджено шків і колесо, із усіма діючими на них силами F_1 , F_2 і $F_{r2} = 0,4 \cdot F_2$

Звіт по роботі

У звіті студент наводить умови рівноваги плоскої і просторової систем довільно розташованих сил та розв'язки своїх двох варіантів завдань і робить висновки.

Література: [9 – 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20].

Питання для самоконтролю

1. Скільки рівнянь рівноваги можна записати для статично визначеної балки:

- а) 2 ;
- б) 3 ;
- в) 1 ;
- г) 4.

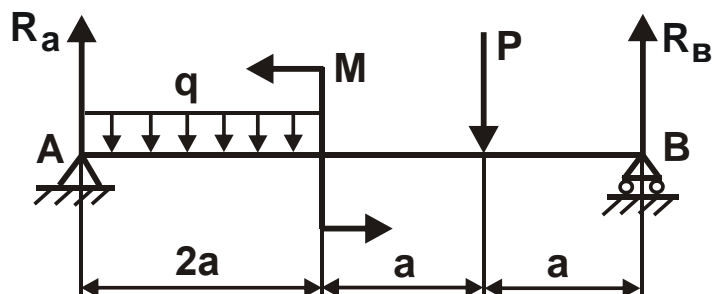
2. Реакція опори прикладена:

- а) до самої опори;
- б) до тіла, що опирається на опору;
- в) до поверхні тіла, що опирається на опору;
- г) до кінця тіла, що опирається на опору.

3. Для визначення реакцій опор балки найбільш доцільне використання рівнянь рівноваги:

- а) $\sum P_{iy} = 0$;
- б) $\sum M_B = 0$;
- в) $\sum P_{iy} = 0$, $\sum M_B = 0$;
- г) $\sum M_A = 0$;
- д) $\sum M_A = 0$, $\sum M_B = 0$

4. Для балки із наведених рівнянь рівноваги вірним є:



- а) $\sum M_A = 0$; $q \cdot 2a \cdot a + P \cdot 3a - R_B \cdot 4a = 0$;
- б) $\sum M_B = 0$; $-P \cdot a - q \cdot 2a \cdot 3a + R_A \cdot 4a = 0$;
- в) $\sum P_{iy} = 0$; $R_A - q \cdot 2a + R_B - P = 0$;
- г) $\sum M_A = 0$; $q \cdot 2a \cdot a + M + P \cdot 3a = 0$.

5. Шарнірно-нерухома опора має:
- а) одну реакцію R_x ;
 - б) одну реакцію R_y ;
 - в) дві реакції R_x, R_y ;
 - г) дві реакції R_x, R_y та один момент M .
6. Консольна балка має:
- а) одну реакцію R_x ;
 - б) одну реакцію R_y ;
 - в) дві реакції R_x, R_y ;
 - г) дві реакції R_x, R_y та один момент M .
7. Опора, що допускає обертання навколо осі шарніру та лінійне переміщення паралельно опорної поверхні, відноситься до типу:
- а) опора із жорстким закладанням;
 - б) шарнірно-рухома опора;
 - в) шарнірно-нерухома опора;
 - г) гнучкий зв'язок.
9. Пару сил можна урівноважити:
- а) однією силою;
 - б) парою сил;
 - в) рівнодіючою силою;
 - г) урівноважувальною силою.
10. Ефект дії пари сил визначається:
- а) добутком модуля сили на плече;
 - б) величиною моменту пари та напрямом обертання;
 - в) рівнодійною силою;
 - г) умовою рівноваги.
11. Значні відмінності моменту пари від моменту сили полягають у тому, що:
- а) величина та напрям моменту пари сил не залежить від положення її в площині;
 - б) величина та знак моменту сили не залежить від положення точки (центра моменту);
 - в) момент сили дорівнює добутку модуля сили на її плече;
 - г) момент пари дорівнює добутку модуля однієї із сил на плече.

Робота 4. Центри тяжіння

Мета роботи – навчити студентів визначати положення центрів тяжіння простих геометричних фігур, плоских перетинів, складених із простих геометричних фігур, і профілів стандартного прокату.

Загальні відомості

Центр паралельних сил

Система сил, лінії дії яких паралельні та лежать у одній площині, називається *плоскою системою паралельних сил*.

Із курсу фізики відомо (рис. 4.1), що: дві паралельні сили, направлені в один бік, еквівалентні рівнодіючій, яка дорівнює сумі цих сил, паралельна їм і направлена у той же бік; лінія дії рівнодіючої розділяє відрізок, що сполучає точки прикладання даних сил, на частини, обернено пропорційні цим силам:

$$F_{\Sigma} = F_1 + F_2;$$

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{BC}{AC}.$$

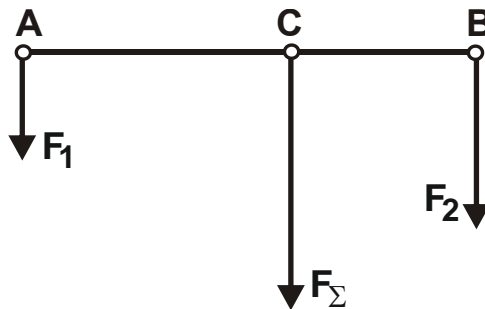


Рисунок 4.1 – Плоска система паралельних сил

Застосовуючи похідну пропорцію, маємо:

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{(F_1 + F_2)}{(BC + AC)},$$

тоді

$$\frac{F_1}{BC} = \frac{F_2}{AC} = \frac{F_{\Sigma}}{AB}.$$

Розкладання сили на дві паралельні складові здійснюється за допомогою формул складання двох паралельних сил.

Розглянемо тверде тіло, яке навантажене системою паралельних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3, \bar{F}_4$, що діють у точках A_1, A_2, A_3, A_4 , та яке можна звести до однієї рівнодіючої \bar{R} , прикладеної у точці C (рис. 4.2.).

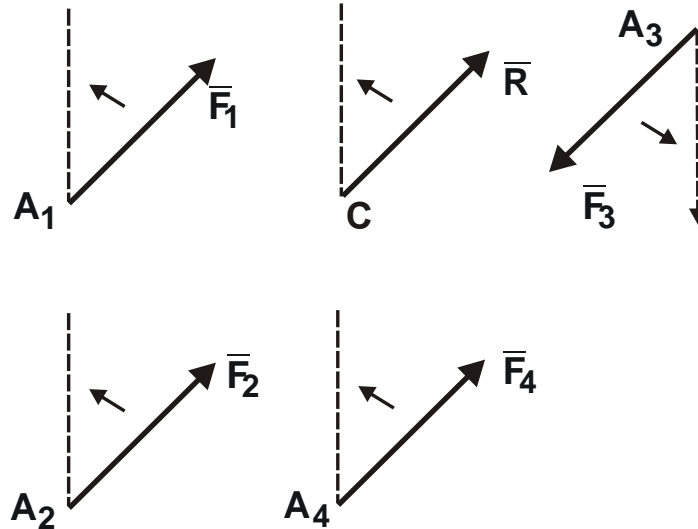


Рисунок 4.2 – Центр паралельних сил

Якщо повернути всі сили системи \bar{F} навколо їх точок прикладання на один і той же для всіх сил системи довільний кут у один і той же бік, то і рівнодіюча повернеться на той же кут у той же бік, зберігаючи також свою точку дії C .

Ця точка називається *центром паралельних сил*. Отже, *центром паралельних сил* називається точка на лінії дії рівнодіючої, яка не змінює свого положення під час повороту всіх сил на один і той же кут.

Для встановлення положення центру паралельних сил C , визначають його координати (рис. 4.3). Для цього розглянемо плоску систему трьох паралельних сил $\bar{F}_1, \bar{F}_2, \bar{F}_3$, які направлені в один бік та прикладені у точках A_1, A_2, A_3 . Повернемо сили у положення, паралельне вісі y . Оскільки рівнодіюча цих паралельних сил дорівнює алгебраїчній сумі, то

$$R = \sum F_i; \quad R = F_1 - F_2 + F_3. \quad (4.1)$$

Розглянемо моменти сил системи відносно вісі y . Згідно із теоремою Варіньона, яка виражається формулами (2.24), маємо:

$$M(\bar{R}) = \sum M(\bar{F}) \quad (4.2)$$

або із урахуванням (4.1):

$$R \cdot x_C = F_1 \cdot x_1 - F_2 \cdot x_2 - F_3 \cdot x_3 = \sum F_i \cdot x_i. \quad (4.3)$$

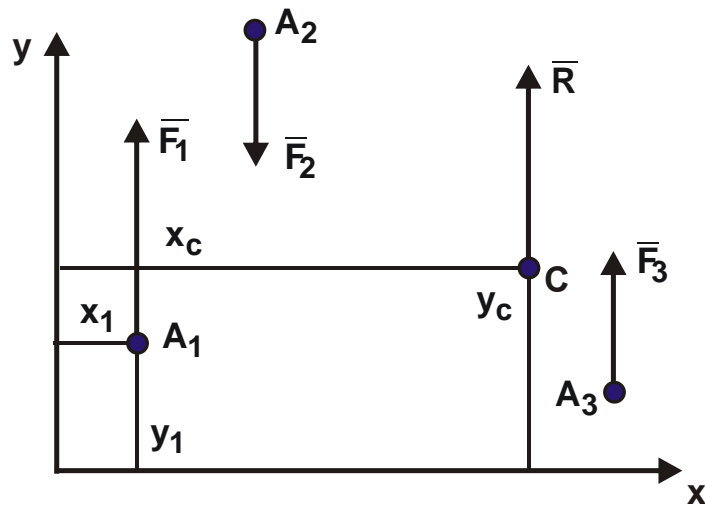


Рисунок 4.3 – Координати центра паралельних сил

Із формули (4.3) витікає:

$$x_c = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{R} = \frac{\sum F_i \cdot x_i}{\sum F_i}. \quad (4.4)$$

Якщо повернути всі сили так, щоб вони стали паралельними вісі x, то аналогічно формулі (4.4) отримано:

$$y_c = \frac{\sum F_i \cdot y_i}{\sum F_i}. \quad (4.5)$$

Координати центру паралельних сил визначаються значеннями x_c і y_c .

Розглянемо тіло, що складається із великої кількості елементарних частинок.

Центром тяжіння тіла називається центр паралельних сил тяжіння всіх елементарних частинок тіла.

Центр тяжіння є геометрична точка (рис. 4.4), яка може лежати поза тілом (наприклад, кільце, циліндр із отвором).

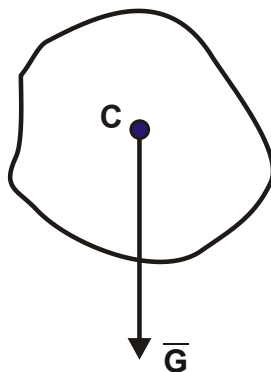


Рисунок 4.4 – Центр тяжіння тіла

Сила тяжіння – це сила, із якою тіло притягується до землі. Тоді *центр тяжіння* – це точка прикладання сили тяжіння (рис. 4.4).

Координати центру тяжіння тіла знаходять за тими ж формулами (4.4), (4.5), що й координати центру паралельних сил, а саме:

$$x_c = \frac{\sum(G_i \cdot x_i)}{\sum G_i}; \quad (4.6)$$

$$y_c = \frac{\sum(G_i \cdot y_i)}{\sum G_i}; \quad (4.7)$$

$$z_c = \frac{\sum(G_i \cdot z_i)}{\sum G_i}, \quad (4.8)$$

де G_i – сила тяжіння кожної елементарної частинки тіла;

x_i, y_i, z_i – координати частинки;

$\sum G_i$ – сила тяжіння всього тіла.

У разі однорідних тіл за такими ж формулами можна визначати координати центру тяжіння об'ємів, площ і ліній. Наприклад, для абсциси x_c отримаємо наступні формули:

1) сила тяжіння елементарної частинки, яка виражена через її об'єм V_i , дорівнює:

$$G_i = \gamma \cdot V_i, \quad (4.9)$$

де γ – питома сила тяжіння (для однорідного тіла – величина постійна).

Тоді із урахуванням формули (4.6) маємо:

$$x_c = \frac{\sum(G_i \cdot x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma \cdot \sum(V_i \cdot x_i)}{\gamma \cdot \sum V_i}. \quad (4.10)$$

Отже, для об'єму:

$$x_c = \frac{\sum(V_i \cdot x_i)}{\sum V_i}; \quad (4.11)$$

2) якщо тіло є однорідною пластинкою товщиною h , то сила тяжіння елементарної частинки, яка виражена через площу A_i , дорівнює

$$G_i = \gamma \cdot h \cdot A_i. \quad (4.12)$$

Тоді із урахуванням формули (4.6) маємо:

$$x_c = \frac{\sum(G_i \cdot x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma \cdot h \cdot \sum(A_i \cdot x_i)}{\gamma \cdot h \cdot \sum A_i}. \quad (4.13)$$

Отже, для площі:

$$x_c = \frac{\sum(A_i \cdot x_i)}{\sum A_i}; \quad (4.14)$$

3) якщо тіло є однорідним із постійним поперечним перетином A , то сила тяжіння елементарної частинки, яка виражена через довжину l_i , дорівнює

$$G_i = \gamma \cdot A \cdot l_i. \quad (4.15)$$

Тоді формула (4.6) із урахуванням (4.15) приймає вигляд:

$$x_c = \frac{\sum(G_i \cdot x_i)}{\sum G_i} = \frac{\gamma \cdot A \cdot \sum(l_i \cdot x_i)}{\gamma \cdot A \cdot \sum l_i}. \quad (4.16)$$

Отже, для лінії:

$$x_c = \frac{\sum(l_i \cdot x_i)}{\sum l_i}. \quad (4.17)$$

Визначення центра тяжіння простих геометричних фігур, складних перетинів і фігур прокатних профілів

Розглянемо три методи знаходження центру тяжіння: метод симетрії, метод розбиття і метод негативних мас.

Метод симетрії. Розглянемо однорідне тіло, яке має площину симетрії. Виберемо таку систему координат, щоб вісі x і z лежали у площині симетрії (рис. 4.5.).

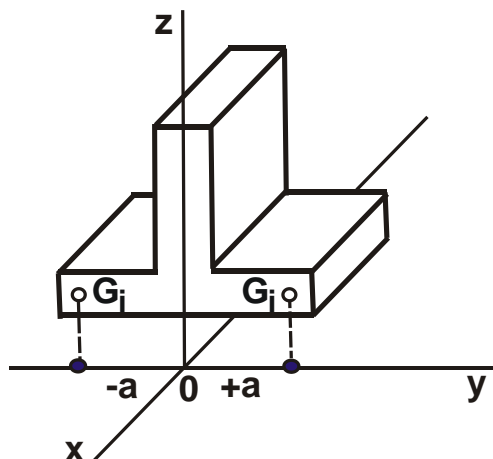


Рисунок 4.5 – Розрахункова схема центру тяжіння симетричної фігури

У цьому випадку кожній елементарній частинці силою тяжіння G_i із абсцисою $y_i = +a$ відповідає така ж елементарна частинка із абсцисою $y_i = -a$.

Тоді

$$y_c = \frac{\sum(G_i \cdot y_i)}{\sum G_i} = 0. \quad (4.18)$$

Із формули (4.18) витікає висновок: якщо однорідне тіло має площину симетрії, то центр тяжіння тіла лежить у цій площині.

Аналогічно можна довести і наступні положення:

• якщо однорідне тіло має вісь симетрії, то центр тяжіння тіла знаходиться на цій вісі;

• якщо однорідне тіло має дві вісі симетрії, то центр тяжіння знаходиться у точці їх перетину;

• центр тяжіння однорідного тіла обертання знаходиться на вісі обертання.

Метод розбиття. Цей метод полягає у тому, що тіло розбивають на найменше число частин, сили тяжіння та положення центрів тяжіння яких відомі, після чого застосовують наведені раніше формули.

Припустимо, що тіло силою тяжіння G розбито на три частини G' , G'' , G''' , абсциси центрів тяжіння цих частин x'_c , x''_c , x'''_c відомі.

Виходячи із формули (4.6), маємо:

$$x_c = \frac{\sum(G_i \cdot x_i)}{\sum G_i} = 0. \quad (4.19)$$

Подамо формулу (4.19) у такому вигляді:

$$x_c \cdot \sum G_i = \sum(G_i \cdot x_i) \quad (4.20)$$

або

$$G \cdot x_c = \sum(G_i \cdot x_i). \quad (4.21)$$

Формулу (4.21) запишемо для кожної із трьох частин тіла окремо:

$$G' \cdot x'_c = \sum(G'_i \cdot x'_i); \quad (4.22)$$

$$G'' \cdot x''_c = \sum(G''_i \cdot x''_i); \quad (4.23)$$

$$G''' \cdot x'''_c = \sum(G'''_i \cdot x'''_i). \quad (4.24)$$

Після складання правих і лівих частин цих рівнянь, отримано:

$$G' \cdot x'_c + G'' \cdot x''_c + G''' \cdot x'''_c = \sum(G'_i \cdot x'_i) + \sum(G''_i \cdot x''_i) + \sum(G'''_i \cdot x'''_i) = \sum(G_i \cdot x_i). \quad (4.25)$$

Із урахуванням того, що права частина рівності (4.25) є добутком $G \cdot x_c$, оскільки $G \cdot x_c = \sum(G_i \cdot x_i)$, то

$$x_c = \frac{G' \cdot x'_c + G'' \cdot x''_c + G''' \cdot x'''_c}{G}, \quad (4.26)$$

що і потрібно було довести.

Аналогічно визначаються значення:

$$y_c = \frac{G' \cdot y'_c + G'' \cdot y''_c + G''' \cdot y'''_c}{G}; \quad (4.27)$$

$$z_c = \frac{G' \cdot z'_c + G'' \cdot z''_c + G''' \cdot z'''_c}{G}. \quad (4.28)$$

Отримані формули (4.26) – (4.28) аналогічні формулам для визначення координат центрів тяжіння. Тому в початкові формули можна підставляти не сили тяжіння елементарних частинок G_i , а сили тяжіння кінцевих частин; під координатами x_i , y_i , z_i слід розуміти координати центрів тяжіння частин, на які розбито тіло.

Метод негативних мас. Цей метод полягає у тому, що тіло, яке має вільні порожнини, вважають суцільним, а масу вільних порожнин вважають негативною. Формули для визначення координат центру тяжіння тіла при цьому не змінюються.

Таким чином, під час визначення центру тяжіння тіла, що має вільні порожнини, слід застосовувати метод розбиття, але вважати масу вільних порожнин негативною.

Положення центра тяжіння простих геометричних фігур:

1) у прямокутнику, квадраті, ромбі, паралелограмі знаходиться на перетині діагоналей (рис. 4.6);

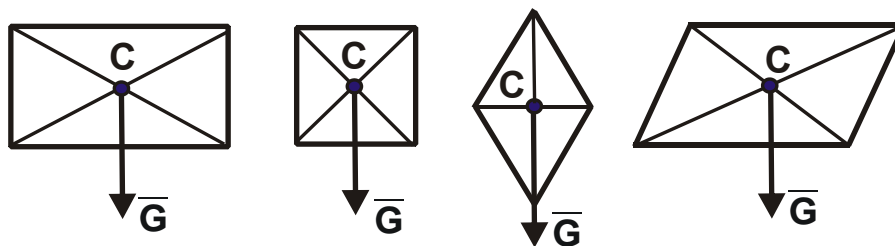


Рисунок 4.6 – Центр тяжіння простих геометричних фігур

2) у трикутнику – на перетині медіан (рис. 4.7):

$$x_c = \frac{1}{3} \cdot OB; \quad y_c = \frac{1}{3} \cdot OA; \quad (4.29)$$

3) у круговому секторі або півколі – у точці із координатами:

а) $x_c = r$, $y_c = \frac{2 \cdot r}{3 \cdot \pi}$ (рис. 4.8, а);

б) $x_c = \frac{2 \cdot r}{3 \cdot \pi}$ (рис. 4.8, б);

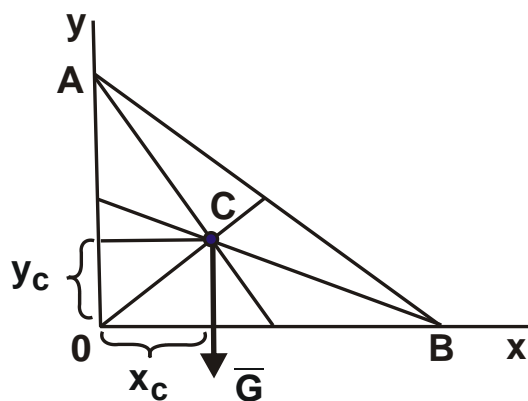


Рисунок 4.7 – Центр тяжіння трикутника

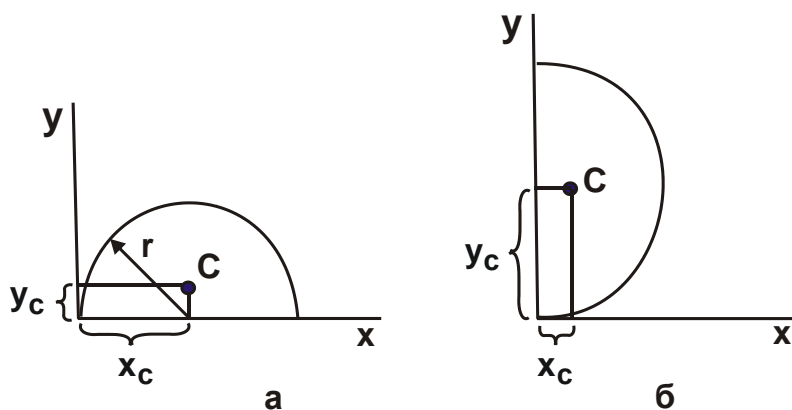


Рисунок 4.8 – Центр тяжіння кругового сектора (а) і півкола (б)

4) у конусі або повній піраміді – на 1/3 висоти від основи (рис. 4.9):

$$x_c = 0; y_c = \frac{1}{3} \cdot h. \quad (4.30)$$

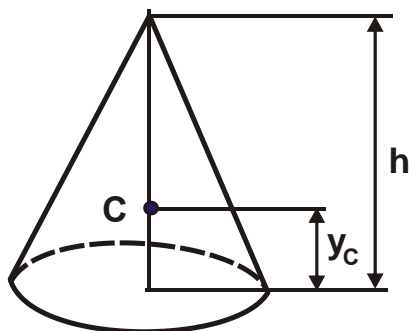


Рисунок 4.9 – Центр тяжіння конуса (повної піраміди)

Положення центру тяжіння плоских фігур прокатних профілів:

1) у балці двотаврової (рис. 4.10) – у точці із координатами $x_c = 0; y_c = h/2$, де h – висота двотавра;

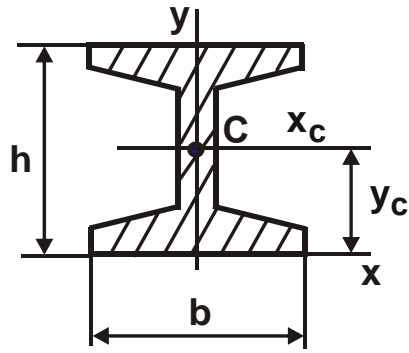


Рисунок 4.10 – Центр тяжіння двотавра

2) у швелері (рис. 4.11) – у точці із координатами: $x_c = Z_0$; $y_c = h/2$, де h – висота швелера; Z_0 – відстань від центра тяжіння до зовнішньої грані стінки.

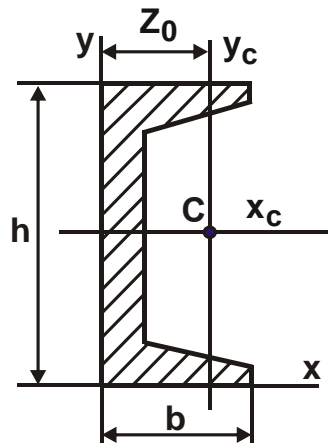


Рисунок 4.11 – Центр тяжіння швелера

Якщо плоска фігура має неправильну геометричну форму, то центр тяжіння такої фігури можна визначити двома способами:

- методом підвішування фігури на вістря;
- теоретичним методом, коли плоска фігура розбивається на певну кількість елементарних фігур, що мають правильну геометричну форму. Потім визначається положення центра тяжіння і площі кожної елементарної фігури. Координати центра тяжіння заданої складної фігури визначаються за формулами:

$$x_c = \frac{\sum A_i \cdot x_i}{\sum A_i}; \quad (4.31)$$

$$y_c = \frac{\sum A_i \cdot y_i}{A_i}, \quad (4.32)$$

де A_i – площі елементарних фігур, на які розбита складна фігура;
 x_i, y_i – координати центра ваги кожної елементарної фігури щодо осей X і Y .

Приклад 4.1. Визначити центр тяжіння перетину, який складається із двотавра № 22 і швелера № 20, як показано на рис. 4.12.

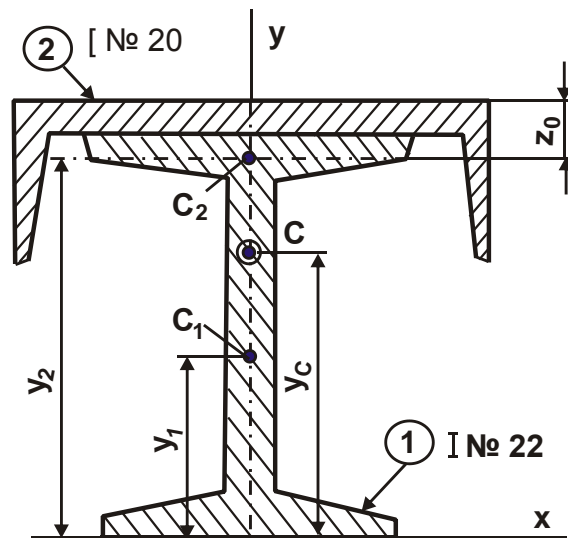


Рисунок 4.12 – Розрахункова схема

Рішення. Із курсу креслення відомо, що номер профілю прокату відповідає найбільшому розміру його перетину, який виражено у сантиметрах.

Оскільки перетин, складений із двотавра і швелера, є фігурою, симетричною відносно вісі y , то центр тяжіння такого перетину знаходиться на цій вісі, тобто $x_c = 0$. За довідником визначають площі та координати центрів тяжіння двотавра 1 і швелера 2.

Для двотаврового перетину:

$$A_1 = 15,2 \text{ см}^2;$$

$$y_1 = \frac{22}{2} = 11 \text{ см.}$$

Для швелерового перетину:

$$A_2 = 12 \text{ см}^2;$$

$$y_2 = 22 + d - z_0 = 22 + 0,32 - 1,25 = 21,07 \text{ см,}$$

де d – товщина стінки швелера;

z_0 – розмір, який визначає положення центра тяжіння швелера.

Ордината центра тяжіння всього перетину визначається:

$$y_c = \frac{\sum(A_i \cdot y_i)}{\sum A_i}.$$

Із урахуванням вихідних даних маємо;

$$y_c = \frac{A_1 \cdot y_1 + A_2 \cdot y_2}{A_1 + A_2} = \frac{15,2 \cdot 11 + 12 \cdot 21,07}{15,2 + 12} = 15,4 \text{ см.}$$

Порядок виконання роботи

Викладач видає групі студентів набір креслень різних плоских перетинів та профілів стандартного прокату і кожен студент на основі свого завдання аналітично визначає положення їх центру тяжіння та робить висновки.

Звіт по роботі

Звіт складається із методики визначення центрів тяжіння різних геометричних фігур та результатів розрахунку положення центру тяжіння заданого перетину чи профілю стандартного прокату за своїм завданням.

Література [9 – 11, 13, 14, 16, 17, 19, 20].

Питання для самоконтролю

1. Лінія дії рівнодіючої двох паралельних сил ділить відрізок, що з'єднує точки дії даних сил, на частини, які:
 - а) обернено пропорційні цим силам;
 - б) прямо пропорційні цим силам;
 - в) рівні між собою;
 - г) що змінюються за квадратичною залежністю.
2. Рівнодіюча паралельних сил дорівнює:
 - а) їх сумі й направлена у той же бік;
 - б) їх різниці;
 - в) урівноважувальній силі й направлена у той же бік;
 - г) сумі моментів цих сил.
3. Центр тяжіння тіла – це:
 - а) центр паралельних сил ваги, що діють на всі частини тіла;
 - б) точка перетину ліній дії зовнішніх сил;
 - в) точка, в якій момент всіх сил дорівнює нулю;
 - г) точка, координати якої визначаються відношенням суми проекцій всіх сил до сили тяжіння.

4. Назвіть метод знаходження центру тяжіння:
 - а) метод позитивних мас;
 - б) метод розбиття;
 - в) метод визначення середньої маси тіла;
 - г) метод визначення площі центрального перетину тіла.
5. Положення центру тяжіння трикутника визначається:
 - а) перетином медіан
 - б) перетином діагоналей
 - в) перетином бісектрис;
 - г) перетином всіх висот трикутника.
6. Положення центру тяжіння паралелограма визначається:
 - а) перетином медіан;
 - б) перетином діагоналей;
 - в) перетином бісектрис;
 - г) перетином висот.
7. Центр тяжіння конуса знаходиться:
 - а) на $\frac{2}{3}$ висоти від основи;
 - б) на $\frac{1}{2}$ висоти від основи;
 - в) на $\frac{1}{3}$ висоти від основи;
 - г) на $\frac{1}{4}$ висоти від основи.
8. Якщо тіло має дві осі симетрії, то центр тяжіння тіла знаходиться:
 - а) на перетині медіан;
 - б) на одній із осей;
 - в) у точці перетину осей;
 - г) на перетині бісектрис.
9. Величина та напрям моменту сили відносно точки залежить від:
 - а) взаємного положення цієї точки та лінії дії сили;
 - б) положення осей координат;
 - в) рівнодійної сили;
 - г) умови рівноваги системи.
10. Проекція сили на вісь координат дорівнює:
 - а) добутку модуля сили на косинус кута між вектором сили та додатнім напрямом осі;
 - б) модулю вісі;
 - в) добутку модуля сили на синус кута між вектором сили та додатнім напрямом вісі;
 - г) добутку модуля сили на тангенс кута між силою та віссю.

Робота 5. Основні поняття кінематики. Кінематика точки. Найпростіші рухи твердого тіла та складний рух точки. Плоскопаралельний рух твердого тіла

Мета роботи – вивчення основних закономірностей кінематики точки, найпростіших рухів твердого тіла, складного руху точки та плоскопаралельного руху твердого тіла; навчити студентів розв'язувати задачі кінематики із визначення відстані, швидкості, прискорення під час руху тіла за заданою траєкторією.

Загальні відомості

Основні поняття кінематики

Кінематика – частина теоретичної механіки, в якій вивчаються рухи матеріальних точок і твердих тіл без урахування їх мас і сил, що діють на них. Класична механіка розглядає простір, в якому відбуваються спостережувані рухи матеріальних тіл, як тривимірний евклідовий простір. Час у кінематиці розглядається як величина, що безперервно змінюється і позначається t . За одиницю часу приймають 1 секунду (с).

Лінія, що описується рухомою точкою у просторі, називається *траєкторією цієї точки*. Якщо траєкторія точки – пряма лінія, то рух точки називається *прямолінійним*; якщо траєкторія точки – не пряма лінія, то рух називається *криволінійним*.

Рівняння руху записується у вигляді: $S = f(t)$, де S – відстань точки від початкового положення, яка є функцією часу; t – час руху точки від початкового моменту. Знаючи траєкторію точки та рівняння руху за цією траєкторією, можна визначити положення точки в будь-який момент часу, для чого слід у рівність $S = f(t)$ підставити час.

Існують *векторний і природний способи* задання руху точки. У першому випадку рух точки визначається заданим радіус-вектором $\vec{r} = \vec{r}(t)$ залежно від часу. У другому випадку рух точки задається її траєкторією й рівнянням руху за цією траєкторією, тобто законом руху: $S = f(t)$, де S – відстань точки від початкового положення, що функцією часу; t – час руху точки від початкового моменту.

Координатний спосіб полягає у тому, що рух точки задається рухом її проєкцій уздовж осей координат. Рівняння плоского руху точки

у координатній формі записують у вигляді: $x = f(t)$, $y = f_1(t)$. Щоб за координатним способом задання руху точки визначити рівняння траєкторії $y = f(x)$, необхідно із рівнянь руху виключити час. У разі переходу точки із одного положення в інше, яке відбувається за проміжок часу, точка переміщається на відстань S . Ця відстань має назву – *довжина шляху* (скорочено шлях). Вимірюється S в одиницях довжини, тобто в системі СІ – метр (м).

Швидкість V – це величина, що характеризує швидкість зміни пройденого шляху за одиницю часу:

$$V = \frac{dS}{dt}, \text{ м/с};$$

$$V_{\text{ср}} = \frac{S}{t}.$$

Під час рівномірного руху швидкість вимірюється довжиною шляху, пройденого за одиницю часу:

$$V = \frac{S}{t} = \text{const.}$$

$$\text{Одиниця швидкості: } [V] = \frac{[S]}{[t]} = \frac{\text{довжина}}{\text{час}} = \text{метр за секунду} = \text{м/с.}$$

Швидкість є величина векторна. Під час прямолінійного рівномірного руху швидкість постійна за модулем і за напрямом, а вектор її співпадає із траєкторією руху.

Під час криволінійного руху швидкість точки за напрямом змінюється. Під час нерівномірного руху точки модуль її швидкості змінюється. Рух, у якому швидкість із часом збільшується, називається *прискореним*; рух, у якому швидкість із часом зменшується, – *сповільненим*.

Прискорення є кінематичною мірою зміни вектора швидкості точки. Прискорення є величина векторна. Під час прямолінійного руху точки вектор швидкості завжди співпадає із траєкторією і тому вектор зміни швидкості також співпадає із траєкторією.

Прискорення є зміна швидкості за одиницю часу. Якщо за невеликий проміжок часу Δt швидкість точки змінилася, то середнє прискорення дорівнює:

$$a_{\text{ср}} = \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

Однак, середнє прискорення не дає повного уявлення щодо дійсного прискорення в кожен даний момент часу (дійсне прискорення ще називають миттєвим).

Чим менше проміжок часу, за який визначають середнє прискорення, тим ближче воно до дійсного.

Дійсне прискорення є межа, до якої прагне середнє прискорення за умови, коли проміжок часу також прагне до нуля:

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} a_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}.$$

Таким чином, враховуючи, що $V = \frac{dS}{dt}$, отримано $a = \frac{dV}{dt} = \frac{d^2S}{dt^2}$.

Дійсне прискорення під час прямолінійного руху дорівнює першій похідній швидкості або другій похідній координати (відстані від початку відліку переміщення) за часом.

Одиниця прискорення:

$$[a] = \frac{[V]}{[t]^2} = \frac{\text{довжина}}{\text{час у квадраті}} = \text{метр за секунду у квадраті} = \text{м/с}^2.$$

Дотичне прискорення a_τ – це величина, що характеризує швидкість зміни величини швидкості за одиницю часу:

$$a_\tau = \frac{dV}{dt}, \text{ м/с}^2; \quad a_\tau = \frac{V - V_0}{t}.$$

Дотичне прискорення завжди спрямоване вздовж лінії вектора швидкості (рис. 5.1). Під час криволінійного руху точки швидкість змінює свій напрям. Вектор дійсного прискорення є межа, до якої прагне відношення вектора приросту швидкості до відповідного проміжку часу, коли останній прагне до нуля:

$$a_\tau = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V}{\Delta t}.$$

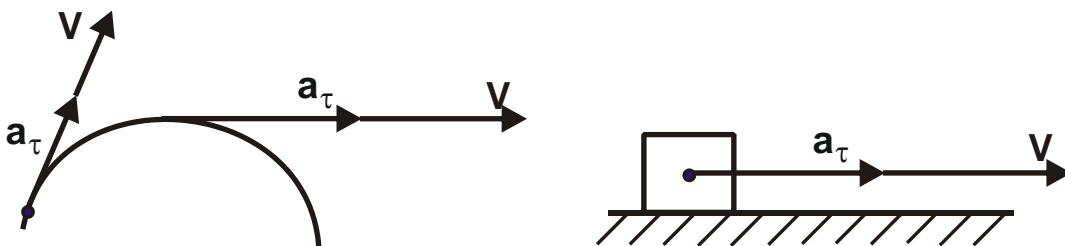


Рисунок 5.1 – Напрямок дотичного прискорення

Проекція повного прискорення на нормаль до траєкторії називається *нормальним прискоренням*; проекція повного прискорення на дотичну до траєкторії називається *дотичним прискоренням*. Дотичне прискорення ще називають *тангенціальним*.

Теорема. Нормальне прискорення рівне квадрату швидкості, що ділиться на радіус кривизни траєкторії в даній точці, а дотичне прискорення – це перша похідна швидкості за часом.

Якщо немає зміни швидкості за модулем, то $a_\tau = \frac{dV}{dt} = 0$.

Якщо немає зміни швидкості за напрямом (прямолінійний рух), то $a_n = V^2 / \infty = 0$. Звідси витікає, що дотичне прискорення характеризує зміну швидкості тільки за модулем, а нормальне – тільки за напрямом.

Знаючи дотичне нормальне прискорення, можна визначити модуль і напрям повного прискорення за формулою: модуль прискорення $a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$. Нормальне прискорення завжди спрямоване вздовж радіуса до центра кривизни траєкторії (рис. 5.2).

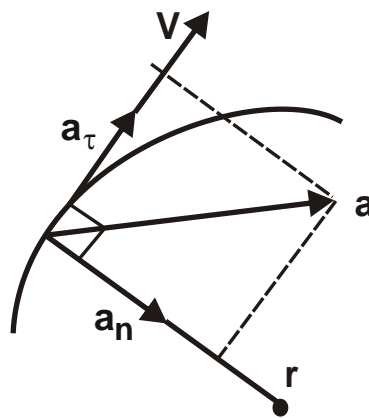


Рисунок 5.2 – Напрямок нормального прискорення

Види руху точки залежно від прискорення:

1) *рівномірний* – це рух точки із постійною за величиною швидкістю. Характеризується величинами:

$$V = \frac{S}{t} = \text{const}; \quad S = V \cdot t;$$

$$a_\tau = 0; \quad a_n = \frac{V^2}{r}.$$

Рівномірний рух можна зобразити графічно (рис. 5.3).

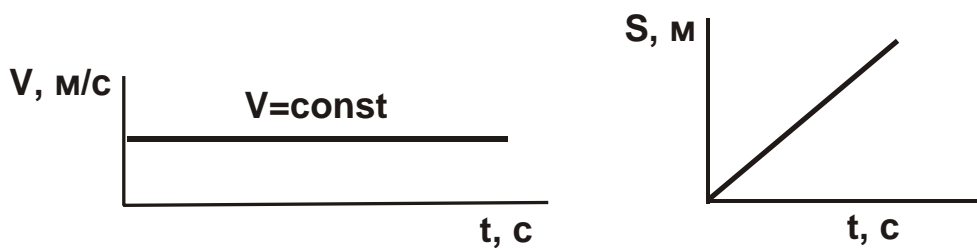


Рисунок 5.3 – Графічне зображення рівномірного руху

2) *рівнозмінний* (рівноприскорений, рівносповільнений) – це рух точки із постійним дотичним прискоренням:

$$|a_\tau| = \text{const}; \quad a_\tau = \frac{V - V_0}{t}; \quad S = V_0 \cdot t + \frac{a_\tau \cdot t^2}{2};$$

$$a_n = \frac{V^2}{r}; \quad V = V_0 + a_\tau \cdot t.$$

Різні варіанти рівнозмінного руху графічно показано на рис. 5.4.

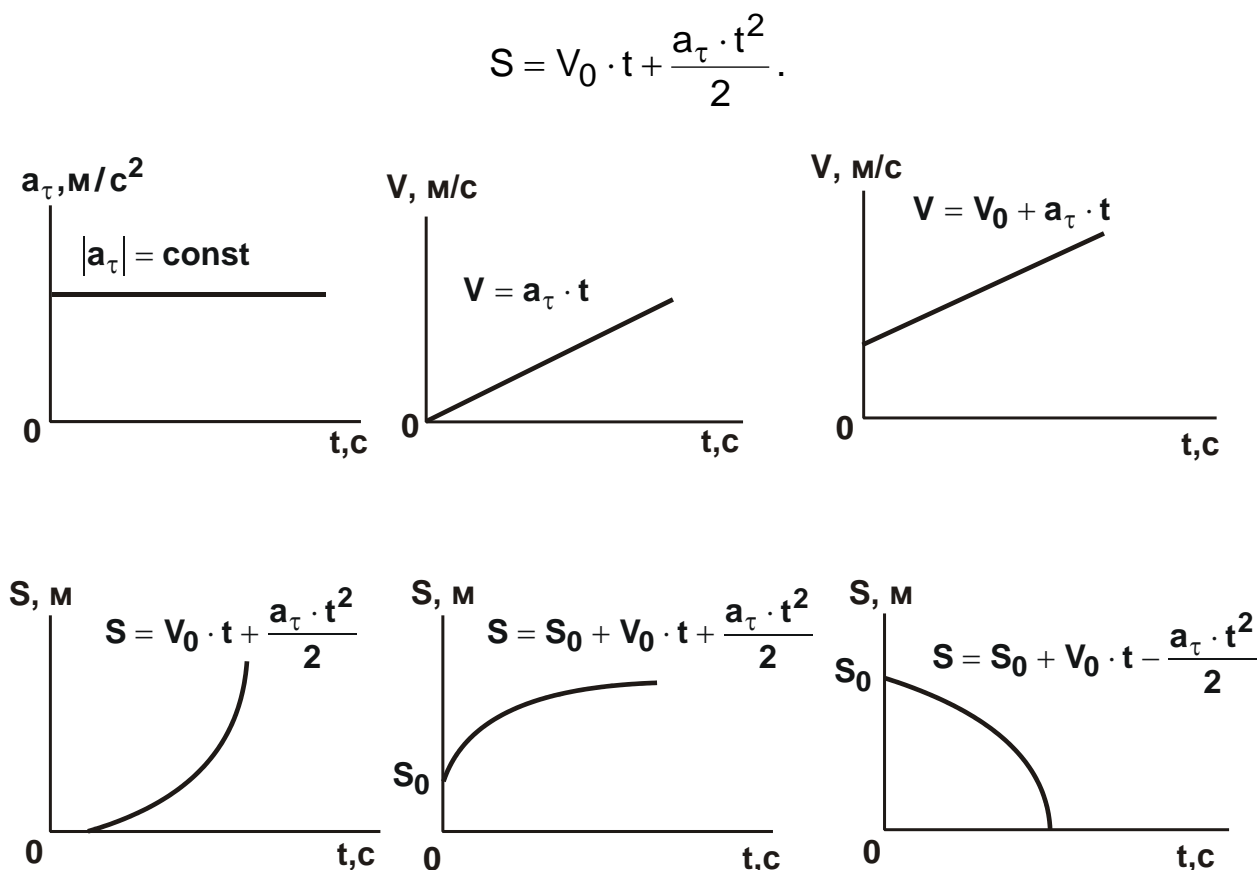


Рисунок 5.4 – Графічне зображення рівнозмінного руху

Часто дотичне і нормальне прискорення розглядають не як проекції, а як складові повного прискорення, тобто як векторні величини.

Якщо $a_{\tau} = \frac{dV}{dt} > 0$, то вектори дотичного прискорення і швидкості направлено в один бік і рух буде *прискореним*.

Якщо $a_{\tau} = \frac{dV}{dt} < 0$, то вектор дотичного прискорення направлено у бік, протилежний вектору швидкості, і рух буде *сповільненим*.

Вектор нормального прискорення завжди направлено до центру кривизни, тому це прискорення ще називають *доцентровим*.

Найпростіші рухи твердого тіла. Поступальний і обертальний рухи твердого тіла

Розрізняють два види простих рухів твердого тіла: *поступальний рух і обертальний рух навколо нерухомої вісі*.

Під час *поступального руху* всі точки твердого тіла мають однакові траєкторії, швидкості й прискорення.

Рух, за якого принаймні дві точки твердого тіла або незмінної системи залишаються нерухомими, називається *обертальним*. Пряма лінія, що сполучає ці дві точки, називається *віссю обертання*.

Під час обертального руху тіла точки його, що знаходяться на різній відстані від вісі обертання, мають неоднакові траєкторії, швидкості і прискорення. Отже, лінійне переміщення (шлях), лінійна швидкість і прискорення не можуть характеризувати обертальний рух у цілому. Обертальний рух тіла можна характеризувати кутом, на який обернулося тіло за даний проміжок часу. Цей кут називається *кутовим переміщенням тіла* і у загальному вигляді виражається функцією: $\varphi = f(t)$.

Шлях будь-якої точки тіла, що обертається, визначається:

$$S = r \cdot \varphi,$$

де r – відстань точки від осі обертання.

Швидкість будь-якої точки визначається:

$$V = \frac{dS}{dt} = \frac{d(r\varphi)}{dt} = r \cdot \frac{d\varphi}{dt}.$$

Кутова швидкість є кінематичною мірою руху тіла, що обертається, та характеризує швидкість його кутового переміщення:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Кутова швидкість дорівнює першій похідній кутового переміщення за часом. Одиниця кутової швидкості:

$$[\omega] = \frac{(\varphi)}{[t]} = \frac{\text{плоский кут}}{\text{час}} = \text{радіан за секунду} = \text{рад/с}.$$

Формула для визначення швидкості будь-якої точки тіла, що обертається, приймає вигляд:

$$V = \omega \cdot r.$$

Вектор швидкості точки тіла, що обертається, має напрям перпендикулярний радіусу, що сполучає цю точку із віссю обертання. Якщо точка знаходиться на поверхні тіла, що обертається, то її швидкість називають *окружною*.

Часто швидкість обертання виражають у обертах за хвилину, позначають буквою n і називають *частотою обертання*. Формула для визначення кутової швидкості залежно від частоти обертання приймає вигляд:

$$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}, \text{ рад/с},$$

де n – частота обертання тіла (об./хв або хв^{-1}).

Рівномірний обертальний рух. Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі із постійною кутовою швидкістю, то рух називається *рівномірним*. Формули рівномірного обертального руху:

$$\omega = \text{const};$$

$$\varphi = \omega \cdot t.$$

Дотичне, нормальне і повне прискорення будь-якої точки тіла, що рівномірно обертається, визначаються:

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = 0;$$

$$a_{\text{н}} = \frac{V^2}{\rho} = \frac{\omega^2 \cdot r^2}{r} = \omega^2 \cdot r;$$

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_{\text{н}}^2} = a = \omega^2 \cdot r.$$

Нерівномірний обертальний рух. Якщо кутова швидкість тіла, що обертається, із часом змінюється, то рух називається *нерівномірним*. У загальному вигляді формули нерівномірного обертального руху запишуться:

$$\varphi = f(t);$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Дотичне прискорення будь-якої точки нерівномірного тіла, що обертається, визначається:

$$a_{\tau} = \frac{dV}{dt} = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt}.$$

Вираз $\frac{d\omega}{dt}$ позначають ε і називають кутовим прискоренням. Кутове прискорення є кінематичною мірою зміни кутової швидкості тіла, що обертається:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Одиниця кутового прискорення:

$$[\varepsilon] = \frac{[\omega]}{[t]} = \frac{[\varphi]}{[t]^2};$$

$$[\varepsilon] = \frac{\text{плоский кут}}{\text{час у квадраті}} = \text{радіан за секунду у квадраті} = \text{рад/с}^2.$$

Формула для визначення дотичного прискорення будь-якої точки тіла, що обертається нерівномірно:

$$a_{\tau} = \varepsilon \cdot r.$$

Нормальне прискорення визначається за такою самою формулою, як і під час рівномірного обертання, тобто

$$a_{\text{н}} = \omega^2 \cdot r.$$

Повне прискорення:

$$a = \sqrt{a_{\tau}^2 + a_{\text{н}}^2} = \sqrt{(\varepsilon \cdot r)^2 + (\omega^2 \cdot r)^2} = r \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Якщо напрям кутового прискорення співпадає із напрямом обертання, то обертальний рух є прискореним, і навпаки (рис. 5.5). Значення нормального і дотичного прискорень, швидкості визначаються:

$$a_{\text{н}} = \omega^2 \cdot r;$$

$$a_{\tau} = 0;$$

$$V = \omega \cdot r.$$

Якщо тіло обертається навколо нерухомої осі із постійним кутовим прискоренням, то рух називається *рівнозмінним*. Формули кутової швидкості та кутового переміщення мають вигляд:

$$\omega = \omega_0 + a \cdot t;$$

$$\varphi - \varphi_0 = \omega_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2},$$

де φ_0 – початкове кутове переміщення.

Якщо $\varphi_0 = 0$, то формула кутового переміщення матиме вигляд:

$$\varphi = \omega_0 \cdot t + \frac{a \cdot t^2}{2}.$$

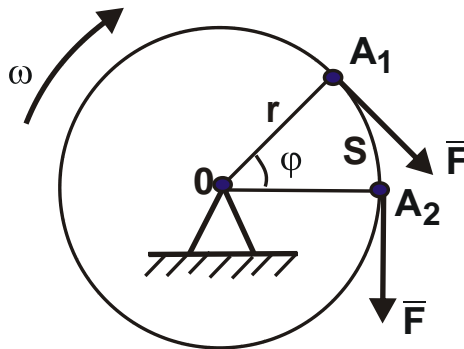


Рисунок 5.5 – Схема обертального руху

Приклад 5.1. Поїзд довжиною 120 м рухається через міст рівномірно із швидкістю 18 км/год. Необхідно визначити, за скільки часу поїзд пройде міст, якщо довжина мосту 480 м.

Дано:

$$l_1 = 120 \text{ м}$$

$$l_2 = 480 \text{ м}$$

$$V = 18 \frac{\text{км}}{\text{год}} = 5 \frac{\text{м}}{\text{с}}$$

Знайти: $t = ?$

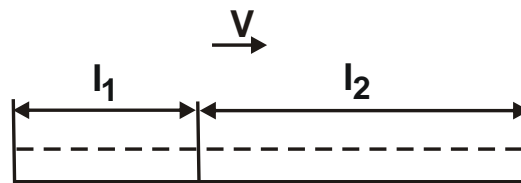


Рисунок 5.6 – Розрахункова схема

Рішення. Повний шлях, пройдений початковою (або кінцевою) точкою вагона поїзда по мосту, визначається (рис. 5.6):

$$S = l_1 + l_2.$$

Час, за який поїзд пройде міст, дорівнює:

$$t = \frac{S}{V} = \frac{120 + 480}{5} = \frac{600}{5} = 120 \text{ с} = 2 \text{ хв.}$$

Приклад 5.2. Точка рухається прямолінійно за законом $S = t^4 + 2t$ (S – в метрах; t – в секундах). Знайти її середнє прискорення у

проміжку між моментами часу $t_1 = 5$ с; $t_2 = 7$ с, а також її дійсне прискорення у момент часу $t_3 = 6$ с.

Рішення. Спочатку необхідно визначити швидкість точки:

$$V = \frac{dS}{dt} = 4 \cdot t^3 + 2.$$

Після підстановки у вираз замість часу t його значення $t_1 = 5$ с; $t_2 = 7$ с, маємо: $V_5 = 4 \cdot 5^3 + 2 = 502$ м/с; $V_7 = 4 \cdot 7^3 + 2 = 1\,374$ м/с.

Отже, збільшення швидкості за даний проміжок часу $\Delta t = 7 - 5 = 2$ с дорівнює: $\Delta V = V_7 - V_5 = 1\,374 - 502 = 872$ м/с².

Середнє прискорення точки: $a_{\text{ср}} = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{872}{2} = 436$ м/с².

Щоб визначити дійсне прискорення точки, необхідно встановити похідну від швидкості за часом: $a = \frac{dV}{dt} = 12 \cdot t^2$. Підставляючи у залежність замість t значення $t_3 = 6$ с, встановлено: $a_0 = 12 \cdot 6^2 = 432$ м/с².

Приклад 5.3. Із рівняння руху точки:

$x = 4 - 4 \cdot \sin \frac{\pi \cdot t}{6}$; $y = 2 - 4 \cdot \cos \frac{\pi \cdot t}{6}$ необхідно визначити:

- 1) рівняння траєкторії руху точки та зобразити траєкторію;
- 2) початкове положення точки на траєкторії;
- 3) моменти часу, коли точка перетинає вісі координат;
- 4) закон руху точки за траєкторією $S = \varphi(t)$, приймаючи за початок відліку відстаней початкове положення точки;
- 5) час t , за який точка пройде повне коло.

Рішення. 1. Щоб знайти рівняння траєкторії руху точки, необхідно із заданих рівнянь руху виключити час. Для цього рівняння руху слід розв'язати відносно величин $4 \cdot \sin \frac{\pi \cdot t}{6}$ і $4 \cdot \cos \frac{\pi \cdot t}{6}$ та звести отримані результати до квадрату:

$$(x - 4)^2 = 4^2 \cdot \left(\sin \frac{\pi \cdot t}{6} \right)^2;$$

$$(y - 2)^2 = 4^2 \cdot \left(\cos \frac{\pi \cdot t}{6} \right)^2.$$

Після складання цих рівнянь отримано рівняння кола із радіусом $R = 4$ см і центром кола, розташованим у точці $C(4; 2)$:

$$(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4^2.$$

2. Для визначення положення точки у початковий момент часу необхідно підставити значення $t=0$ у рівняння руху:

$$x = 4 - 4 \cdot \sin \frac{\pi \cdot t}{6} = 4 - 4 \cdot \sin \frac{\pi \cdot 0}{6} = 4 \text{ см};$$

$$y = 2 - 4 \cdot \cos \frac{\pi \cdot t}{6} = 2 - 4 \cdot \cos \frac{\pi \cdot 0}{6} = -2 \text{ см}.$$

За умови $t=0$ точка займає положення $M_0(4; -2)$.

3. Оскільки величина x може набувати значень $0 \leq x \leq 8$, а величина y – значень $-2 \leq y \leq 6$, то точки перетину із віссю x :

$$4^2 + (y-2)^2 = 4^2 \Rightarrow y^2 - 4y + 4 = 0 \Rightarrow y_{1,2} = 2,$$

із віссю y :

$$2^2 + (x-4)^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 - 8x + 4 = 0 \Rightarrow x_{1,2} = 4 \pm \sqrt{12}.$$

4. Для визначення закону руху точки за траєкторією слід скористатися формулою:

$$S = \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2} \cdot dt.$$

Із умови $t > 0$ витікає, що із виходом із початкового положення координата x збільшується, координата y також збільшується. Цей напрям слід прийняти за позитивний, тоді

$$\begin{aligned} S &= \pm \int_0^t \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2} \cdot dt = \pm \int_0^t \sqrt{\left(-\frac{4 \cdot \pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi \cdot t}{6}\right)^2 + \left(-\frac{4 \cdot \pi}{6} \cdot \cos \frac{\pi \cdot t}{6}\right)^2} \cdot dt = \\ &= \frac{4 \cdot \pi}{6} \cdot \int_0^t 1 \cdot dt = \frac{4 \cdot \pi}{6} \cdot t \Big|_0^t = \frac{2 \cdot \pi}{3} \cdot t. \end{aligned}$$

1. Далі слід самостійно визначити час t проходження точкою повного кола, де t – час, після якого шлях S стає рівним довжині кола.

Приклад 5.4. Точка рухається згідно із законом: $S = 0,1 \cdot t^2 + t$, де t – в секундах; S – в метрах.

Визначити середню швидкість точки за проміжок часу між кінцем 10-ої та кінцем 20-ої секунд та дійсну швидкість у кінці 20-ї секунди.

Рішення. Для визначення середньої швидкості точки слід встановити приріст часу і шляху за вказаний проміжок часу:

$$\Delta t = t_2 - t_1 = 20 - 10 = 10 \text{ с};$$

$$\Delta S = S_2 - S_1 = (0,1 \cdot t_2^2 + t_2) - (0,1 \cdot t_1^2 + t_1) = \\ = 0,1 \cdot 20^2 + 20 - 0,1 \cdot 10^2 - 10 = 40 \text{ м.}$$

Середня швидкість точки визначається:

$$V_{\text{cp}} = \frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{40}{10} = 4 \text{ м/с.}$$

Для визначення дійсної швидкості точки необхідно продиференціювати рівняння руху за часом, у результаті чого отримано формулу для визначення дійсної швидкості залежно від часу:

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d(0,1 \cdot t^2 + t)}{dt} = 0,2 \cdot t + 1.$$

Після підстановки у цей вираз часу, отримано значення дійсної швидкості у кінці 20-ї секунди: $V_{20} = 0,2 \cdot t_2 + 1 = 0,2 \cdot 20 + 1 = 5 \text{ м/с.}$

Складний рух точки. Абсолютний і відносний рух точки, переносний рух

Наведені вище поняття і формули кінематики точки справедливі для нерухомої системи координат $Oxyz$ (системі відліку). Якщо точка M рухається відносно деякої системи координат $O'x'y'z'$, яка у той же час рухається відносно осей нерухомої системи $Oxyz$, то такий рух точки M називається *відносним*. Рух рухомих осей відносно нерухомої системи відліку називається *переносним*.

Рух точки M відносно нерухомих осей (нерухомої системи відліку) називається у цьому випадку *абсолютним рухом*, який можна назвати також *складним рухом* або *результуючим рухом*. Наприклад, якщо яке-небудь тіло рухається вздовж палуби теплохода, що теж рухається, то рух тіла відносно теплохода (до предметів що знаходиться на палубі) є рух відносний, рух самого теплохода є рух переносний, а, отже, рух тіла щодо нерухомих берегів є рух абсолютний.

У даному випадку рухомою системою відліку є теплохід, нерухомою системою – Земля. Рух людини, що піднімається по рухомих сходах ескалятора відносно ескалятора – рух є відносним; рух ескалятора є переносним, а рух людини відносно навколишніх нерухомих предметів є рух абсолютний.

На рис. 5.7 графічно показано напрями трьох рухів: абсолютного, відносного і переносного. Припустимо, що xOy – рухома система коор-

динат, яка переміщається у площині креслення рівномірно поступово уздовж вісі x ; точка A поступово переміщається вгору уздовж вісі y . Якщо відбувається лише відносний рух, то точка перейде із положення A у положення A_1 . Якщо відбувається лише переносний рух, то точка із положення A перейде у положення A_2 . Якщо водночас відбуваються і відносний і переносний рухи, то точка за цей самий проміжок часу перейде із положення A у положення A_3 .

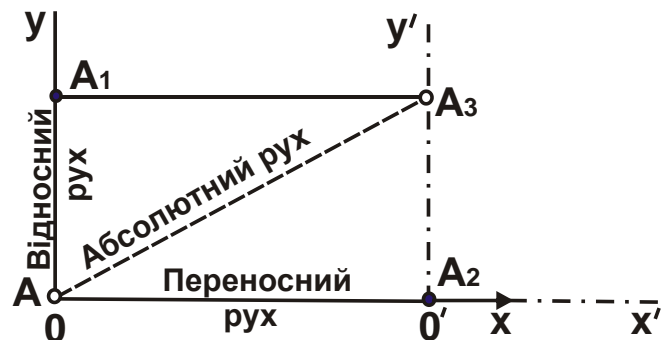


Рисунок 5.7 – Положення напрямів абсолютного, відносного і переносного рухів

Виходячи із цього, можна дійти наступного висновку: якщо потрібно вивчити відносний рух точки, то слід умовно зупинити переносний рух. Якщо необхідно вивчити переносний рух точки, то слід умовно зупинити відносний рух.

Таким чином, основне завдання кінематики у разі складного руху точки полягає у тому, щоб, знаючи відносні рухи точки і переносний рух, тобто рух рухомої системи відліку, знайти абсолютний рух точки і, отже, визначити її траєкторію, швидкість і прискорення цього руху.

Крім того, під час вивчення складного руху точки слід відрізнити відносну, переносну і абсолютну швидкості цієї точки, а також її відносне, переносне і абсолютне прискорення.

Абсолютною швидкістю $V_{абс}$ і *абсолютним прискоренням* $a_{абс}$ точки називаються її швидкість та її прискорення під час абсолютного руху, тобто руху щодо нерухомої системи відліку.

Відотною швидкістю $V_{відн}$ і *відносним прискоренням* $a_{відн}$ точки називаються її швидкість і прискорення під час відносного руху, тобто руху відносно рухомої системи відліку.

Під переносною швидкістю точки розуміється та швидкість, яку мала б ця точка у даний момент, якби вона була незмінно пов'язана із рухомими осями. Отже, *переносною швидкістю точки* M називають швидкість, яка незмінно пов'язана із системою рухомих осей, із якою у даний момент співпадає точка M .

Переносну швидкість точки M позначатимемо через $V_{\text{пер}}$. Аналогічно під переносним прискоренням точки, яке позначимо $a_{\text{пер}}$, слід розуміти прискорення, яке мала б у даний момент дана точка, якби вона була незмінно пов'язана із рухомими осями і, отже, приймала б участь тільки у переносному русі. Таким чином, *переносним прискоренням точки* M називається прискорення цієї точки, незмінно пов'язаної із системою рухомих осей, із якою у даний момент співпадає точка M .

Розглянемо складний рух точки M графічно (рис. 5.8).

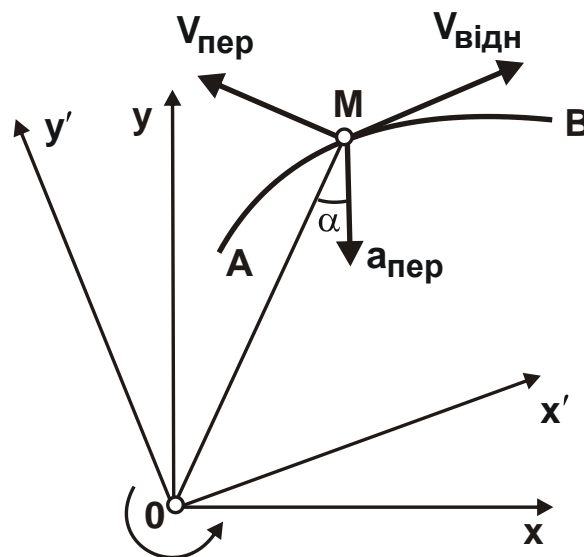


Рисунок 5.8 – Рух точки M уздовж кривої лінії AB

Приймемо, що точка M рухається уздовж кривої лінії AB відносно осей $x'Oy'$, які обертаються навколо нерухомої точки O із кутовою швидкістю ω . Лінія AB є траєкторією відносного руху точки M . Якщо закон руху точки M за цією траєкторією виражається рівнянням $S = f(t)$, то *відносна швидкість* $V_{\text{відн}}$ точки M направлена уздовж дотичної до кривої AB і за модулем дорівнює абсолютному значенню похідної $\frac{dS}{dt}$.

Переносна швидкість $V_{\text{пер}}$ точки M є швидкість цієї точки площини $x'Oy'$, що обертається, із якою у даний момент співпадає точка M . Ця швидкість направлена перпендикулярно до радіуса-вектора OM і дорівнює за модулем $OM \cdot \omega$.

Абсолютна швидкість $V_{\text{абс}}$ точки M є та швидкість, із якою рухається ця точка у даний момент відносно нерухомих осей xOy .

Переносне прискорення $a_{\text{пер}}$ точки M є прискорення цієї точки площини $x'Oy'$, що обертається, із якою співпадає у даний момент точка M . Тому це прискорення визначається як прискорення точки твердого тіла, що обертається навколо нерухомої вісі:

$$a_{\text{пер}} = OM \cdot \sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

Якщо позначити координати рухомої точки у рухомій системі осей через x' , y' і z' , то рівняння

$$x' = f_1(t);$$

$$y' = f_2(t);$$

$$z' = f_3(t),$$

які виражають ці координати у функціях часу, є рівнянням відносного руху точки.

Якщо виключити із цих рівнянь час t , то отримаємо рівняння траєкторії відносного руху.

Слід зазначити, що відносна траєкторія точки не залишається нерухомою, а переміщається у просторі разом із рухомими осями.

Якщо рівняння відносного руху точки відомі, то можна знайти відносну швидкість точки. Для цього необхідно продиференціювати за часом t рівняння відносного руху, що дозволить отримати проєкції відносної швидкості на рухомі вісі. Визначивши ці проєкції, можна визначити величину і напрям відносної швидкості. Позначаючи проєкції відносної швидкості на рухомі вісі через $V_{\text{відн}X'}$, $V_{\text{відн}Y'}$ і $V_{\text{відн}Z'}$, маємо:

$$V_{\text{відн}X'} = \frac{dx'}{dt};$$

$$V_{\text{відн}Y'} = \frac{dy'}{dt},$$

$$V_{\text{відн}Z'} = \frac{dz'}{dt}.$$

Якщо аналогічно продиференціювати двічі за часом t рівняння відносного руху точки, то можна визначити проекції відносного прискорення на рухомі вісі:

$$a_{\text{відн}X'} = \frac{d^2x'}{dt^2},$$

$$a_{\text{відн}Y'} = \frac{d^2y'}{dt^2},$$

$$a_{\text{відн}Z'} = \frac{d^2z'}{dt^2}.$$

У результаті формула розкладання відносного прискорення $a_{\text{відн}}$ відносно рухомих вісей матиме вигляд :

$$a_{\text{відн}} = a_{\text{відн}X'} + a_{\text{відн}Y'} + a_{\text{відн}Z'}.$$

Теорема складань прискорення під час переносного поступального і переносного обертального рухів.

Швидкість точки під час абсолютного руху називається *абсолютною*. Швидкість точки під час відносного руху називається *відною*.

Швидкість даної точки, умовно закріпленої у даний момент на рухомій системі координат, називається *переносною*. Зв'язок між цими швидкостями встановлює *теорема щодо складання швидкостей*.

Теорема. Абсолютна швидкість точки дорівнює векторній сумі відносної і переносної швидкостей:

$$V_{\text{абс}} = V_{\text{відн}} + V_{\text{пер}}.$$

Отже, абсолютна швидкість точки дорівнює за модулем і напрямом діагоналі паралелограма, побудованого на переносній і відносній швидкостях.

Якщо необхідно вивчити відносний рух точки, то слід умовно зупинити переносний рух; якщо необхідно вивчити переносний рух точки, то слід умовно зупинити відносний рух.

Таким чином, за відомими значеннями переносної і відносної швидкостей і кута α між ними модуль абсолютної швидкості визначається за відомою формулою, що виражає довжину діагоналі паралелограма:

$$V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2 + 2 \cdot V_e \cdot V_r \cdot \cos \alpha}.$$

Якщо $\alpha = 0$ (швидкості V_e і V_r направлено уздовж однієї прямої в один бік), то $\cos \alpha = 1$ і $V_a = V_e + V_r$.

Якщо $\alpha = 180^\circ$ (швидкості V_e і V_r направлено уздовж однієї прямої в протилежні боки), то $\cos \alpha = -1$ і $V_a = |V_e - V_r|$.

Якщо $\alpha = 90^\circ$, то $V_a = \sqrt{V_e^2 + V_r^2}$.

Під час поступального руху твердого тіла прискорення всіх його точок у кожен момент рівні між собою, а прискорення всякої точки, незмінно пов'язаної із рухомими осями, дорівнює прискоренню точки.

Якщо переносний рух є поступальним, то переносне прискорення $a_{\text{пер}}$ точки у кожен момент часу дорівнює прискоренню точки у той же момент.

Щоб знайти абсолютне прискорення $a_{\text{абс}}$ точки, необхідно визначити похідну від абсолютної швидкості цієї точки за часом. Тому:

$$a_{\text{абс}} = a_{\text{відн}} + a_{\text{пер}}.$$

Наведена рівність виражає *теорему складання прискорень під час поступального переносного руху*: у випадку, коли переносний рух, тобто рух рухомої системи відліку, є поступальним, абсолютне прискорення точки дорівнює геометричній сумі переносного і відносного прискорень цієї точки.

Отже, абсолютне прискорення точки можна визначити за тим же правилом паралелограма, як і абсолютну швидкість.

Приймемо, що рухома система відліку рухається довільним чином щодо нерухомої системи і точка в її відносному русі, тобто під час руху відносно рухомої системи, описує деяку траєкторію, наприклад, здійснює обертальний рух. Тоді *переносною швидкістю* $V_{\text{пер}}$ точки називається швидкість точки, яка незмінно пов'язана із рухомою системою, із якою у даний момент співпадає точка. Тому під час визначення переносної швидкості точки потрібно цю точку незмінно пов'язувати із рухомою системою відліку, тобто потрібно вважати її координати постійними. Іншими словами, потрібно припустити, що відносний рух точки зупинений. Отже,

$$V_{\text{абс}} = V_{\text{відн}} + V_{\text{пер}}.$$

Наведена рівність виражає *теорему складання швидкостей у загальному випадку*: абсолютна швидкість точки дорівнює геометрич-

ній сумі переносної і відносної швидкостей цієї точки, тобто абсолютна швидкість точки і в загальному випадку визначається так само, як і під час переносного поступального руху.

Теорема Коріоліса. Якщо переносний рух не є поступальним, абсолютне прискорення точки складається із трьох прискорень: переносного $a_{\text{пер}}$, відносного $a_{\text{відн}}$ і прискорення, що дорівнює $2 \cdot \omega \cdot V_{\text{відн}}$, яке називається *прискоренням Коріоліса*.

Позначимо прискорення Коріоліса $a_k = 2 \cdot (\omega \cdot V_{\text{відн}})$.

Прискорення Коріоліса дорівнює подвоєному векторному добутку кутової швидкості твердого тіла (із яким пов'язана рухома система відліку) на швидкість точки відносно цієї рухомої системи:

$$a_{\text{абс}} = a_{\text{пер}} + a_{\text{відн}} + a_k.$$

Теорему Коріоліса застосовують у тому випадку, коли переносний рух, тобто рух рухомої системи відліку, не є поступальним. Тоді абсолютне прискорення точки дорівнює векторній сумі трьох прискорень: переносного, відносного і коріолісового.

Приклад 5.5. Стержень OA обертається навколо осі O у площині креслення (рис. 5.9) за законом $\varphi = b \cdot t$. Вздовж стержня рухається точка M за законом $OM = a \cdot t$. Знайти траєкторію абсолютного руху точки M.

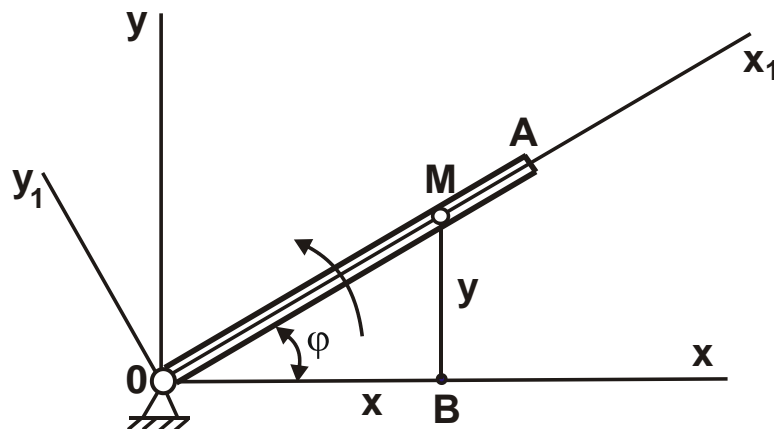


Рисунок 5.9 – Розрахункова схема траєкторії абсолютного руху точки M

Рішення. Слід прийняти нерухомою систему координат xOy і рухомою систему x_1Oy_1 , незмінно пов'язаною із стержнем OA. У такому випадку переносним рухом буде обертання рухомих осей разом із умовно

закріпленою на них в кожен момент точкою М навколо точки О, а відносним рухом – рух точки М уздовж стержня.

Рівняння переносного обертального руху запишеться: $\varphi = b \cdot t$.

Рівняння відносного руху запишеться: $x_1 = OM = a \cdot t$.

Визначимо рівняння абсолютного руху точки у координатній формі, для чого координати x і y в нерухомій системі відліку xOy слід виразити функцією часу t . Із рис. 5.9 витікає: $x = OB = OM \cdot \cos \varphi$; $y = BM = OM \cdot \sin \varphi$ або, підставляючи значення φ і OM , отримано:

$$x = a \cdot t \cdot \cos bt;$$

$$y = a \cdot t \cdot \sin bt.$$

Щоб визначити рівняння траєкторії абсолютного руху точки, слід виключити із рівняння руху час t , розділивши друге рівняння на перше:

$$\frac{y}{x} = \frac{a \cdot t \cdot \sin bt}{a \cdot t \cdot \cos bt} = \operatorname{tg} bt,$$

звідки

$$t = \frac{1}{b} \operatorname{arctg} \frac{y}{x}.$$

Крім того, після зведення рівнянь руху у квадрат і склавши їх, отримано:

$$x^2 + y^2 = a^2 \cdot t^2;$$

$$x^2 + y^2 = \frac{a^2}{b^2} \cdot \operatorname{arctg}^2 \frac{y}{x}.$$

Таким чином, отримано рівняння траєкторії абсолютного руху траєкторії точки М. Ця траєкторія є *архімедовою спіраллю*.

Плоскопаралельний (плоский) рух твердого тіла.

Плоскопаралельним рухом твердого тіла називається такий рух, під час якого всі точки тіла переміщуються у площинах, паралельних якійсь одній площині, названою основою (це рух колеса на прямолінійній ділянці шляху, рух шатуна кривошипно-шатунного механізму).

Для визначення плоскопаралельного руху необхідно, щоб будь-яка пряма, проведена у тілі перпендикулярно основній площині, рухалася поступально. Для визначення руху тіла на кожній прямій, перпендикулярній основній площині, необхідно знати рух тільки однієї точки.

Розглядаючи ці точки в одній площині, паралельній основній, одержимо перетин, рух якого визначає рух тіла. Однак плоский рух перетину цілком однозначно визначається рухом двох будь-яких точок або відрізка. Отже, питання щодо плоскопаралельного руху тіл зводиться до питання щодо руху відрізка прямої на площині, паралельній основній.

Плоскопаралельний рух вивчають двома методами:

- 1) методом миттєвих центрів швидкостей;
- 2) методом розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний.

Розкладання руху плоскої фігури на поступальний і обертальний рухи

Основу цього методу складає наступна *теорема*: усяке плоскопаралельне переміщення твердого тіла можна отримати шляхом одного поступального та одного обертального рухів (рис. 5.10).

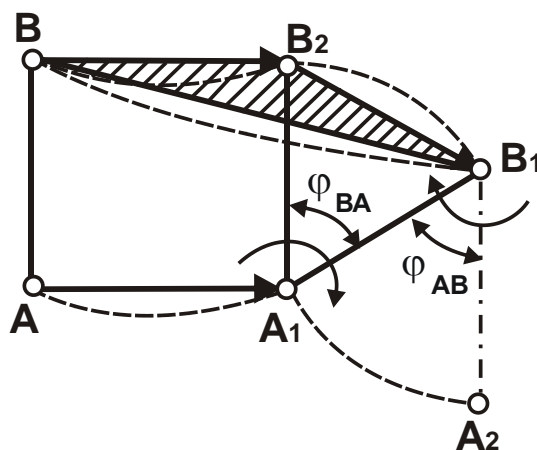


Рисунок 5.10 – Плоскопаралельний рух відрізка АВ

Розглянемо відрізок АВ, що визначає плоскопаралельний рух тіла, який за час Δt перемістився у положення A_1B_1 .

Припустимо, що відрізок АВ спочатку переміщався тільки поступально, причому, всі його точки рухалися однаково, як точка А.

Отже, відрізок перейшов у положення A_1B_2 , після чого його можна перемістити у положення A_1B_1 за допомогою тільки обертального руху навколо точки A_1 . Звідси витікає, що складне плоскопаралельне

переміщення складається із двох найпростіших рухів: поступального та обертального, причому, можна вважати, що ці рухи відбуваються одночасно.

Встановимо залежність між векторами швидкостей точок А і В. Для цього з'єднаємо прямими точки А, А₁ і В, В₁, В₂, у результаті отримано залежність, що пов'язує вектори переміщення точки В:

$$\overline{BB_1} = \overline{BB_2} + \overline{B_2B_1}.$$

Оскільки $\overline{BB_2} = \overline{AA_1}$, то маємо:

$$\overline{BB_1} = \overline{AA_1} + \overline{B_2B_1}.$$

Якщо розділити всі додатки рівності на Δt , то за умови $\Delta t \rightarrow 0$ отримано:

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{BB_1}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{AA_1}}{\Delta t} + \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\overline{B_2B_1}}{\Delta t}.$$

Звідки витікає:

$$V_B = V_A + V_{BA},$$

де V_B – вектор абсолютної швидкості точки В;

V_A – вектор абсолютної швидкості точки А;

V_{BA} – вектор швидкості точки В у відносному обертальному русі відрізка АВ навколо точки А, який спрямований перпендикулярно відрізку АВ.

Отже, плоскопаралельне переміщення тіла може здійснюватися шляхом обертального і поступального рухів, які відбуваються одночасно; поступальний рух можна вважати переносним, а обертальний – відносним.

Вектор абсолютної швидкості якоїсь точки В дорівнює сумі вектору абсолютної швидкості будь-якої іншої точки А та вектору швидкості точки В у відносному обертальному русі відрізка АВ навколо точки А.

Визначення швидкості будь-якої точки фігури

Точка, навколо якої відбувається відносний обертальний рух, називається *полюсом*.

Якщо за полюс замість точки А прийняти точку В, то, справедлива рівність:

$$V_A = V_B + V_{AB}.$$

Порівнюючи цю векторну рівність із раніше наведеною, видно, що вектори відносних швидкостей V_{BA} і V_{AB} за модулем дорівнюють один одному, отже $V_{BA} = V_{AB}$.

Із рис. 5.10 також витікає, що напрям відносного обертання та кут повороту відрізка AB за якийсь проміжок часу не залежать від вибору полюса, тобто справедлива рівність:

$$\varphi_{BA} = \varphi_{AB}.$$

Після диференціювання цієї рівності за часом, отримано:

$$\frac{d\varphi_{BA}}{dt} = \frac{d\varphi_{AB}}{dt}$$

або

$$\omega_{BA} = \omega_{AB}.$$

Отже, відносна кутова швидкість не залежить від вибору полюса. Аналогічно

$$\frac{d\omega_{BA}}{dt} = \frac{d\omega_{AB}}{dt}$$

або

$$a_{BA} = a_{AB}.$$

Таким чином, і відносне кутове прискорення не залежить від вибору полюса. Звідси витікає, що під час розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний, поступальна частина руху у загальному випадку залежить від вибору полюса, а обертальна частина руху від вибору полюса не залежить.

Оскільки за полюс може бути обрана будь-яка точка площини, у тому числі й миттєвий центр швидкостей, то під час розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний кутова швидкість відносного обертального руху завжди дорівнює абсолютній кутовій швидкості.

Якщо векторну рівність

$$V_A = V_B + V_{AB}$$

спроєкувати на напрям прямої AB , то проекція V_A дорівнює проекції V_B , оскільки проекція $V_{AB} = 0$.

Отже, під час плоскопаралельного руху проекції швидкостей двох точок плоскої фігури на напрям прямої, що з'єднує ці точки, рівні між собою.

Миттєвий центр швидкостей

Миттєвий центр швидкостей – це точка плоскої фігури, швидкість якої у даний момент часу дорівнює нулю.

Основу методу миттєвих центрів швидкостей складає *теорема*: всяке плоскопаралельне переміщення твердого тіла можна отримати одним обертанням навколо вісі, яка перпендикулярна основній площині.

Для доказу цієї теореми розглянемо відрізок АВ (рис. 5.11), який за кінцевий проміжок часу перемістився із положення АВ до положення А₁В₁. З'єднаємо точки А і А₁, В і В₁ прямими лініями. Із точок М і N (середин відрізків АВ і А₁В₁) проведемо перпендикуляри до їх взаємного перетину у точці О. Після з'єднання прямими лініями точки О із точками А, А₁, В, В₁, отримано два конгруентні (рівні) трикутники із загальною вершиною О:

$$\triangle OAB = \triangle OA_1OB_1.$$

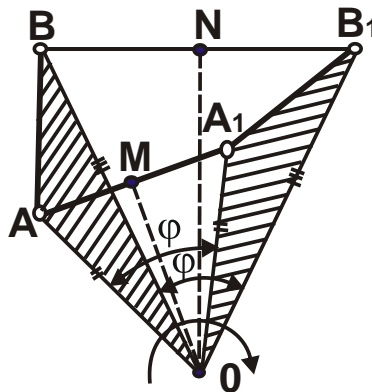


Рисунок 5.11 – Розрахункова схема миттєвого центру швидкостей

Трикутник АОВ поєднується із трикутником А₁ОВ₁ шляхом повороту на кут φ навколо точки, яка називається *центром кінцевого повороту*. Точка О є слідом вісі кінцевого повороту, яка перпендикулярна основній площині. Цим доведено, що відрізок АВ, що визначає плоскопаралельний рух тіла, переміщається у будь-яке нове положення шляхом одного оберту навколо вісі кінцевого повороту.

Якщо переміщення тіла відбудеться за нескінченно малий проміжок часу $\Delta t \rightarrow 0$, то обертання відбуватиметься навколо миттєвої вісі. Слід миттєвої вісі обертання на площині фігури називають *миттєвим центром швидкостей*. Очевидно, що швидкість точки, яка у даний момент часу є миттєвим центром швидкостей, дорівнює нулю. Кутова

швидкість ω , із якою відбувається миттєве обертання, називається *миттєвою кутовою швидкістю*.

Точка нерухомої площини, що збігається у даний момент часу із миттєвим центром швидкостей плоскої фігури, називається *миттєвим центром обертання*.

Отже, плоскопаралельний рух тіла може здійснюватися шляхом послідовних миттєвих безперервних поворотів навколо миттєвих вісей обертання.

Для визначення швидкостей точок твердого тіла можна застосувати всі наведені раніше формули для обертального руху.

Встановлено три властивості *миттєвих центрів швидкостей*, які витікають із закону розподілу швидкостей точок твердого тіла, що обертається навколо нерухомої вісі:

- швидкість миттєвого центра дорівнює нулю;
- миттєвий центр розташований на перпендикулярі, проведеному із точки у напрямі її швидкості;
- швидкість точки дорівнює добутку миттєвої кутової швидкості на відстань точки від миттєвого центра швидкостей (рис. 5.12):

$$V_A = \omega \cdot OA .$$

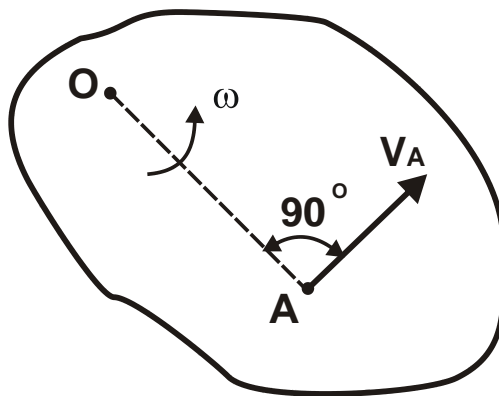


Рисунок 5.12 – Розрахункова схема положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури

На підставі перерахованих раніше властивостей можна встановити п'ять способів визначення *положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури*, виходячи із плоскопаралельного руху тіла:

1. Відомі миттєва кутова швидкість ω і швидкість V_A якоїсь точки A плоскої фігури (рис. 5.12).

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O знаходиться на перпендикулярі, проведеному із точки A до вектора швидкості V_A на відстані $OA = V_A / \omega$.

2. Відомі напрями швидкостей двох точок A і B плоскої фігури (рис. 5.13).

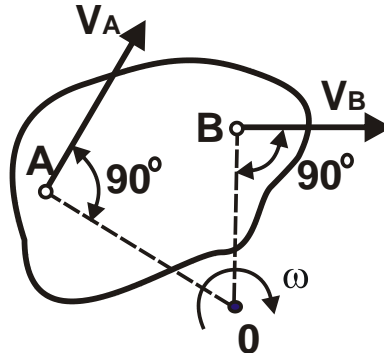


Рисунок 5.13 – Розрахункова схема положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури

У цьому випадку миттєвий центр O знаходиться на перетині перпендикулярів, проведених із точок A і B до напрямів їхніх швидкостей. При цьому $\frac{V_A}{V_B} = \frac{\omega \cdot OA}{\omega \cdot OB} = \frac{OA}{OB}$, тобто швидкості точок плоскої фігури прямо пропорційні їхнім відстаням від миттєвого центра швидкостей.

3. Відомо, що швидкості двох точок A і B плоскої фігури паралельні одна одній, спрямовані в один бік, перпендикулярні відрітку AB і за модулем не рівні (рис. 5.14).

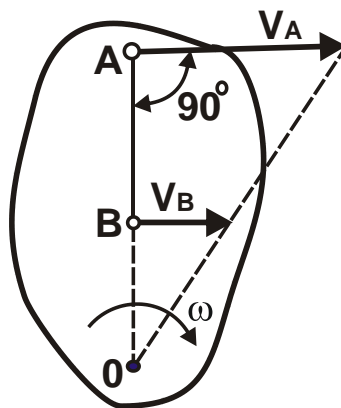


Рисунок 5.14 – Розрахункова схема положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O знаходиться у точці перетину прямої, що з'єднує початок векторів V_A і V_B , із прямою, що з'єднує кінці цих векторів.

Якщо вектори швидкостей точок A і B дорівнюють один одному, то миттєвий центр швидкостей у даний момент знаходиться у нескінченності, миттєва кутова швидкість дорівнює нулю, швидкості всіх точок плоскої фігури однакові, а рух – миттєво поступальний.

4. Відомо, що швидкості двох точок A і B плоскої фігури, паралельні одна одній, спрямовані у протилежні боки і перпендикулярні відрізка AB (рис. 5.15).

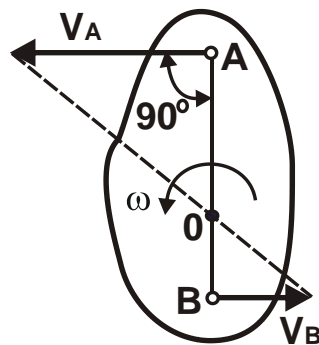


Рисунок 5.15 – Розрахункова схема положення миттєвого центра швидкостей плоскої фігури

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O перебуває у точці перетину відрізка AB із прямою, що з'єднує кінці векторів V_A і V_B .

5. Відомо, що плоска фігура котиться без ковзання на нерухомій кривій.

У цьому випадку миттєвий центр швидкостей O знаходиться у точці дотику фігури із кривою, тому що швидкість цієї точки фігури у даний момент дорівнює нулю.

Розглянемо закономірності формування миттєвого центра швидкостей колеса під час його кочення на прямолінійній рейці із урахуванням різних умов тертя.

На рис. 5.16 показано положення миттєвого центра швидкостей і графіки швидкостей точок вертикального діаметра у разі тертя ковзання (рис. 5.16, а), тертя кочення (рис. 5.16, б), тертя кочення із проковзуванням (рис. 5.16, в), часткового (рис. 5.16, г) та повного (рис. 5.16, д) буксування колеса.

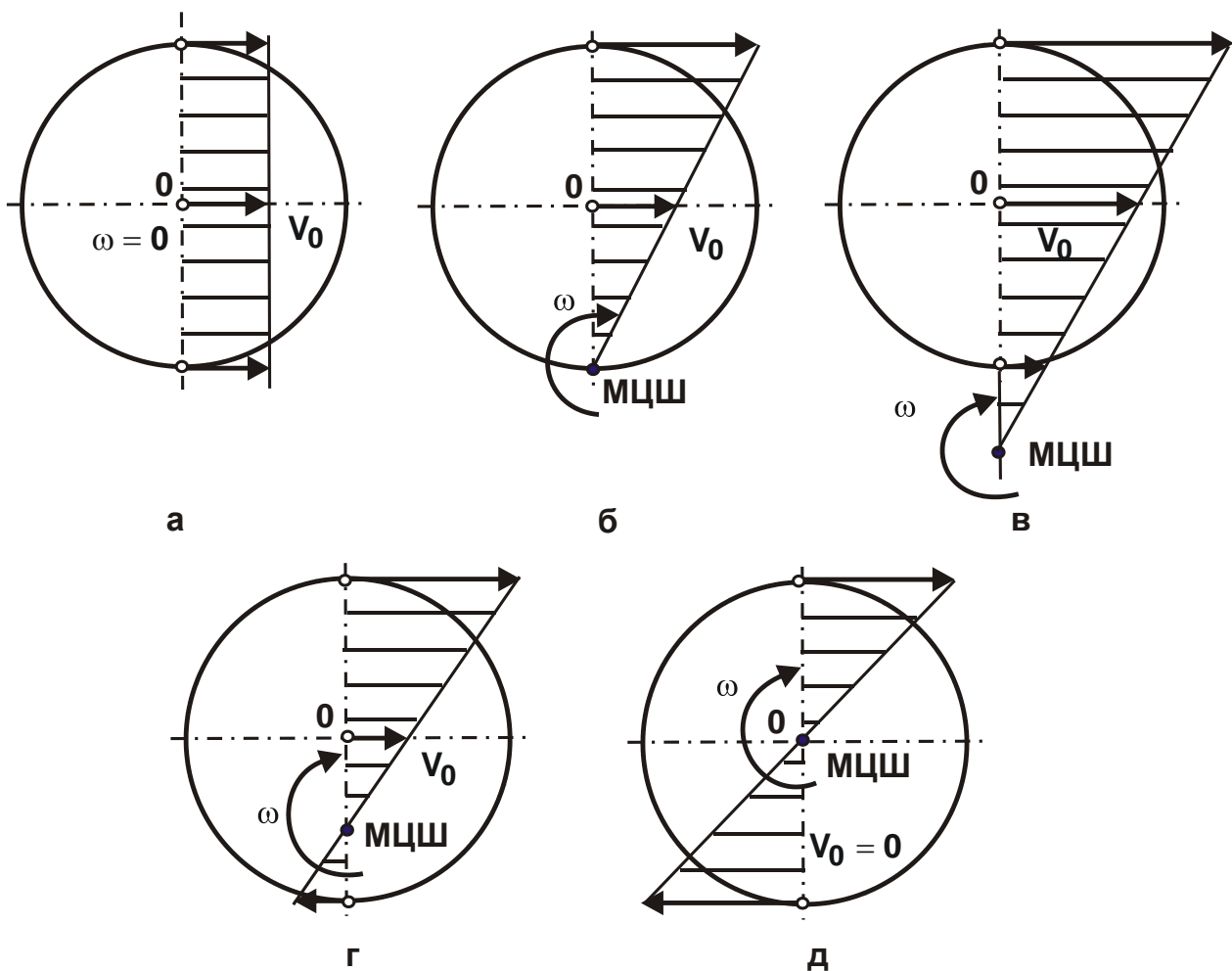


Рисунок 5.16 – Положення миттєвого центра швидкостей і графіки швидкостей точок

Приклад 5.6. Колесо радіуса R котиться без ковзання на прямолінійній рейці, швидкість його центру O дорівнює 2 м/с (рис. 5.17). Знайти швидкість кінців вертикального і горизонтального діаметрів колеса.

Рішення. Оскільки колесо котиться без ковзання, швидкість точки D дотику колеса із рейкою дорівнює нулю. Отже, ця точка D – миттєвий центр швидкості колеса.

Знаючи швидкість точки O , знаходимо кутову швидкість ω колеса:

$$\omega = \frac{V_0}{OD} = \frac{V_0}{R}.$$

На підставі властивостей миттєвого центру швидкостей визначимо модулі швидкостей точок A , B і C колеса:

$$V_A = \omega \cdot AD = \frac{V_0}{R} \cdot R \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с};$$

$$V_B = \omega \cdot BD = \frac{V_0}{R} \cdot 2 \cdot R = 2 \cdot 2 = 4 \text{ м/с};$$

$$V_C = \omega \cdot CD = \frac{V_0}{R} \cdot R \cdot \sqrt{2} = 2 \cdot \sqrt{2} = 2,83 \text{ м/с}.$$

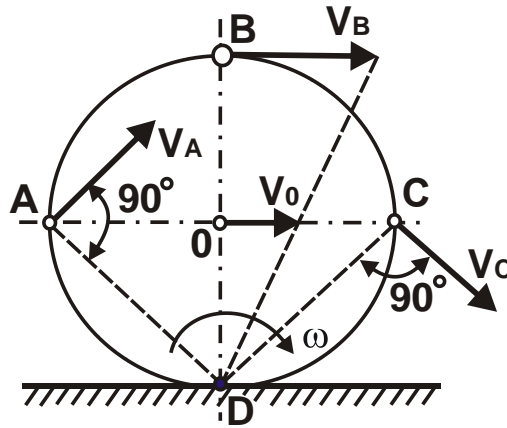


Рисунок 5.17 – Розрахункова схема швидкостей кінців вертикального і горизонтального діаметрів колеса

Напрямок векторів точок А, В і С перпендикулярний до прямої, що з'єднує ці точки із миттєвим центром швидкостей.

Основні визначення теорії механізмів і машин

Теорія механізмів і машин – це додаток законів теоретичної механіки до механізмів і машин. Теорія виникла у XVIII столітті із появою парової машини, паровоза, двигуна внутрішнього згорання тощо. Засновником теорії є професор Чебишев П. Л.

Механізм – це сукупність пов'язаних один із одним тіл, які мають певні рухи. Іншими словами, механізм – це система рухомо пов'язаних один з одним тіл, які здійснюють під дією прикладених до них сил певні, заздалегідь задані рухи.

Механізм призначено для передачі або перетворення енергії (наприклад, редуктор).

Механізми можуть мати самостійне застосування (різні пристосування для кріплення деталей та ін.), але частіше являють собою кінематичну основу машини.

Машина – це механізм або поєднання механізмів, які здійснюють певні доцільні рухи для перетворення енергії (енергетичні машини);

для зміни форми, властивостей, стану та положення предмета праці (робочі машини – верстати); для збирання, переробки і використання інформації (інформаційні машини, комп'ютери).

У машин і механізмів один або декілька органів здійснюють рухи. Це відрізняє їх від споруд – мостів, будівель тощо. Найпростішою частиною механізму є *ланка* – це тіло або незмінний стан тіл.

Дві ланки, які з'єднані між собою і допускають відносний рух, називаються *кінематичною парою* (бувають нижчі та вищі пари).

Ланки нижчих пар контактують поверхнями (поступальні, обертальні, гвинтові пари), ланки вищих пар контактують лініями і точками (зубчасті пари, підшипники кочення та ін.).

Сукупність кінематичних пар називають *кінематичним ланцюгом*.

Кінематичні пари та ланцюги можуть бути плоскими і просторовими. Механізм утворюється із кінематичного ланцюга шляхом закріплення однієї із ланок. Ця нерухома ланка називається *станиною* або *стійкою*.

Ланка, що обертається навколо нерухомої осі, називається *кривошипом*. Ланка, що гойдається навколо нерухомої осі, називається *балансиром* або *коромислом*. Ланка, що здійснює складний рух паралельно якійсь площині, називається *повзуном*.

Ланки бувають *ведучі* та *ведені*.

Прикладом механізму може бути кривошипно-шатунний механізм (КШМ), який служить для перетворення обертального руху у зворотно-поступальний рух (компресор, поршневі насоси, кривошипний прес) або, навпаки, для перетворення зворотно-поступального руху у обертальний рух (парові машини, двигун внутрішнього згорання), рис. 5.18.

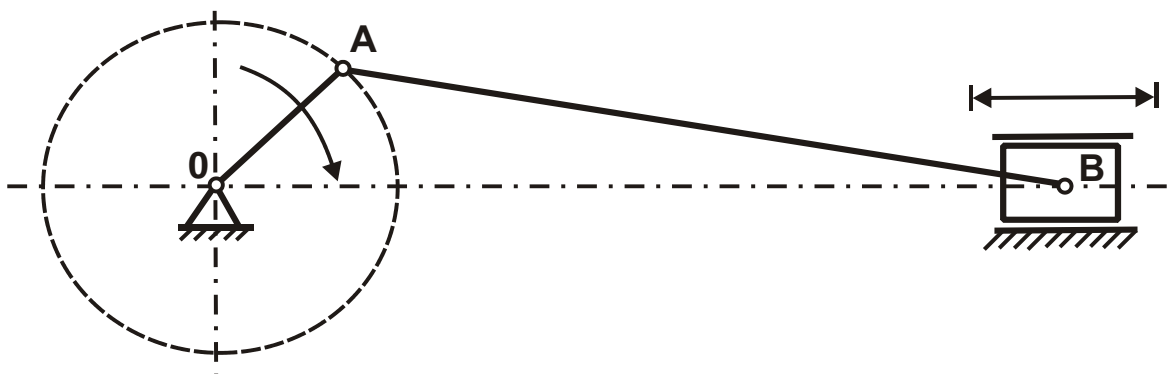


Рисунок 5.18 – Кривошипно-шатунний механізм

Кривошипно-шатунний механізм складається із 4 ланок: кривошипа ОА, шатуна АБ, повзуна В, станини і 4-х кінематичних пар: обертальної пари станина – кривошип; обертальної пари кривошип – шатун; обертальної пари шатун – повзун і поступальної пари повзун – станина.

Кривошипно-шатунний механізм є плоским, його провідною ланкою може бути кривошип або повзун.

Для перетворення обертального руху у прямолінійний рух у техніці широко використовують кулачковий механізм. Він складається із циліндричного або дискового кулачка та штовхача (повзуна), який притискається до кулачка пружиною.

На відміну від рейкової передачі або передачі гвинт-гайка, які здійснюють рівномірний рух, кулачок, обертаючись рівномірно, здатний забезпечити різні закони руху штовхача. Це залежить від профілю кулачка. У зворотний бік штовхач переміщається пружиною, вантажем, гідро- або пневмоциліндром. Кулачковий механізм широко використовують у різних технологічних машинах (особливо в автоматах та напівавтоматах), забезпечуючи виготовлення деталей за циклом: швидке підведення – повільний робочий хід – витримка (зупинка штовхача) – швидке відведення (інструменту, столу та ін.).

Для зображення схем механізмів та їх складових частин (ланок та кінематичних пар) користуються стандартними умовними позначеннями (рис. 5.19, рис. 5.20).

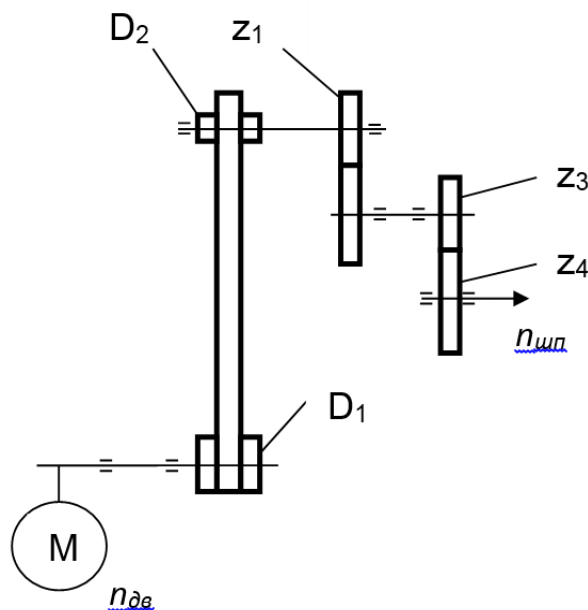


Рисунок 5.19 – Приклад кінематичного ланцюга

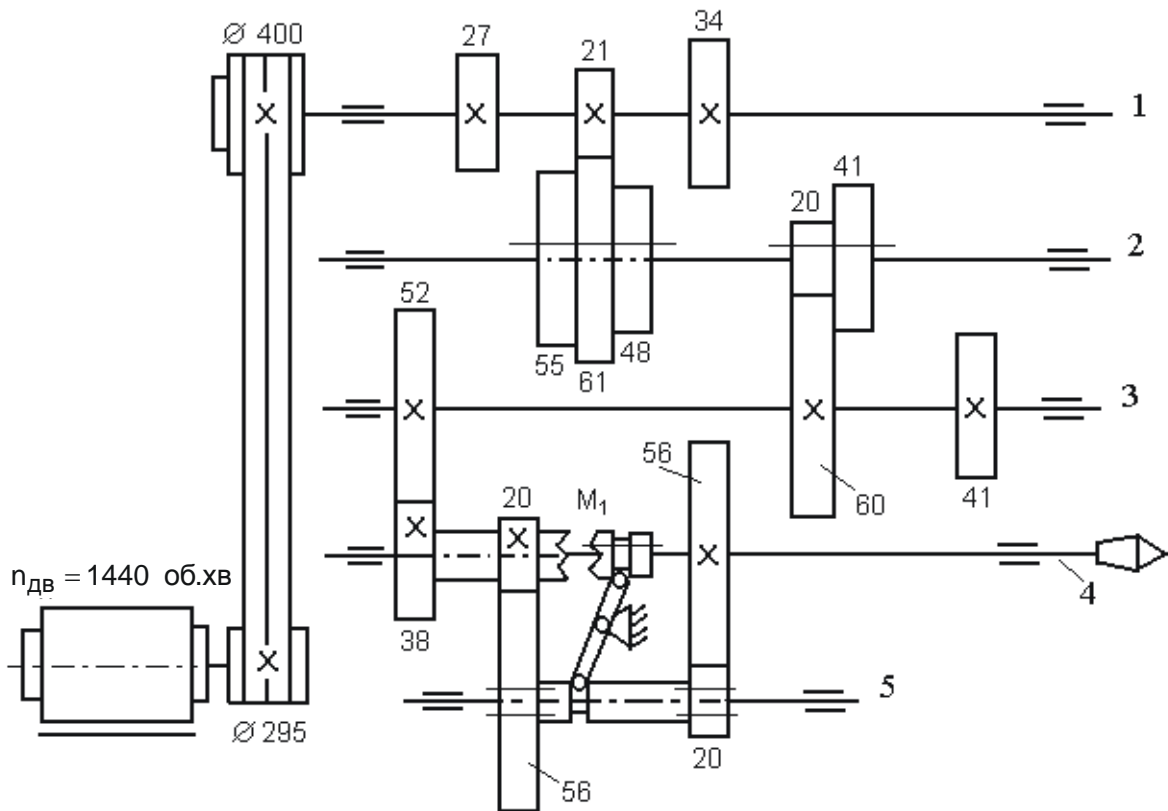


Рисунок 5.20 – Кінематична схема дванадцятиступінчастої коробки швидкостей металорізального верстата

Для розрахунку всіх частот обертання шпинделя металорізального верстата $n_{\text{шп}}$ складається рівняння кінематичного ланцюга. Воно представляє собою добуток частоти обертання привідного електродвигуна $n_{\text{дв}}$ на відношення діаметрів вхідного валу коробки швидкостей та валу електродвигуна, на коефіцієнт корисної дії коробки швидкостей та на передавальні відношення всіх послідовних передач від електродвигуна до шпинделя металорізального верстата.

Приклад розрахунку частот обертання. На рис 5.20 наведено значення частоти обертання електродвигуна $n_{\text{дв}}$, діаметрів вхідного валу коробки швидкостей та валу електродвигуна, швидкостей зубчастих коліс для всіх ступеней передач. Коефіцієнт корисної дії прийнято рівним 0,98.

$$n_{\text{шп}} = 1440 \times \frac{295}{400} \times 0,98 \times \frac{21}{61} \times \frac{20}{60} \times \frac{52}{38} \times \frac{20}{56} \times \frac{20}{56} = 20,85 \text{ хв}^{-1}.$$

Отже, завдяки застосуванню коробки швидкостей у даному випадку досягнуто зменшення частоти обертання шпинделя металорізального верстата $n_{\text{шп}}$ у $1440 / 20,85 = 69$ разів.

Порядок виконання роботи

Кожен студент отримує у викладача свої варіанти завдань за темою заняття. На їх основі необхідно розв'язати задачу із визначення відстані, швидкості, прискорення під час руху точки за заданою траєкторією та зробити висновки.

Завдання 5.1. Точка із початку рівноприскореного руху зі стану спокою уздовж прямої через 5 с придбала швидкість $V = 10$ м/с. Із цього моменту точка почала рухатися по колу із радіусом $r = 50$ м і за перші 15 с здійснювала рівномірний рух, потім протягом 10 с рухалася рівносповільнено до зупинки.

Визначити: 1) середню швидкість руху точки на всьому шляху; 2) значення повного прискорення точки через 5 с після початку рівносповільненого руху.

Завдання 5.2. За заданим рівнянням пройденого тілом шляху $S = 5t^2 + 2t + 4$ побудувати графік залежності швидкості від часу за перші 3 с.

Визначити: 1) шлях, пройдений тілом за цей час; 2) прискорення тіла через 10 с після початку його руху.

Завдання 5.3. Шків діаметром $d = 400$ мм протягом 10 с обертася із постійною кутовою швидкістю $\omega_0 = 8$ рад/с. Потім почав обертатися рівноприскорено і через 12 с рівноприскореного обертання його кутова швидкість досягла $\omega_0 = 14$ рад/с.

Визначити: 1) число обертів і середню кутову швидкість за весь час обертання; 2) окружну швидкість точок, розташованих на ободі шківа, через 6 с після початку рівноприскореного руху.

Завдання 5.4. Точка почала рухатися рівноприскорено із стану спокою по колу радіусом $r = 100$ м і через 10 с її швидкість стала рівною $V = 20$ м/с. Із цього моменту точка 15 с рухалася одночасно по колу, після чого почала рухатися уздовж прямої і через 5 с рівносповільненого руху уздовж прямої зупинилася.

Визначити: 1) середню швидкість руху точки на всьому шляху; 2) значення повного прискорення точки через 5 с після початку руху.

Завдання 5.5. Вал діаметром $d = 500$ мм протягом 5 с обертася із постійною кутовою швидкістю $\omega = 20$ рад/с, після чого сповільнив своє обертання із постійним кутовим прискоренням. Через 10 с після початку рівносповільненого обертання кутова швидкість вала стала $\omega_1 = 5$ рад/с.

Визначити: 1) число обертів і середню кутову швидкість вала за весь час обертання; 2) окружну швидкість точок, розташованих на поверхні вала, через 4 с після початку рівносповільненого обертання.

Завдання 5.6. Тіло, сповільнюючи обертання із постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2$, через 14 с зменшило свою кутову швидкість до величини $\omega = 12 \text{ рад/с}$, після чого оберталося рівномірно із цієї кутовою швидкістю протягом 10 с.

Визначити: 1) число обертів і середню кутову швидкість за весь час обертання; 2) окружну швидкість точок тіла, розташованих на відстані $r = 1 \text{ м}$ від його вісі обертання за 4 с до початку рівномірного обертання.

Завдання 5.7. Перші 5 с точка рухалася рівномірно по колу радіусом $r = 50 \text{ м}$ зі швидкістю $V = 20 \text{ м/с}$. У наступні 10 с, рухаючись рівносповільнено по тому ж колу, зменшила свою швидкість до 10 м/с і з цією швидкістю точка почала рівносповільнено рухатися уздовж прямої до повної зупинки.

Визначити: 1) середню швидкість руху точки на всьому шляху; 2) повне прискорення точки після початку рівносповільненого руху.

Завдання 5.8. Тіло, сповільнюючи обертання із постійним кутовим прискоренням $\varepsilon = 2 \text{ рад/с}^2$, через 14 с зменшило свою кутову швидкість до величини $\omega = 12 \text{ рад/с}$, після чого оберталося рівномірно із цієї кутовою швидкістю протягом 10 с.

Визначити: 1) число обертів і середню кутову швидкість за весь час обертання; 2) окружну швидкість точок тіла, розташованих на відстані $r = 1 \text{ м}$ від його вісі обертання за 4 с до початку рівномірного обертання.

Завдання 5.9. Перші 5 с точка рухалася рівномірно по колу із радіусом $r = 50 \text{ м}$ зі швидкістю $V = 20 \text{ м/с}$. У наступні 10 с, рухаючись рівносповільнено по тому ж колу, зменшила свою швидкість до 10 м/с і з цією швидкістю точка почала рівносповільнено рухатися уздовж прямої до повної зупинки.

Визначити: 1) середню швидкість руху точки на всьому шляху; 2) повне прискорення точки після початку рівносповільненого руху.

Завдання 5.10. Ротор діаметром $d = 200 \text{ мм}$ почав обертання із стану спокою із постійним кутовим прискоренням $\omega = 4 \text{ рад/с}^2$ і через деякий час досяг кутової швидкості $\omega = 40 \text{ рад/с}$, після чого із цієї кутовою швидкістю здійснив 510 обертів.

Визначити: 1) число обертів і середню кутову швидкість за весь час обертання; 2) окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 8 с після початку обертання; 3) час руху ротора із постійним кутовим прискоренням та час руху із постійною кутовою швидкістю.

Завдання 5.11. Точка, рухаючись прямолінійно і рівноприскорено із стану спокою, пройшла шлях у 100 м і набула швидкість $V = 20$ м/с. Із цією швидкістю точка продовжувала прямолінійний рух протягом 5 с. Після цього точка почала рухатися по колу із радіусом $r = 40$ м і 20 с рухалася рівносповільнено до повної зупинки.

Визначити: 1) середню швидкість руху точки на всьому шляху; 2) повне прискорення точки через 10 с після початку її рівносповільненого руху по колу.

Завдання 5.12. Двигун, ротор якого обертася із частотою 430 об./хв, був відключений від джерела живлення і через 40 с знову підключений до джерела живлення. За цей час під час рівносповільненого обертання ротора його кутова швидкість зменшилася до 5 рад/с. Після подачі живлення ротор двигуна, обертаючись рівноприскорено, через 10 с знову придбав частоту обертання 430 об./хв.

Визначити: 1) число обертів і середню кутову швидкість за весь час рівносповільненого і рівноприскореного обертання ротора двигуна; 2) окружну швидкість точок, розташованих на поверхні ротора, через 30 с після відключення джерела живлення, якщо діаметр ротора дорівнює 200 мм.

Звіт по роботі

Звіт складається із основних понять кінематики точки, найпростіших рухів твердого тіла, складного руху точки і плоскопаралельного руху твердого тіла та розв'язку заданих задач.

Література [9 –11, 13, 14, 16, 19, 20].

Питання для самоконтролю

1. У кінематиці вивчаються рухи матеріальних точок і твердих тіл:
 - а) із урахуванням мас та без урахування сил;
 - б) із урахуванням мас та сил;
 - в) без урахуванням мас та сил;
 - г) із урахуванням сили інерції.

2. Природний спосіб задання руху точки полягає у заданні:
 - а) траєкторії та рівняння руху;
 - б) умови рівняння сил, діючих на точку;
 - в) швидкості та прискорення руху;
 - г) сили інерції.
3. Швидкість точки дорівнює:
 - а) добутку миттєвої кутової швидкості на відстань точки від миттєвого центра швидкостей;
 - б) відношенню миттєвої кутової швидкості та відстані точки від миттєвого центра швидкостей;
 - в) першій похідній кутового переміщення;
 - г) другій похідній кутового переміщення.
4. Під час прямолінійного руху прискорення визначається:
 - а) зміною швидкості за одиницю часу;
 - б) нормальним прискоренням;
 - в) дотичним та нормальним прискоренням;
 - г) сумою дотичного та нормального прискорення.
5. Рівноприскорений рух характеризується:
 - а) додатним значенням прискорення;
 - б) від'ємним значенням прискорення;
 - в) додатним значенням швидкості;
 - г) від'ємним значенням швидкості.
6. Рівнозмінний рух характеризується:
 - а) постійною швидкістю;
 - б) постійним прискоренням;
 - в) змінним позитивним прискоренням;
 - г) змінним від'ємним прискоренням.
7. Рівносповільнений рух характеризується:
 - а) додатним значенням прискорення;
 - б) від'ємним значенням прискорення;
 - в) додатним значенням швидкості;
 - г) від'ємним значенням швидкості.
8. Кутове переміщення ϵ :
 - а) функцією часу;
 - б) функцією швидкості;
 - в) функція частоти обертання тіла;
 - г) функцією прискорення.

9. Чому дорівнює абсолютна швидкість точки?
а) сумі відносної і переносної швидкостей;
б) за модулем і напрямом відносній швидкості;
в) за модулем і напрямом переносній швидкості;
г) за модулем і напрямом діагоналі паралелограма, побудованого на переносній і відносній швидкостях.

10. Плоскопаралельний рух вивчають на основі:
а) розкладання плоскопаралельного руху на поступальний і обертальний рухи;
б) розкладання обертального руху на відносний і переносний рухи;
в) розкладання плоскопаралельного руху на дві взаємоперпендикулярні проекції;
г) закономірностей прямолінійного рівномірного руху.

11. Що таке полюс?

- а) точка, навколо якої відбувається відносний обертальний рух;
- б) точка, навколо якої відбувається відносний поступальний рух;
- в) точка, навколо якої відбувається плоскопаралельний рух;
- г) точка, навколо якої відбувається абсолютний рух.

12. Миттєвий центр швидкостей – це точка плоскої фігури, швидкість якої в даний момент часу:

- а) дорівнює нулю;
- б) максимальна;
- в) визначається добутком переміщення та часу;
- г) визначається відношенням кутової швидкості та відстані до точки обертання фігури.

13. Де знаходиться положення миттєвого центра швидкостей у разі повного буксування колеса?

- а) у точці дотику колеса із площиною, на якій він котиться;
- б) у центрі колеса;
- в) у верхній частині колеса;
- г) на безмежній відстані від центра колеса.

14. Кривошипно-повзучий механізм складається із:

- а) кривошипа, шатуна, повзуна, ведучого колеса;
- б) кривошипа, балансира, повзуна, ведучого колеса;
- в) кривошипа, шатуна, повзуна, станини;
- г) кривошипа, шатуна, повзуна, зубчастого колеса.

Робота 6. Основні аксіоми динаміки. Робота та механічна потужність під час поступального й обертального рухів. Теореми динаміки

Мета роботи – вивчення основних понять, аксіом і теорем динаміки, роботи і механічної потужності під час поступального й обертального рухів та навчити студентів розв'язувати задачі із визначення законів руху тіла за допомогою теорем динаміки.

Загальні відомості

Основні аксіоми динаміки

Динаміка – частина теоретичної механіки, у якій вивчаються рухи матеріальних точок і твердих тіл із урахування їх мас і сил, що діють на них. Отже, основним завданням динаміки є вивчення загальних законів руху матеріальних точок і твердих тіл із урахуванням причин, що їх викликають.

Основу динаміки складають чотири аксіоми.

1. *Принцип інерції*: матеріальна точка перебуває у рівновазі, тобто у стані спокою, або рухається прямолінійно й рівномірно, якщо рівнодіюча всіх сил дорівнює нулю (рис. 6.1):

$$\vec{F}_{\Sigma} = \sum \vec{F}_i = 0.$$

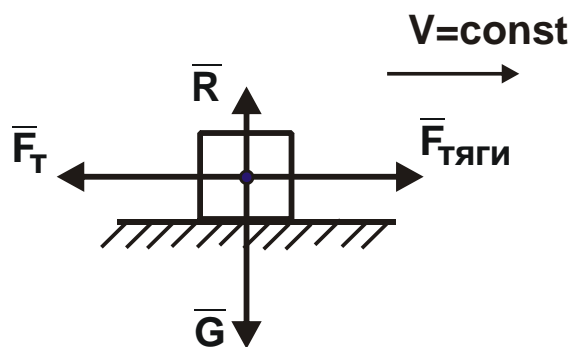


Рисунок 6.1 – Стан спокою

2. *Основний закон динаміки (другий закон Ньютона)*: прискорення, яке отримує тіло під дією деякої сили, прямо пропорційне величині цієї сили і направлене уздовж її лінії (рис. 6.2):

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m}$$

або

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a}$$

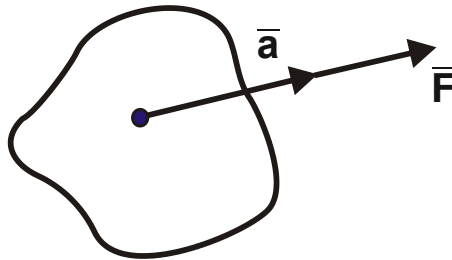


Рисунок 6.2 – Напрямок прискорення тіла

3. *Принцип незалежності дії сил*: прискорення, яке отримує тіло під дією декількох сил, буде таким самим, як і прискорення, яке отримує тіло під дією однієї сили, що дорівнює геометричній сумі цих сил (рис. 6.3):

$$\bar{a} = \frac{\bar{F}}{m} = \sum \frac{\bar{F}_i}{m}$$

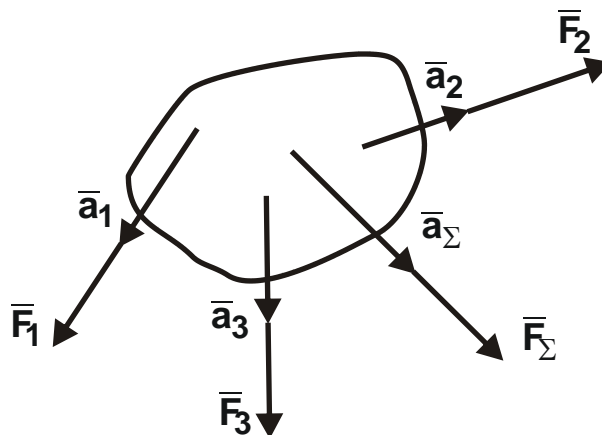


Рисунок 6.3 – Напрямок прискорення тіла під дією декількох сил

4. *Принцип дії й протидії*: сили, із якими два тіла діють один на одного, рівні за величиною, протилежні за напрямом та знаходяться на одній прямій (рис. 6.4):

$$|\bar{F}_1| = -|\bar{F}_2|$$

Звідки

$$|m_1 \cdot \bar{a}_1| = -|m_2 \cdot \bar{a}_2|;$$
$$\left| \frac{\bar{a}_1}{\bar{a}_2} \right| = -\left| \frac{m_2}{m_1} \right|.$$

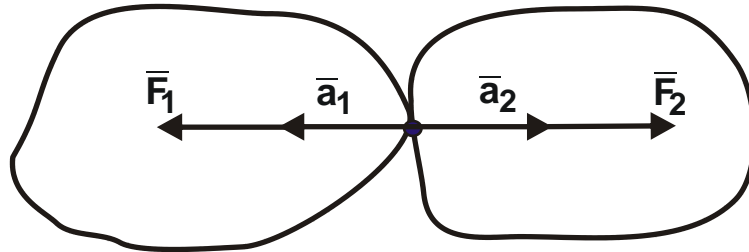


Рисунок 6.4 – Дія та протидія тіл

Отже, виходячи із наведеної формули, прискорення, які отримано тілами під час їхньої взаємодії, обернено пропорційні їхнім масам.

Слід зазначити, що під час руху тіла із прискоренням на нього завжди діє сила інерції.

Сила інерції

Сила інерції – це сила, чисельно рівна добутку маси тіла на прискорення й спрямована завжди в протилежний прискоренню бік (рис. 6.5):

$$\bar{F}_{iH} = -m \cdot \bar{a}.$$

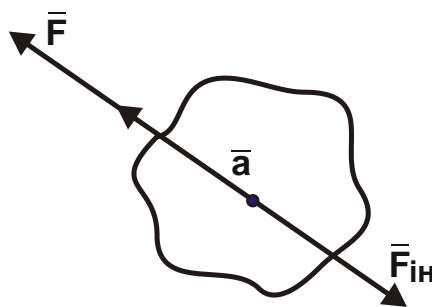


Рисунок 6.5 – Напрямок сили інерції

Під час поступального руху тіла сила інерції виникає завдяки до-
точному прискоренню (рис. 6.6):

$$\bar{F}_{iH} = -m \cdot \bar{a}_t.$$

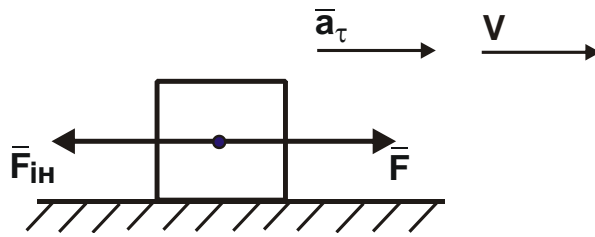


Рисунок 6.6 – Напрямок дії сили інерції під час поступального руху

Під час руху за криволінійною траєкторією сила інерції виникає завдяки нормальному прискоренню (рис. 6.7):

$$\bar{F}_{iH} = -m \cdot \bar{a}_H.$$

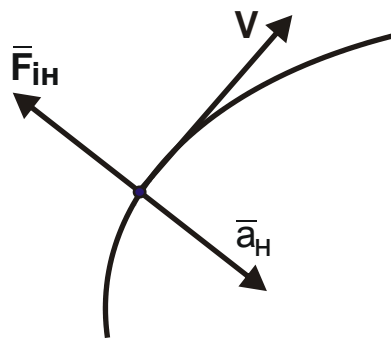


Рисунок 6.7 – Напрямок дії сили інерції під час криволінійного руху

Принцип Даламбера: матеріальна точка перебуває у рівновазі, якщо алгебраїчна сума проєкцій всіх діючих сил і сил інерції дорівнює нулю.

Рівняння кінетостатики:

$$\Sigma(F_i + F_{iH})_y = 0.$$

Приклад 6.1. Вантаж масою 900 кг, підвішений на тросі, опускається вертикально вниз із прискоренням 2 м/с^2 . Знайти натяг троса, зневажаючи його власною масою.

Дано:

$$m = 900 \text{ кг}$$

$$a_\tau = 2 \text{ м/с}^2$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

Знайти: F_H

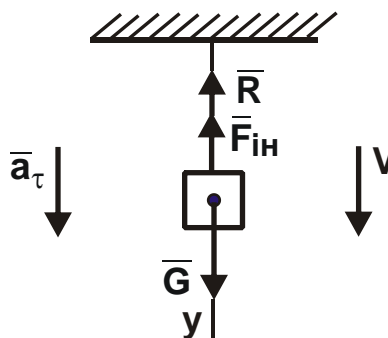


Рисунок 6.8 – Розрахунково-силова схема

Рішення. 1. На рис. 6.8 графічно подано розрахунково-силову схему, на якій показано всі сили, що діють на тіло, що рухається: силу тяжіння $G = m \cdot g$, силу натягу троса $F_H = |R|$ і силу інерції $F_{iH} = m \cdot a_\tau$.

Показано вісь координат y , уздовж якої відбувається рух тіла.

2. Складемо рівняння кінетостатики та вирішимо його відносно невідомої величини – сили натягу троса F_H :

$$\sum (F_1 + F_{iH})_y = 0,$$

тоді

$$G - F_{iH} - R = 0.$$

Після підстановки у отримане рівняння всіх виразів для визначення сил, які діють на тіло, що рухається, маємо:

$$m \cdot g - m \cdot a_\tau - F_H = 0.$$

Звідки визначено силу натягу троса F_H :

$$F_H = m \cdot g - m \cdot a_\tau = m \cdot (g - a_\tau) = 900 \cdot (10 - 2) = 7200 \text{ Н.}$$

Як видно, сила натягу троса F_H менше сили тяжіння $G = m \cdot g$, що пов'язано із дією сили інерції F_{iH} , яка теж менше сили тяжіння $G = m \cdot g$.

Приклад 6.2. Автомобіль із масою 1600 кг рухається через міст із постійною швидкістю 90 км/г. Визначити силу тиску автомобіля на міст, якщо $r = 500$ м.

Дано:

$$m = 1600 \text{ кг;}$$

$$V = 90 \text{ км/г} = 25 \text{ м/с;}$$

$$r = 500 \text{ м;}$$

$$g = 10 \text{ м/с}^2$$

Знайти: F_T

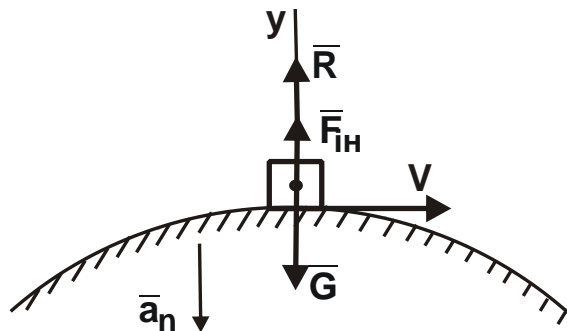


Рисунок 6.9 – Розрахунково-силова схема

Рішення. 1. На рис. 6.9 графічно зображено розрахунково-силову схему, на якій показано всі сили, які діють на тіло, що рухається: силу тяжіння $G = m \cdot g$, силу тиску автомобіля $F_T = |R|$ та силу інерції $F_{iH} = m \cdot a_H = m \cdot V^2 / r$, де $a_H = V^2 / r$.

2. Складемо рівняння кінетостатики та вирішимо його відносно невідомої величини – сили тиску автомобіля F_T :

$$\sum(F_1 + F_{iH})_y = 0,$$

тоді

$$-G + F_{iH} + R = 0.$$

Після підстановки у отримане рівняння всіх виразів для визначення сил, які діють на тіло, що рухається, маємо:

$$-m \cdot g + \frac{m \cdot v^2}{r} + F_T = 0.$$

Звідки визначено силу тиску автомобіля F_T :

$$F_T = m \cdot g - \frac{m \cdot v^2}{r} = 1600 \cdot 10 - 1600 \cdot \frac{25^2}{500} = 14000 \text{ Н} = 14 \text{ кН}.$$

Робота під час поступального й обертального рухів

Визначимо роботу постійної сили під час поступального руху, включаючи роботу сили тяжіння, сили пружності та сили тертя.

Якщо на матеріальну точку M діє постійна сила F , яка направлена під деяким кутом α до напрямку переміщення матеріальної точки M (рис. 6.10), то робота W цієї постійної сили під час поступального руху визначається за формулою:

$$W = R \cdot S = F \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

де N і R – складові сили F , Н;

S – переміщення матеріальної точки M , м.

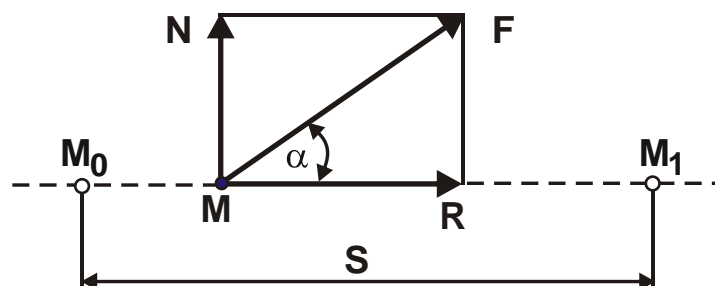


Рисунок 6.10 – Прямолінійний рух точки

Отже, робота сили F дорівнює добутку її модуля на переміщення і на косинус кута α між напрямом сили і напрямом переміщення. Тобто, робота є мірою дії сили, прикладеної до матеріальної точки за деякому її переміщенні.

Слід зазначити, що робота – величина скалярна.

За умови $\alpha = 0^\circ$ робота $W = F \cdot S$ позитивна; за умови $\alpha = 90^\circ$ робота $W = 0$; за умови $\alpha = 180^\circ$ робота $W = -F \cdot S$ негативна. Наприклад, під час підйому тіла вгору робота сили тяжіння негативна, під час руху вниз – позитивна, а під час руху вздовж горизонтальної площини робота сили тяжіння дорівнює нулю.

Сили, що здійснюють позитивну роботу, називаються *рушійними силами*, а сили, що здійснюють негативну роботу, називаються *силами опору*.

Одиниця роботи:

$$[W] = [F][S] = \text{сила} \times \text{довжину} = \text{Ньютон} \times \text{метр} = \text{Джоуль (Дж)}$$

Джоуль – це робота сили в один Ньютон на шляху в один метр (за умови збігу напрямів сили і переміщення точки, на яку діє сила).

Визначимо роботу сили тяжіння.

Теорема. Робота сили тяжіння не залежить від виду траєкторії та дорівнює добутку модуля сили на вертикальне переміщення точки її дії:

$$W = G \cdot h,$$

де G – сила тяжіння, Н;

h – переміщення, м.

Сили, робота яких не залежить від виду траєкторії, називаються *потенційними*. Це сила тяжіння, сила всесвітнього тяжіння, натяг пружини.

Робота сили пружності дорівнює добутку сили пружності F_y на величину деформації x (рис. 6.11):

$$W = F_y \cdot x = \frac{k \cdot x^2}{2},$$

де k – коефіцієнт жорсткості матеріалу.

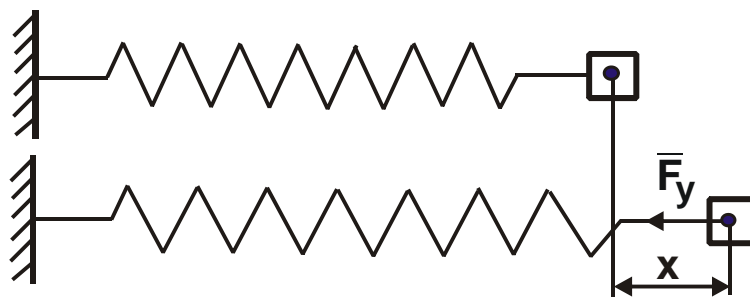


Рисунок 6.11 – Розрахункова схема визначення роботи сили пружності

Визначимо роботу сили тертя, виходячи з умови, що *сила тертя* – це величина, що виникає у результаті взаємодії двох поверхонь, які труться. Для цього розглянемо два випадки:

а) тіло рухається горизонтально під дією сили тяги $\bar{F}_{\text{тяги}}$ (рис. 6.12).

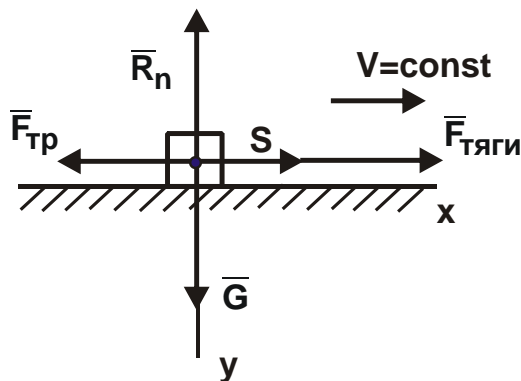


Рисунок 6.12 – Робота сили тертя під час горизонтального руху

На тіло діє сила тяжіння G , сила нормального тиску R_n і сила тертя $F_{\text{тр}} = R_n \cdot f$, де f – коефіцієнт тертя ковзання, величина якого залежить від властивостей поверхонь, що труться.

Для визначення сили тертя $F_{\text{тр}} = R_n \cdot f$ складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iy} = 0,$$

тоді

$$R_n - G = 0.$$

Звідки

$$R_n = G = m \cdot g.$$

Після вирішення наведених рівнянь, отримано $F_{\text{тр}} = m \cdot g \cdot f$. Відповідно, робота сили тертя W дорівнює:

$$W = -F_{\text{тр}} \cdot S = -m \cdot g \cdot f \cdot S.$$

б) тіло рухається на похилій площині (рис. 6.13).

Робота сили тертя дорівнює:

$$W = -F_{\text{тр}} \cdot S = -m \cdot g \cdot f \cdot S \cdot \cos \alpha.$$

Для визначення сили тертя $F_{\text{тр}}$ складемо рівняння рівноваги:

$$\sum F_{iy} = 0,$$

тоді

$$R_n - G \cdot \cos \alpha = 0.$$

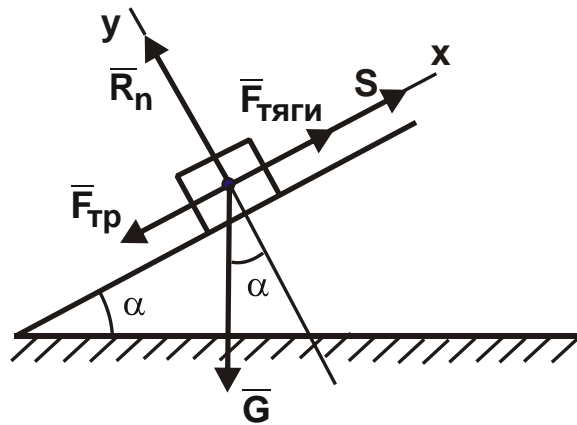


Рисунок 6.13 – Робота сили тертя під час руху на похилій площині

Звідки

$$R_n = G \cdot \cos \alpha = m \cdot g \cdot \cos \alpha .$$

Відповідно, сила тертя дорівнює:

$$F_{\text{тр}} = R_n \cdot f = m \cdot g \cdot \cos \alpha \cdot f .$$

Як видно, сила тертя F_T залежить від маси тіла m , коефіцієнта тертя f та кута нахилу α похилої площини. Чим більше кут нахилу α , тим менше сила тертя $F_{\text{тр}}$.

Робота постійної сили під час обертального руху тіла

За умови співпадіння за напрямом сили і переміщення робота W дорівнює половині добутку сили F на величину переміщення S :

$$W = \frac{F \cdot S}{2} .$$

Робота постійної сили, прикладеної до тіла, що обертається, дорівнює добутку обертального моменту $T = M_z(F)$; $M_z(F) = F_1 \cdot R$ на кутове переміщення φ :

$$W = T \cdot \varphi ,$$

де F_1 – окружна сила, Н;

R – радіус тіла (диска), що обертається, м.

Механічна потужність під час поступального й обертального рухів

Поряд із поняттям роботи, у механіці існує поняття потужності, що характеризує швидкість виконання роботи. Тому *потужність сили* – це робота, яка виконана за одиницю часу; позначається P .

Потужність під час поступального руху. За умови рівномірного здійснення роботи потужність визначається:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Зі збігом напрямів сили та переміщення потужність визначається:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{F \cdot s}{t} = F \cdot V.$$

Потужність сили дорівнює добутку модуля сили на швидкість переміщення точки її дії.

Одиниця потужності:

$$[P] = \frac{[W]}{[t]} = \frac{\text{робота}}{\text{час}} = \text{Джоуль за секунду} = \text{Ват (Вт)}.$$

Потужність під час обертального руху. За умови рівномірного здійснення роботи під час обертального руху тіла потужність сили визначається:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{T \cdot \varphi}{t} = T \cdot \omega.$$

Як видно, у цьому випадку потужність сили дорівнює добутку обертаючого моменту $T = M_z(F)$ і кутової швидкості ω .

Коефіцієнт корисної дії (к. к. д.) машин і механізмів

Відношення корисної роботи (або потужності) до витраченої роботи (або потужності) визначає *коефіцієнт корисної дії*:

$$\eta = \frac{W_k}{W_B} = \frac{P_k}{P_B}.$$

Коефіцієнт корисної дії може змінюватися у межах 0 ... 1 або у межах 0 ... 100 %. Зі збільшенням коефіцієнта корисної дії підвищується ефективність роботи машини.

Якщо коефіцієнт корисної дії враховує лише механічні втрати, то це *механічний коефіцієнт корисної дії*.

За умови послідовного з'єднання механізмів *загальний коефіцієнт корисної дії* η дорівнює добутку коефіцієнтів корисної дії всіх механізмів:

$$\eta = \eta_1 \cdot \eta_2 \cdot \eta_3 \cdot \dots \cdot \eta_n,$$

де $\eta_1, \eta_2, \eta_3, \dots, \eta_n$ – к. к. д. кожного механізму окремо.

Як приклад, визначимо к. к. д. шорсткої похилої площини із кутом підйому α , коли тіло силою тяжіння G рівномірно піднімається на цій площині на висоту h під дією горизонтальної сили F .

Якщо шлях, пройдений тілом, позначити S , то корисна робота визначається залежністю:

$$W_K = G \cdot h = G \cdot S \cdot \sin \alpha,$$

а витрачена робота – залежністю:

$$W_B = F \cdot S \cdot \cos \alpha = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \cdot S \cdot \cos \alpha,$$

оскільки

$$F = G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi).$$

Тоді

$$\eta = \frac{W_K}{W_B} = \frac{G \cdot S \cdot \sin \alpha}{[G \cdot \operatorname{tg}(\alpha + \varphi) \cdot S \cdot \cos \alpha]} = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)}.$$

Отже, к. к. д. похилої площини, коли рушійна сила горизонтальна, дорівнює:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \alpha}{\operatorname{tg}(\alpha + \varphi)},$$

де α – кут нахилу похилої площини (рис. 2.5);

φ – кут тертя.

Із отриманої залежності витікає, що к. к. д. похилої площини збільшується зі збільшенням кута її нахилу α .

За такою ж формулою визначається к. к. д. під час роботи гвинта і гайки із прямокутним різьбленням (наприклад, у домкраті).

К. к. д. гвинтової пари із трапецієвидним або трикутним різьбленням визначається за формулою:

$$\eta = \frac{\operatorname{tg} \psi}{\operatorname{tg}(\psi + \varphi')},$$

де ψ – кут підйому гвинтової лінії різьблення;

φ' – умовний кут тертя.

Теорема динаміки

Кількість руху матеріальної точки

Загальні теореми динаміки матеріальної точки встановлюють залежність між зміною динамічних законів руху матеріальної точки і законів дії сил, які прикладено до цієї точки.

Кількістю руху $m \cdot V$ матеріальної точки називається вектор, рівний добутку маси m точки на її швидкість V , який має напрям швидкості. Кількість руху є динамічна міра руху матеріальної точки.

Одиниця кількості руху:

$$[m \cdot V] = [m] [V] = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Імпульсом $F \cdot t$ постійної сили F називається вектор, рівний добутку сили на час t її дії, тобто імпульс сили є міра її дії в часі.

Одиниці імпульсу сили:

$$[F \cdot t] = [F] [t] = [m] [a] [t] = (\text{кг} \cdot \text{м/с}^2) \cdot \text{с} = \text{кг} \cdot \text{м/с}.$$

Кількість руху та імпульс сили виражаються в однакових одиницях. Зв'язок між ними встановлюється на основі *теорему щодо зміни кількості руху*: зміна кількості руху матеріальної точки за деякий проміжок часу дорівнює імпульсу прикладеної до неї сили за той самий проміжок часу.

У випадку прямолінійного руху матеріальної точки під дією постійної сили F рух є *рівнозмінним*.

Швидкість руху маси m матеріальної точки визначається:

$$V = V_0 + a \cdot t$$

або

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = m \cdot a \cdot t$$

або із урахуванням того, що добуток маси m точки на її прискорення a є сила F , під дією якої точка рухається, маємо:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = F \cdot t.$$

У результаті отримано рівняння, за яким зміна кількості руху за час t дорівнює імпульсу сили за той же проміжок часу. В умовах сповільненого руху ($V < V_0$) вектор сили направлений у бік, протилежний вектору швидкості. Тому силу слід розглядати із знаком "мінус".

У разі криволінійного руху матеріальної точки під дією змінної за модулем і напрямом сили весь проміжок часу t слід розбити на нескінченно малі проміжки, у межах яких вектор сили можна вважати постійним, а шлях – прямолінійним. Тоді імпульс сили за кінцевий проміжок часу t буде дорівнювати сумі елементарних імпульсів, а вираз теореми щодо зміни кількості руху набуде вигляду:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = \int_0^t F \cdot dt.$$

Якщо до матеріальної точки прикладено декілька постійних сил, то зміна кількості руху дорівнює сумі (алгебраїчної, якщо сили діють вздовж однієї прямої, або векторної, якщо сили діють під кутом одна до одної) імпульсів даних сил:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = \sum (F_i \cdot t).$$

Перейдемо від розгляду матеріальної точки до розгляду механічної системи матеріальних точок.

Механічною системою матеріальних точок називається сукупність матеріальних точок, якимсь чином пов'язаних між собою. Всяке тверде тіло можна вважати незмінною механічною системою матеріальних точок. Сили взаємодії точок даної системи називаються *внутрішніми*. Сили, із якими діють на дану систему інші точки, що не входять у цю систему, називаються *зовнішніми*.

Центр мас, або центр інерції системи рухається як вільна матеріальна точка, маса якої дорівнює масі всієї системи і на яку діє сила, що дорівнює головному вектору всіх зовнішніх сил. Із урахуванням того, що на довільну точку системи маси m діє внутрішня $\bar{F}_{\text{вн}}$ і зовнішня \bar{F} сили, то згідно основного рівняння динаміки, маємо:

$$m \cdot \bar{a} = \bar{F}_{\text{вн}} + \bar{F}.$$

або для всієї системи:

$$\sum m \cdot \bar{a} = \sum \bar{F}_{\text{вн}} + \sum \bar{F},$$

де $\sum \bar{F}_{\text{вн}}$ – головний вектор внутрішніх сил системи, рівний нулю;

$\sum \bar{F} = \bar{R}$ – головний вектор зовнішніх сил.

Звідки

$$\sum m \cdot \bar{a} = M \cdot \bar{a}_c$$

або

$$M \cdot \bar{a}_c = \bar{R},$$

де M – маса системи;

\bar{a}_c – прискорення центра мас.

Тоді кількість руху системи визначається виразом: $\sum m \cdot \bar{V}$.

Для довільної точки системи масою m , на яку діють внутрішня $\bar{F}_{\text{вн}}$ і зовнішня \bar{F} сили (рис. 6.14), швидкість точки дорівнює V . Тоді:

$$\frac{d}{dt}(m \cdot \bar{V}) = \bar{F}_{\text{вн}} + \bar{F}.$$

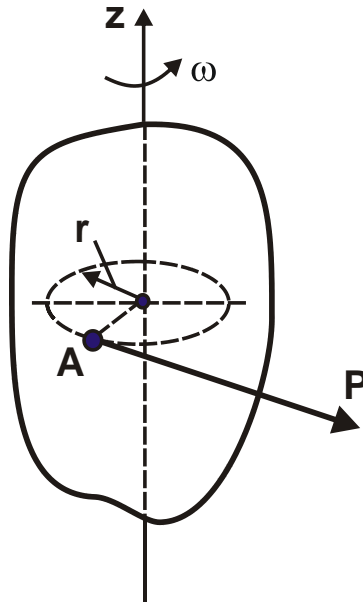


Рисунок 6.14 – Розрахункова схема визначення кінетичної енергії тіла, яке обертається

Для всієї системи маємо:

$$\frac{d}{dt}(\sum m \cdot \bar{V}) = \sum \bar{F}_{\text{вн}} + \bar{F}$$

або

$$\frac{d}{dt}(\sum m \cdot \bar{V}) = \bar{R},$$

де \bar{R} – головний вектор зовнішніх сил, що дорівнює $\sum \bar{F}$.

Головний вектор внутрішніх сил $\sum \bar{F}_{\text{вн}}$ дорівнює нулю.

Теорема щодо зміни кінетичної енергії

Механічною енергією називають енергію переміщення та взаємодії тіл. Механічна енергія буває двох видів: кінетична та потенційна.

Кінетичною енергією, або енергією руху, називають енергію, якою характеризується всяка матеріальна точка під час руху; вона є динамічною мірою руху матеріальної точки.

Кінетична енергія матеріальної точки дорівнює половині добутку маси точки на квадрат її швидкості:

$$K = \frac{m \cdot V^2}{2}.$$

Кінетична енергія – величина скалярна і завжди позитивна.

Одиниця кінетичної енергії:

$$[K] = [m \cdot v^2] = [m][v^2] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 / \text{с}^2 = (\text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2) \cdot \text{м} = \text{Н} \cdot \text{м} = \text{Дж}.$$

Кінетична енергія має розмірність роботи.

Зв'язок між кінетичною енергією і роботою встановлює *теорема щодо зміни кінетичної енергії*: зміна кінетичної енергії матеріальної точки на деякому шляху дорівнює роботі сили, прикладеної до точки, на тому ж шляху:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = W,$$

де v_0 – початкова швидкість;

W – робота сили F на шляху довжиною S .

Якщо до матеріальної точки прикладено кілька сил, то зміна кінетичної енергії дорівнює алгебраїчній сумі роботи цих сил:

$$\frac{m \cdot v^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = \sum W_i.$$

Закон збереження кінетичної енергії

Енергію взаємодії між тілами називають *потенційною*. Так, піднята на певну висоту h матеріальна точка має деяку енергію, яка називається *енергією положення* і визначає *потенційну енергію*:

$$П = G \cdot h,$$

де G – сила тяжіння.

Мірою потенційної енергії $П$ є *робота, яку здійснює точка під час вільного падіння*:

$$W = G \cdot (h_1 - h_2) = G \cdot h_1 - G \cdot h_2 = П_1 - П_2,$$

де h_1, h_2 – початкове (максимальне) та кінцеве (мінімальне) значення висот, на яких знаходилася матеріальна точка;

$П_1, П_2$ – початкове (максимальне) та кінцеве (мінімальне) значення потенційної енергії матеріальної точки.

Робота W дорівнює зміні кінетичної енергії:

$$W = \frac{m \cdot v_2^2}{2} - \frac{m \cdot v_1^2}{2} = K_2 - K_1$$

або

$$П_1 - П_2 = K_2 - K_1.$$

Отже,

$$П_1 + K_1 = П_2 + K_2$$

або

$$П + К = \text{const}.$$

Отримана рівність є матеріальним виразом *закону збереження механічної енергії*: під час руху матеріальної точки під дією однієї лише сили тяжіння сума потенційної та кінетичної енергій є величина постійна.

Кінетична енергія твердого тіла

Кінетична енергія твердого тіла дорівнює сумі кінетичних енергій матеріальних точок, які складають це тіло:

$$K = \sum \frac{m_i \cdot v_i^2}{2}.$$

Під час поступального руху твердого тіла швидкості всіх його точок однакові й дорівнюють швидкості його центру мас: $\bar{v} = \bar{v}_c$. Тоді для твердого тіла, що рухається поступально, кінетична енергія визначається:

$$K_{\text{пост}} = \frac{m \cdot v^2}{2}.$$

Як видно, під час поступального руху твердого тіла його кінетична енергія визначається за тією самою формулою, що і кінетична енергія матеріальної точки.

Під час обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі з лінійна швидкість у його довільній точці А маси m дорівнює величині $\omega \cdot r$. Тоді для твердого тіла, що обертається навколо нерухомої осі, кінетична енергія визначається:

$$K_{\text{об}} = \sum \frac{m \cdot v^2}{2} = \sum \frac{m \cdot r^2 \cdot \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \cdot \sum m \cdot r^2.$$

До цієї формули входить величина $\sum m \cdot r^2 = I_z$, яку називають *моментом інерції тіла відносно осі обертання* (питання щодо її визначення буде розглянуто далі). Виходячи із цього, кінетична енергія обертального руху твердого тіла приймає вигляд:

$$K_{\text{об}} = \frac{I_z \cdot \omega^2}{2}.$$

Отже, під час обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі, його *кінетична енергія* дорівнює половині добутку моменту інерції

тіла $I_z = \sum m \cdot r^2$ відносно вісі обертання на квадрат його кутової швидкості ω . Тоді для тіла, що рухається плоскопаралельно, кінетична енергія визначається:

$$K_{\text{пп}} = \frac{m \cdot v_C^2}{2} + \frac{I_{zC} \cdot \omega^2}{2}.$$

Отже, під час плоскопаралельного руху тіла його кінетична енергія дорівнює сумі кінетичних енергій під час поступального руху разом із центром тяжіння та обертального руху навколо центральної вісі, яка перпендикулярна основній площі.

Теорема щодо зміни кінетичної енергії системи тіл: зміна кінетичної енергії системи тіл у результаті деякого переміщення дорівнює алгебраїчній сумі всіх зовнішніх (активних і реактивних) та внутрішніх сил, які діяли на систему під час цього переміщення:

$$\sum K - \sum K_0 = \sum W.$$

Слід зазначити, що для твердого тіла сума його внутрішніх сил дорівнює нулю. Для ідеально гладких зв'язків сума робіт реакцій цих зв'язків також дорівнює нулю.

Моменти інерції тіла

У всіх питаннях динаміки, пов'язаних із обертанням тіла навколо вісі, суттєвого значення набуває специфічне поняття механіки – *момент інерції тіла відносно вісі або точки*. Виходячи із цього, важливо розглянути його сутність і встановити аналітичні залежності для його визначення.

Розглянемо тверде тіло масою M (рис. 6.15).

Виділимо у цьому тілі об'ємний елемент із масою dm . Відстань цього елемента до вісі z позначимо через r .

Моментом інерції тіла відносно вісі z – осьовим моментом інерції I_z – називається інтеграл від добутку елементарної маси dm на квадрат відстані r елементарної частинки до вісі:

$$I_z = \int r^2 \cdot dm.$$

(M)

Наведений інтеграл поширюється за всією масою тіла.

Розмірність моменту інерції у системі СІ – $\text{м}^2 \cdot \text{кг}$; одиниця вимірювання – кілограм-метр у квадраті.

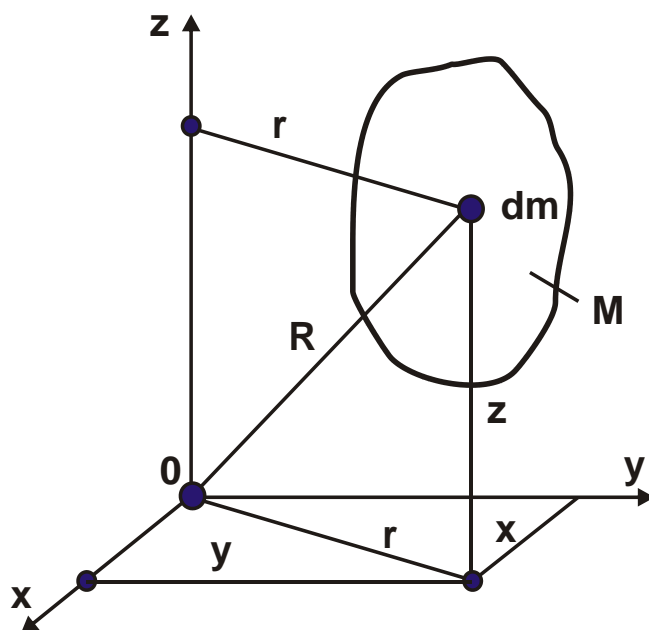


Рисунок 6.15 – Розрахункова схема визначення моменту інерції тіла

Моментом інерції тіла відносно заданого центру O – полярним моментом інерції I_0 – називається інтеграл від добутку елементарної маси dm на квадрат відстані R до заданого центру O :

$$I_0 = \int_{(M)} R^2 \cdot dm.$$

Виходячи із рис. 6.15, отримано:

$$r^2 = x^2 + y^2,$$

тому

$$I_z = \int_{(M)} (x^2 + y^2) \cdot dm;$$

$$I_x = \int_{(M)} (y^2 + z^2) \cdot dm;$$

$$I_y = \int_{(M)} (x^2 + z^2) \cdot dm.$$

Виходячи із рис. 6.15, також маємо:

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Тоді

$$I_0 = \int_{(M)} (x^2 + y^2 + z^2) \cdot dm.$$

Після перетворень наведених залежностей отримано залежність, що встановлює зв'язок між полярним моментом I_0 і осьовими моментами інерції I_x , I_y , I_z :

$$I_0 = \frac{1}{2} \cdot (I_x + I_y + I_z).$$

Якщо тіло має форму плоскої тонкої пластинки, товщиною якої можна нехтувати, то моменти інерції такої плоскої матеріальної фігури розраховують у системі координатних вісей xOy , які розташовані у площині фігури (рис. 6.16).

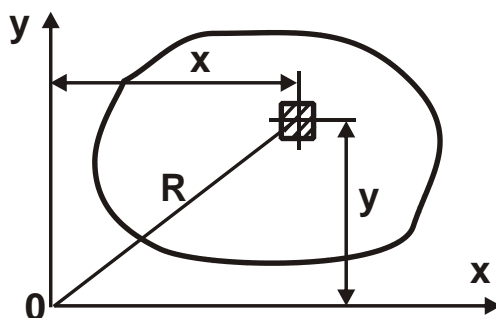


Рисунок 6.16 – Розрахункова схема визначення моменту інерції плоскої матеріальної фігури

У цьому випадку

$$I_x = \int_{(M)} y^2 \cdot dm;$$

$$I_y = \int_{(M)} x^2 \cdot dm.$$

Оскільки

$$R^2 = x^2 + y^2,$$

то

$$I_0 = I_x + I_y.$$

Обертальний рух твердого тіла. Диференціальне рівняння обертального руху твердого тіла навколо нерухомої осі

Розглянемо тверде тіло, що обертається навколо осі z із кутовою швидкістю ω і кутовим прискоренням ε під дією системи сил F_1 , F_2 , F_3 , F_4 (рис. 6.17).

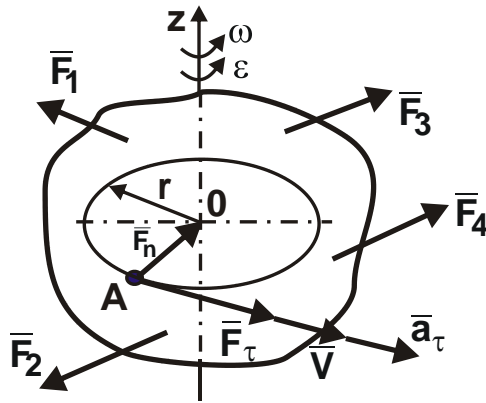


Рисунок 6.17 – Обертання тіла під дією системи сил

Розділимо тіло на елементарні частинки, однією із яких буде елементарна частинка A із масою m . Її відстань до вісі обертання – r . Тоді момент інерції тіла відносно вісі обертання z визначиться:

$$I_z = \sum m \cdot r^2.$$

Після множення обох частин цієї рівності на величину ω маємо:

$$I_z \cdot \omega = \sum m \cdot r^2 \cdot \omega$$

або

$$I_z \cdot \omega = \sum m \cdot V \cdot r,$$

де V – лінійна швидкість точки.

Після диференціювання отриманого виразу за часом, отримано:

$$I_z \cdot \frac{d\omega}{dt} = \sum m \cdot r \cdot \frac{dV}{dt},$$

звідки

$$I_z \cdot \epsilon = \sum m \cdot a_\tau \cdot r = \sum F_\tau \cdot r.$$

Величина F_τ визначає дотичну складову сили \bar{F} , що діє на кожну елементарну частинку тіла.

Добуток $F_\tau \cdot r$ виражає величину моменту сили \bar{F}_τ відносно вісі z .

Після сумування встановлено головний момент відносно вісі z :

$$\sum F_\tau \cdot r = \sum \text{mom}_z(\bar{F}_\tau).$$

Лінія дії сили \bar{F}_n (нормальної складової сили \bar{F}) перетинає вісь обертання z , а тому її момент відносно вісі z дорівнює нулю. Отже, отримано лише один головний момент, показаний вище, який і є головним моментом системи сил, що діють на тіло відносно вісі z . Позначимо його L_z , тоді:

$$L_z = \sum \text{mom}_z(\bar{F}) = \sum \text{mom}_z(\bar{F}_\tau).$$

Після підстановки цієї залежності в отримане раніше рівняння, встановлено:

$$I_z \cdot \varepsilon = L_z,$$

де $\varepsilon = \dot{\omega} = \ddot{\phi}$.

Отже,

$$I_z \cdot \ddot{\phi} = L_z.$$

Отримане рівняння є диференціальним рівнянням обертання тіла навколо нерухомої вісі. Порівнюючи це рівняння із основним рівнянням динаміки $m \cdot \bar{a} = \bar{F}$, можна зробити висновок, що у разі обертання тіла навколо нерухомої вісі момент інерції відіграє роль, яка аналогічна масі тіла під час його поступального руху.

Із встановленої залежності $I_z \cdot \varepsilon = L_z$ витікає, що за умови $L_z = 0$ обертання буде рівномірним ($\varepsilon = 0$), а за умови $L_z = \text{const}$ обертання буде рівнозмінним ($\varepsilon = \text{const}$).

Приклад 6.3. Визначити роботу, яка виконується під час рівномірного підйому вантажу $G = 200 \text{ Н}$ по похилій площині на відстань $S = 6 \text{ м}$, якщо кут, утворений площиною із горизонтом, дорівнює $\alpha = 30^\circ$, а коефіцієнт тертя ковзання дорівнює $f = 0,01$ (рис. 6.18).

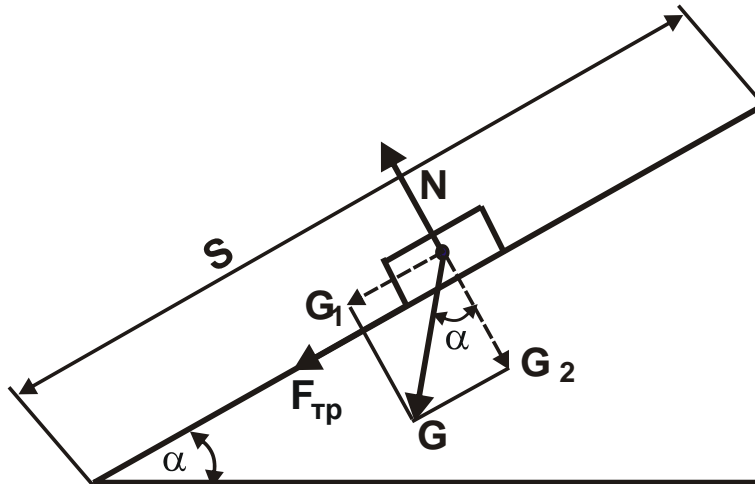


Рисунок 6.18 – Розрахункова схема визначення сили тертя на похилій площині

Рішення. Розкладемо силу тяжіння G вантажу на дві взаємно перпендикулярні складові G_1 і G_2 – відповідно, паралельну і перпен-

дикулярну похилій площині згідно із другим законом тертя ковзання. Тоді сила тертя $F_{\text{тр}}$ визначається:

$$F_{\text{тр}} = f \cdot G_2 = f \cdot G \cdot \cos \alpha .$$

Після застосування теореми щодо роботи рівнодіючої сили, визначимо шукану роботу як суму робіт сил опору (робота сили G_2 і нормальної реакції N дорівнює нулю, оскільки ці сили перпендикулярні напрямку переміщення S):

$$W_{\Sigma} = G_1 \cdot S + F_{\text{тр}} \cdot S = G \cdot S \cdot \sin \alpha + f \cdot G \cdot S \cdot \cos \alpha .$$

Після підстановки числових значень, отримано:

$$W_{\Sigma} = 200 \cdot 6 \cdot 0,5 + 0,01 \cdot 200 \cdot 6 \cdot 0,866 = 610,4 \text{ Дж.}$$

Приклад 6.4. За допомогою ременя передається потужність $P = 14,72$ кВт. Діаметр ремінного шківа $D = 1000$ мм, кутова швидкість $\omega = 5 \cdot \pi$ рад/с. Припускаючи, що натяг S_1 ведучої гілки ременя удвічі більше натягу S_2 веденої гілки, необхідно визначити значення натягів S_1 і S_2 (рис. 6.19).

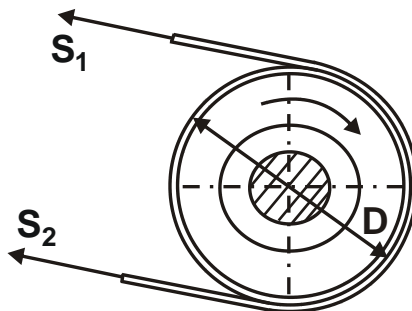


Рисунок 6.19 – Розрахункова схема визначення значення натягів

Рішення. Різниця натягу гілок дорівнює силі тертя, що діє між ременем і шківом, і в даному випадку є окружним зусиллям. Обертальний момент, діючий на шків, дорівнює:

$$T = (S_1 - S_2) \cdot \frac{D}{2} = S_2 \cdot \frac{D}{2} .$$

Із іншого боку, обертальний момент можна визначити, знаючи передану потужність і кутову швидкість:

$$T = \frac{P}{\omega} = \frac{14720}{5 \cdot \pi} = 936 \text{ Н}\cdot\text{м.}$$

Виходячи із цього, можна визначити натяг веденої гілки ременя:

$$S_2 = \frac{2 \cdot T}{D} = \frac{2 \cdot 936}{1} = 1872 \text{ Н.}$$

За заданою умовою натяг ведучої гілки у 2 рази більше натягу веденої гілки, отже:

$$S_1 = 2 \cdot S_2 = 2 \cdot 1872 = 3744 \text{ Н.}$$

Пример 6.5. Тіло опускається без початкової швидкості по похилій площині, що становить із горизонтом кут $\alpha = 30^\circ$ (рис. 6.20). Визначити час t , протягом якого швидкість руху тіла досягне 13,9 м/с. Коефіцієнт тертя ковзання $f = 0,25$.

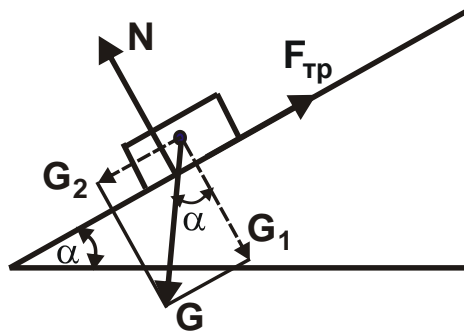


Рисунок 6.20 – Розрахункова схема визначення сил, діючих на похилій площині

Рішення. Розглянемо тіло, як матеріальну точку, що рухається під дією сили тяжіння G , сили тертя $F_{\text{тр}}$ і нормальної реакції N на похилій площині. Розкладемо G на складові G_1 і G_2 , одна з яких перпендикулярна, а інша – паралельна похилій площині, і застосуємо теорему щодо зміни кількості руху:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = \sum (F_i \cdot t).$$

Спроектуємо цю векторну рівність на напрям похилої площини, у результаті чого отримано:

$$m \cdot V - m \cdot V_0 = G_2 \cdot t - F_{\text{тр}} \cdot t.$$

Після застосування другого закону тертя ковзання та підстановки значень, отримано:

$$\frac{G \cdot V}{g} = (G \cdot \sin \alpha - f \cdot G \cdot \cos \alpha) \cdot t,$$

звідки

$$t = \frac{V}{g \cdot (\sin \alpha - f \cdot \cos \alpha)} = \frac{13,9}{9,81 \cdot (0,5 - 0,25 \cdot 0,866)} = 5 \text{ с.}$$

Порядок виконання роботи

Кожен студент отримує у викладача свої варіанти завдань за темою заняття. На їх основі необхідно розв'язати задачі із визначення сили, роботи і механічної потужності під час поступального та обертального рухів або задачі із визначення законів руху тіла за допомогою теорем динаміки та зробити висновки.

Завдання 6.1. Шліфувальний круг діаметром $d=0,5$ м здійснює 120 об./хв. Оброблювана деталь притискається до шліфувального круга із силою $F=10$ Н. Яка потужність витрачається на шліфування, якщо коефіцієнт тертя шліфувального круга із оброблюваною деталлю $f=0,2$.

Завдання 6.2. Яку роботу необхідно здійснити, щоб підняти рівноприскорено вантаж масою 50 кг на висоту 20 м протягом 10 с? Якої потужності двигун необхідно поставити для цього підйому, якщо к. к. д установки 80 %?

Завдання 6.3. Визначити роботу сили тертя ковзання під час гальмування обертового диска діаметром $d=200$ мм, який здійснив до зупинки два оберти, якщо гальмівна колодка притискається до диска із силою $F=400$ Н. Коефіцієнт тертя ковзання гальмівної колодки із диском $f=0,35$.

Завдання 6.4. Вантаж А масою 200 кг, що рухається із постійною швидкістю по похилій площині із кутом підйому $\alpha=30^\circ$, піднято на висоту $h=1,5$ м силою F , яка паралельна похилій площині (рис. 6.21). Під час переміщення вантажу по похилій площині коефіцієнт тертя ковзання $f=0,4$. Визначити роботу сили F .

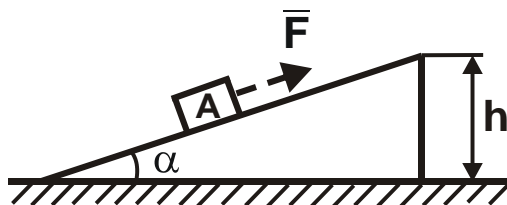


Рисунок 6.21 – Розрахункова схема визначення роботи сили F

Завдання 6.5. Поїзд рухається із швидкістю 36 км/ч. Потужність тепловоза 300 кВт. Сила тертя становить 0,005 ваги поїзда. Визначити вагу всього поїзда.

Завдання 6.6. По похилій площині із кутом підйому $\alpha = 30^\circ$ рівномірно переміщують каток масою 400 кг і діаметром 0,4 м (рис. 6.22). Визначити висоту, на яку буде піднято каток, якщо витрачена робота сили тяги $W = 4000$ Дж, коефіцієнт тертя кочення $f_k = 0,08$ см. Сила тяги F прикладена до осі обертання катка паралельно похилій площині.

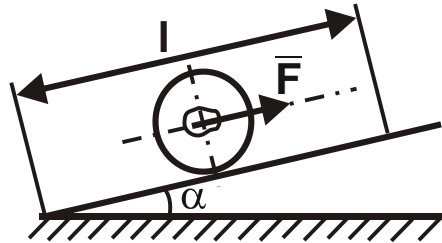


Рисунок 6.22 – Розрахункова схема визначення висоти підйому катка

Завдання 6.7. За допомогою пасової передачі (рис. 6.23) передається потужність $P = 25$ кВт. Діаметр пасових шківів $d = 80$ см, частота обертання шківа складає 390 об/хв. Визначити натяг S_1 ведучої гілки і S_2 – веденої гілки, вважаючи $S_1 = 2 \cdot S_2$.

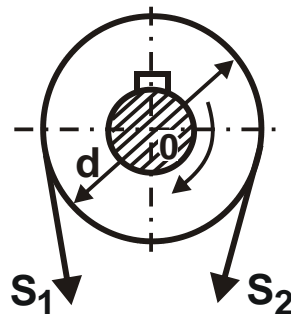


Рисунок 6.23 – Розрахункова схема визначення натягів ведучої S_1 і веденої S_2 гілок

Завдання 6.8. Динамометр, встановлений між теплоходом і баржею, показує силу тяги 30 кН, швидкість буксирування 18 км/год, потужність двигуна 550 кВт. Визначити силу опору води корпусу буксира, якщо к. к. д. силової установки і гвинта дорівнює 0,4.

Завдання 6.9. Для підйому 5000 м^3 води на висоту 3 м застосовано насос із двигуном потужністю 2 кВт. Скільки часу необхідно для перекачування води, якщо к. к. д. насоса дорівнює 0,8?

Завдання 6.10. Транспортер піднімає вантаж масою 200 кг за час, що дорівнює одній секунді. Довжина стрічки транспортера 3 м, а кут його нахилу $\alpha = 30^\circ$. К. к. д. транспортера становить 85 %. Визначити потужність, яку розвиває електродвигун транспортера.

Звіт по роботі

Звіт складається із основних понять, аксіом і теорем динаміки, роботи і механічної потужності під час поступального й обертального рухів та розв'язку заданих задач.

Література [9 –11, 13, 14, 16, 19, 20].

Питання для самоконтролю

1. Прискорення – це:
 - а) кінематична міра зміни вектора швидкості точки;
 - б) довжини шляху, пройденого за одиницю часу;
 - в) перша похідна від довжини пройденого шляху;
 - г) друга похідна від швидкості точки.
2. Прискорення визначається за формулою:
 - а) $a = F/m$;
 - б) $a = S \cdot \tau$;
 - в) $a = V^2 \cdot \tau$;
 - г) $a = V^2 / \tau$.
3. Нормальне прискорення спрямоване:
 - а) уздовж дотичної до траєкторії руху;
 - б) уздовж радіусу до центру кривизни траєкторії;
 - в) під деяким кутом до центру кривизни траєкторії;
 - г) під деяким кутом до центру кривизни траєкторії у протилежному напрямі.
4. Нормальне прискорення визначається формулою:
 - а) $a_n = V^2 / r$;
 - б) $a_\tau = dV / d\tau$;
 - в) $a_\tau = F/m$;
 - г) $a_\tau = \omega \cdot r$.
5. Кутове прискорення – це:
 - а) перша похідна від кутового переміщення;

- б) кінематична міра зміни кутової швидкості;
 в) друга похідна від кутової швидкості;
 г) добуток кутової швидкості на відстань точки від осі обертання.
6. Розмірність кутового прискорення:
 а) м/с;
 б) рад./с²;
 в) рад./с;
 г) м/с².
7. Сила інерції – це сила, чисельна рівна:
 а) $F_{IH} = -m \cdot a$;
 б) $F_{IH} = m \cdot a$;
 в) $F_{IH} = m \cdot V$;
 г) $F_{IH} = m \cdot V^2 / 2$.
8. Сила інерції під час криволінійного руху– це:
 а) $F_{IH} = -m \cdot a_\tau$;
 б) $F_{IH} = -m \cdot a_H$;
 в) $F_{IH} = m \cdot a_\tau$;
 г) $F_{IH} = m \cdot a_H$.
9. Рівнянні кінетостатики – це:
 а) $\sum (F_I + F_{IH})_y = 0, \quad F_{IH} = -m \cdot a$;
 б) $\sum (F_I - F_{IH})_y = 0, \quad F_{IH} = m \cdot a$;
 в) $\sum (F_I - F_{IH})_y = 0, \quad F_{IH} = -m \cdot a$;
 г) $\sum (F_I + F_{IH})_y = 0, \quad F_{IH} = m \cdot a$.
10. Робота W під час поступального руху (де F – сила, a – прискорення, S – переміщення) – це:
 а) $W = F \cdot S \cdot \cos \alpha$;
 б) $W = F \cdot V \cdot \cos \alpha$;
 в) $W = F \cdot a \cdot \cos \alpha$;
 г) $W = F \cdot V^2 \cdot \cos \alpha$.
11. Розмірність роботи – це:
 а) Н·м² ;
 б) Н·м;
 в) Н·м/с;
 г) Н·м²/с.

12. Механічна потужність визначається (де W – робота, F – сила, V – швидкість):

а) $P = W / \tau$;

б) $P = F \cdot V^2$;

в) $P = m \cdot V^2$;

г) $P = W / \tau^2$.

13. Розмірність механічної потужності – це:

а) Дж ;

б) Вт;

в) Н·м;

г) Н·м·с.

14. Одиниця кількості руху:

а) Н·м;

б) кг·м/с;

в) кг·м;

г) кг·м·с.

15. Одиниця імпульсу сили:

а) кг·м;

б) кг·м/с²;

в) кг·м²;

г) кг·м/с.

16. Кінетична енергію матеріальної точки дорівнює:

а) добутку маси точки на квадрат її швидкості;

б) половині добутку маси точки на квадрат її швидкості;

в) добутку маси точки на пройдену відстань;

г) половині добутку маси точки на пройдену відстань.

17. Потенційна енергія – це:

а) робота, яку здійснює точка під час прямолінійного руху;

б) робота, яку здійснює точка під час вільного падіння;

в) робота, яку здійснює точка під час прискореного руху;

г) зміна кінетичної енергії.

18. Розмірність потенційної енергії – це:

а) Н·м²;

б) Н·м/с;

в) Н·м;

г) Н·м²/с.

Робота 7. Основні поняття опору матеріалів. Розтягання і стиск

Мета роботи – вивчення основних понять опору матеріалів та методів розрахунку параметрів силового навантаження елементів конструкцій під час їх розтягання і стиску; навчити студентів розв'язувати задачі опору матеріалів в умовах їх розтягання і стиску.

Загальні відомості

Основні поняття опору матеріалів

У навчальній дисципліні "Теоретична механіка" вивчають закони рівноваги і руху абсолютно твердих тіл, тобто таких тіл, форма і розміри яких не змінюються під дією прикладених до них зовнішніх сил (навантажень). Однак у реальних умовах всі тіла (деталі конструкцій) під дією прикладених до них навантажень змінюють свою форму і розміри, тобто деформуються, і за певних величин зовнішніх сил можуть руйнуватися. Тому без вивчення цих деформацій важко вирішити дуже важливі задачі щодо умов руйнування тіл (елементів конструкції) та умов їх безпечної експлуатації, які вивчаються у навчальній дисципліні "Опір матеріалів".

Першим і основним завданням навчальної дисципліні "Опір матеріалів" є вивчення методів розрахунків елементів конструкцій на міцність, яка характеризує здатність деталі або елемента конструкції чинити опір руйнуванню.

Другим завданням навчальної дисципліні "Опір матеріалів" є вивчення методів розрахунку елементів конструкцій на жорсткість, яка характеризує здатність елемента конструкції чинити опір деформації.

Третім завданням навчальної дисципліні "Опір матеріалів" є вивчення стійкості форм рівноваги реальних тіл, які деформуються, тобто здатності тіла під навантаженням зберігати свою первинну форму рівноваги. Наприклад, під час стиску тонкого елемента силою, що діє уздовж його вісі, до якогось певного значення сили стиску цей елемент зберігає прямолінійну форму, а потім вигинається і приймає криволінійну форму. Причому, це може відбутися за значеннями навантажень, які абсолютно безпечні з погляду міцності або жорсткості елемента конструкції.

Отже, у навчальній дисципліні "Опір матеріалів" розглядають методи розрахунку елементів конструкцій на міцність, жорсткість і стійкість. При цьому розглядають переважно тіла, що мають форму брусів постійного перетину із достатньо високою жорсткістю, і прості системи, що складаються із таких брусів. *Брус* – це тіло, у якого два розміри малі порівняно із третім розміром.

Методи розрахунку гнучких брусів, пластинок, оболонки і масивних тіл розглядають у навчальній дисципліні "Теорія пружності". *Пластинка* – це тіло, у якого один розмір значно менше двох останніх розмірів. *Оболонка* – це тіло, обмежене двома криволінійними поверхнями, відстань між якими незначна порівняно із іншими розмірами.

Способи розрахунку стержневих систем вивчають у навчальній дисципліні "Теорія споруд" (званою також "Будівельна механіка").

Зародження науки щодо опору матеріалів відноситься до XVII ст. і пов'язано із роботами видатного вченого – Галілея. Значним внеском у розвиток "Опору матеріалів" і "Теорії пружності" стали роботи видатних вчених: Гука, Бернуллі, Сен-Венан, Коші, Ламе та ін., які сформулювали основні гіпотези і розробили теоретичні підходи до визначення параметрів силової напруженості елементів конструкцій та умов їх міцності, жорсткості та стійкості.

Розглянемо допущення, що приймаються у навчальній дисципліні "Опір матеріалів":

1. Матеріал тіла має суцільну (безперервну) будову.
2. Матеріал тіла в межах деталі однорідний та ізотропний, тобто має в усіх точках і на всіх напрямках однакові властивості.
3. У тілі до дії навантаження немає внутрішніх (початкових) зусиль.
4. Принцип незалежності дії сил. Результат дії на тіло системи сил, рівний сумі результатів дії тих же сил, що додаються до тіла послідовно і у будь-якому порядку.
5. Принцип Сен-Венана. У точках тіла, достатньо віддалених від місць дії навантажень, внутрішні сили незначно залежать від конкретного виду здійснення цих навантажень. Це дозволяє спрощувати розрахунки, замінюючи безперервно розподілені сили рівнодіючими зосередженими силами.

У опорі матеріалів дослідження питання щодо міцності реального об'єкту починається із вибору розрахункової схеми. Для цього необхід-

но встановити, які чинники є суттєвими і несуттєвими, провести схематизацію реального об'єкту і відкинути всі чинники, які несуттєво впливають на роботу системи в цілому. Це значно спростить вирішення поставленої задачі.

Реальний об'єкт, звільнений від несуттєвих особливостей, називається *розрахунковою схемою*. Слід зазначити, що один і той же реальний об'єкт можна подати декількома розрахунковими схемами. Із них необхідно прийняти за основу ту розрахункову схему, яка максимально відповідає поставленій задачі та спрощує її розв'язання.

Навантаження, із якими доводиться мати справу в опорі матеріалів, є сили або пари сил (моменти), які можуть розглядатися *зосередженими* або *розподіленими*.

Зосереджені навантаження вимірюються у Ньютонах (Н) або кілоньютонах (кН) або меганьютонах (МН).

Розподілені навантаження можна розподіляти за довжиною (наприклад, власну вагу канату), за поверхнею (тиск вітру на стіну), за об'ємом (власна вага масивного тіла).

Розподілені навантаження вимірюють у одиницях сили Н, віднесених до одиниці довжини (м), або до одиниці поверхні (м²), або до одиниці об'єму (м³). Зосереджені й розподілені навантаження можуть бути як статичними, так і динамічними, що змінюються у часі. При цьому слід зазначити, що динамічні навантаження можуть у багато разів перевищувати статичні навантаження.

Всі тіла під дією прикладених до них зовнішніх сил деформуються, тобто змінюють свої розміри або форму. Якщо виділити на поверхні тіла невеликий прямокутник, то у результаті деформації він прийме вигляд паралелограма зі зміною сторін (це називається *лінійною деформацією*) і зміною кутів (це називається *кутовою деформацією* або *деформацією зсуву*). Збільшення довжини відрізка (сторони прямокутника) називається повним, або *абсолютним подовженням*; зменшення довжини – *абсолютним скороченням*. Абсолютне подовження (скорочення) позначається: $\Delta(dx)$, $\Delta(dy)$, Δl залежно від того, як позначено довжину даного відрізка. У деяких випадках зручніше мати справу із відносною лінійною деформацією:

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dx)}{dx},$$

або

$$\varepsilon = \frac{\Delta(dy)}{dy},$$

або

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l},$$

яка, аналогічно куту зсуву, що вимірюється у радіанах і є безрозмірною величиною. Позитивною вважається лінійна деформація, що призводить до збільшення довжини відрізка.

Лінійні і кутові деформації після зняття навантаження або повністю зникають, або зникають лише частково (залежно від матеріалу і ступеня навантаження).

Деформації, що зникають після розвантаження тіла, називаються *пружними*.

Деформації, що зберігаються тілом після розвантаження, називаються *залишковими* або *пластичними*.

Знаючи деформації тіла у всіх його точках і знаючи умови закріплення тіла, можна визначити переміщення всіх точок тіла та їх нові координати після деформації. Для нормальної експлуатації реального об'єкта деформації або переміщення його окремих елементів повинні бути, як правило, пружними і за величиною не перевищувати допустимих значень, виходячи із умов жорсткості. У окремих випадках можуть бути допущені незначні пластичні деформації.

Для визначення рівнодіючих і внутрішніх зусиль (або внутрішніх силових чинників) застосовується *метод перетинів*. Сутність цього методу полягає у наступному. Для тіла, що знаходиться у рівновазі (рис. 7.1), у місці, що розглядається, умовно здійснюється перетин, наприклад, а – а. Потім одна із частин тіла відкидається (зазвичай та, до якої прикладено більше сил). Взаємодія частин тіла між собою замінюється внутрішніми зусиллями, які урівноважують зовнішні сили, що діють на відсічену частину тіла.

За умови розташування зовнішніх сил у одній площині для їх урівноваження необхідно у загальному випадку докласти в перетині три внутрішні зусилля: поздовжню силу N , яка направлено уздовж осі стержня; поперечну силу Q , що діє у площині поперечного перетину, і вигинний момент M_B , який діє у площині, яка перпендикулярна площині

ні перетину. Потім необхідно скласти рівняння рівноваги для відділеної частини тіла і на його основі визначити значення невідомих внутрішніх зусиль N , Q , і M_B .

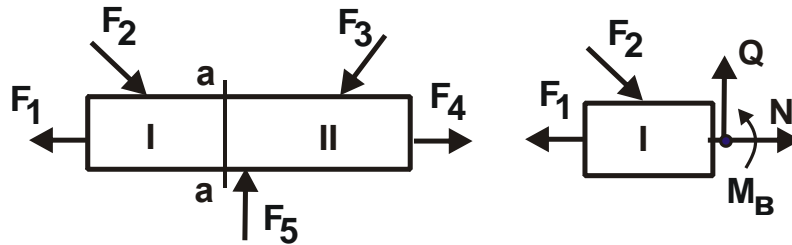


Рисунок 7.1 – Взаємодія частин тіла одна з одною

Якщо зовнішні сили, до яких відносяться і реакції опор, не знаходяться у одній площині (просторове завдання), то у поперечному перетині, у загальному випадку, можуть виникати шість внутрішніх зусиль, які є компонентами головного вектора і головного моменту системи внутрішніх сил (рис. 7.2): *подовжня сила* N , *поперечна сила* Q_y , *поперечна сила* Q_z і три моменти: M_y , M_z , M_x . Моменти M_y і M_z – це *вигинні моменти*, а момент M_x – це *крутний момент*, оскільки він виникає під час крутіння стержня.

Для визначення цих шести внутрішніх зусиль необхідно використати шість рівнянь рівноваги: прирівняти нулю суми проєкцій сил (прикладених до відсіченої частини тіла) на три осі координат і дорівняти нулю суми моментів сил відносно трьох осей, початок яких знаходиться у центрі тяжіння здійсненого перетину.

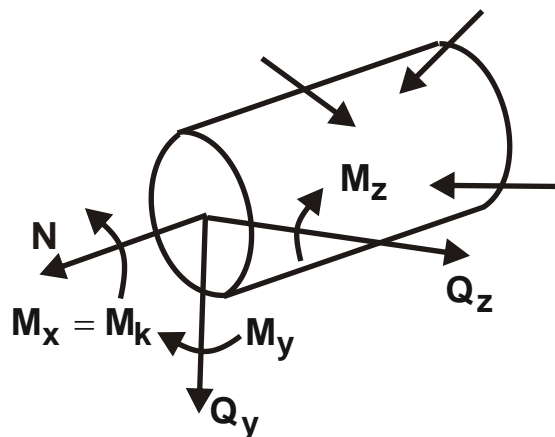


Рисунок 7.2 – Пружно деформований стан тіла

Таким чином, для знаходження внутрішніх зусиль необхідно:

- розділити стержень або систему стержнів на дві частини;
- відкинути одну частину;
- докласти у перетині зусилля, які здатні урівноважити зовнішні сили, що діють на відділену частину;
- знайти значення зусиль із рівнянь рівноваги, складених для відділеної частини.

У окремому випадку в поперечних перетинах стержня можуть виникати:

- тільки подовжні сили N . Це має місце під час розтягання або стиску стержня;
- тільки поперечні сили Q . Це випадок зрізу (або зсуву);
- тільки крутні моменти M_x . Це випадок кручення;
- вигинні моменти M_y або M_z . Це випадок чистого вигину;
- зусилля і моменти, що, наприклад, вигинають і крутять. Це відноситься до випадків складних деформацій або складного опору.

Основною характеристикою напруженого стану в точці перетину тіла є напруження p , яке дорівнює межі відношення елементарної внутрішньої сили до площі елементарного майданчика за умови прагнення площі цього майданчика до нуля.

Напруження є векторна величина.

Одиниця напруження:

$$[p] = \frac{[P]}{[F]} = \frac{\text{сила}}{\text{площа}} = \text{Ньютон} , \text{ поділений на квадратний метр} = \text{Н/м}^2 = \\ = \text{Паскаль (Па)} .$$

Існує ще розмірність – мегапаскаль (МПа):

$$1 \text{ МПа} = 10^6 \text{ Па} = 1 \text{ Н/мм}^2 .$$

Повне напруження p можна розкласти на дві складові (рис. 7.3):

- складову нормальну до площини перетину, яка позначається σ і називається *нормальним напруженням*.
- складову, що розташовано у площині перетину, яка позначається τ і називається *дотичним напруженням*.

Виходячи із цього, повне напруження p аналітично опишеться залежністю:

$$p = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2} .$$

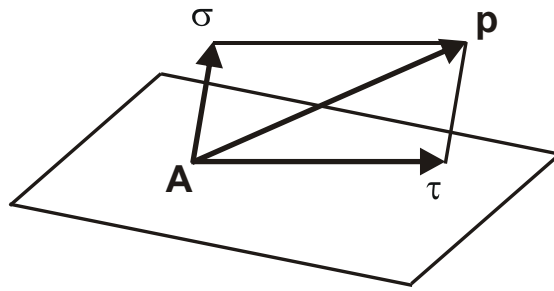


Рисунок 7.3 – Розклад повного напруження на дві складові

Якщо умовно навколо якої-небудь точки A тіла виділити елемент у вигляді нескінченного малого кубика, то на його гранях у загальному випадку діятимуть напруження, які показано на рис. 7.4:

- нормальне напруження, яке позначається σ із індексом координатної осі, у напрямі якої діє нормальне напруження;
- дотичне напруження, яке позначається τ із двома індексами. Перший індекс указує координатну вісь, яка перпендикулярна грані нескінченно малого кубика, у якій розташоване дотичне напруження. Другий індекс указує координатну вісь, у напрямі якої діє дотичне напруження.

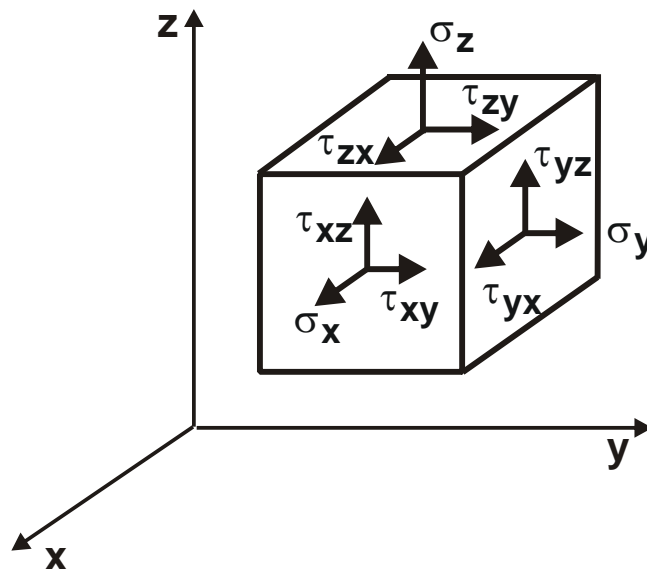


Рисунок 7.4 – Пружний стан у точці тіла

Сукупність всіх нормальних і дотичних напружень на всіх гранях нескінченно малого кубика називається *пружним станом у даній точці*.

Якщо на гранях кубика діє одне тільки нормальне напруження, то воно називаються *головним*, а майданчики, на яких вони діють, називаються

ваються *головними майданчиками*. Головне напруження позначається: $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

Якщо всі три головні напруження відмінні від нуля, то напружений стан називається *тривісним* або *об'ємним* (рис. 7.5).

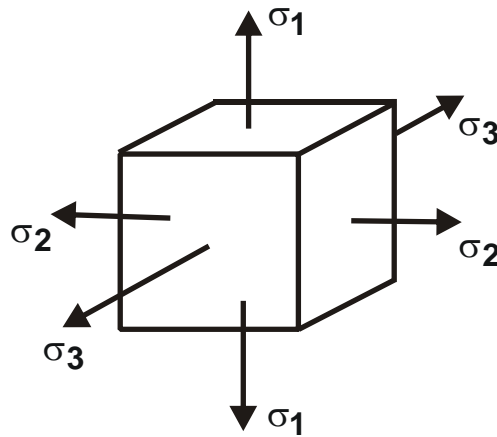


Рисунок 7.5 – Тривісний пружний стан

Якщо одне із головних напружень дорівнює нулю, напружений стан називається *двувісним* або *плоским*.

Якщо два головні напруження дорівнюють нулю і відмінні від нуля, а діє тільки одне головне напруження, то напружений стан називається *одновісним* або *лінійним*.

За відомими значеннями всіх трьох головних напружень у будь-якій точці деталі, можна здійснити оцінювання міцності цієї деталі.

Як правило, оцінювання міцності елементів конструкцій у формі бруса здійснюють за величиною найбільшого напруження, яке виникає в їх поперечних перетинах.

Умова міцності у випадку лінійного напруженого стану приймає вигляд:

$$\sigma \leq [\sigma],$$

де σ – фактичне напруження, що виникає у даній точці перетину, Н;

$[\sigma]$ – допустиме напруження (Н), яке залежить від властивостей матеріалу та яке визначають дослідним шляхом або за умов роботи елемента розрахункової конструкції.

Значення допустимого напруження наведено у довідковій літературі.

Оцінювання міцності здійснюють і за дотичним напруженням. Умова міцності у цьому випадку приймає вигляд:

$$\tau \leq [\tau],$$

де τ – фактичне дотичне напруження, що виникає у даній точці перетину, Н;

$[\tau]$ – допустиме дотичне напруження, Н.

Також оцінювання міцності здійснюють і за навантаженням, оскільки досягнення допустимого напруження у найбільш небезпечній точці не завжди призводить до руйнування реального об'єкта (конструкції деталі).

Переміщення і деформації

Під дією зовнішніх сил точки тіла змінюють положення у просторі. Вектор, що має початок у точці недеформованого тіла, а кінець у тій же точці деформованого тіла, називається *вектором повного переміщення точки*. Його проекції на вісі називаються *переміщеннями за осями* та позначаються u , v і w (за осям x , y і z).

Існує поняття *кутового переміщення* (кута повороту у просторі відрізка прямої між двома близькими точками до і після зміни форми тіла). Цей кут повороту характеризується вектором, який може бути розкладений за осями x , y і z .

У опорі матеріалів, як правило, розглядають кінематично незмінні системи, у яких накладені зв'язки дозволяють виключити її переміщення у просторі як жорсткого цілого. У цьому випадку переміщення u , v і w будь-якої точки є малими порівняно із загальними геометричними розмірами тіла, що дозволяє значно спростити розрахунки. Для цього застосовують принцип *початкових розмірів*. Його сутність полягає у тому, що під час складання рівнянь статки (рівнянь рівноваги) тіло розглядають як недеформоване, тобто таке, що має такі самі геометричні розміри, які воно мало до навантаження зовнішніми силами.

Важливою в опорі матеріалів є гіпотеза, що носить назву *принцип незалежності дії сил*: за умови дії на тіло декількох навантажень внутрішні сили, напруження, переміщення і деформації у будь-якому місці можна визначити як суму цих величин від кожного навантаження окремо.

Цей принцип дозволяє перейти від простіших основних деформацій, коли у поперечних перетинах діють лише нормальні або дотичні напруження, до більш складних основних деформацій, коли у поперечних перетинах діють різні напруження, а у подальшому – до складного опору.

Розтягання і стиск

Розтяганням або *стиском* називають такий вид деформації, за яким у любому поперечному перетині бруса виникає тільки поздовжня сила. Бруси із прямолінійною віссю (прямі бруси), які працюють на розтягання або на стиск, часто називають *стержнями*.

Як відомо, брус, що знаходиться у рівновазі, під дією розтягаючих сил подовжиться у поздовжньому напрямі, а у поперечному напрямі, навпаки, його розміри декілька зменшаться. Згідно гіпотези плоских перетинів, всі плоскі перетини, нормальні до вісі бруса, залишаться і після деформації плоскими і нормальними до його вісі.

Для визначення напруження у поперечному перетині, тобто перетині, перпендикулярному до вісі бруса, слід застосувати загальний спосіб, прийнятий в опорі матеріалів, – це *метод перетинів*.

Рівнодіюча сила пружності у цьому випадку діятиме уздовж осі бруса і за величиною дорівнює поздовжній силі F . Тому, за гіпотезою плоских перетинів, можна вважати, що під час розтягання сили пружності розподілені рівномірно на всьому поперечному перетині площею A і напруження в усіх його точках визначається за формулою:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \text{ Н/м}^2. \quad (7.1)$$

Це напруження є нормальним, оскільки воно направлено, як і сила F , перпендикулярно до площини поперечного перетину.

У випадку стиску бруса напруження визначається також за формулою (7.1), оскільки тут змінюється лише напрям сил.

Навантаження і деформації, що виникають у брусі, тісно пов'язані одне з одним і виражаються *законом Гука* – одним із основних законів у опорі матеріалів, який було сформульовано вперше у 1678 році: *деформація пропорційна навантаженню*.

В умовах розтягання або стиску бруса закон Гука виражає пряму пропорційність між напруженням σ і відносною деформацією ε :

$$\sigma = E \cdot \varepsilon, \quad (7.2)$$

де E – модуль пружності першого роду або модуль Юнга, Н/м^2 .

Згідно методу перетинів, у всіх поперечних перетинах стержня виникають нормальні сили N , які дорівнюють силі F (рис. 7.6), тобто $N = F$. Стиск відрізняється від розтягання фактично лише знаком нормальної сили N . Під час розтягання нормальна сила N направлена від перетину, а під час стиску – до перетину.

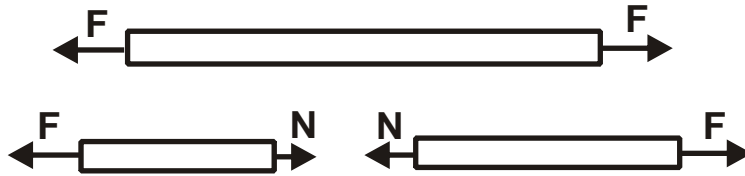


Рисунок 7.6 – Напряг сил у поперечних перетинах стержня

Нормальна сила N , що виникає у поперечному перетині розтягнутого стержня, є рівнодіючою внутрішніх сил у перетині (рис. 7.7).

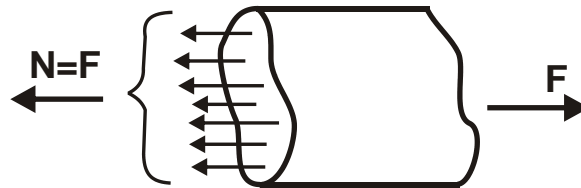


Рисунок 7.7 – Напруження, які діють у поперечному перетині розтягнутого стержня

Якщо припустити, що для однорідного стержня внутрішні сили розподілено усередині перетину рівномірно, то нормальне напруження для всіх точок перетину буде однаковим:

$$\sigma = \frac{N}{A}, \quad (7.3)$$

де A – площа поперечного перетину.

Величина Δl , на яку збільшилася первинна довжина l_0 стержня, називається *абсолютним подовженням*, а відношення абсолютного подовження до первинної довжини l_0 стержня – *відносним подовженням* і позначається ε .

Отже

$$\Delta l = l_1 - l_0 \text{ [см]},$$

де l_1 – довжина стержня у деформованому стані, м;

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0} \cdot 100 \text{ [\%]}. \quad (7.4)$$

Для поперечних деформацій абсолютне та відносне скорочення визначають за формулами:

$$\Delta b = b_1 - b_0;$$

$$\varepsilon' = \frac{\Delta b}{b_0},$$

де b_0 – поперечний розмір стержня, м.

Якщо закон Гука виразити формулами (7.3) і (7.4), то відносне подовження розтягнутих і стиснутих стержнів виразиться:

$$\Delta l = \frac{F \cdot l_0}{E \cdot A}. \quad (7.5)$$

Добуток $E \cdot A$ прийнято називати *жорсткістю стержня* під час розтягання або стиску.

Застосовуючи закон Гука до поперечної деформації, отримано:

$$\varepsilon' = -A_{\text{пр}} \cdot \sigma,$$

де $A_{\text{пр}}$ – коефіцієнт пропорційності.

Тоді

$$\frac{\varepsilon'}{\varepsilon} = -A_{\text{пр}} \cdot E.$$

Якщо позначити $A_{\text{пр}} \cdot E = \mu$, то

$$\varepsilon' = -\mu \cdot \varepsilon.$$

Коефіцієнт пропорційності μ (абсолютна величина відношення відносної поперечної деформації до подовжньої деформації) називається *коефіцієнтом Пуассона*.

Отже, *розтяганням* або *стиском* називається такий вид деформації, за яким у поперечному перетині стержня виникає один внутрішній силовий чинник – подовжня сила N , яка дорівнює алгебраїчній сумі проєкцій на подовжню вісь зовнішніх сил, що діють на відділену частину стержня.

Правило знаків для сили N : під час розтягання подовжня сила позитивна, а під час стиску – негативна.

Під час розтягання (стиску) стержня в його поперечних перетинах виникають нормальні напруження $\sigma = N/A$. Для нормальних напружень приймається таке саме правило знаків, як і для подовжніх сил.

Зміна довжини стержня (подовження або скорочення) дорівнює алгебраїчній сумі подовжень його окремих ділянок і розраховується за формулою Гука:

$$\Delta l = \sum \Delta l_i = \sum \frac{N_i \cdot l_i}{E \cdot A_i}, \quad (7.6)$$

де N_i – подовжня сила, Н;

l_i, A_i – довжина (мм) і площа (мм^2) перетину у межах кожної ділянки стержня;

E – модуль поздовжньої пружності, МПа.

Послідовність вирішення задачі щодо визначення подовжніх сил, нормальних напружень і переміщення вільного кінця стержня

1. Розбити стержень на ділянки, починаючи від вільного кінця. Межами ділянок є перетини, в яких прикладено зовнішні сили і місця зміни розмірів поперечного перетину.

2. Визначити за методом перетину поздовжню силу для кожної ділянки (ординати епюри N), побудувати епюру поздовжніх сил N . Після проведення паралельно осі стержня базової (нульової) лінії епюри необхідно відкласти перпендикулярно до неї у довільному масштабі отримані значення ординат. Через кінці ординат провести лінії, проставити знаки і заштрихувати епюру лініями, паралельними ординатам.

3. Для побудови епюри нормальних напружень визначають напруження у поперечних перетинах кожної ділянки. У межах кожної ділянки напруження постійні, тобто епюра на даній ділянці зображується прямою, паралельною вісі стержня.

4. Переміщення вільного кінця стержня визначається сумою подовжень (скорочень) ділянок стержня, які розраховуються на основі застосування формули Гука.

Приклад 7.1. Для східчастого стержня (рис. 7.8, а) побудувати епюру поздовжніх сил, епюру нормальних напружень і визначити переміщення вільного кінця, якщо $E = 2 \cdot 10^5$ МПа; $F_1 = 30$ кН; $F_2 = 38$ кН; $F_3 = 42$ кН; $A_1 = 1,9 \cdot 10^2$ мм^2 ; $A_2 = 3,1 \cdot 10^2$ мм^2 .

Рішення. 1. Позначимо ділянки I – V, як показано на рис. 7.8, а.

2. Визначимо значення поздовжньої сили N на всіх ділянках стержня:

$$N_I = 0;$$

$$N_{II} = F_1 = 30 \text{ кН};$$

$$N_{III} = F_1 = 30 \text{ кН};$$

$$N_{IV} = F_1 - F_2 = -8 \text{ кН};$$

$$N_V = F_1 - F_2 - F_3 = -50 \text{ кН}.$$

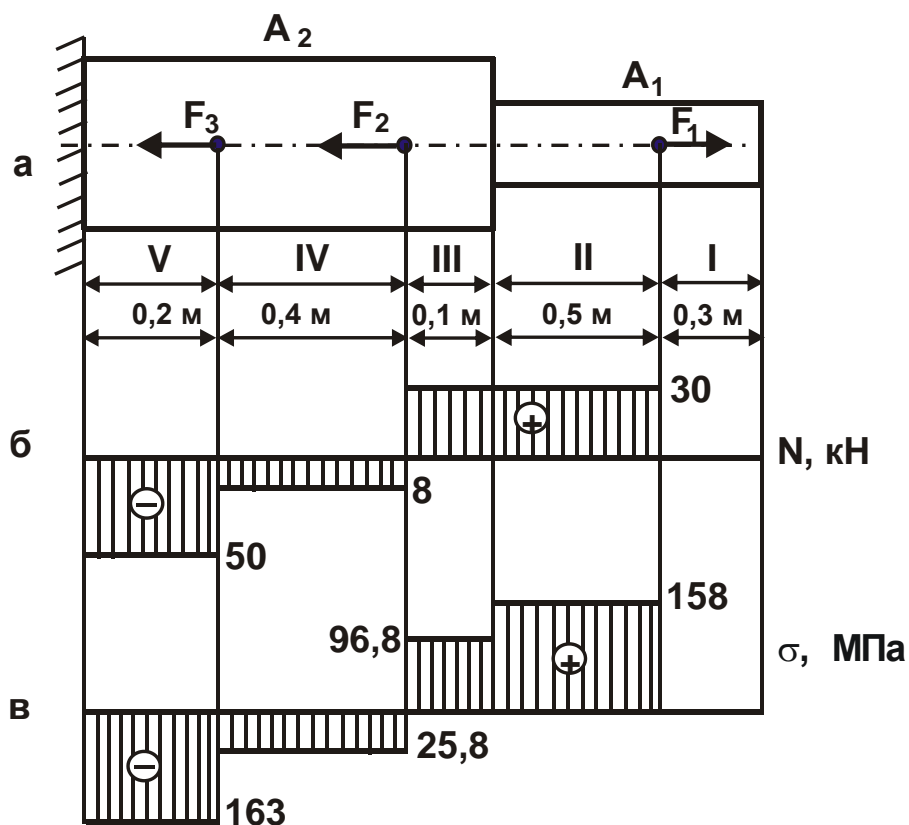


Рисунок 7.8 – Розрахункова схема

Побудуємо епюру поздовжніх сил (рис. 7.8, б).

3. Визначимо значення нормальних напружень:

$$\sigma_I = \frac{N_I}{A_1} = 0;$$

$$\sigma_{II} = \frac{N_{II}}{A_1} = \frac{30 \cdot 10^3}{1,9 \cdot 10^2} = 158 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_{III} = \frac{N_{III}}{A_2} = \frac{30 \cdot 10^3}{3,1 \cdot 10^2} = 96,8 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_{IV} = \frac{N_{IV}}{A_2} = -\frac{8 \cdot 10^3}{3,1 \cdot 10^2} = -25,8 \text{ Н/мм}^2;$$

$$\sigma_V = \frac{N_V}{A_2} = -\frac{50 \cdot 10^3}{3,1 \cdot 10^2} = -163 \text{ Н/мм}^2.$$

Побудуємо епюру нормальних напружень (рис. 7.8, в).

5. Визначимо переміщення вільного кінця стержня:

$$\Delta l = \Delta l_I + \Delta l_{II} + \Delta l_{III} + \Delta l_{IV} + \Delta l_V;$$

$$\Delta l_I = \frac{N_I \cdot l_I}{E \cdot A_1} = 0;$$

$$\Delta l_{II} = \frac{N_{II} \cdot l_{II}}{E \cdot A_1} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 1,9 \cdot 10^2} = 0,394 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{III} = \frac{N_{III} \cdot l_{III}}{E \cdot A_2} = \frac{30 \cdot 10^3 \cdot 0,1 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,1 \cdot 10^2} = 0,0484 \text{ мм};$$

$$\Delta l_{IV} = -\frac{N_{IV} \cdot l_{IV}}{E \cdot A_2} = -\frac{8 \cdot 10^3 \cdot 0,4 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,1 \cdot 10^2} = -0,0516 \text{ мм};$$

$$\Delta l_V = -\frac{N_V \cdot l_V}{E \cdot A_2} = -\frac{50 \cdot 10^3 \cdot 0,2 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^5 \cdot 3,1 \cdot 10^2} = -0,161 \text{ мм}.$$

$$\Delta l = 0,394 + 0,0484 - 0,0516 - 0,161 \approx 0,23 \text{ мм}.$$

Виходячи із умови міцності, можна вирішити три види завдань:

- перевірка міцності:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma];$$

- проектний розрахунок (вибір перетину):

$$[A] \geq N \cdot [\sigma];$$

- визначення допустимого навантаження:

$$[N] \leq A \cdot [\sigma],$$

де $[\sigma]$ – допустиме напруження, МПа.

Якщо назвати тимчасовим опором розтягання (стиску) напруження σ_B , яке відповідає *руйнуючому навантаженню* F_B , то:

$$\sigma_B = \frac{F_B}{A},$$

отже $F_B = A \cdot \sigma_B$.

Тоді умову міцності на руйнуюче навантаження можна представити у вигляді:

$$F \leq \frac{F_B}{k},$$

де k – коефіцієнт запасу на руйнуюче навантаження, або

$$F \leq \frac{A \cdot \sigma_B}{k}$$

тобто

$$\frac{F}{A} \leq \frac{\sigma_B}{k}.$$

Відношення величини тимчасового опору до коефіцієнту запасу на руйнуюче навантаження називають *допустимим напруженням на*

розтягання (стиск) і позначають $[\sigma]$. Виходячи із цього, нерівність $\frac{F}{A} \leq [\sigma]$ є умовою міцності на руйнующе навантаження.

Напруження на похилих перетинах під час розтягання

Через будь-яку точку деформованого тіла можна провести безліч різно орієнтованих січних площин.

Розглянемо прямий брус постійного поперечного перетину A , який розтягається силами F (рис. 7.9, а). Розсічемо брус площиною 1 – 1, що проходить через точку B та складає із поперечним перетином кут φ , відкинемо верхню частину і розглянемо рівновагу нижньої частини.

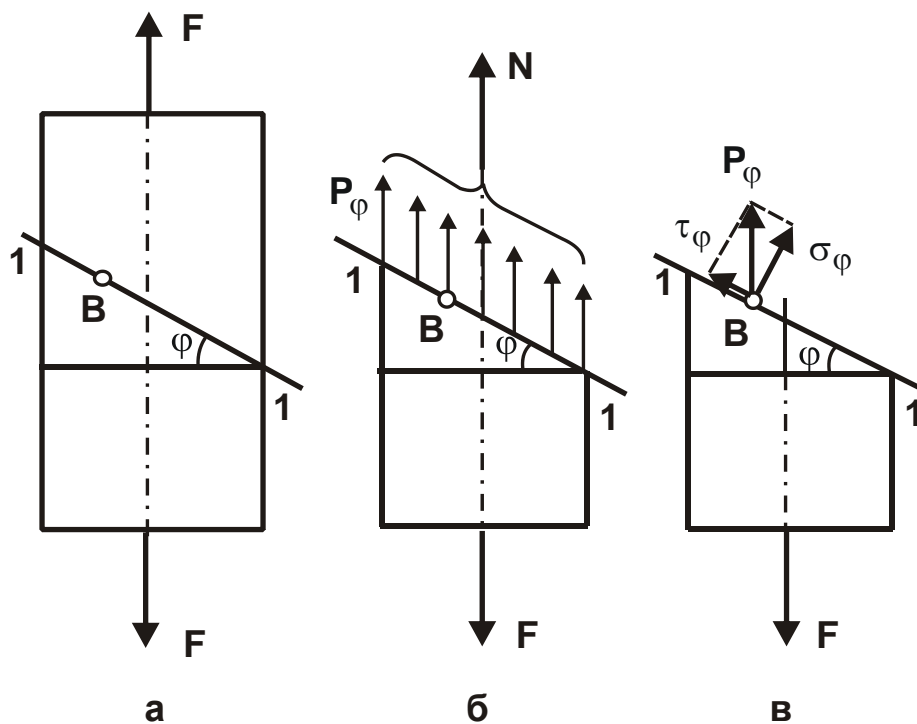


Рисунок 7.9 – Розрахункові схеми визначення напружень, виникаючих на похилих перетинах під час розтягання

Рівнодіюча N внутрішніх сил, які діють на похилому перетині, дорівнює силі розтягання F :

$$N = F,$$

Напруження p_φ при цьому паралельне осі бруса (рис. 7.9, б).

Приймаючи, що напруження p_φ розподілене рівномірно на похилому перетині, отримано:

$$p_{\varphi} = \frac{N}{A_{\varphi}},$$

де A_{φ} – площа похилого перетину.

Нормальне напруження σ у поперечному перетині дорівнює:

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Оскільки $A_{\varphi} = A / \cos \varphi$, то

$$p_{\varphi} = \sigma \cdot \cos \varphi.$$

Розкладемо повне напруження p_{φ} у точці похилого перетину на нормальне σ_{φ} і дотичне τ_{φ} напруження (рис. 7.9, в):

$$\sigma_{\varphi} = p_{\varphi} \cdot \cos \varphi = \sigma \cdot \cos^2 \varphi;$$

$$\tau_{\varphi} = p_{\varphi} \cdot \sin \varphi = \sigma \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi.$$

Звідси витікає, що під час розтягання бруса на похилих перетинах виникають нормальні та дотичні напруження, які рівномірно розподілено за перетином, та відповідні цим напруженням деформації напруження і зсуву.

Розглянемо окремі випадки:

1) $\varphi = 0$; $\sigma_{\varphi} = \sigma \cdot \cos^2 \varphi = \sigma = \sigma_{\max}$.

У цьому випадку нормальне напруження у поперечному перетині приймає максимальне значення, а дотичне напруження дорівнює нулю:

$$\tau_{\varphi} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi = 0;$$

2) $\varphi = 45^{\circ}$; $\sigma_{\varphi} = \sigma \cdot \cos^2 \varphi = \frac{\sigma}{2}$; $\tau_{\varphi} = \frac{\sigma}{2} \cdot \sin 2\varphi = \frac{\sigma}{2} = \tau_{\max}$.

Як видно, дотичне напруження досягає свого максимального значення у поперечному перетині, нахиленому до осі під кутом 45° ;

3) $\varphi = 90^{\circ}$; $\sigma_{\varphi} = 0$; $\tau_{\varphi} = 0$.

У поздовжніх перетинах бруса відсутні напруження.

Діаграми розтягання стержнів

Діаграма розтягання стержня (зразка) є експериментально встановленою залежністю між силою, з якою здійснюється розтягання стержня, і відносним подовженням (рис. 7.10, а,б). У даному випадку залеж-

ність отримано для зразка, який виготовлено з пластичного матеріалу (наприклад, сталі). Для зразка, виготовленого з крихкого матеріалу (наприклад, чугуна), ця залежність приймає вигляд, зображений на рис. 7.11. Таким чином, існує два основні типи діаграм. Перший тип (рис. 7.10, а,б) характерний для матеріалів, які за нормальних умов руйнуються після значної пластичної деформації.

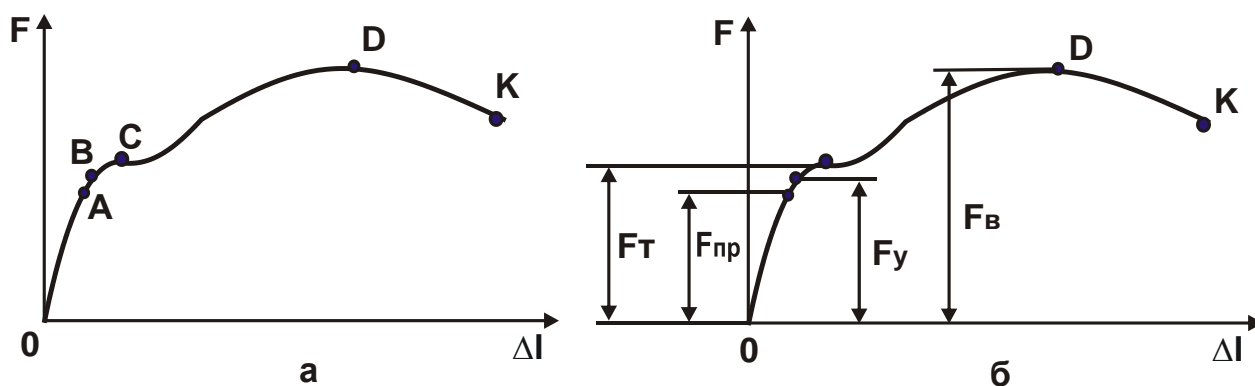


Рисунок 7.10 – Діаграма розтягування для пластичних матеріалів

Другий тип (рис. 7.11) характерний для матеріалів, руйнування яких пов'язане із дуже малими пластичними деформаціями.

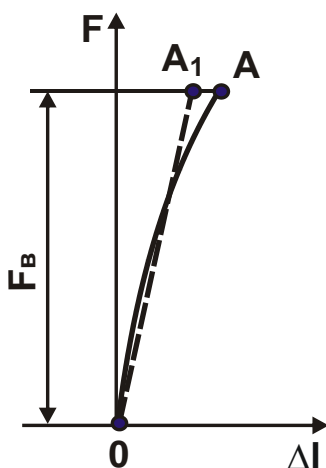


Рисунок 7.11 – Діаграма розтягання для крихких матеріалів

Для кількісного оцінювання напруженого стану зразка слід перебудувати діаграму розтягання $P = f(\Delta l)$ у координатах σ і ε , зменшуючи в F разів ординати і в l разів абсциси, де F і l – відповідно, площа поперечного перетину і робоча довжина зразка до навантаження. Оскільки ці величини постійні, то діаграма $\sigma = f(\varepsilon)$ (рис. 7.12) має той

же вигляд, що і діаграма розтягання, але характеризує вже не властивості зразка, а властивості матеріалу.

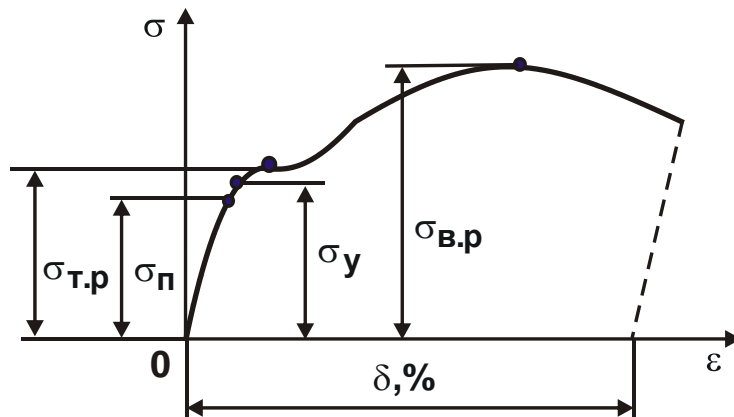


Рисунок 7.12 – Діаграма розтягання у координатах σ та ε

На діаграмі зазначено характерні точки, які відповідають таким числовим величинам:

1. Найбільше напруження, до якого матеріал наближається, виходячи із закону Гука, називається *межею пропорційності* ($\sigma_{п}$).
2. Найбільше напруження, до якого матеріал ще не отримує залишкових деформацій (тобто зберігаються пружні властивості матеріалу), називається *межею пружності* ($\sigma_{у}$).
3. Напруження, за яким відбувається збільшення деформації зразка без помітного збільшення навантаження, називається *межею текучості* ($\sigma_{т}$).

У тих випадках, коли на діаграмі відсутній явно виражений майданчик текучості, за межу текучості $\sigma_{т}$ приймають умовну величину напруження, за яким залишкова деформація $\varepsilon_0 = 0,002$ або 0,2 % (рис. 7.13). У деяких випадках встановлюється межа $\varepsilon_0 = 0,5$ %.

Умовну межу текучості позначають $\sigma_{0,2}$ і $\sigma_{0,5}$ залежно від прийнятої величини допуску на залишкову деформацію. Індекс 0,2, зазвичай, у позначеннях межі текучості опускається. Якщо необхідно відрізнити межу текучості на розтягання від межі текучості на стиск, то у позначення вводиться додатковий індекс "р" або "с", який відповідає розтягання або стиску. Тоді для межі текучості отримуємо, відповідно, позначення $\sigma_{т.р}$ і $\sigma_{т.с}$.

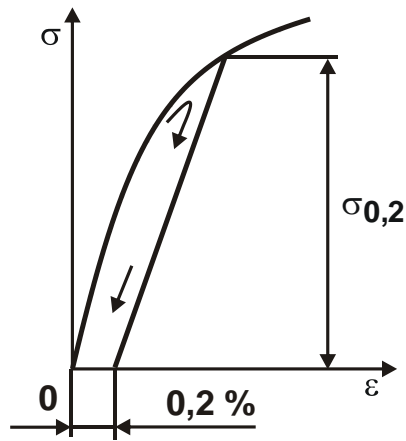


Рисунок 7.13 – Діаграма розтягання матеріалу за умови відсутності майданчика текучості

Слід зазначити, що межа текучості легко піддається визначенню і є однією з основних механічних характеристик матеріалу.

4. Відношення максимальної сили, яку здатний витримати зразок, до його початкової площі поперечного перетину називається *межею міцності* або *тимчасового опору*, і позначається $\sigma_{в,р}$ (в умовах стиску – $\sigma_{в,с}$).

Однак, величина $\sigma_{в,р}$ не є напруженням, за яким руйнується зразок. Руйнування зразка відбувається за більшим значенням деформації у зв'язку зі зменшенням фактичної площі поперечного перетину зразка порівняно із його початковою (до розтягання) площею поперечного перетину. У результаті фактичне напруження у момент руйнування зразка перевищує значення $\sigma_{в,р}$. Таким чином, межа міцності також є умовною величиною. За зручністю та простотою визначення її прийнято як основну порівняльну характеристику міцності матеріалу.

Під час випробування на розтягання отримала застосування ще одна характеристика матеріалу – подовження у момент розриву δ , %.

Діаграма розтягання, яка побудована із урахуванням зменшення площі F і місцевого збільшення деформації, називається *дійсною діаграмою розтягання*.

На практиці порівняння властивостей матеріалу здійснюють за допомогою *проби на твердість*. Під *твердістю* розуміють здатність матеріалу протидіяти механічному проникненню в нього сторонніх тіл.

Найбільш широкого поширення набули проби за Брінеллем і за Роквеллом. У першому випадку у поверхню досліджуваної деталі

вдавлюється сталева кулька діаметром 10 мм, у другому – діамантовий гострий наконечник. Після вимірювання отриманого відбитку оцінюють твердість матеріалу.

Як показано раніше, розрахунки на міцність під час розтягання і стиску виконують за умови:

$$\sigma \leq [\sigma].$$

Допустиме напруження встановлюється залежно від матеріалу і умов служби даної споруди. Для пластичних матеріалів воно не повинно перевищувати межу текучості, оскільки необхідно мати деякий запас міцності на випадок перевантажень у процесі експлуатації тощо. Тому для пластичних матеріалів приймають:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_T}{n_T},$$

де n_T – коефіцієнт запасу міцності відносно межі текучості.

Коефіцієнт n_T повинен бути більше одиниці, наприклад, $n_T = 1,5$.

У загальному випадку визначення коефіцієнту запасу міцності слід здійснювати залежно від методів розрахунку напруження, від ступеня точності цих методів, від важливості тих наслідків, які спричинить руйнування деталі машини.

Порядок виконання роботи

Отримати варіант завдання (табл. 7.1, рис. 7.14) у викладача та розв'язати задачу із побудови епюр поздовжніх сил, нормальних напружень та визначення переміщень вільного кінця стержня під час його розтягання і стиску, якщо модуль пружності для сталі $E = 2 \cdot 10^5$ МПа.

Таблиця 7.1 – Значення поздовжніх сил F_1 і F_2 , площ поперечного перетину стержня A_1 і A_2 та довжини його ділянки за варіантами

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$F_1, \text{Н}$	10	15	25	10	15	20	30	40	35	15
$F_2, \text{Н}$	30	30	40	45	60	50	70	55	65	60
$A_1, \text{мм}^2$	200	100	150	200	250	200	100	150	250	100
$A_2, \text{мм}^2$	400	200	300	500	600	500	250	300	400	250
$a, \text{м}$	0,2	0,3	0,2	0,4	0,5	0,5	0,2	0,3	0,4	0,5

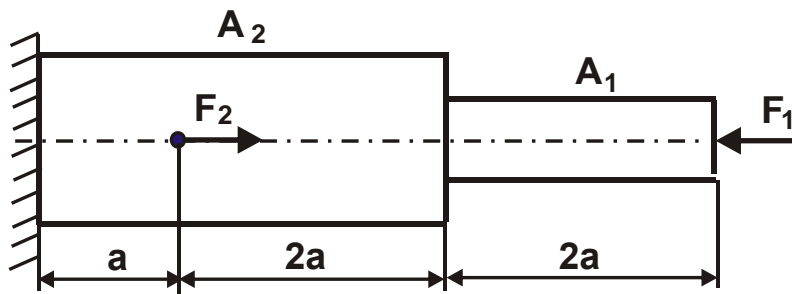


Рисунок 7.14 – Розрахункова схема

Звіт по роботі

Звіт складається із основних понять із побудови епюр поздовжніх сил і нормальних напружень, визначення переміщень вільного кінця стержня під час його розтягання та розв'язку заданої задачі.

Література [5, 9, 17 – 20].

Питання для самоконтролю

1. Розтягання – це вид деформації, за яким у поперечному перетині брусу виникає:

- а) подовжня сила;
- б) подовжня сила та момент;
- в) подовжня та поперечна сили;
- г) момент.

2. Закон Гука під час розтягання брусу (де ε – деформація, E – модуль пружності):

- а) $\sigma = E \cdot \varepsilon$;
- б) $\sigma = E / \varepsilon$;
- в) $\sigma = N / \varepsilon$;
- г) $\sigma = N / E \cdot \varepsilon$.

3. Під час стиску брусу виникає:

- а) нормальне напруження;
- б) дотичне напруження;
- в) вигинний момент;
- г) поперечна сила.

4. Під час розтягання – стиску брусу будують епюри:

- а) подовжніх сил і напружень;
- б) поперечних сил і напружень;
- в) моментів і напружень;

г) поперечних сил і моментів.

5. Збільшення у поперечних розмірах стержня під дією осьової сили відбувається завдяки деформації:

- а) розтягання;
- б) стиску;
- в) кручення;
- г) зминання.

6. Розмірність напруження σ :

- а) Н·м;
- б) Н/м;
- в) Н/м²;
- г) Н·м².

7. Під час осьового розтягання стержнів із сталі поперечна деформація менше повздовжньої:

- а) ~ деформації однакові;
- б) ~ у 1,5 рази;
- в) ~ у 2 рази;
- г) ~ у 3 – 4 рази.

8. Відношення поперечної деформації до подовжньої під час розтягання в межах пропорційності називається:

- а) коефіцієнтом Пуассона;
- б) модулем першого роду (модулем Юнга);
- в) модулем зсуву (модулем другого роду);
- г) коефіцієнтом пружності.

9. Під час розтягання однаковими зусиллями стержнів із сталі, алюмінієвого сплаву та дерева із рівними площами поперечних перетинів напруження будуть:

- а) найбільші у сталюого, менші у стержня із алюмінієвого сплаву, найменші у стержня із дерева;
- б) найбільші – у стержня із дерева;
- в) у всіх стержнях будуть однакові;
- г) найбільші – у стержня із алюмінієвого сплаву.

11. Нормальне напруження у прямокутному перетині балки зі збільшенням її висоти у 2 рази зменшиться:

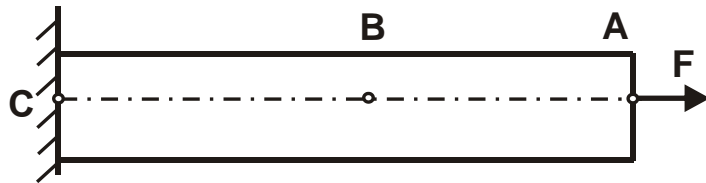
- а) у 2 рази;
- б) у 4 рази;
- в) у 8 разів;

г) у 16 разів.

12. Причина обриву тросу під час підймання вантажу в:

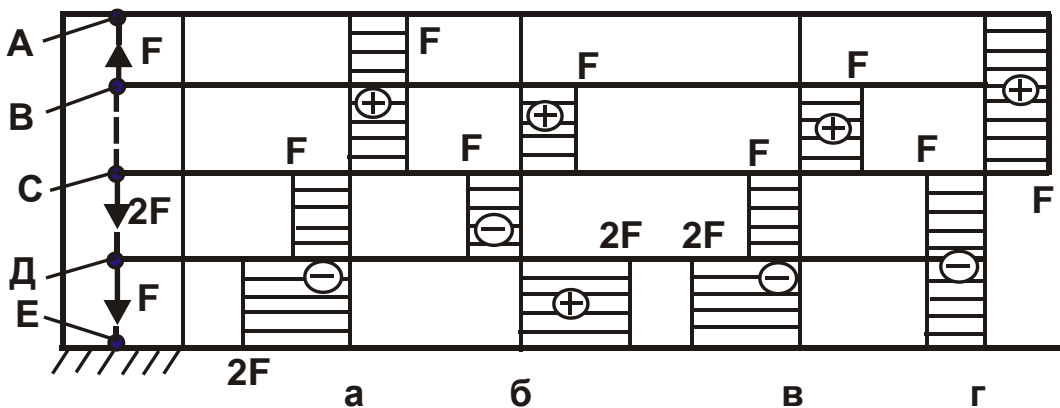
- а) малій міцності тросу;
- б) недостатній жорсткості тросу;
- в) недостатній стійкості тросу;
- г) малій пластичності тросу.

13. Із переносом сили F із точки А у точку В деформація стержня не зміниться на відрізку:



- а) CB;
- б) CA;
- в) BA;

14. Заданому навантаженню стержня відповідає еюра:



- а) еюра а
- б) еюра б
- в) еюра в
- г) еюра г

15. Сила тертя дорівнює:

- а) добутку сили нормального тиску на коефіцієнт ковзання;
- б) відношенню сили нормального тиску на коефіцієнт ковзання;
- в) добутку маси тіла на коефіцієнт ковзання;
- г) відношенню маси тіла на коефіцієнт ковзання.

16. Сила тертя спокою:

- а) більше сили тертя руху;
- б) менше сили тертя руху;
- в) дорівнює силі тертя руху;
- г) дорівнює нулю.

Робота 8. Зріз (зсув) і зминання. Крутіння

Мета роботи – вивчення основних понять та методик розрахунку параметрів силового навантаження елементів конструкцій під час зрізу (зсуву), зминання і крутіння; навчити студентів розв'язувати задачі опору матеріалів в умовах зрізу (зсуву), зминання і крутіння.

Загальні відомості

Основні поняття щодо зрізу (зсуву) і зминання

Якщо на брус діють дві рівні сили F , що достатньо близько розташовані одна до одної, перпендикулярні до вісі бруса й спрямовані у протилежні боки, як це буває під час розрізання металевих прутків або аркушів ножицями (рис. 8.1, а), то за достатньою величиною сил відбувається зріз (шляхом зсуву). Ліва частина тіла відділиться від правої за деяким перетином АВ.

Для розрахунку сили F слід розглянути лише одну частину бруса, що відділилася, замінивши дію іншої (відділеної) частини бруса внутрішніми силами. Ці сили діятимуть у площині перетину (рис. 8.1, б) та викликати появу дотичного напруження (напруження зсуву).

За умови рівномірного розподілу внутрішніх сил за площею перетину бруса, величина дотичного напруження зсуву визначається за формулою:

$$\tau = \frac{F}{A},$$

де A – площа поперечного перетину бруса.

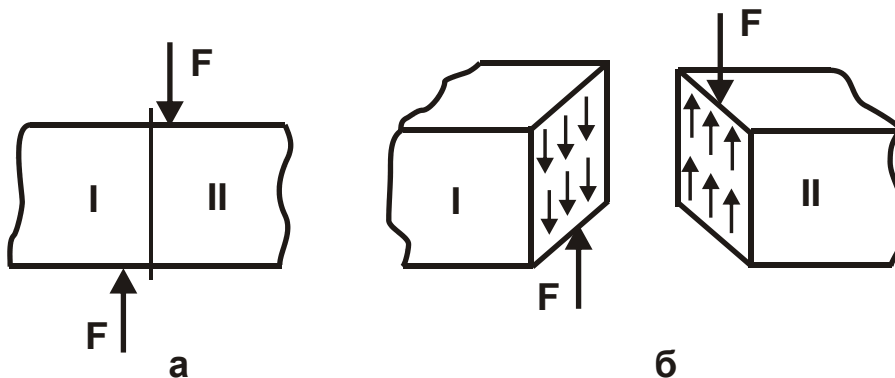


Рисунок 8.1 – Схема зрізу стержня двома силами

Слід зазначити що напружений стан, за умови дії у поперечному перетині бруса лише дотичного напруження, називається чистим зсувом.

На рис. 8.2 графічно показано розрахункову схему зсуву, що відбувається у паралелепіпеді: прямокутник $abcd$ перетворюється у паралелограм $abc'd'$. Величина cc' (рис. 8.3), на яку перетин cd зсунувся відносно сусіднього дуже близько до нього розташованого перетину ab , називається *абсолютним зсувом*. Як видно, абсолютний зсув залежить від відстані між суміжними перетинами ab і cd : чим ця відстань більше, тим більше величина абсолютного зсуву.

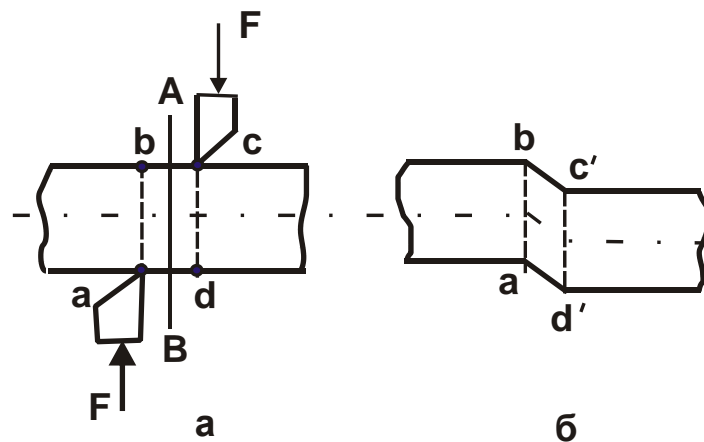


Рисунок 8.2 – Дія двох рівних та протилежних сил на стержень

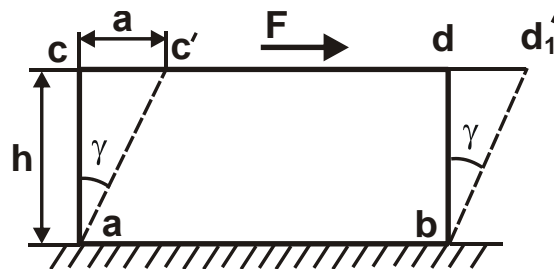


Рисунок 8.3 – Деформація зсуву

Кут γ (рис. 8.3), на який змінюються прямі кути паралелепіпеда, називається *відносним зсувом* та визначається відношенням:

$$\frac{c \cdot c'}{a \cdot c} = \frac{a}{h} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma.$$

Оскільки кут γ незначний, то тангенс цього кута можна приймати рівним самому куту, вираженому в радіанах.

Встановлено, що величина зсуву в межах пружних деформацій пропорційна силі F , відстані h , на якій відбувається зсув (рис. 8.3), і обернено пропорційна площі поперечного перетину F . Виходячи із цього, закон пружності для зсуву виразиться формулою:

$$a = \frac{F \cdot h}{G \cdot A}, \quad (8.1)$$

де G – модуль пружності під час зсуву або модуль пружності другого роду.

За умов $\frac{a}{h} = \gamma$ і $\frac{F}{A} = \tau$ отримано більш загальний вираз закону пружності або закону Гука для зсуву:

$$\tau = G \cdot \gamma. \quad (8.2)$$

Виходячи із формули (8.2), розмірність величини G така сама, як і дотичного напруження, тобто Н/м^2 .

Порівнюючи наведені формули (8.1) і (8.2) із аналогічними формулами, отриманими для розтягання і стиску, видно, що вони абсолютно аналогічні. При цьому експериментально встановлено, що між величинами E і G для одного і того ж матеріалу існує відношення:

$$G \approx 0,4 \cdot E. \quad (8.3)$$

Також встановлено теоретичну залежність між модулем пружності під час розтягання E і модулем зсуву G для одного і того ж матеріалу:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)}. \quad (8.4)$$

Це дозволяє порівнювати значення дотичного напруження, що виникає в умовах розтягання і зсуву.

Для практичного засвоєння наведених понять та теоретичних рішень розглянемо приклад, пов'язаний із визначенням у розрахунках дотичного напруження зсуву.

Приклад 8.1. На рис. 1.2 зображено розрахункову схему параметрів стружкоутворення в умовах процесу різання матеріалу, на якій показано розкладання сили різання F на дві складові: тангенціальну F_z і радіальну F_y . Як відомо, під дією сили різання F відбувається утворення стружки у результаті періодичних зсувів елементів оброблюваного матеріалу вздовж умовної площини зсуву OA , яка розташована під певним кутом β до напрямку руху ріжучого інструмента (різця). Кут β у теорії різання називають *умовним кутом зсуву оброблюваного мате-*

ріалу й визначають за умови досягнення у площині зсуву найбільшого дотичного напруження τ , що виникає від дії сили різання F і становить із площиною зсуву кут $\beta + (\psi - \gamma)$, де ψ – умовний кут тертя ψ оброблюваного матеріалу із передньою поверхнею інструмента; γ – передній кут інструмента.

Виходячи із цього, визначимо умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу β та силу різання F за умови досягнення у площині зсуву найбільшого дотичного напруження τ .

Із урахуванням проекції сили різання F на площину зсуву, яка дорівнює $F \cdot \cos[\beta + (\psi - \gamma)]$, визначено дотичне напруження τ :

$$\tau = \frac{F \cdot \cos[\beta + (\psi - \gamma)]}{a \cdot b} \cdot \sin \beta, \quad (8.5)$$

де a, b – відповідно, товщина і ширина зрізу, м.

Згідно отриманої залежності (8.5), дотичне напруження τ змінюється за екстремальною залежністю від кута β . Тому підкоряючи залежність (8.5) необхідній умові екстремуму від кута β , тобто умові $\tau'_\beta = 0$, отримано:

$$\tau'_\beta = \frac{F \cdot \cos[2\beta + (\psi - \gamma)]}{a \cdot b} = 0. \quad (8.6)$$

Звідки визначене екстремальне значення кута β :

$$\beta = 45^\circ - \frac{(\psi - \gamma)}{2}. \quad (8.7)$$

Друга похідна функції τ :

$$\tau''_\beta = \frac{-2 \cdot F \cdot \sin[2\beta + (\psi - \gamma)]}{a \cdot b} \quad (8.8)$$

у точці екстремуму набуває негативного значення. Отже, має місце максимум функції τ і тому кут β , що визначається залежністю (8.7), є умовним кутом зсуву оброблюваного матеріалу.

Виходячи із залежності (8.5), із урахуванням залежності (8.7) за умови $\tau = \tau_{зсув}$, визначено силу різання F :

$$F = \frac{a \cdot b \cdot \tau_{зсув}}{\cos[\beta + (\psi - \gamma)] \cdot \sin \beta} = \frac{a \cdot b \cdot \tau_{зсув}}{\sin^2 \left[45^\circ - \frac{(\psi - \gamma)}{2} \right]} = \frac{a \cdot b \cdot \tau_{зсув}}{\sin^2 \beta}, \quad (8.9)$$

де $\tau_{зсув}$ – межа міцності на зсув оброблюваного матеріалу, Н/м².

Із урахуванням залежності (8.7) і відомого тригонометричного перетворення $2 \cdot \sin^2 \left[45^\circ - \frac{(\psi - \gamma)}{2} \right] = 1 - \cos \left[90^\circ - (\psi - \gamma) \right] = 1 - \sin(\psi - \gamma)$ остаточно отримано:

$$F = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{зсув}}{1 - \sin(\psi - \gamma)}. \quad (8.10)$$

Таким чином, силу різання F аналітично виражено відносно площі поперечного перетину зрізу ($a \cdot b$), межі міцності на зсув оброблюваного матеріалу $\tau_{зсув}$ і кута дії $\omega = (\psi - \gamma)$.

Тангенціальна F_z складова сили різання визначається:

$$\begin{aligned} F_z = F \cdot \cos(\psi - \gamma) &= \frac{a \cdot b \cdot \tau_{зсув} \cdot \cos(90^\circ - 2\beta)}{\sin^2 \beta} = \frac{a \cdot b \cdot \tau_{зсув} \cdot \sin 2\beta}{\sin^2 \beta} = \\ &= \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{зсув} \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta}{\sin^2 \beta} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{зсув}}{\operatorname{tg} \beta}. \end{aligned} \quad (8.11)$$

Із урахуванням залежності (8.7) остаточно отримано:

$$F_z = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{зсув}}{\operatorname{tg} \left[45^\circ - \frac{(\psi - \gamma)}{2} \right]}. \quad (8.12)$$

Радіальна F_y складова сили різання визначається:

$$\begin{aligned} F_y = F \cdot \sin(\psi - \gamma) &= \frac{a \cdot b \cdot \tau_{зсув} \cdot \cos 2\beta}{\sin^2 \beta} = \frac{a \cdot b \cdot \tau_{зсув} \cdot (\cos^2 \beta - \sin^2 \beta)}{\sin^2 \beta} = \\ &= a \cdot b \cdot \tau_{зсув} \cdot \left(\frac{1}{\operatorname{tg}^2 \beta} - 1 \right) = a \cdot b \cdot \tau_{зсув} \cdot \frac{(1 - \operatorname{tg}^2 \beta)}{2 \cdot \operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{2}{\operatorname{tg} \beta} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{зсув}}{\operatorname{tg} 2\beta \cdot \operatorname{tg} \beta}. \end{aligned} \quad (8.13)$$

Тоді із урахуванням залежності (8.7) отримано:

$$F_y = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{зсув}}{\operatorname{tg} \left[90^\circ - (\psi - \gamma) \right] \cdot \operatorname{tg} \left[45^\circ - \frac{(\psi - \gamma)}{2} \right]} = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{зсув} \cdot \operatorname{tg}(\psi - \gamma)}{\operatorname{tg} \left[45^\circ - \frac{(\psi - \gamma)}{2} \right]}. \quad (8.14)$$

Згідно відомого тригонометричного перетворення

$$\operatorname{tg} \left[45^\circ - \frac{(\psi - \gamma)}{2} \right] = \frac{1 - \cos \left[90^\circ - (\psi - \gamma) \right]}{\sin \left[90^\circ - (\psi - \gamma) \right]} = \frac{1 - \sin(\psi - \gamma)}{\cos(\psi - \gamma)}$$

отримано:

$$F_y = \frac{2 \cdot a \cdot v \cdot \tau_{зсув} \cdot \sin(\psi - \gamma)}{1 - \sin(\psi - \gamma)}. \quad (8.15)$$

Як видно, сила різання F та складові сили різання F_z і F_y тим менше, чим менше параметри a , v , $\tau_{зсув}$, ψ і більше передній кут інструмента γ (відповідно, більше умовний кут зсуву оброблюваного матеріалу β). У цьому разі тангенціальна складова сили різання F_z більше радіальної складової сили різання F_y .

Коефіцієнт різання $K_{різ} = F_z / F_y$ визначається:

$$K_{різ} = \frac{1}{\operatorname{tg}(\psi - \gamma)} = \frac{1}{\operatorname{tg}(90^\circ - 2\beta)} = \frac{1}{\operatorname{ctg}2\beta} = \operatorname{tg}2\beta. \quad (8.16)$$

Як видно, коефіцієнт різання $K_{різ}$ цілком однозначно залежить від умовного кута зсуву оброблюваного матеріалу β : чим він більше, тим більше $K_{різ}$ і значніше ефективність процесу різання.

Умовне напруження різання $\sigma = F_z / (a \cdot v)$ у напрямі дії тангенціальної складової сили різання F_z із урахуванням залежностей (8.11) і (8.12) визначається:

$$\sigma = \frac{2 \cdot \tau_{зсув}}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{2 \cdot \tau_{зсув}}{\operatorname{tg}\left[45^\circ - \frac{(\psi - \gamma)}{2}\right]}. \quad (8.17)$$

Використовуючи відому формулу професора Тіме А. Н.:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\cos\gamma}{K_L - \sin\gamma}, \quad (8.18)$$

із урахуванням залежності (8.7) визначено коефіцієнт усадки стружки K_L :

$$K_L = \cos\gamma \cdot \frac{\left[1 + \operatorname{tg}\frac{(\psi - \gamma)}{2}\right]}{\left[1 - \operatorname{tg}\frac{(\psi - \gamma)}{2}\right]} + \sin\gamma. \quad (8.19)$$

Для нульового переднього кута різця ($\gamma = 0$) залежність (8.19) спрощується і набуває вигляду:

$$K_L = \frac{1 + \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}{1 - \operatorname{tg}\frac{\psi}{2}}. \quad (8.20)$$

У табл. 8.1 і на рис. 8.4 наведено розрахункові значення коефіцієнта усадки стружки K_L залежно від кута ψ для σ .

Таблиця 8.1 – Розрахункові значення коефіцієнта усадки стружки K_L

$\psi, ^\circ$	0	15	30	45	60	75	90
K_L	1	1,3	1,73	2,39	3,7	7,7	∞

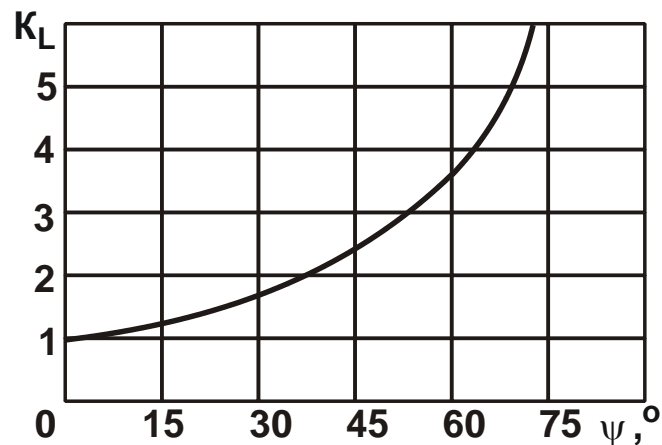


Рисунок 8.4 – Залежність коефіцієнта усадки стружки K_L від умовного кута тертя ψ оброблюваного матеріалу із передньою поверхнею інструмента

Як видно, зі збільшенням кута ψ коефіцієнт усадки стружки K_L безперервно збільшується, набуваючи за умови кута $\psi = 90^\circ$ нескінченного значення.

У табл. 8.2 наведено розраховані за залежністю (8.20) значення K_L для різних значень переднього кута інструмента γ за умови $\psi = 30^\circ$. Із переходом від негативних до позитивних значень кута γ коефіцієнт усадки стружки K_L зменшується, що пов'язано зі зменшенням силової напруженості процесу різання.

Таблиця 8.2 – Розрахункові значення коефіцієнта усадки стружки K_L

$\gamma, ^\circ$	-20	-10	0	10	20
K_L	2,24	1,85	1,73	1,58	1,46

Важливо встановити зв'язок між коефіцієнтом усадки стружки K_L і коефіцієнтом тертя $f = \operatorname{tg}\psi$ за умови $\gamma = 0$. Для цього необхідно у залежності (8.20) виразити функцію $\operatorname{tg}\psi/2$ через $\operatorname{tg}\psi = f$. Використовуючи тригонометричний вираз $\operatorname{tg}\frac{\psi}{2} = \frac{1 - \cos\psi}{\sin\psi}$, отримано:

$$K_L = \frac{1 + \frac{(1 - \cos\psi)}{\sin\psi}}{1 - \frac{(1 - \cos\psi)}{\sin\psi}} = \frac{\sin\psi + 1 - \cos\psi}{\sin\psi - 1 + \cos\psi}. \quad (8.21)$$

Після перетворення функції $\operatorname{tg}\psi = \frac{\sin\psi}{\cos\psi} = \frac{\sin\psi}{\sqrt{1 - \sin^2\psi}}$ та розв'язку отриманого рівняння відносно $\sin\psi$, отримано: $\sin\psi = \frac{f}{\sqrt{1 + f^2}}$. Відповідно, $\cos\psi = \sqrt{1 - \sin^2\psi} = \frac{1}{\sqrt{1 + f^2}}$. Тоді залежність (8.21) визначиться:

$$K_L = \frac{(f - 1) + \sqrt{1 + f^2}}{(f + 1) - \sqrt{1 + f^2}}. \quad (8.22)$$

Як видно, має місце збільшення коефіцієнта усадки стружки K_L зі збільшенням коефіцієнта тертя f , однак несуттєве (табл. 8.3 і рис. 8.5).

Таблиця 8.3 – Розрахункові значення коефіцієнта усадки стружки K_L

f	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0
K_L	1,0	1,22	1,48	1,77	2,08	2,44

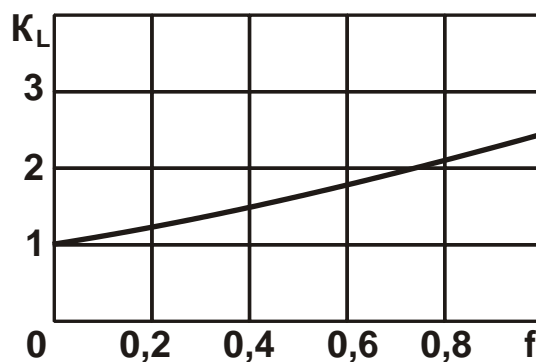


Рисунок 8.5 – Залежність коефіцієнта усадки стружки K_L від коефіцієнта тертя f

За умови негативного переднього кута інструмента $\gamma < 0$ у отриманій залежності для визначення основних параметрів силової напруженості процесу різання β , F , F_z , F_y , $K_{\text{різ}}$ і σ необхідно підставити замість кута дії $\omega = (\psi - \gamma)$ кут дії $\omega = (\psi + \gamma)$:

$$\beta = 45^\circ - \frac{\omega}{2}; \quad (8.23)$$

$$F = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{\text{зсув}}}{[1 - \sin \omega]}; \quad (8.24)$$

$$F_z = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{\text{зсув}}}{\text{tg} \left(45^\circ - \frac{\omega}{2} \right)}; \quad (8.25)$$

$$F_y = \frac{2 \cdot a \cdot b \cdot \tau_{\text{зсув}} \cdot \sin \omega}{[1 - \sin \omega]}; \quad (8.26)$$

$$K_{\text{різ}} = \frac{F_z}{F_y} = \frac{1}{\text{tg} \omega}; \quad (8.27)$$

$$\sigma = \frac{2 \cdot \tau_{\text{зсув}}}{\text{tg} \left[45^\circ - \frac{\omega}{2} \right]}. \quad (8.28)$$

У табл. 8.4 і на рис. 8.6 наведено розрахункові значення параметрів F , F_z , F_y , $K_{\text{різ}}$ і σ залежно від умовного кута зсуву оброблюваного матеріалу β у всьому можливому діапазоні його зміни для таких вихідних даних: $a = 0,1$ мм, $b = 3$ мм, $\tau_{\text{зсув}} = 400$ Н/мм².

Таблиця 8.4 – Розрахункові значення параметрів F , F_z , F_y , $K_{\text{різ}}$ і σ

$\beta, ^\circ$	0	10	20	30	40	45
F, H	∞	3 964	1 030	480	290	240
F_z, H	∞	1 364	660	420	286	240
F_y, H	∞	3 792	790	240	49	0
$K_{\text{різ}}$	0	0,36	0,84	1,73	5,68	∞
$\sigma, \text{H/мм}^2$	∞	4 546	2 200	1 400	952	800

Як витікає із рис. 8.6, зі збільшенням умовного кута зсуву оброблюваного матеріалу β відбувається суттєве зменшення (у ряді випадків аж до нуля) параметрів силової напруженості процесу різання F , F_z , F_y і σ , що сприяє підвищенню його ефективності.

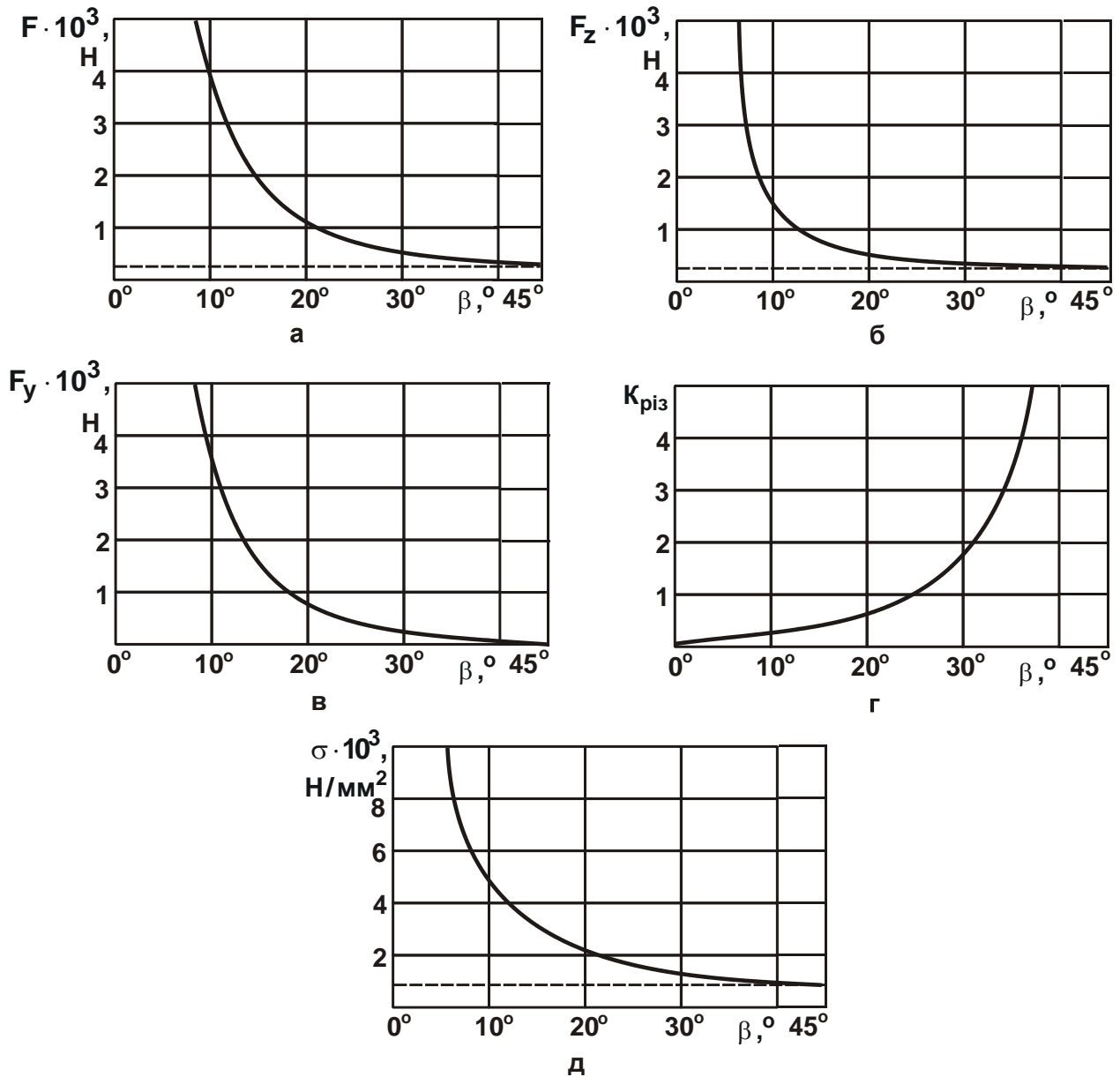


Рисунок 8.6 – Залежності параметрів F (а), F_z (б), F_y (в), K_{piz} (г) і σ (д) від умовного кута зсуву оброблюваного матеріалу β

Отже, основним напрямом зменшення силової напруженості процесу різання необхідно розглядати збільшення умовного кута зсуву оброблюваного матеріалу β шляхом зменшення кута дії $\omega = (\psi - \gamma)$ відповідно до залежності (8.7). У цьому випадку умовне напруження

різання σ зменшується від нескінченності (для $\beta = 0^\circ$) до значення $2 \cdot \tau_{зсув}$ (для $\beta = 45^\circ$), а коефіцієнт різання $K_{різ}$, навпаки, збільшується від нуля до нескінченності.

У табл. 8.5, табл. 8.6 і на рис. 8.6 наведено розрахункові значення параметрів β , F , F_z , F_y , $K_{різ}$ і σ залежно від переднього кута інструмента γ у всьому можливому діапазоні його зміни для таких вихідних даних: $\psi = 10^\circ$ і $\psi = 30^\circ$, $a = 0,1$ мм, $b = 3$ мм, $\tau_{зсув} = 400$ Н/мм². Вони указують на ефективність збільшення позитивного переднього кута інструмента γ , а також на зменшення інтенсивності тертя стружки, що утворюється, із передньою поверхнею інструмента, що визначається умовним кутом тертя ψ . Отже, під час різання лезовими інструментами, що характеризуються позитивними передніми кутами, сила різання F та умовне напруження різання σ (яке дорівнює енергоємності обробки) менше, ніж під час різання абразивними інструментами, що характеризуються негативними передніми кутами. Це вказує на те, що в умовах остаточної обробки, яка, як правило, здійснюється абразивними інструментами, збільшується силова напруженість процесу різання, а це вимагає зниження продуктивності обробки.

Як витікає із наведених графіків, для випадку $\gamma < 0$ справедлива умова $F_z < F_y$, а для випадку $\gamma \geq 0$, навпаки, умова $F_z > F_y$. Тому для випадку $\gamma < 0$ визначальним чинником силової напруженості процесу різання є радіальна складова сили різання F_y , яка найбільш відповідальна за формування параметрів точності й шорсткості оброблюваної поверхні.

Для випадку $\gamma \geq 0$ визначальним чинником силової напруженості процесу різання є тангенціальна складова сили різання F_z , яка значно менше, ніж для випадку $\gamma < 0$, а також менше радіальної складової сили різання F_y . Це дозволяє розглядати випадок $\gamma \geq 0$ більш ефективним із погляду забезпечення високих показників точності та якості оброблюваних поверхонь деталей.

Приклад 8.2. Для визначення умов руйнування ріжучої частини інструменту (різця) розглянемо розрахункову схему (рис. 8.7), у якій вісь координат у збігається із передньою поверхнею різця. Кут α_1 – це

задній кут різця, а складові сили різання F_z і F_y прикладені на деякому віддаленні від вершини різця (у межах ділянки пружного контакту оброблюваного матеріалу із передньою поверхнею різця).

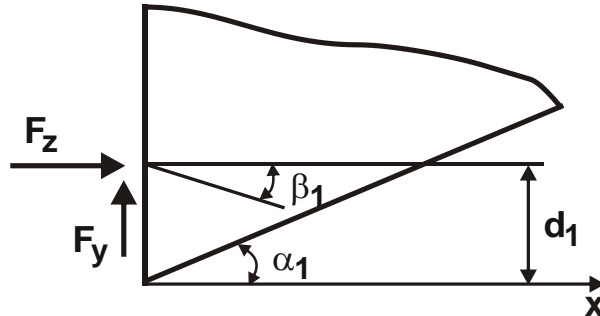


Рисунок 8.7 – Розрахункова схема положення площини зрізу (зсуву) різця

Приймемо, що ріжуча частина різця руйнується у результаті зрізу (зсуву) від дотичного напруження, що виникає у небезпечному перетині ріжучої частини різця та перевищує допустиме значення.

Для визначення дотичного напруження τ в умовній площині зрізу (зсуву), що проходить через точку дії сил F_z і F_y , спроектуємо ці сили на площину, похилу до осі координат x під кутом β_1 :

$$\tau = \frac{1}{S} \cdot (F_z \cdot \cos \beta_1 - F_y \cdot \sin \beta_1), \quad (8.29)$$

де $S = a \cdot l$ – площа зрізу (зсуву), m^2 ;
 a – ширина ріжучої частини різця, m ;
 l – довжина зрізу (зсуву), m .

Довжина l визначається із системи рівнянь:

$$\begin{cases} l \cdot \cos \beta_1 = c \cdot \cos \alpha_1; \\ l \cdot \sin \beta_1 + c \cdot \sin \alpha_1 = d, \end{cases} \quad (8.30)$$

де d – відстань від вершини різця до точки дії сили різання, m ;
 c – довжина зрізаної частини задньої поверхні різця, m .

Після нескладних перетворень отримано:

$$l = \frac{d \cdot \cos \alpha_1}{\sin(\beta_1 + \alpha_1)}. \quad (8.31)$$

Після підстановки залежності (8.31) у залежність (8.29), маємо:

$$\tau = \frac{\sin(\beta_1 + \alpha_1) \cdot \cos \beta_1}{a \cdot d \cdot \cos \alpha_1} \cdot (F_z - F_y \cdot \operatorname{tg} \beta_1). \quad (8.32)$$

Із урахуванням виразу $K_{\text{різ}} = F_z / F_y$ залежність (8.32) прийме вигляд:

$$\tau = \frac{F_y \cdot \sin(\beta_1 + \alpha_1) \cdot \cos \beta_1}{a \cdot d \cdot \cos \alpha_1} \cdot (K_{\text{різ}} - \text{tg} \beta_1). \quad (8.33)$$

Із залежності (8.33) витікає, що зі збільшенням кута β_1 , наприклад, за умови $\alpha_1 = 0$ із урахуванням тригонометричного перетворення $\sin \beta_1 \cdot \cos \beta_1 = 0,5 \cdot \sin 2\beta_1$:

$$\tau = \frac{F_y \cdot \sin 2\beta_1}{2 \cdot a \cdot d} \cdot (K_{\text{різ}} - \text{tg} \beta_1). \quad (8.34)$$

множник $\sin 2\beta_1$, який входить у залежність (8.34), збільшується, а другий множник $(K_{\text{різ}} - \text{tg} \beta_1)$ – зменшується. Отже, дотичне напруження τ зі збільшенням кута β_1 змінюється за екстремальною залежністю.

Результати розрахунків, отримані із використанням залежності (8.34) та із урахуванням умови $K_{\text{різ}} = 2$, наведено у табл. 8.5.

Таблиця 8.5 – Розрахункові значення множника $\sin 2\beta_1 \cdot (K_{\text{різ}} - \text{tg} \beta_1)$

β_1 , град.	0	20	30	40
$\sin 2\beta_1 \cdot (K_{\text{різ}} - \text{tg} \beta_1)$	0	1,05	1,23	1,14

Для прийнятих умов небезпечний перетин, що визначає положення площини зрізу (зсуву), розташованої під кутом 30° . Для визначення екстремального значення кута β_1 слід продиференціювати дотичне напруження τ , що описується залежністю (8.33), за кутом β_1 , а похідну прийняти рівною нулю, тобто підпорядкувати функцію дотичного напруження τ необхідній умові екстремуму: $\tau'_{\beta_1=0}$. У результаті перетворень отримано квадратне рівняння:

$$\text{tg}^2 \beta_1 - \frac{2 \cdot (1 + K_{\text{різ}} \cdot \text{tg} \alpha_1)}{(\text{tg} \alpha_1 - K_{\text{різ}})} \cdot \text{tg} \beta_1 - 1 = 0. \quad (8.35)$$

Розв'язання квадратного рівняння має вигляд:

$$\text{tg} \beta_1 = \frac{(1 + K_{\text{різ}} \cdot \text{tg} \alpha_1)}{(\text{tg} \alpha_1 - K_{\text{різ}})} \pm \sqrt{\frac{(1 - K_{\text{різ}} \cdot \text{tg} \alpha_1)^2}{(\text{tg} \alpha_1 - K_{\text{різ}})^2} + 1}. \quad (8.36)$$

Знак "+" або "-" у залежності (8.36) встановимо, виходячи із таких міркувань. Кут загострення різця набуває значення, яке близьке до 90° . Отже, $\alpha_1 \approx 0$. Приймаючи у залежності (8.36) значення $\alpha_1 = 0$ та $\text{tg}\alpha_1 = 0$, отримано:

$$\text{tg}\beta_1 = -\frac{1}{K_{\text{різ}}} \pm \sqrt{\frac{1}{K_{\text{різ}}^2} + 1}. \quad (8.37)$$

Якщо прийняти знак "-", то функція $\text{tg}\beta_1$ і, відповідно, кут β_1 будуть негативними, що за умови $\alpha_1 \approx 0$ втрачає фізичний зміст. Отже, у залежності (8.37) необхідно приймати лише знак "+". За цих умов функція $\text{tg}\beta_1$ і кут β_1 будуть позитивними величинами, що відповідає реальним умовам руйнування робочої частини різця.

Екстремальні значення кута β_1 зі збільшенням коефіцієнта різання $K_{\text{різ}}$ збільшуються, а зі збільшенням кута α_1 зменшуються (табл. 8.6, рис. 8.8).

Із залежності (8.37) витікає, що зі збільшенням коефіцієнта різання $K_{\text{різ}} > 5,0$ кут β_1 прагне прийняти значення $\beta_1 = 45^\circ$.

Для визначення екстремального (максимального) значення дотичного напруження τ_{max} , що відповідає екстремальному значенню кута β_1 , залежність (8.32) за умови $\alpha_1 = 0$ подамо у вигляді:

$$\tau = \frac{\sin 2\beta_1}{2 \cdot a \cdot d} \cdot (F_z - F_y \cdot \text{tg}\beta_1). \quad (8.38)$$

Таблиця 8.6 – Розрахункові значення кута β_1

α_1 , град.	$K_{\text{різ}}$			
	0,5	1,5	2,0	5,0
0	13	22	31	40
10	8	18	27	34
30	–	7	17	24

Зі збільшенням коефіцієнта різання $K_{\text{різ}}$ екстремальне значення кута β_1 та функція $\sin 2\beta_1$ збільшуються, а вираз $(F_z - F_y \cdot \text{tg}\beta_1)$ залишається постійним.

За умови $K_{різ} > 5,0$ мають місце значення $\text{tg}\beta_1 \rightarrow 1$; $\sin 2\beta_1 \rightarrow 1$; $F_z \gg F_y$, а залежність (8.38) набуває спрощеного вигляду:

$$\tau = \frac{F_z}{2 \cdot a \cdot d}. \quad (8.39)$$

У цьому випадку максимальне дотичне напруження τ_{\max} визначається, головним чином, тангенціальною складовою сили різання F_z : чим більше F_z , тим більше τ_{\max} . Для зменшення τ_{\max} , відповідно до залежності (8.38), необхідно, перш за все, зменшити різницю складових сили різання $F_z - F_y$, що досягається керуванням умовами стружкоутворення під час різання та геометричними параметрами ріжучого інструменту (різця).

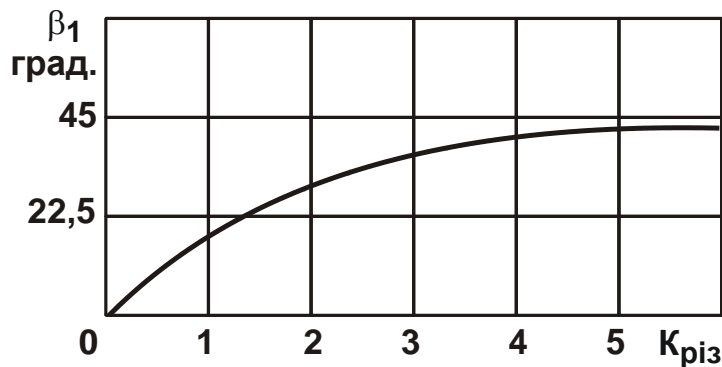


Рисунок 8.8 – Залежність кута β_1 від коефіцієнта різання $K_{різ}$

Таким чином показано, що на основі визначення дотичного напруження зсуву можна вирішувати складні та важливі для техніки і технологій практичні завдання.

Контактні напруження під час зминання

У ряді випадків зусилля від одного елемента конструкції на іншій передаються незначним майданчиком, який фактично є точкою та має місце у кулькових підшипниках, зубчатих передачах тощо. Це приводить до того, що матеріал біля такого майданчика знаходиться в об'ємному напруженому стані, дослідити який методами опору матеріалу дуже складно. Для цього слід застосувати більш складні методи теорії пружності.

Напруження, що виникає у зоні контакту двох тіл, називається *контактним*. Встановлено, що його величина швидко зменшується із

віддаленням від площі контакту. Сила, що передається через поверхню контакту, викликає місцеву деформацію стиску, яку називають *зминанням* (рис. 8.9).

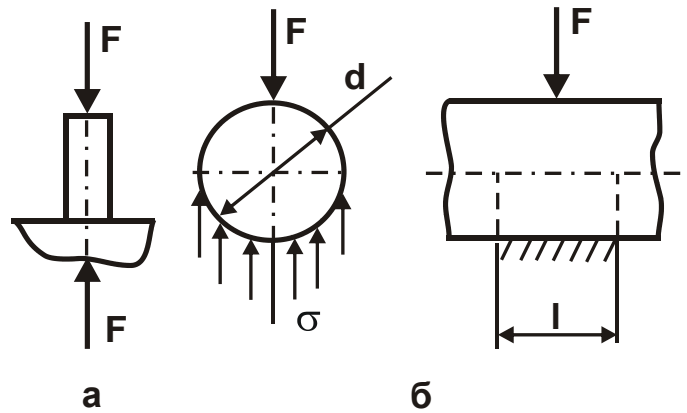


Рисунок 8.9 – Деформація зминання

Для визначення умов міцності на зминання можна використати формули із умов міцності на розтягання (стиск), підставивши замість напруження стиску $[\sigma]_{\text{СТ}}$ напруження зминання $[\sigma]_{\text{ЗМ}}$:

$$A = \frac{F}{[\sigma]_{\text{ЗМ}}};$$

$$\sigma = \frac{F}{A} \leq [\sigma]_{\text{ЗМ}};$$

$$F = [\sigma]_{\text{ЗМ}} \cdot A \geq F_{\text{д}}.$$

Важливим також є питання вибору допустимого напруження на зсув (зріз). Це питання більш складне порівняно із умовами розтягання і стиску, оскільки під час зсуву складніше відтворити чистий зсув без вигину та інших додаткових явищ, які впливають на результати випробування. Однак, і в умовах зсуву його основу, як і під час розтягання та стиску, складає напруження, що відповідає межі текучості або межі міцності матеріалу.

Головне напруження у випадку плоского напруженого стану визначається рівняннями:

$$\begin{cases} \sigma_{\text{max}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2}; \\ \sigma_{\text{min}} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{1}{2} \cdot \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4 \cdot \tau^2}. \end{cases}$$

Чистий зсув здійснюється за умови: $\sigma_x = \sigma_y = 0$, тобто за умови, що на гранях елемента діє лише дотичне напруження. Тоді головне напруження для випадку чистого зсуву, виходячи із наведених рівнянь, визначиться:

$$\sigma_{\max} = \tau; \quad \sigma_{\min} = -\tau.$$

Як встановлено раніше, в умовах плоского напруженого стану одне із трьох головних напружень повинне дорівнювати нулю. Оскільки значення σ_{\min} негативне, то воно найменше із трьох головних напружень і повинно бути позначено σ_3 .

Отже, в умовах чистого зсуву:

$$\sigma_1 = \tau; \quad \sigma_2 = 0; \quad \sigma_3 = -\tau.$$

Згідно першої теорії міцності отримуємо умову:

$$[\sigma] \geq \sigma_1 = \tau.$$

Цим показано, що дотичне напруження зсуву не повинне перевищувати допустимого напруження на розтягання:

$$[\tau] \leq [\sigma].$$

За другою теорією міцності:

$$[\sigma] \geq \sigma_1 - \mu \cdot \sigma_3 = (\tau + \mu \cdot \tau).$$

Для сталі (за умови $\mu = 0,3$) допустиме дотичне напруження дорівнює:

$$[\tau] \approx 0,77 \cdot [\sigma].$$

Згідно третьої теорії міцності, отримаємо:

$$[\sigma] \geq \sigma_1 - \sigma_3 = \tau + \tau = 2 \cdot \tau.$$

Звідки

$$[\tau] = 0,5 \cdot [\sigma].$$

Згідно четвертої (енергетичної) теорії міцності, отримаємо:

$$[\sigma] \geq \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2} - (\sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_1 \cdot \sigma_3) = \sqrt{\tau^2 + \tau^2 + \tau^2} = \tau \cdot \sqrt{3};$$

$$[\tau] = 0,57 \cdot [\sigma].$$

Тому під час виконання практичних розрахунків, як правило, приймають для крихких матеріалів:

$$[\tau] = (0,8 \dots 1,0) \cdot [\sigma],$$

для пластичних матеріалів:

$$[\tau] = (0,5 \dots 0,6) \cdot [\sigma].$$

За відомим допустимим дотичним напруженням зсуву можна встановити умову міцності на зсув:

$$\tau = \frac{F}{A} \leq [\tau].$$

Ця умова має абсолютно такий же вигляд, як і умова для розтягання (стиску).

Приклад 8.3. На практиці ряд деталей конструкцій працює, головним чином, на зсув, внаслідок чого основне значення набуває перевірка міцності їх за дотичними напруженнями. Найпростішими прикладами подібних деталей є болтові та заклепувальні з'єднання. Заклепки у багатьох випадках уже витіснено зварюванням. Однак вони мають ще дуже велике застосування для з'єднання частин металевих конструкцій: ферм мостів, кранів, резервуарів тощо.

Для утворення заклепувального з'єднання обох металевих листів у них просвердлюють або продавляють отвори. Потім у кожний отвір встановлюють нагрітий стержень заклепки із однієї головкою. Інший кінець заклепки розклепують ударами спеціального молотка або тиском гідравлічного преса (клепальної машини) для утворення другої головки. Дрібні заклепки (малого діаметра – менше 8 мм) встановлюють у холодному стані (це авіаційні конструкції).

Для вивчення роботи заклепок розглянемо найпростіший приклад заклепувального з'єднання (рис. 8.10). Шість заклепок, розташованих у два ряди, з'єднують два металеві листи. Під дією сил F ці металеві листи прагнуть зсунути один поверх іншого, чому перешкоджають заклепки, на які й буде передаватися дія сил F .

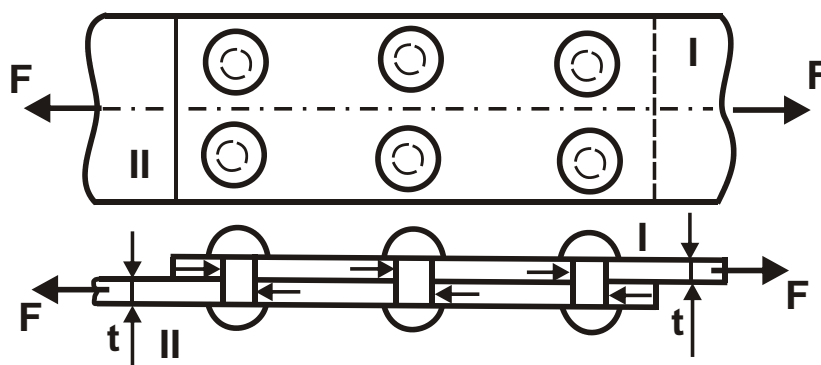


Рисунок 8.10 – Заклепувальне з'єднання

Для перевірки міцності заклепок застосуємо загальний порядок вирішення завдань опору матеріалів.

На кожну заклепку передаються дві рівні й прямо протилежні сили: одна – від першого металевого листа, інша – від другого металевого листа. Практика показує, що одні із заклепок навантажуються більше, інші – менше. Однак до моменту руйнування зусилля, що передаються на різні заклепки, більш-менш вирівнюються завдяки виникненню пластичних деформацій. Тому прийнято вважати, що всі заклепки працюють однаково. Отже, для n заклепок у з'єднанні, зображеному на рис. 8.10, на кожну із них діють дві рівні й протилежні за напрямом сили $F_1 = F/n$ (рис. 8.11). Ці сили передаються на заклепку шляхом тиску відповідного металевого листа на бічну напівциліндрову поверхню стержня. Сили F_1 прагнуть перерізати заклепку уздовж площини $m-k$ розділу обох металевих листів.

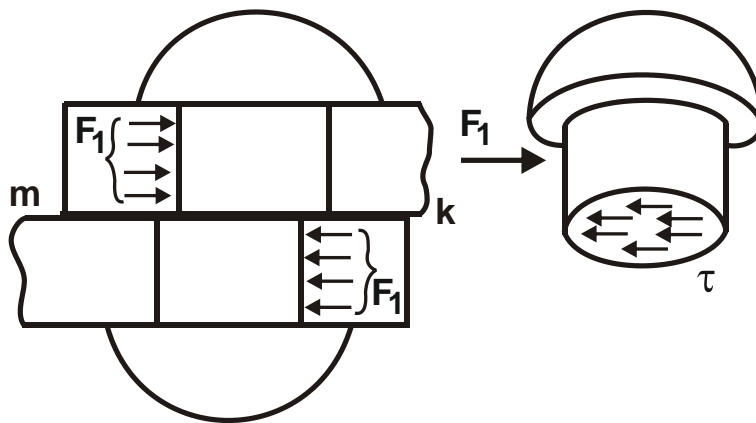


Рисунок 8.11 – Пружний стан заклепки

Для розрахунку напружень, що діють на цій площині, розділимо умовно заклепувальний стержень перетином $m-k$ та відкинемо нижню частину стержня (рис. 8.11). Внутрішні зусилля, що передаються на цьому перетині від нижньої частини стержня до верхньої, будуть урівноважувати силу F_1 , тобто будуть діяти паралельно їй у площині перетину, і в сумі дорівнюють рівнодіючій, яка дорівнює F_1 . Отже, напруження, які виникають у цьому перетині та діють відносно площини перетину, це – дотичні напруження τ . Приймаючи рівномірний розподіл цих напружень на перетині за умови, що площа перетину дорівнює діаметру заклепки d , дотичне напруження визначиться:

$$\tau = \frac{F_1}{\frac{\pi \cdot d^2}{4}} = \frac{F}{n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}}$$

Якщо позначити допустиме дотичне напруження на зсув $[\tau]$, то умова міцності заклепки на зсув прийме вигляд:

$$\tau = \frac{F}{A} = \frac{F}{n \cdot \frac{\pi \cdot d^2}{4}} \leq [\tau].$$

Із цієї умови можна визначити необхідний діаметр заклепок d , якщо задати їх кількість, і навпаки. Традиційно, задають діаметр заклепок d залежно від товщини t металевих листів, що склепуються ($d \approx 2 \cdot t$), і визначають необхідну кількість заклепок n :

$$n \geq \frac{F}{\frac{\pi \cdot d^2}{4} \cdot [\tau]}.$$

Знаменник цієї формули виражає ту силу, яку безпечно може прийняти на себе кожна заклепка. Однак дотримання умови міцності на зсув (зріз) ще не завжди забезпечує міцність заклепувального з'єднання. Якщо під час передачі тиску від металевих листів на заклепку відбудеться зминання стінок отвору або стержня заклепки на напівциліндровій поверхні контакту, то це призведе до руйнування з'єднання. Тому для забезпечення його надійності необхідно також здійснити перевірку заклепок (або металевих листів) на зминання.

На рис. 8.12 зображено примірну схему передачі тисків на стержень заклепки. Закон розподілу цих тисків на циліндричній поверхні невідомо; він багато у чому залежить від умов виготовлення конструкції. Прийнято вважати, що нерівномірний тиск, що передається на напівциліндрову поверхню заклепки, рівномірно розподіляється на діаметральній площині перетину заклепки ВС. Напруження на цій діаметральній площині приблизно дорівнює найбільшому умовному напруженню зминання $\sigma_{зМ}$ у точці А поверхні заклепки (рис. 8.12).

Щоб визначити це умовне напруження зминання, необхідно розділити силу, що приходиться на заклепку, на площу діаметрального перетину ВСС'В' (рис. 8.12). Ця площа є прямокутник, однієї стороною якого є діаметр заклепки, інша сторона дорівнює товщині металевих листів, що передає тиск на стержень заклепки.

Якщо тиск на одну заклепку дорівнює F/n , то

$$\sigma_{зМ} = \frac{F}{n \cdot t \cdot d}.$$

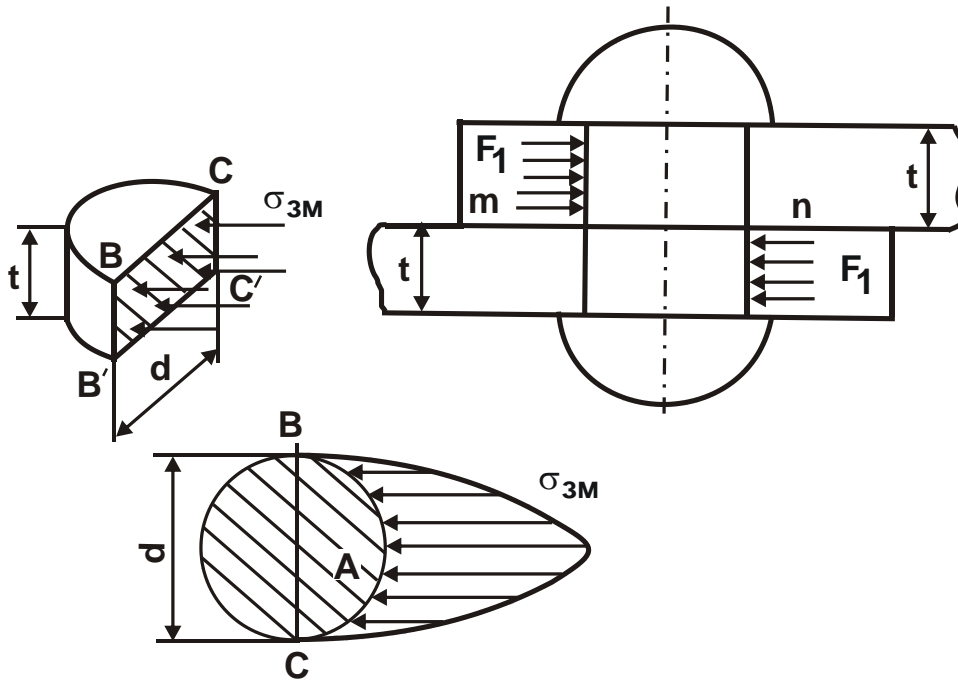


Рисунок 8.12 – Схема передачі тиску на стержень заклепки

Умова міцності на зминання має вигляд:

$$\sigma_{зм} = \frac{F}{n \cdot t \cdot d} \leq [\sigma]_{зм},$$

де $[\sigma]_{зм}$ – допустиме напруження зминання.

Звідки визначається необхідна кількість заклепок:

$$n \geq \frac{F}{t \cdot d \cdot [\sigma]_{зм}}.$$

Допустиме напруження зминання $\sigma_{зм}$ приймається, звичайно, у 2 ... 2,5 рази більше основного допустимого напруження на розтягання і стиск, оскільки розрахунок на зминання, за суттю, є спрощеною перевіркою міцності на контактні напруження.

Поняття втомної міцності

Багато деталей машин у процесі роботи отримують напруження, які циклічно змінюються у часі. Це, наприклад, деталі кривошипно-шатунного механізму двигуна внутрішнього згорання, які знаходяться під дією сил, які періодично змінюються.

У результаті після деякої кількості циклів напруження може наступити руйнування деталі, тоді як за тим же незмінним у часі напруженням руйнування не відбувається.

Кількість циклів до моменту руйнування залежить від величини напруження σ_a і змінюється у широких межах. Наприклад, значне напруження деталі може привести до її руйнування за 5 – 10 циклів. Незначне напруження деталей може витримувати мільйони і мільярди циклів, а зі зменшенням напруження до допустимого значення – здатна працювати необмежено довго. Отже, деталь може руйнуватися за умови досягнення напруження, яке менше межі міцності та навіть межі текучості. Руйнування при цьому відбувається у результаті втоми матеріалу.

Раніше явище руйнування в умовах циклічних навантажень пояснювали зміною кристалічної структури металу, а напрям досліджень, пов'язаних із міцністю металу у цих умовах, називали *втомною міцністю*. Надалі точка зору на причини втомного руйнування змінилася, але сам термін зберігся.

Зараз встановлено, що структура металу в умовах циклічних навантажень не змінюється. Початок руйнування носить місцевий характер. У зоні підвищеного напруження, обумовленого конструктивними, технологічними або структурними чинниками, може утворитися мікротріщина, яка у результаті розвитку й приводить до руйнування металу.

Розглянемо основні характеристики циклу і межу втоми для одновісного напруженого стану.

Закон зміни головного напруження σ у часі на рис. 8.13 зображено кривою. Найбільше і найменше напруження циклу позначимо σ_{\max} і σ_{\min} . Їх відношення називається *коефіцієнтом асиметрії циклу*:

$$\frac{\sigma_{\min}}{\sigma_{\max}} = r.$$

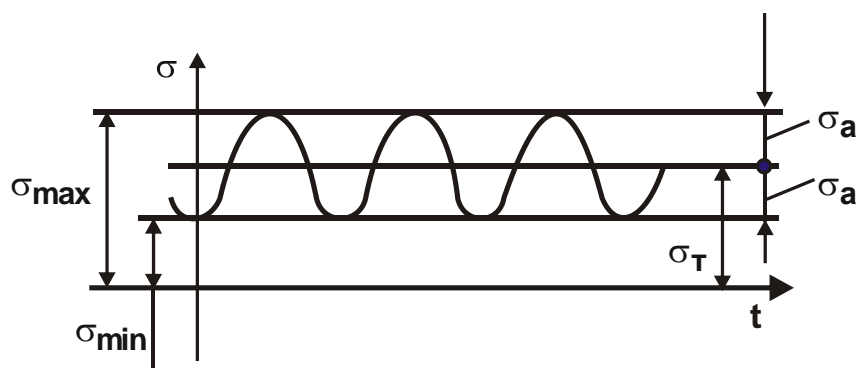


Рисунок 8.13 – Закон зміни головного напруження за часом

Якщо $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, то маємо $r = 1$. Такий цикл називається *симетричним* і має місце, наприклад, під час обертання вісі валу вагона. Це відбувається у результаті того, що частинки осі вала, що обертається, опиняються поперемінно то у розтягнутій, то у стиснутій зонах.

Якщо $\sigma_{\min} = 0$ або $\sigma_{\max} = 0$, то $r = 0$. У цьому випадку цикл називається *пульсаційним* (рис. 8.14). Прикладом такого циклу може бути цикл навантаження зубів шестерні під час передачі моменту.

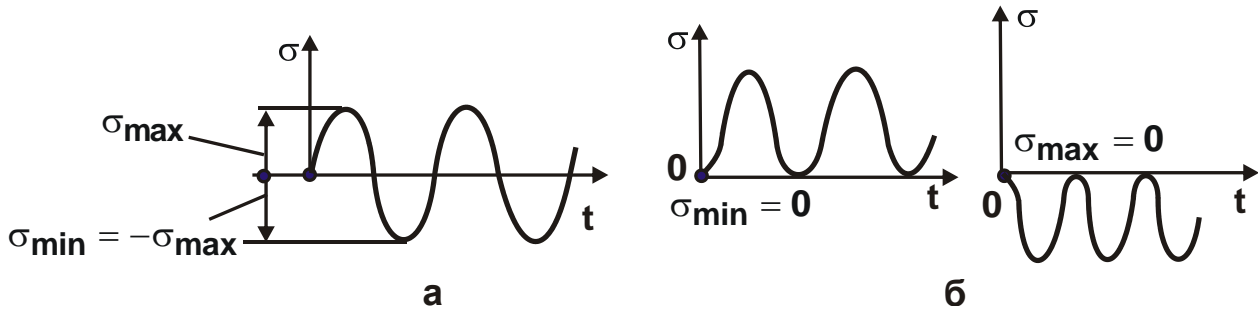


Рисунок 8.14 – Характер зміни напруження в умовах циклічного навантаження

Цикли, що мають однакові показники r , називаються *подібними*.

Будь-який цикл можна представити як результат накладення постійного середнього напруження σ_T на напруження, яке змінюється за симетричним циклом із амплітудою циклу σ_a (рис. 8.13):

$$\sigma_T = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2} ;$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2} .$$

Процес утворення тріщини за умов змінного напруження пов'язаний із накопиченням пластичних деформацій. Тому вважається, що втомна міцність визначається тільки найбільшим і найменшим напруженням циклу і не залежить від закону зміни напруження усередині інтервалу $\sigma_{\max} - \sigma_{\min}$. Отже цикли, показані, наприклад, на рис. 8.15, є *рівноцінними*.

Як показують досліди, несуттєвим є також вплив частоти зміни напруження на втомну міцність. У результаті для оцінювання втомної міцності в умовах заданого циклу достатньо знати тільки значення величин σ_{\max} і σ_{\min} або σ_T і σ_a .

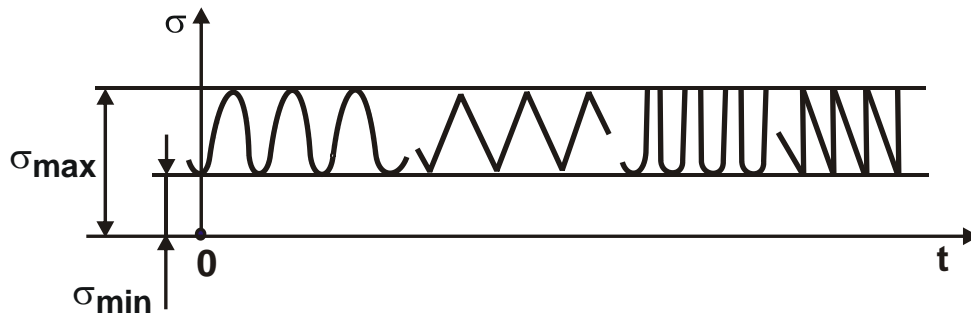


Рисунок 8.15 – Приклади рівноцінних циклів

Шляхом багатократних випробувань (якщо є достатня кількість зразків) можна визначити число циклів, яке витримує зразок до руйнування, залежно від величини σ_{\max} циклу. Ця залежність має вигляд кривої, показаної на рис. 8.15.

На рис. 8.16 зображено експериментально встановлену залежність напруження σ_{\max} , яке витримує зразок до руйнування, від числа циклів N . У зв'язку із тим, що число циклів зі зменшенням σ_{\max} збільшується зі значною інтенсивністю, за віссю абсцис відкладають не число N , а його логарифм. Досвід показує, що для більшості чорних металів можна указати найбільше максимальне напруження, за яким метал не руйнується за будь-яким числом циклів. Таке найбільше максимальне напруження називається *межею втоми* або *межею витривалості*. Межа витривалості позначається через σ_r , де індекс r відповідає коефіцієнту циклу. Так, для симетричного циклу позначення межі витривалості приймає вигляд σ_{-1} , для пульсаційного циклу – вигляд σ_0 тощо.

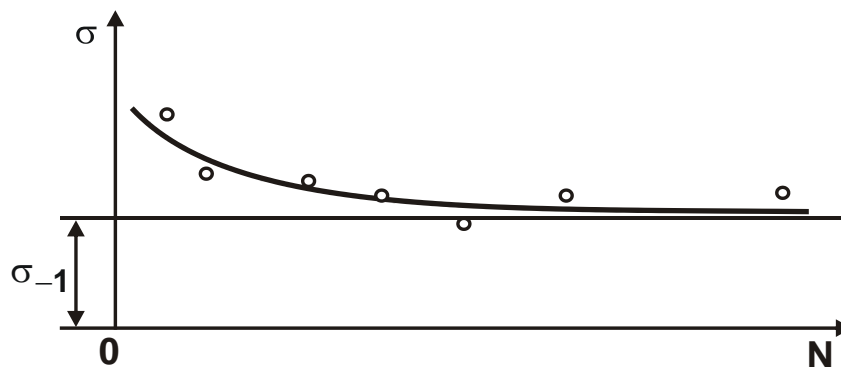


Рисунок 8.16 – Залежність напруження σ_{\max} , яке витримує зразок до руйнування, від числа циклів N

Для кольорових металів і для загартованих до високої твердості сталей не вдається встановити таке число циклів, витримавши яке зразок не руйнувався б надалі. Тому в подібних випадках вводиться поняття умовної межі витривалості. За умовну межу витривалості приймається напруження, за яким зразок здатний витримати 10^8 циклів.

Загальні відомості щодо крутіння

Крутінням називають такий вид навантаження бруса, за яким у його поперечних перетинах виникає тільки один внутрішній силовий чинник – крутний момент M_K .

Крутний момент у довільному поперечному перетині бруса дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, що діють на відділену частину бруса:

$$M_K = \sum M_i .$$

Приймається, що площини дії всіх зовнішніх крутних моментів M_i перпендикулярні подовжній вісі бруса.

Крутний момент позитивний, якщо для спостерігача, що дивиться на проведений розтин, він представляється спрямованим за годинниковою стрілкою. Відповідний зовнішній момент спрямований проти годинникової стрілки (рис. 8.17).

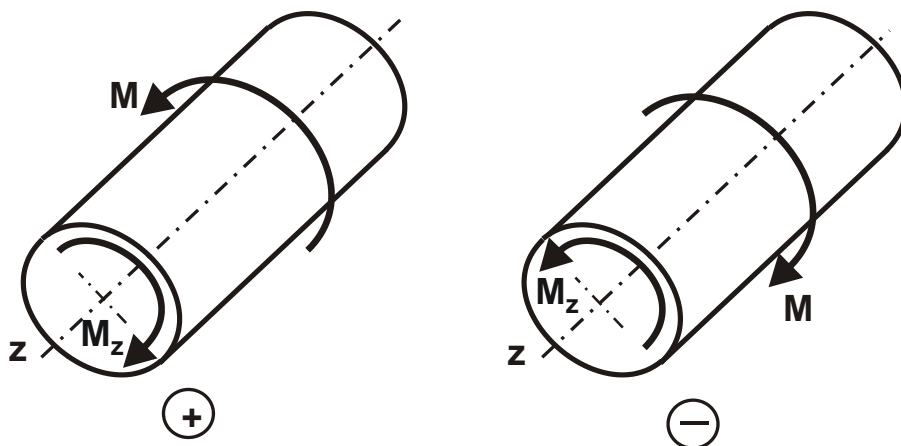


Рисунок 8.17 – Правило знаків для крутних моментів

Умова міцності на крутіння та три види розрахунків на міцність круглих валів – суцільних і порожніх (із кільцевим перетином):

$$W_p = \frac{M_K}{[\tau]_K} ;$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_\rho} \leq [\tau]_k;$$

$$M_k = [\tau]_k \cdot W_\rho \geq M_{kд},$$

де $[\tau]_k$ – допустиме напруження на крутіння, яке можна приймати рівним допустимому напруженню на зсув, Н.

Важливо під час розрахунків на крутіння користуватися епюрою крутних моментів, яка представляє собою графічне зображення значень моменту для всіх поперечних перетинів вала. Для цього під кресленням вала, паралельно його вісі, слід провести вісь епюри, від якої відкласти ординати, що зображують у певному масштабі величини крутного моменту для кожного перетину. Це дозволить визначити максимальний крутний момент $M_{z_{\max}}$. За даним значенням $M_{z_{\max}}$ можна визначити діаметр вала.

Слід зазначити, що проектний розрахунок вала (круглого або кільцевого поперечного перетину) здійснюється за умов міцності та жорсткості. Потім із двох отриманих значень діаметрів вала вибирається найбільше значення.

У табл. 8.7 у спрощеному вигляді наведено основні формули для визначення проміжних параметрів, необхідних для розрахунку діаметрів вала круглого та кільцевого поперечного перетину за умов міцності та жорсткості.

Послідовність вирішення задачі щодо визначення діаметра вала за умов міцності та жорсткості:

1. Визначити зовнішні крутні моменти за формулою:

$$M = \frac{P}{\omega},$$

де P – потужність, Вт;

ω – кутова швидкість, рад/с.

2. Визначити урівноважувальний момент на основі рівняння рівноваги $\sum M_i = 0$, оскільки під час рівномірного обертання вала алгебраїчна сума доданих до неї зовнішніх крутних моментів дорівнює нулю.

3. Користуючись методом перетинів, слід побудувати епюру крутних моментів за довжиною вала.

4. Для ділянки вала, в якій виникає найбільший крутний момент, визначити діаметр вала круглого або кільцевого перерізу за умов міцності та жорсткості.

Для кільцевого перерізу вала слід прийняти співвідношення діаметрів $c = d_0/d$, де d_0 – внутрішній діаметр кільця; d – зовнішній діаметр кільця.

Таблиця 8.7 – Формули для розрахунку діаметрів вала за умов міцності та жорсткості

<p>За умови міцності:</p> $W_p \geq \frac{M_{z_{\max}}}{[\tau]_k},$ <p>де $M_{z_{\max}}$ – найбільший крутний момент; W_p – полярний момент опору крутіння; τ_k – допустиме дотичне напруження</p>	<p>За умови жорсткості:</p> $I_p \geq \frac{M_{z_{\max}}}{G \cdot [\varphi_0]},$ <p>де I_p – полярний момент інерції перерізу; G – модуль пружності в умовах зсуву; $[\varphi_0]$ – допустимий кут закручування перетину</p>
Перетин вал – коло	
$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16};$ <p>Необхідний за міцністю діаметр вала:</p> $d = 3 \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{z_{\max}}}{\pi \cdot [\tau]_k}}$	$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32};$ <p>Необхідний за жорсткістю діаметр вала:</p> $d = 4 \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{z_{\max}}}{\pi \cdot G \cdot [\varphi_0]}}$
Перетин вал – кільце	
$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \cdot (1 - c^4).$ <p>Необхідний за міцністю зовнішній діаметр кільця:</p> $d = 3 \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{z_{\max}}}{\pi \cdot [\tau]_k \cdot (1 - c^4)}}$	$I_p = \frac{\pi \cdot d^4}{32} \cdot (1 - c^4).$ <p>Необхідний за жорсткістю зовнішній діаметр кільця:</p> $d = 4 \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{z_{\max}}}{\pi \cdot G \cdot [\varphi_0] \cdot (1 - c^4)}}$

Приклад 8.4. Для вала, виготовленого із сталі (рис. 8.18,а) із постійним за довжиною перетином, необхідно:

- визначити значення моментів M_2 і M_3 , відповідні потужності, що передаються, P_2 і P_3 та урівноважувальний момент M_1 ;
- побудувати епюру крутних моментів;

• визначити необхідний діаметр вала, виходячи із розрахунків на міцність і жорсткість, вважаючи за спрощеним варіантом (а) поперечний перетин вал – коло; за варіантом (б) – поперечний перетин вал – кільце, що має співвідношення діаметрів $c = d_0 / d = 0,8$.

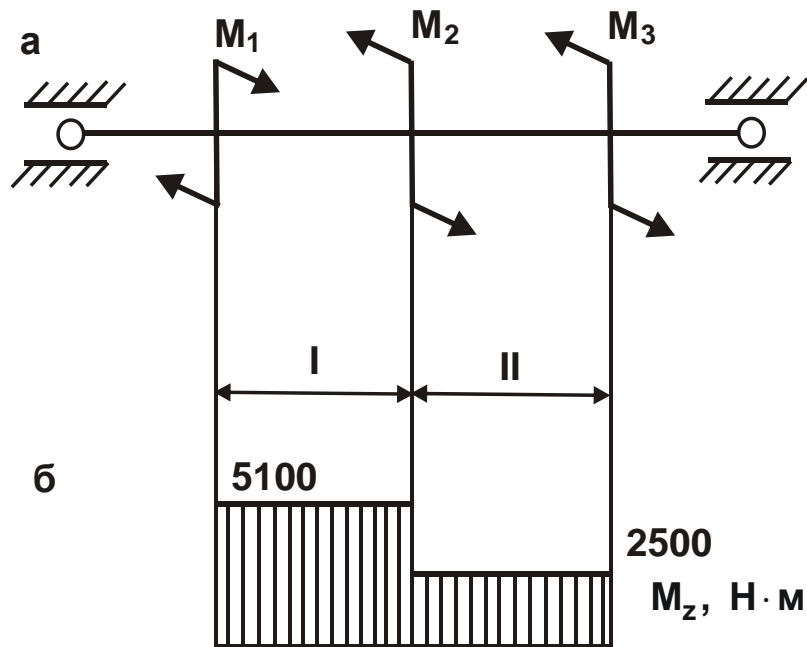


Рисунок 8.18 – Розрахункова схема та епюра крутних моментів M_z

Вихідні дані: $[\tau]_k = 30$ МПа; $[\varphi_0] = 0,02$ рад/м = $0,02 \cdot 10^{-3}$ рад/мм;
 $P_2 = 52$ кВт; $P_3 = 50$ кВт; $\omega = 20$ рад/с; $G = 8 \cdot 10^{-4}$ МПа.

Остаточне значення діаметра вала слід округлити до найближчого парного числа.

Рішення. 1. Визначаємо зовнішні крутні моменти:

$$M_2 = \frac{P_2}{\omega} = \frac{52 \cdot 10^3}{20} = 2\,600 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_3 = \frac{P_3}{\omega} = \frac{50 \cdot 10^3}{20} = 2\,500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

2. Визначаємо урівноважувальний момент M_1 :

$$\sum M_i = 0;$$

$$M_1 - M_2 - M_3 = 0;$$

$$M_1 = M_2 + M_3 = 5100 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

3. Визначаємо крутний момент на ділянках вала:

$$M_{z1} = M_1 = 5100 \text{ Н}\cdot\text{м};$$

$$M_{z11} = M_1 - M_2 = 5100 - 2600 = 2500 \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

Будуємо епюру крутних моментів M_z (рис. 8.18, б):

4. Визначаємо діаметр вала за умов міцності та жорсткості, приймаючи максимальний крутний момент $M_{z_{\max}} = 5100 \text{ Н}\cdot\text{м}$ (рис. 8.18, б).

У табл. 8.8 наведено розрахунки діаметрів валів круглого та кільцевого поперечного перетину за умов міцності та жорсткості.

Таблиця 8.8 – Розрахункові значення діаметрів валів круглого та кільцевого поперечного перетину за умов міцності та жорсткості

а) Перетин вал – коло	
<p>За умови міцності:</p> $d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{z_{\max}}}{\pi \cdot [\tau]_k}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 30}} =$ $= 95,2 \text{ мм.}$ <p>Приймаємо $d = 95 \text{ мм}$</p>	<p>За умови жорсткості :</p> $d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{z_{\max}}}{\pi \cdot G \cdot [\varphi_0]}} = \sqrt[4]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3}}} =$ $= 75,5 \text{ мм.}$ <p>Приймаємо $d = 76 \text{ мм}$</p>
<p>Необхідний діаметр отримано із розрахунку на міцність, тому його приймаємо як остаточний $d = 95 \text{ мм}$</p>	
б) Перетин вал – кільце	
<p>За умови міцності:</p> $d = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot M_{z_{\max}}}{\pi \cdot [\tau]_k \cdot (1 - c^4)}} =$ $= \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 30 \cdot (1 - 0,8^4)}} =$ $= 113 \text{ мм.}$ <p>Приймаємо $d = 114 \text{ мм}$</p>	<p>За умови жорсткості:</p> $d = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot M_{z_{\max}}}{\pi \cdot G \cdot [\varphi_0] \cdot (1 - c^4)}} =$ $= \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 5 \cdot 100 \cdot 10^3}{3,14 \cdot 8 \cdot 10^4 \cdot 0,02 \cdot 10^{-3} \cdot (1 - 0,8^4)}} =$ $= 86,5 \text{ мм.}$ <p>Приймаємо $d = 86 \text{ мм}$</p>
<p>Необхідні діаметри вала остаточно приймаємо із розрахунків на міцність: $d = 114 \text{ мм}$; $d_0 = 0,8 \cdot d = 0,8 \cdot 114 = 91,2 \text{ мм}$.</p> <p>Приймаємо $d_0 = 92 \text{ мм}$</p>	

Порядок виконання роботи

Отримати завдання у викладача та розв'язати задачу із визначення діаметра вала круглого та кільцевого поперечного перетину за умов його міцності та жорсткості під час крутіння.

Звіт по роботі

Звіт складається із основних понять та методик розрахунку параметрів силового навантаження елементів конструкцій під час зрізу (зсуву), зминання і крутіння та розв'язку заданої задачі.

Література [5, 8, 9, 17 – 20].

Питання для самоконтролю

1. Між величинами модуля пружності та модуля зсуву існує залежність:

- а) $G = E / 2 (1 + \mu)$;
- б) $E = G / 2 (1 + \mu)$;
- в) $\mu = E / 2 (1 + G)$;
- г) $\mu = G / 2 (1 + E)$.

2. Напруження зрізу заклепки зі збільшенням її діаметра у 2 рази:

- а) зменшиться у 2 рази;
- б) зменшиться у 4 рази;
- в) залишиться без зміни;
- г) збільшиться у 2 рази;
- д) збільшиться у 4 рази.

3. Умова міцності на крутіння бруса має вигляд:

- а) $\tau = M_{кр} / W_p \leq [\tau]$;
- б) $\sigma = M_{max} / W_x \leq [\sigma]$;
- в) $\tau = M_{кр} / J_p \leq [\tau]$;
- г) $\tau = Q / S \leq [\tau]$.

4. Крутний момент у довільному поперечному перетині валу дорівнює:

- а) алгебраїчній сумі моментів зовнішніх пар, прикладених із одного боку від перетину, що розглядається;
- б) найбільшому моменту зовнішньої пари;
- в) нулю;
- г) алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил.

5. Закон Гука під час кручення дійсний, якщо напруження не перевищує значення:

- а) межі пропорційності;
- б) межі міцності;
- в) межі пружності;
- г) межі пластичності.

Робота 9. Вигин. Вигин і крутіння. Стійкість стиснутих стержнів

Мета роботи – вивчення основних понять та методів розрахунку параметрів силового навантаження елементів конструкцій під час вигину, вигину і крутіння та визначення стійкості стиснутих стержнів; навчити студентів розв'язувати задачі опору матеріалів в умовах вигину, вигину і крутіння та будувати епюри поперечних сил, вигинних і крутних моментів.

Загальні відомості

Основні поняття щодо вигину

Вигин – це такий вид деформації бруса, за якого у його поперечних перетинах виникають вигинні моменти. У більшості випадків одночасно із вигинними моментами виникають і поперечні сили: такий вигин називають *поперечним*; якщо поперечні сили не виникають, вигин називають *чистим*.

Під час вигину брус деформується таким чином, що частина його волокон зазнає розтягання, а частина – стиску. Волокна, які знаходяться у випуклій частині зогнутого бруса, розтягуються, а у вогнутій – стискаються. Межа між зонами розтягання і стиску являє собою шар волокон, який лише скривлюється, не підлягаючи при цьому ні розтягання, ні стиску. Це так званий *нейтральний шар*. Лінія перетину нейтрального шару із площиною поперечного перетину бруса, називається *нейтральною віссю*, або *нулевою лінією*.

Бруси, які працюють на прямий вигин, називаються *балками*. Схеми основних типів статично визначених балок показано на рис. 9.1. Відстані між опорами балки називаються її *прольотами*, а довжину балки, яка затиснута одним кінцем (рис. 9.1,а), іноді називають *вилітом*.

Консоллю називається частина балки, яка знаходиться по один бік від опор (рис. 9.1, в,г).

На балку діють прикладені сили та реакції опор. Для вирішення завдань опору матеріалів необхідно їх визначити.

Зовнішні прикладені сили можна визначити, якщо відомо, які частини конструкції опираються на балку. Ці навантаження зводяться

до зосереджених сил F (Н), пар сил M (Н·м) і рівномірно та нерівномірно розподілених за довжиною балки навантажень.

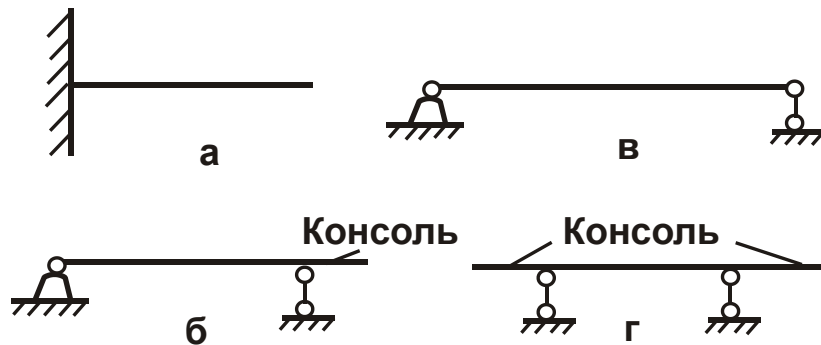


Рисунок 9.1 – Схеми основних типів статично визначених балок:

- а – проста консоль; б – двохопорна балка без консолей;
- в – двохопорна балка із однією консоллю;
- г – двохопорна балка із двома консолями

Рівномірно розподілені навантаження вимірюються їхньою інтенсивністю q (Н/м), тобто величиною навантаження на одиницю довжини балки.

Інтенсивність нерівномірно розподілених навантажень змінюється за довжиною балки і позначається $q(x)$. У цьому випадку $q(x)$ дорівнює величині навантаження на одиницю довжини балки у розглянутій точці. Запис $q(x)$ означає, що інтенсивність навантаження є функцією координати x .

Для визначення опорних реакцій необхідно розглянути конструкції опор балок, які у загальному вигляді зведено до трьох типів:

- а) шарнірно-нерухлива опора;
- б) шарнірно-рухлива опора;
- в) затиснений кінець.

Шарнірно-нерухлива опора схематично зображена у точці А на рис. 9.2. Вона дозволяє опорному перетину балки вільно повертатися навколо шарніра, розташованого у центрі тяжіння А опорного перетину, але не допускає поступального переміщення цього кінця. Цей опір виражається реакцією, яка передається від опори через шарнір на кінець балки й лежить у площині дії зовнішніх сил.

Відома тільки точка дії цієї реакції – шарнір – як єдина точка, у якій відбувається дотик балки й опори, але невідомі ні величина реакції

ції, ні її напрям. Тому необхідно замінити цю реакцію двома її складовими: однією H_A , яка спрямована уздовж осі балки, та іншою A , яка спрямована перпендикулярно до вісі. Отже, шарнірно-нерухома опора дає, із цього погляду, дві невідомі за величиною реакції.



Рисунок 9.2 – Напрями реакцій шарнірно-нерухомої та шарнірно-рухомої опори

Шарнірно-рухлива опора допускає, крім поворотів, також вільне переміщення у відповідному напрямі (рис. 9.2, точка B). Таким чином, розглянута опора перешкоджає переміщенню, перпендикулярному до певного напрямку. Тому шарнірно-рухома опора дає лише одну невідому реакцію B.

За умови затиснення кінця балки опора перешкоджає всяким переміщенням цього кінця у площині дії сил. Її можна отримати із шарнірно-нерухомої опори шляхом звільнення від шарніру (рис. 9.3).

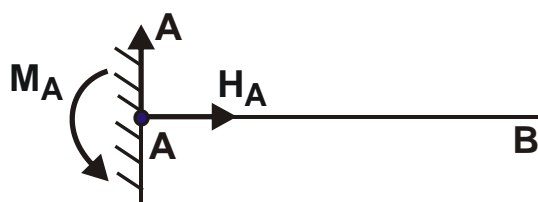


Рисунок 9.3 – Напрям реакцій затисненої балки

Звільнення від шарніру перешкоджає обертанню кінцевого перетину балки. Тому вводимо нову реакцію – пару сил, яка повинна перешкодити цьому обертанню. Отже, затиснений кінець балки дає три невідомі реакції: складову H_A , яка паралельна осі балки, складову A , яка перпендикулярна до вісі, та опорний момент M_A .

Балка може опиратися на ряд опор зазначених типів. На рис. 9.3 зображено балку, затиснену одним кінцем. На рис. 9.4,а зображено балку, обперту нерухомо на одному кінці й рухливою на іншому та під-

пертою посередині однією шарнірно-рухливою опорою. На рис. 9.4,б зображено балку, затиснену одним кінцем і підпертою шарнірно-рухливою опорою в одному із проміжних перетинів.

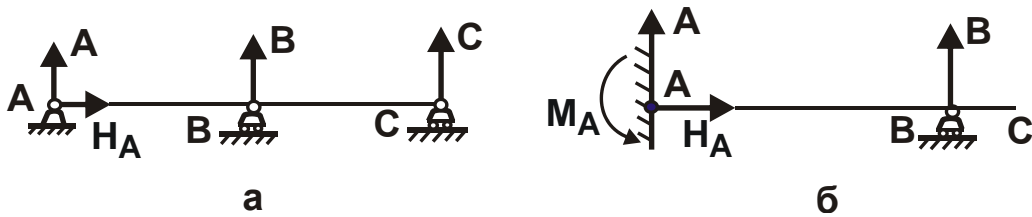


Рисунок 9.4 – Схеми балок із різними типами опор

Для визначення невідомих реакцій необхідно, у першу чергу, використувувати рівняння статки, які виражають умову, що балка у цілому під дії всіх сил і реакцій, прикладених до неї, перебуває у рівновазі. Оскільки всі ці сили лежать у одній площині, то рівнянь рівноваги для них можна написати три. Тому завдання визначення реакцій за умов статки може бути розв'язано за наявності лише трьох невідомих реакцій.

Отже, балки із опорами, що дають три реакції (рис. 9.3, рис. 9.4), є статично визначеними.

Для визначення опорних реакцій у статично визначених балках слід користуватися трьома рівняннями рівноваги. При цьому за вісь x необхідно приймати вісь балки, за початок координат – центр одного із опорних шарнірів, а вісь y необхідно направляти вертикально (передбачається, що балка розташована горизонтально).

Спочатку, виходячи із умови рівності нулю суми проекцій усіх сил на вісь x , визначається горизонтальна складова опорної реакції. Вертикальні складові та опорний момент визначаються, виходячи із двох умов рівності нулю суми моментів усіх сил відносно двох яких-небудь точок балки, звичайно, відносно центрів тяжіння опорних перетинів балки. Умову рівності нулю суми проекцій сил на вісь y краще застосувати для перевірки правильності розрахунків.

Вигинний момент M_i у довільному поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі моментів зовнішніх сил, що діють на відділену частину балки, відносно центра тяжіння перетину:

$$M_B = \Sigma M.$$

Поперечна сила у довільному поперечному перетині балки дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх сил, що діють на відділену частину балки:

$$Q = \Sigma F.$$

Правило знаків для поперечної сили: силам, повертаючим відсічену частину балки відносно розглянутого перетину за годинниковою стрілкою, приписується знак плюс (рис. 9.5,а), а силам, повертаючим відділену частину балки відносно розглянутого перетину проти годинникової стрілки, приписується знак мінус (рис. 9.5,б).

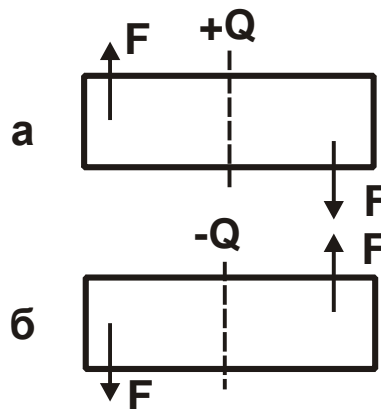


Рисунок 9.5 – Правило знаків для поперечної сили

Правило знаків для вигинних моментів: зовнішнім моментам, які призводять до вигину умовно закріпленої у перетині відділеної частини балки опуклістю вниз, приписується знак плюс (рис. 9.6,а), а моментам, які призводять до вигину відділеної частини балки опуклістю вгору – знак мінус (рис. 9.6,б).

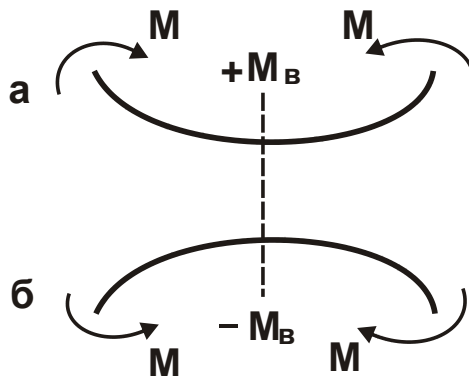


Рисунок 9.6 – Правило знаків для вигинних моментів

Диференціальні залежності в умовах вигину

Між вигинним моментом, поперечною силою та інтенсивністю розподіленого навантаження існують диференціальні залежності, які засновано на теоремі Журавського Д. І. (інженера-мостобудівника Журавського Д. І.).

Теорема. Поперечна сила дорівнює першій похідній від вигинного моменту за абсцисою перерізу балки.

Для підтвердження теореми розглянемо балку, яку зображено на рис. 9.7. За початок координат приймемо точку А, а вісь z направимо вправо.

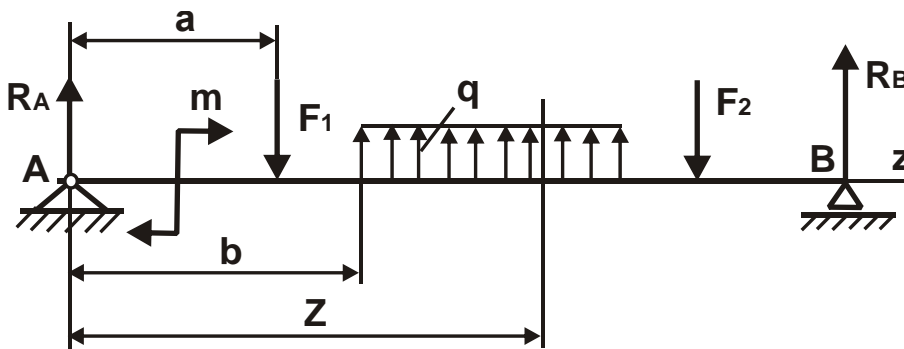


Рисунок 9.7 – Розрахункова схема напруженого стану балки

На одній із ділянок балки проведемо перетин із координатою z , для якого рівняння вигинного моменту приймає вигляд:

$$M_B = R_A \cdot z + m - F_1 \cdot (z - a) + \frac{q \cdot (z - b)^2}{2}.$$

Після диференціювання рівняння отримано залежність за координатою z , маємо:

$$\frac{dM_B}{dz} = R_A - F_1 + q \cdot (z - b).$$

Вираз, що стоїть у правій частині цієї рівності, є поперечна сила Q , що виникає у перетині z :

$$\frac{dM_B}{dz} = Q.$$

Отже, теорему доведено.

Якщо рівняння вигинних моментів представлено для ділянок із рівномірно розподіленим навантаженням, то після диференціювання рівності повторно, отримано:

$$\frac{d^2 M_B}{dz^2} = \frac{dQ}{dz} = q.$$

Як видно, друга похідна від вигинного моменту або перша похідна від поперечної сили за абсцисою перерізу балки дорівнює інтенсивності розподіленого навантаження.

На основі методу перетинів і диференціальних залежностей встановлюється зв'язок епюр M_B і Q_y із зовнішнім навантаженням. Тому достатньо визначити ординати епюр для характерних перетинів і з'єднати їх лініями. Характерними є перетини балки, у яких прикладено зосереджені сили і моменти (включаючи опорні перетини), а також перетини, що обмежують ділянки із рівномірно розподіленим навантаженням.

Правила побудови епюри поперечних сил:

1. На ділянці, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням, епюра зображується прямою лінією, нахиленою до осі балки.
2. На ділянці, вільній від розподіленого навантаження, епюра зображується прямою лінією, паралельною вісі балки.
3. У перетині балки, де прикладено зосереджену пару сил, поперечна сила не змінює свого значення.
4. У перетині, де прикладено зосереджену силу, епюра поперечних сил змінюється стрибкоподібно на значення, що дорівнює доданій силі.
5. У кінцевому перетині балки поперечна сила чисельно дорівнює зосередженій силі (активній або реактивній), яка діє у цьому перетині. Якщо у кінцевому перетині балки не прикладено зосереджену силу, то поперечна сила у цьому перетині дорівнює нулю.

Правила побудови епюри вигинних моментів:

1. На ділянці, навантаженій рівномірно розподіленим навантаженням, епюра моментів зображується квадратичною параболою. Опуклість параболи спрямована назустріч навантаженню.
2. На ділянці, вільній від рівномірно розподіленого навантаження, епюра моментів зображується прямою лінією.
3. У перетині балки, де прикладено зосереджену пару сил, вигинний момент змінюється стрибкоподібно на значення, що дорівнює моменту прикладеної пари сил.
4. Вигинний момент у кінцевому перетині балки дорівнює нулю, якщо у ньому не прикладено зосередженої пари сил. Якщо ж у кінце-

вому перетині прикладено активну або реактивну пару сил, то вигинний момент у цьому перетині дорівнює моменту прикладеної пари сил.

5. На ділянці, де поперечна сила дорівнює нулю, балка знаходиться у стані чистого вигину, і епюра вигинних моментів зображується прямою, паралельною осі балки.

6. Вигинний момент приймає екстремальне значення у перетині, де епюра поперечних сил проходить через нуль, змінюючи знаки із "+" на "-" або із "-" на "+". У даному випадку потрібно побудувати епюри поперечних сил і вигинних моментів, а також підібрати розміри поперечного перетину балки, виготовленої із прокатного профілю – двотавра.

Нормальні напруження під час чистого вигину

У поперечних перетинах балки під час чистого вигину виникають лише нормальні напруження розтягання та стиску. Для їх визначення розглянемо ділянку балки, яка підвержена деформації чистого вигину. Поперечними перетинами АВ і CD виділимо елемент балки нескінченно малої довжини dS (рис. 9.8). Радіус кривизни нейтрального шару позначимо ρ .

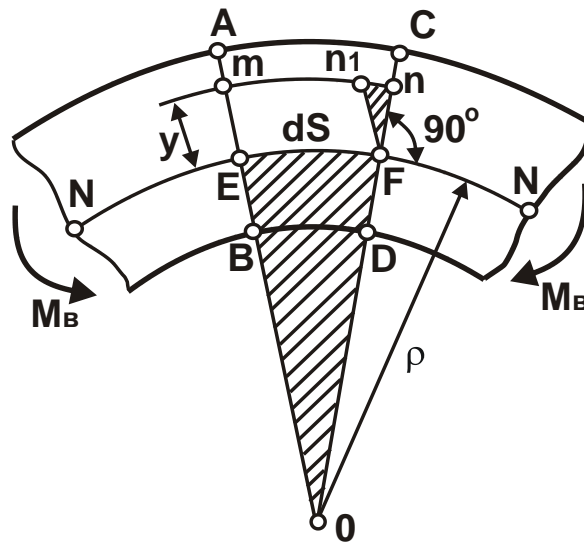


Рисунок 9.8 – Розрахункова схема визначення параметрів силової напруженості під час чистого вигину

Розглянемо шар волокон mn , які знаходяться на відстані y від нейтрального шару NN . Ці волокна внаслідок деформації вигину подовжилися на величину nn_1 . Зважаючи на невелику відстань dS , за-

штриховані трикутники вважатимемо прямолінійними – вони подібні. Отже, справедлива рівність:

$$\frac{\eta\eta_1}{dS} = \frac{y}{\rho}.$$

Оскільки ліва частина рівності – це відносно подовження, тобто $\eta\eta_1/dS = \varepsilon$, то $y/\rho = \varepsilon$. Після застосування закону Гука для умов розтягання і стиску, отримано:

$$\sigma = E \cdot \frac{y}{\rho}.$$

Тому нормальні напруження під час вигину розподілені за висою перетину нерівномірно: максимальні напруження виникають у волокнах, найбільш віддалених від нейтральної вісі. За шириною перетину нормальні напруження не змінюються.

Отримаємо формулу, що пов'язує нормальне напруження із вигинним моментом. Для цього розглянемо рівновагу частини балки, яку зображено на рис. 9.9. У площині поперечного перетину виділимо нескінченно малий майданчик dA . Вважатимемо, що в його межах нормальні напруження постійні. Тоді нормальна сила dN , що діє на цьому майданчику, дорівнює $dN = \sigma \cdot dA$.

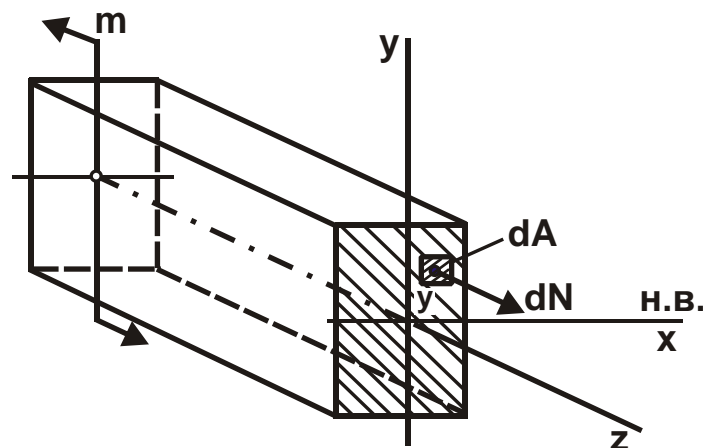


Рисунок 9.9 – Розрахункова схема визначення нормального напруження

Складемо два рівняння рівноваги:

$$1) \sum Z = 0; \int_A dN = 0.$$

Звідки

$$\int_A \sigma \cdot dA = \int_A \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y \cdot dA = 0.$$

Для перетину, що розглядається, величина ρ постійна і не дорівнює нулю. Тоді: $\int_A y \cdot dA = 0$.

Цей інтеграл є *статичний момент площі перетину відносно осі x*, тобто нейтральної осі. Оскільки він дорівнює нулю, то під час вигину нейтральна вісь повинна проходити через центр тяжіння площі поперечного перетину;

$$2) \sum M_x = 0; \quad -m + \int_F y \cdot dN = 0.$$

Оскільки під час чистого вигину вигинний момент дорівнює зовнішньому моменту $M_x = m$, то

$$M_x = \int_A y \cdot dN = \int_A y \cdot \sigma \cdot dA = \int_A y \cdot \frac{E \cdot y}{\rho} \cdot dA = \frac{E}{\rho} \cdot \int_A y^2 \cdot dA = 0.$$

Тоді

$$M_x = \frac{E \cdot I}{\rho}.$$

де $I = \int_A y^2 \cdot dA$ – момент інерції поперечного перетину відносно нейтральної осі;

$E \cdot I$ – жорсткість перетину під час вигину.

Під час чистого вигину балки постійного перетину справедливі умови: $M_x = \text{const}$; $I = \text{const}$. Тоді

$$\rho = \frac{E \cdot I}{M_x} = \text{const}.$$

Отже, вигнута вісь такої балки є дугою кола.

Із урахуванням радіуса кривизни отримано формулу для визначення нормального напруження:

$$\sigma = \frac{E \cdot y}{\rho} = \frac{E \cdot y}{\left(\frac{E \cdot I}{M_x}\right)} = \frac{M_x \cdot y}{I}.$$

Максимальне нормальне напруження досягається у волокон, найбільш віддалених від нейтральної осі:

$$\sigma = \frac{M_x \cdot y_{\max}}{I} = \frac{M_x}{\left(\frac{I}{y_{\max}} \right)} = \frac{M_x}{W_x},$$

де $W_x = I/y_{\max}$ – момент опору вигину (осьовий момент опору вигину).

Момент опору вигину – це відношення осьового моменту інерції поперечного перетину відносно нейтральної вісі до відстані від цієї вісі до найбільш віддаленого волокна.

Одиниця моменту опору вигину $[W] = \text{м}^3$.

Отже, найбільші нормальні напруження під час чистого вигину визначаються за формулою:

$$\sigma = \frac{M_x}{W_x}.$$

Виходячи із цього, умова міцності для балок із перетинами, які симетричні відносно нейтральної вісі, приймає вигляд:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{x_{\max}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

де W_x – осьовий момент опору вигину;

$[\sigma]$ – допустиме нормальне напруження на вигин.

Оскільки осьовий момент опору вигину в розрахунковій формулі знаходиться у знаменнику, то, очевидно, чим він більше, тим менше нормальне напруження.

Під час вибору перетину балки (проектного розрахунку) за умови міцності на вигин необхідно визначити значення осьового моменту опору вигину:

$$W_x \geq \frac{M_{x_{\max}}}{[\sigma]}. \quad (9.1)$$

Моменти опору вигину найпоширеніших перетинів:

1. Прямокутник $b \times h$ (рис. 9.10,а):

$$W_{\text{пр}} = \frac{I}{y_{\max}} = \frac{b \cdot h^3}{12} : \frac{h}{2} = \frac{b \cdot h^2}{6}.$$

2. Прямокутник $h \times b$ (рис. 9.10,б):

$$W'_{\text{пр}} = \frac{h \cdot b^2}{6}.$$

Тоді

$$\frac{W_{\text{пр}}}{W'_{\text{пр}}} = \frac{h}{b} > 1.$$

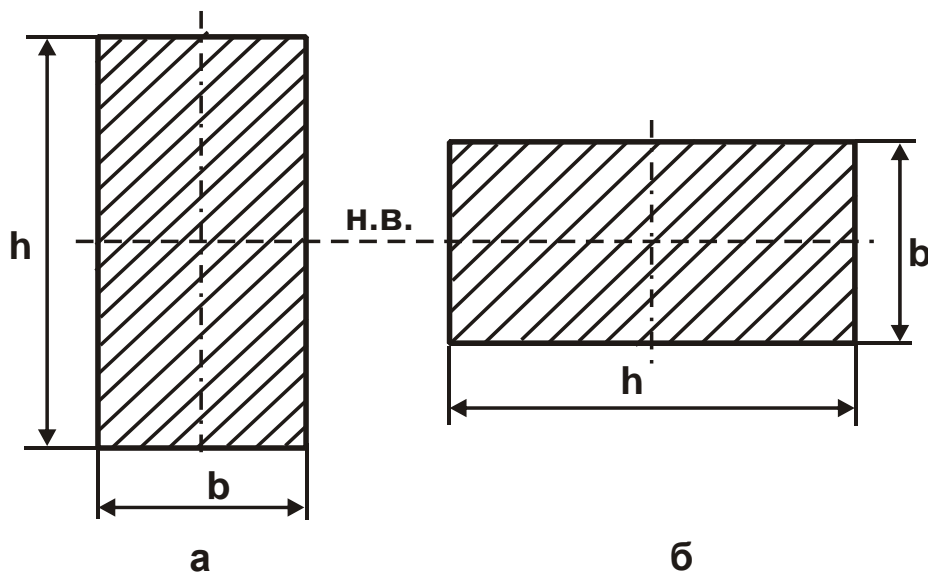


Рисунок 9.10 – Схеми поперечних перетинів прямокутників

3. Круг діаметром d :

$$W = \frac{\pi \cdot d^4}{64} : \frac{d}{2} = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3.$$

4. Круг розміру $D \times d$:

$$W = \frac{\pi}{64} \cdot (D^4 - d^4) : \frac{D}{2} = \frac{\pi \cdot (D^4 - d^4)}{32 \cdot D} \approx 0,1 \cdot \frac{(D^4 - d^4)}{D}.$$

Як видно, за однаковою площею поперечного перетину момент опору кільцевого перетину більше за момент опору суцільного круглого перетину. За встановленим осьовим моментом опору вигину W_x , виходячи із формули (9.1), можна встановити відповідний перетин згідно із сортаментом.

Для затисненої одним кінцем балки розрахунок доцільно виконувати із вільного кінця (щоб уникнути визначення опорних реакцій на затисненому кінці).

Послідовність вирішення задачі:

1. Балку слід розділити на ділянки за характерними точками.
2. Визначити вид епюри поперечних сил на кожній ділянці залежно від зовнішнього навантаження, визначити поперечні сили у характерних перетинах і побудувати епюру поперечних сил.

3. Визначити вид епюри вигинних моментів на кожній ділянці залежно від зовнішнього навантаження, визначити вигинні моменти у характерних перетинах і побудувати епюру вигинних моментів. Для вибору перетину за умови міцності необхідно визначити момент опору W_x у небезпечному перетині, тобто у перетині, де вигинний момент має найбільше за модулем значення.

Приклад 9.1. Для консольної балки (поперечний перетин – двотавр, $[\sigma]=160$ МПа) побудувати епюри Q_y і M_x та підібрати перетин за сортаментом.

1. Розділити балку на ділянки за перетинами А, В, С, (рис. 9.11,а).
2. Визначити поперечну силу Q_y у характерних перетинах і побудувати епюру поперечної сили (рис. 9.11,б):

$$Q_{yA}^{\text{лев}} = -F = -1 \text{ кН};$$

$$Q_{yB}^{\text{прав}} = -F = -1 \text{ кН};$$

$$Q_{yA}^{\text{лев}} = -F + F_1 = -F_2 + F_1 = -1 + 2 = 1 \text{ кН}.$$

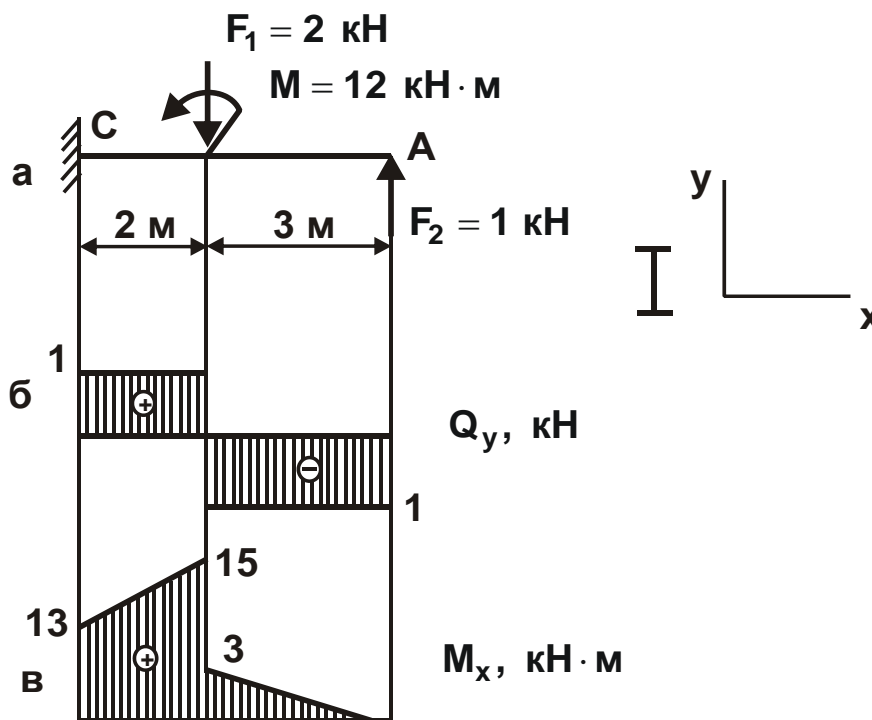


Рисунок 9.11 – Епюри поперечної сили Q_y і вигинного моменту M_x

3. Визначити значення вигинного моменту M_x у характерних перетинах і побудувати епюру вигинного моменту (рис. 9.11,в):

$$M_A = 0;$$

$$M_B^{\text{прав}} = F_2 \cdot AB = 1 \cdot 3 = 3 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_B^{\text{лев}} = F_2 \cdot AB + M = 1 \cdot 3 + 12 = 15 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_C = F_2 \cdot AC + M - F_1 \cdot BC = 1 \cdot 5 + 12 - 2 \cdot 2 = 13 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

4. Виходячи із епюри M_x (рис. 9.11,в), маємо:

$$M_{x_{\max}} = 15 \text{ кН}\cdot\text{м} = 15 \cdot 10^6 \text{ Н}\cdot\text{мм};$$

$$W_x = \frac{M_{x_{\max}}}{[\sigma]} = \frac{15 \cdot 10^6}{160} = 93700 \text{ мм}^3 = 93,7 \text{ см}^3.$$

Відповідно до стандартів обираємо двотавр № 16.

Приклад 9.2. Для заданої двохопорної балки (рис. 9.12,а) визначити реакції опор, побудувати епюри поперечних сил, вигинних моментів і визначити розміри поперечного перетину (h , b , d) у формі прямокутника або кола, прийнявши для прямокутника $h/b = 1,5$. Вважати $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

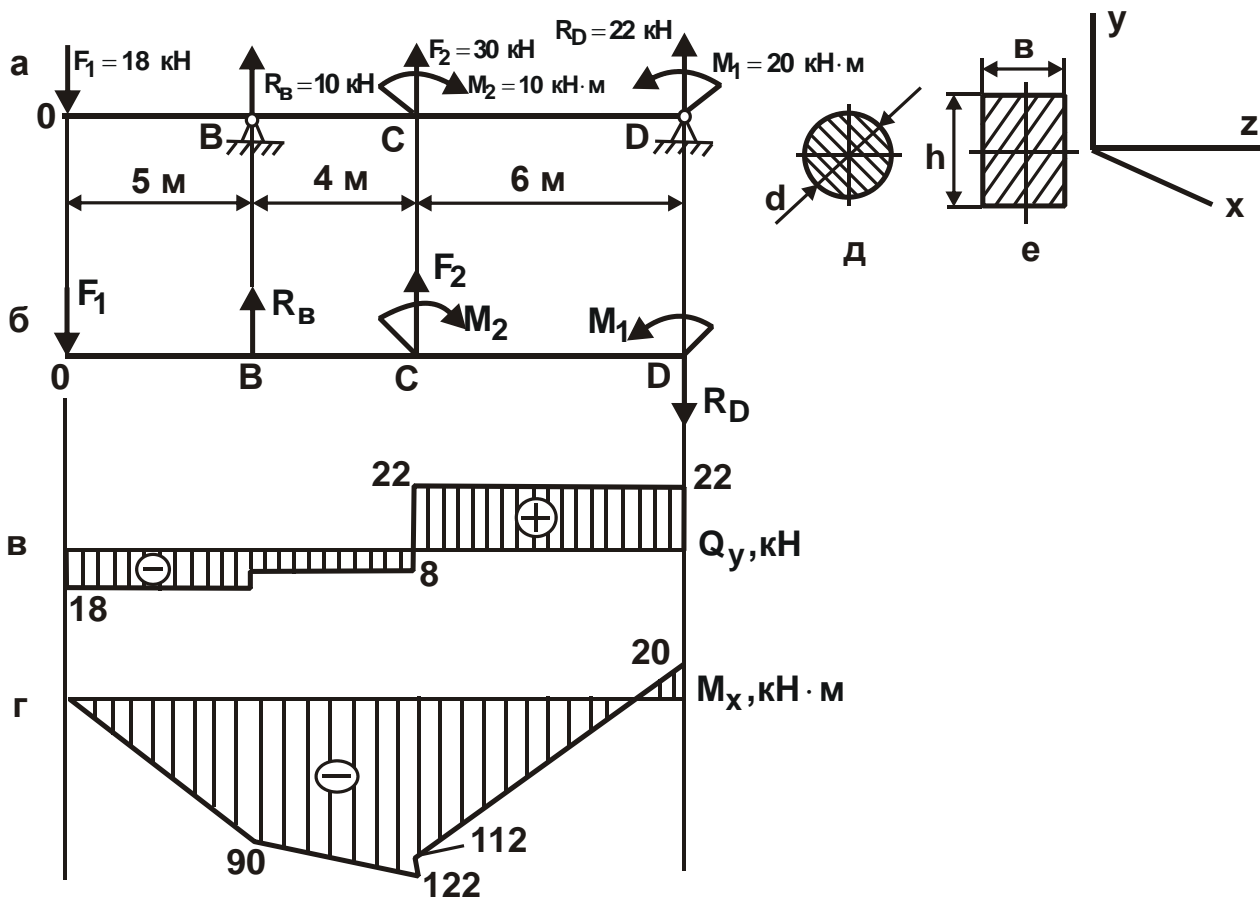


Рисунок 9.12 – Епюри поперечної сили Q_y і вигинного моменту M_x

Рішення: 1. Визначаємо опорні реакції і перевіряємо їх значення:

$$\sum M_D = 0; \quad \sum M_D = -M_1 + F_2 \cdot CD + M_2 + R_B \cdot BD - F_1 \cdot OD = 0;$$

$$R_B = \frac{(M_1 - F_2 \cdot CD + F_1 \cdot OD)}{BD} = \frac{20 - 30 \cdot 10 + 18 \cdot 15}{10} = 10 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = 0; \quad \sum M_B = -F_1 \cdot OB + M_2 - F_2 \cdot BC - R_D \cdot BD - M_1 = 0;$$

$$R_D = \frac{-F_1 \cdot OB + M_2 - F_2 \cdot BC - M_1}{BD} = \frac{-18 \cdot 5 + 10 - 30 \cdot 4 - 20}{10} = -22 \text{ кН}.$$

Оскільки реакцію R_D отримано зі знаком мінус, то необхідно змінити її напрям на протилежний. Тоді дійсний напрям реакції R_D – вниз (рис. 9.12,б).

Перевірка:

$$\sum Y_0 = -F + R_B + F_2 - R_D = -18 + 10 + 30 - 22 = 0.$$

Умова статички $\sum Y_i = 0$ виконується, отже, реакції опор визначено правильно. Під час побудови епюр використовуються дійсні напрями реакцій опор.

2. Ділимо балку на ділянки за перетинами О, В, С, D (рис. 9.12,б).

3. Визначаємо у характерних перетинах значення поперечної сили Q_y і будуємо епюру зліва направо (рис. 9.12,в):

$$Q_0^{np} = -F_1 = -18 \text{ кН}; \quad Q_B^{лiв} = -F_1 = -18 \text{ кН};$$

$$Q_B^{np} = -F_1 + R_B = -18 + 10 = -8 \text{ кН}; \quad Q_C^{лiв} = -F_1 + R_B = -18 + 10 = -8 \text{ кН};$$

$$Q_B^{np} = -F_1 + R_B + F_2 = -18 + 10 + 30 = 22 \text{ кН}; \quad Q_C^{лiв} = -F_1 + R_B + F_2 = 22 \text{ кН}.$$

4. Розраховуємо у перетинах значення вигинного моменту M_x і будуємо епюру (рис. 9.12,г):

$$M_0 = 0; \quad M_B = -F_1 \cdot AB = -18 \cdot 5 = -90 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_C^{лiв} = -F_1 \cdot OC + R_B \cdot BC = -18 \cdot 9 + 10 \cdot 4 = -122 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_C^{np} = -F_1 \cdot OC + R_B \cdot BC + M_2 = -18 \cdot 9 + 10 \cdot 4 + 10 = -112 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_D^{лiв} = -F_1 \cdot OD + R_B \cdot BD + M_2 + F_2 \cdot CD = -18 \cdot 15 + 10 \cdot 10 + 10 + 30 \cdot 6 = 20 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

5. Розраховуємо розміри перетину даної балки за умов міцності на вигин за двома варіантами:

а) у перетині – прямокутник із заданим відношенням сторін (рис. 9.12,е);

б) у перетині – коло (рис. 9.12,д).

Визначаємо розміри прямокутного перетину:

$$W_x = \frac{M_{x_{\max}}}{[\sigma]} = \frac{122 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,76 \cdot 10^{-3} \text{ м}^3 = 0,762 \cdot 10^6 \text{ мм}^3.$$

За формулою $W_x = b \cdot h^2 / 6$, із урахуванням $h = 1,5 \cdot b$, знаходимо:

$$b = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot W_x}{2,25}} = \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 0,762 \cdot 10^6}{2,25}} = 10^2 \cdot \sqrt[3]{2,06} = 127 \text{ мм}.$$

За формулою $W_x = \pi \cdot d^2 / 32$ знаходимо діаметр круглого перетину:

$$d = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot W_x}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{32 \cdot 0,762 \cdot 10^6}{3,14}} = 196 \text{ мм}.$$

Дотичні напруження під час вигину

У поперечних перетинах балки під час поперечного вигину виникають як нормальні, так і дотичні напруження, що викликають деформації зсуву. Для визначення дотичних напружень під час поперечного вигину балок прямокутного перетину у 1855 році Журавським Д. І. отримано формулу:

$$\tau = \frac{dM_B}{dz} \cdot \frac{S}{I \cdot b},$$

де S – статичний момент відносно нейтральної осі частини перетину, що лежить вище розглянутого шару волокон;

I – момент інерції всього перетину відносно нейтральної осі;

b – ширина розглянутого шару волокон.

Відповідно до теореми Журавського Д. І., $\tau = \frac{dM_B}{dz}$, тоді $\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b}$.

Отже *формула Журавського Д. І.* формулюється так: дотичні напруження у поперечному перерізі балки рівні добутку поперечної сили Q та статичного моменту S відносно нейтральної вісі частини перетину, який розташовано вище розглянутого шару волокон, поділеному на момент інерції I всього перетину відносно нейтральної вісі та на ширину b шару волокон, що розглядається.

Встановимо закон розподілу дотичних напружень для балки прямокутного перетину (рис. 9.13). Для шару волокон ad :

$$S_{adce} = b \cdot \left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left(\frac{\frac{h}{2} - y}{2} + y\right) = \frac{b}{2} \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right);$$

$$\tau = \frac{Q \cdot S}{I \cdot b} = \frac{Q \cdot \left(\frac{b}{2}\right) \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b \cdot \frac{b \cdot h^3}{12}} = \frac{6 \cdot Q \cdot \left(\frac{h^2}{4} - y^2\right)}{b \cdot h^3}.$$

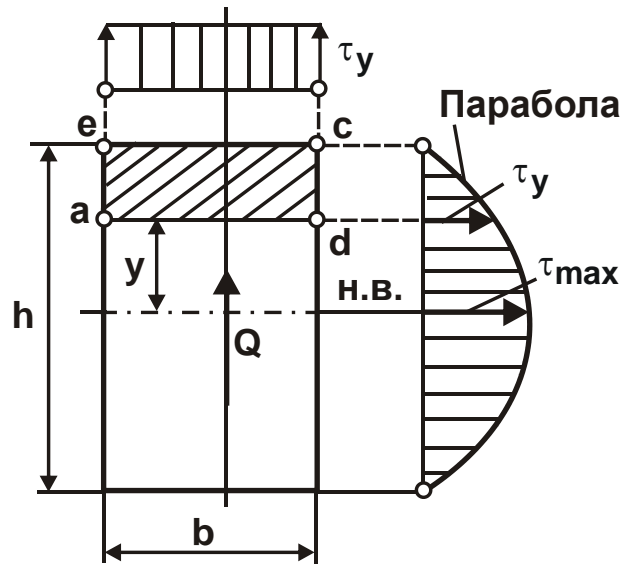


Рисунок 9.13 – Розрахункова схема визначення розподілу дотичних напружень для балки прямокутного перетину

За умови $y = \pm \frac{h}{2}$ маємо $\tau = 0$.

За умови $y = 0$ маємо $\tau = \tau_{\max} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot b \cdot h} = \frac{3 \cdot Q}{2 \cdot A} = \frac{3 \cdot \tau_{\text{ср}}}{2}$, де $\tau_{\text{ср}}$ – середнє дотичне напруження.

Як видно, максимальне дотичне напруження більше середнього дотичного напруження, що указує на достовірність розрахунків.

Таким чином, у верхньому і нижньому шарах волокон дотичні напруження дорівнюють нулю, а у волокнах нейтрального шару вони досягають максимального значення. Закони розподілу дотичних напружень за шириною і висотою прямокутного перетину графічно показано на рис. 9.13.

Максимальне дотичне напруження у балці круглого перетину дорівнює:

$$\tau_{\max} = \frac{4 \cdot Q}{3 \cdot A} = \frac{4 \cdot \tau_{\text{ср}}}{3}.$$

Пружна лінія балки

Вигнута під дією навантажень вісь балки є плавною кривою, яка називається *пружною лінією*. Деформація балки під час вигину характеризується вигином y та кутом повороту поперечного перерізу α , який дорівнює куту нахилу дотичної до пружної лінії відносно осі z балки.

Диференціальне рівняння пружної лінії балки:

$$E \cdot I \cdot y'' = M_B.$$

Розглянемо це диференціальне рівняння щодо балки постійного перетину, яка навантажена моментом m , зосередженою силою F і рівномірно розподіленим навантаженням q , які приводять до позитивних вигинних моментів (рис. 9.14).

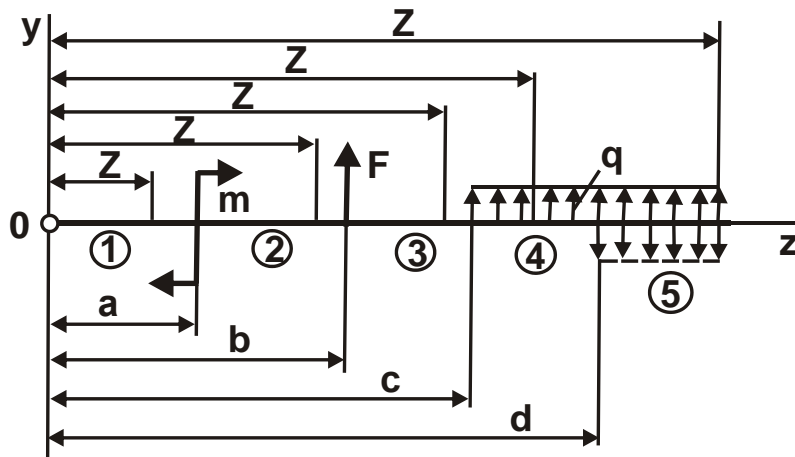


Рисунок 9.14 – Розрахункова схема визначення параметрів силової напруженості балки в умовах вигину

Узагальнене рівняння кутів повороту перетинів приймає вигляд:

$$E \cdot I \cdot \alpha = E \cdot I \cdot \alpha_0 + \sum m \cdot (z - a) + \sum F \cdot \frac{(z - b)^2}{1 \cdot 2} + \sum q \cdot \frac{(z - c)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3}.$$

Узагальнене рівняння вигинів:

$$E \cdot I \cdot y = E \cdot I \cdot y_0 + E \cdot I \cdot \alpha_0 \cdot z + \sum m \cdot \frac{(z - a)^2}{1 \cdot 2} + \sum F \cdot \frac{(z - b)^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \sum q \cdot \frac{(z - c)^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}.$$

Знаки доданків в узагальнених рівняннях встановлюють за правилом знаків для вигинних моментів.

Позитивне значення величини y означає вигин вгору і навпаки. Позитивне значення кута α означає поворот перетину проти годинникової стрілки і навпаки.

Значення α_0 і y_0 слід встановлювати за наступних умов:

- для балки, жорстко затиснутої лівим кінцем,

$$\alpha_0 = 0; \quad y_0 = 0;$$

- для балки, лівий кінець якої утримується опорою,

$$\alpha_0 \neq 0; \quad y_0 = 0;$$

для визначення кута α_0 необхідно скласти рівняння вигинів для другої опори та прирівняти його нулю;

- у перетині, що характеризується максимальним вигином, кут повороту перетину $\alpha_0 = 0$, оскільки у цій точці пружної лінії дотична паралельна осі z.

Крім розрахунків на міцність балки, часто здійснюють розрахунки на її жорсткість, які полягають у тому, що максимальний вигин (стріла вигину f) або максимальний кут повороту не повинні перевищувати допустимих величин:

$$y_{\max} = f \leq [f]; \quad \alpha_{\max} \leq [\alpha].$$

Приклад 9.3. Визначити вигин y_B вільного кінця консольної балки АВ завдовжки l_0 , яка вигинається зосередженою силою F (рис. 9.15,а).

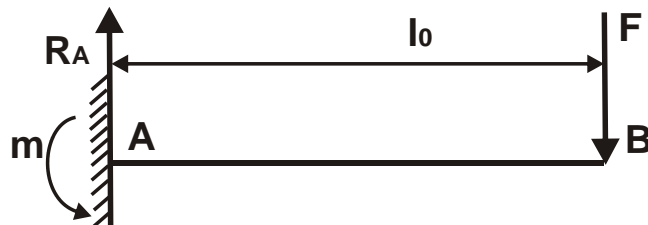


Рисунок 9.15 – Розрахункова схема визначення вигину y_B вільного кінця консольної балки

Рішення. Реакція R_A та момент затискання m визначаються:

$$R_A = F; \quad m = F \cdot l_0.$$

Оскільки $\alpha_0 = 0$; $y_0 = 0$, то із урахуванням узагальненого рівняння вигинів отримано:

$$E \cdot I \cdot y_B = \frac{R_A \cdot l_0^3}{6} - \frac{m \cdot l_0^2}{2}.$$

Після підстановки реакції R_A та момента затискання m у отриману залежність маємо:

$$y_B = \frac{1}{E \cdot I} \cdot \left(\frac{F \cdot l_0^3}{6} - \frac{F \cdot l_0^3}{2} \right) = -\frac{F \cdot l_0^3}{3 \cdot E \cdot I}.$$

Основні поняття щодо вигину і крутіння

Якщо розглядається спільна дія вигину і крутіння, то розрахунок розмірів перетину вала здійснюється із використанням гіпотез міцності:

$$\sigma_{\text{екв}} = \frac{M_{\text{екв}}}{W_x} \leq [\sigma],$$

де $M_{\text{екв}}$ – еквівалентний момент, Н·м.

За гіпотезою найбільших дотичних напружень (третья гіпотеза):

$$M_{\text{еквIII}} = \sqrt{M_B^2 + M_K^2}.$$

За гіпотезою потенційної енергії формозміни (п'ята гіпотеза):

$$M_{\text{еквV}} = \sqrt{M_B^2 + 0,75 \cdot M_K^2}.$$

У обох формулах M_K і M_B – відповідно, крутний і сумарний вигинний моменти у перетині вала.

Числове значення сумарного вигинного моменту дорівнює геометричній сумі вигинних моментів, які виникають у даному перетині від вертикально і горизонтально діючих зовнішніх сил:

$$M_B = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2}.$$

Послідовність вирішення задачі:

1. Привести діючі на вал навантаження до його вісі, звільнити вал від опор, замінивши їх дію реакціями у вертикальній і горизонтальній площинах.

2. За заданими значеннями потужності P і кутової швидкості ω визначити обертаючі моменти, що діють на вал.

3. Визначити навантаження F_1, F_{r1}, F_2, F_{r2} , які прикладено до валу.

4. Скласти рівняння рівноваги всіх сил, що діють на вал, окремо у вертикальній площині та окремо у горизонтальній площині і визначити реакції опор у обох площинах.

5. Побудувати епюру крутних моментів.

6. Побудувати епюри вигинних моментів у вертикальній і горизонтальній площинах (епюри M_X і M_Y).

7. Визначити найбільше значення еквівалентного моменту:

$$M_{\text{еквIII}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + M_Z^2}$$

або

$$M_{\text{еквV}} = \sqrt{M_X^2 + M_Y^2 + 0,75 \cdot M_Z^2}.$$

8. Принявши $S_{\text{екв}} = [S]$, визначити осьовий момент:

$$W_X = \frac{M_{\text{екв}}}{[S]}.$$

Визначити діаметр d суцільного круглого перетину за умови

$$W_X = \frac{\pi \cdot d^3}{32} \approx 0,1 \cdot d^3:$$

$$d \geq \sqrt{\frac{32 \cdot M_{\text{екв}}}{\pi \cdot [\sigma]}} \approx \sqrt{0,1 \cdot [\sigma]}.$$

Приклад 9.4. Для вала, виготовленого із сталі постійного поперечного перетину із двома зубчастими колесами (рис. 9.16,а), що передає потужність $P = 15$ кВт із кутовою швидкістю $\omega = 30$ рад/с, визначити діаметр вала за двома варіантами:

- за використанням третьої гіпотези міцності;
- за використанням п'ятої гіпотези міцності.

Для розрахунків прийняти: $[S] = 160$ МПа; $F_{r1} = 0,4 \cdot F_1$; $F_{r2} = 0,4 \cdot F_2$.

Рішення: 1. Складаємо розрахункову схему вала, приводячи діючі на вал навантаження до осі (рис. 9.16,б). За умови рівномірного обертання вала $M_1 = M_2$, де M_1 і M_2 – крутні пари, які додаються за умови перенесення сил F_1 і F_2 на вісь вала.

2. Визначаємо крутний момент, діючий на вал:

$$M_1 = M_2 = \frac{R}{W} = 0,5 \cdot 10^3 \text{ Н} \cdot \text{м} = 0,5 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

3. Визначаємо навантаження, які прикладено до вала:

$$F_1 = \frac{2 \cdot M_1}{d_1} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{0,1} = 10^4 \text{ Н} = 10 \text{ кН};$$

$$F_{r1} = 0,4 \cdot 10 = 4 \text{ кН};$$

$$F_2 = \frac{2 \cdot M_2}{d_2} = \frac{2 \cdot 0,5 \cdot 10^3}{0,25} = 10^4 \text{ Н} = 10 \text{ кН};$$

$$F_{r2} = 0,4 \cdot 4 = 1,6 \text{ кН}.$$

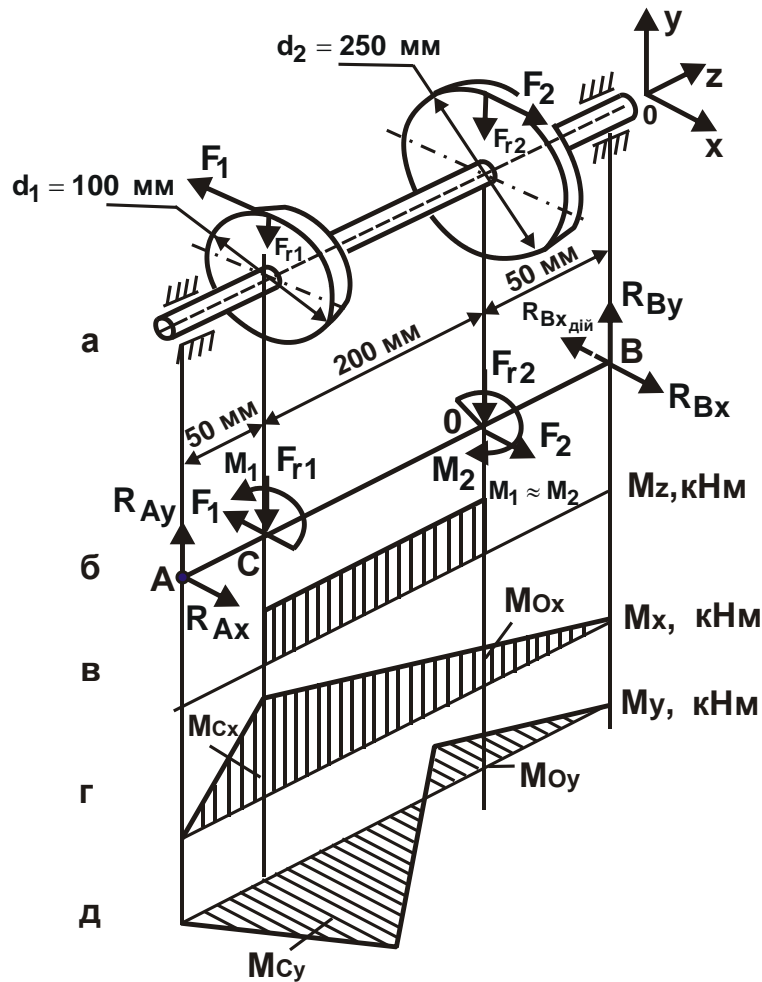


Рисунок 9.16 – Епюри крутних моментів

4. Визначаємо реакції опор у вертикальній площині (рис. 9.16,б):

$$\sum M_A = F_{r1} \cdot AC + F_{r2} \cdot AD - R_B \cdot AB = 0;$$

$$R_{By} = \frac{F_{r1} \cdot AC + F_{r2} \cdot AD}{AB} = \frac{4 \cdot 0,05 + 1,6 \cdot 0,25}{0,3} = 2 \text{ кН};$$

$$\sum M_B = R_{Ay} \cdot AB + F_{r1} \cdot BC - F_{r2} \cdot DB = 0;$$

$$R_{Ay} = \frac{F_{r1} \cdot BC + F_{r2} \cdot DD}{AB} = \frac{4 \cdot 0,25 + 1,6 \cdot 0,05}{0,3} = 3,6 \text{ кН};$$

$$\sum Y = R_{Ay} - F_{r1} - F_{r2} + R_{By} = 2 - 4 - 1,6 + 3,6 = 0.$$

Таким чином, $\sum Y = 0$. Отже, значення реакцій опор R_{Ay} і R_{By} визначено правильно.

Визначаємо реакції опор у горизонтальній площині (рис. 9.16,б):

$$\sum M_A = F_1 \cdot AC - F_2 \cdot AD - R_{Bx} \cdot AB = 0;$$

$$R_{Bx} = \frac{F_1 \cdot AC - F_2 \cdot AD}{AB} = \frac{10 \cdot 0,05 - 4 \cdot 0,25}{0,3} = -1,66 \text{ кН}.$$

Знак мінус указує на те, що дійсний напрям реакції протилежний обраному (рис. 9.16,б):

$$\sum M_B = R_{Ax} \cdot AB - F_1 \cdot CB + F_2 \cdot DB = 0;$$

$$R_{Ax} = \frac{F_1 \cdot AC + F_2 \cdot DB}{AB} = \frac{10 \cdot 0,25 - 4 \cdot 0,05}{0,3} = 7,66 \text{ кН};$$

$$\sum X = R_{Ax} - F_1 + F_2 - R_{Bx} = 7,66 - 10 + 4 - 1,66 = 0.$$

Таким чином, $\sum X = 0$. Отже, значення реакцій опор R_{Ax} і R_{Bx} визначено правильно.

5. Будуємо епюру крутних моментів M_z (рис. 9.16,в).

6. Визначаємо у характерних перетинах значення вигинних моментів M_x у вертикальній площині і M_y у горизонтальній площині та будуємо епюри (рис. 9.16,г,д):

$$M_{C_1} = R_{A_1} \cdot AC = 3,6 \cdot 0,05 = 0,18 \text{ кН};$$

$$M_{D_x} = R_{A_y} \cdot AD - F_{r_1} \cdot CD = 3,6 \cdot 0,25 - 4 \cdot 0,2 = 0,1 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{C_2} = R_{A_x} \cdot AC = 7,66 \cdot 0,05 = 0,383 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{D_y} = R_{A_x} \cdot AD - F_{r_1} \cdot CD = 7,66 \cdot 0,25 - 10 \cdot 0,2 = -0,085 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

7. Визначаємо найбільше значення еквівалентного моменту за заданими гіпотезами міцності. Оскільки у даному прикладі значення сумарного вигинного моменту в перетині С більше, ніж в перетині D,

$$M_{BC} = \sqrt{M_{C_x}^2 + M_{C_y}^2} = \sqrt{0,18^2 + 0,383^2} = 0,423 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{BD} = \sqrt{M_{D_x}^2 + M_{D_y}^2} = \sqrt{0,1^2 + 0,085^2} = 0,13 \text{ кН}\cdot\text{м},$$

то перетин С слід вважати безпечним.

Визначаємо еквівалентний момент у перетині С.

Варіанти:

а) за гіпотезою найбільших дотичних напружень :

$$M_{еквIII} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + M_z^2} = \sqrt{0,18^2 + 0,383^2 + 0,5^2} = \sqrt{0,429} = 0,655 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

б) за гіпотезою потенційної енергії формозміни:

$$M_{еквV} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2 + 0,75 \cdot M_z^2} = \sqrt{0,18^2 + 0,383^2 + 0,75 \cdot 0,5^2} =$$

$$= \sqrt{0,366} = 0,605 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

8. Визначаємо необхідні розміри вала за варіантами а) і б):

$$d = \sqrt{\frac{M_{\text{еквIII}}}{0,1 \cdot [\sigma]}} \approx \sqrt{\frac{0,655 \cdot 10^5}{0,1 \cdot 160}} = 34,5 \text{ мм};$$

$$d = \sqrt{\frac{M_{\text{еквV}}}{0,1 \cdot [\sigma]}} \approx \sqrt{\frac{0,605 \cdot 10^5}{0,1 \cdot 160}} = 33,6 \text{ мм}.$$

Приймаємо: $d_{\text{вала}} = 34 \text{ мм}$.

Стійкість стиснутих стержнів

Наведені розрахунки на міцність і жорсткість отримано за умови, що під час деформації конструкції між зовнішніми навантаженнями і внутрішніми силами пружності, що виникають, має місце стійка форма рівноваги, за якою малим збурюючим діям відповідають малі деформації. Навантаження, за яким відбувається втрата стійкості, називається критичним, а відповідні стани – критичними станами. Небезпека втрати стійкості має місце для легких, тонкостінних конструкцій гнучких стержнів, пластин і оболонок.

Вигин, пов'язаний із втратою стійкості стержня прямолінійної форми, називається поздовжнім вигином. Його поява пов'язана із тим, що у результаті викривлення вісі у поперечних перетинах стержня виникають два внутрішні силові чинники – поздовжня сила $N = F$ і вигинний момент M_B . Тому визначення критичних навантажень має важливе значення під час розрахунку конструкцій та дозволяє уникнути втрати стійкості шляхом застосування коефіцієнта запасу стійкості.

Для забезпечення стійкості необхідно, щоб стискаюча сила F , що діє на стержень, була меншою, ніж критична сила $F_{\text{кр}}$.

Допустима стискаюча сила визначається:

$$[F] = \frac{F_{\text{кр}}}{[S_y]},$$

де $[S_y]$ – коефіцієнт запасу стійкості.

Стійкість стержня досягається за умови $[S_y] > 1$.

Для сталей $[S_y] = 1,8 \dots 3$; для чавунів – $[S_y] = 5 \dots 5,5$; для дерева – $[S_y] = 2,8 \dots 3,2$.

Для визначення критичної сили $F_{\text{кр}}$ вченим Л. Ейлером отримано формулу, яка називається *формулою Ейлера*:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_{min}}{l_H^2},$$

де E – модуль пружності першого роду;

I_{min} – найменший із осьових моментів інерції перетину;

$l_H = \mu \cdot l$ – наведена довжина стержня;

l – довжина стержня;

μ – коефіцієнт приведення довжини або коефіцієнт затискання (залежить від способу кріплення кінців стержня).

На рис. 9.17 показано способи закріплення кінців стержня, які найбільш часто зустрічаються на практиці, та наведено значення коефіцієнта μ .

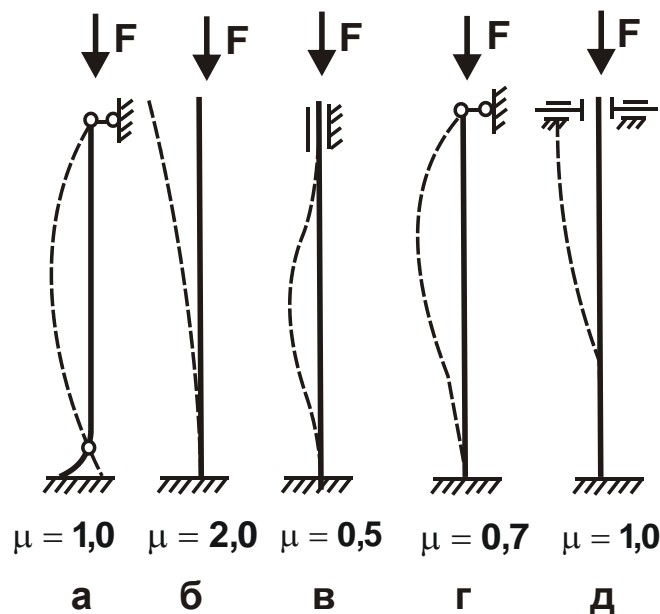


Рисунок 9.17 – Способи закріплення кінців стержня

Традиційно застосовують три види розрахунків на стійкість:

- перевірочний розрахунок – визначають коефіцієнт запасу стійкості S_y та порівнюють отримане рішення із допустимим $[S_y]$:

$$S_y = \frac{F_{кр}}{F} \geq [S_y],$$

де F – діюче навантаження;

- визначення допустимого навантаження:

$$[F] = \frac{F_{кр}}{[S_y]};$$

• проектний розрахунок, за яким визначають необхідне значення мінімального моменту інерції поперечного перетину стержня:

$$I_{\min} \geq \frac{F \cdot [S_y] \cdot (\mu \cdot l)^2}{(\pi^2 \cdot E)},$$

після чого визначають гнучкість і порівнюють із граничним значенням.

Розрахунок стиснутих стержнів на стійкість можна здійснювати на основі розрахунку на простий стиск:

$$[F] = \varphi \cdot [\sigma]_{\text{ст}} \cdot A,$$

де $[\sigma]_{\text{ст}}$ – основне допустиме напруження на стиск;

φ – коефіцієнт поздовжнього вигину.

Порядок виконання роботи

Отримати у викладача варіант свого завдання (табл. 9.1, табл. 9.2, рис. 9.18, рис. 9.19) та розв'язати задачу із визначення розмірів поперечного перетину балки за умов її міцності на вигин.

Таблиця 9.1 – Значення F_1 і F_2 , M та довжин ділянок балки a_1 , a_2 , a_3 за варіантами

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1 , Н	5	8	10	20	10	12	9	11	18	4
F_2 , Н	12	10	14	10	12	5	5	15	10	20
M , Н·м	10	5	6	9	8	10	12	5	15	7
a_1 , м	2	5	4	2	3	5	7	6	4	2
a_2 , м	3	2	3	5	4	2	5	8	9	3
a_3 , м	5	5	7	8	6	5	3	2	5	4

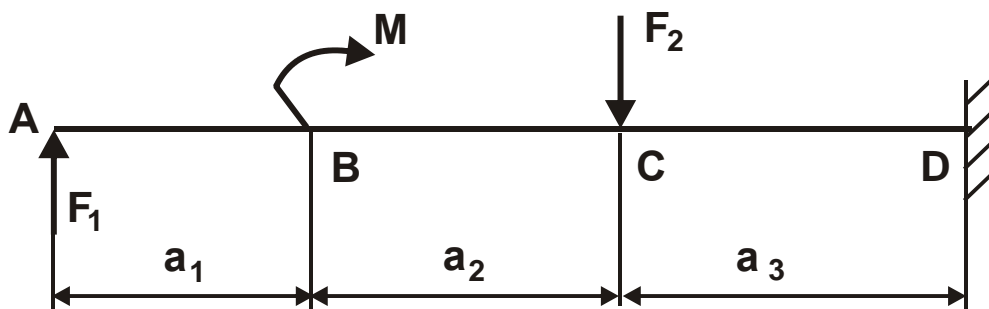


Рисунок 9.18 – Розрахункова схема
206

Таблиця 9.2 – Значення F_1 і F_2 , q та довжин ділянок балки a_1 , a_2 , a_3 за варіантами

Параметри	Варіант									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
F_1 , Н	5	8	10	20	10	12	10	10	15	4
F_2 , Н	10	10	14	10	12	5	5	15	10	20
q , Н/м	2	3	5	4	2	6	5	4	2	5
a_1 , м	2	5	4	2	3	5	7	6	4	2
a_2 , м	3	2	3	5	4	2	5	8	4	3
a_3 , м	5	5	5	8	6	5	3	2	5	4

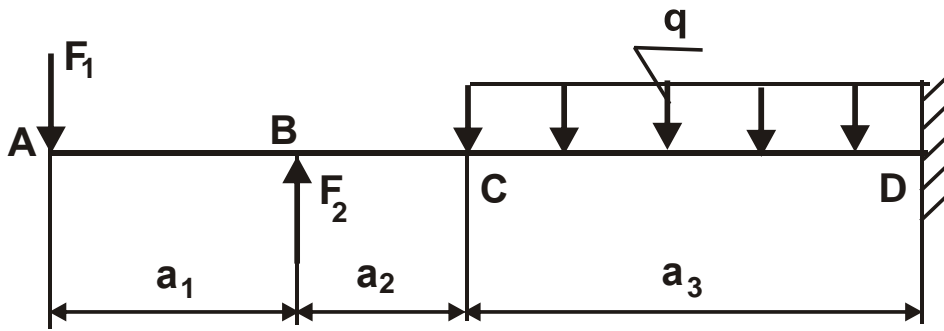


Рисунок 9.19 – Розрахункова схема

Звіт по роботі

Звіт складається із основних понять вигину, вигину і крутіння, стійкості стиснутих стержнів та методів визначення розмірів поперечного перетину балки за умов її міцності на вигин, побудови епюр поперечних сил і вигинних моментів, основних понять та розв'язку заданої задачі.

Література [5, 9, 17 – 20].

Питання для самоконтролю

1. Умова міцності на вигин за нормальним напруженням для балок із симетричним перетином відносно нейтральної вісі X має вигляд:

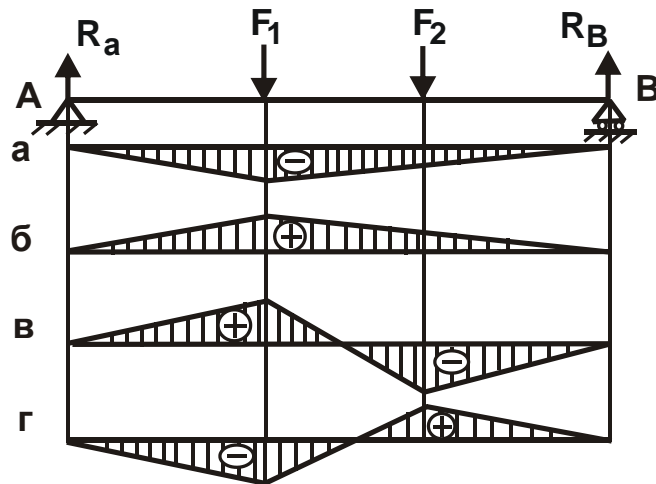
а) $\sigma_{\max} = M_{\max} / W_x \leq [\sigma]$;

б) $\sigma = N / S < [\sigma]$;

в) $\tau = M_{кр} / W_p \leq [\tau]$;

г) $\sigma = N / S \leq [\sigma]$.

2. Навантаженню балки відповідає еюра вигинних моментів:



- а) еюра а;
- б) еюра б;
- в) еюра в;
- г) еюра г.

3. Чистий вигин виникає від дії:

- а) вигинного моменту і поперечної сили;
- б) вигинного моменту і поздовжньої сили;
- в) вигинного моменту;
- г) вигинного моменту і крутного моменту.

4. Зі збільшенням у 2 рази діаметра валу в умовах кручення величина максимального напруження у поперечному перетині:

- а) зменшиться у 2 рази;
- б) зменшиться у 4 рази;
- в) зменшиться у 8 разів;
- г) залишиться незмінною.

5. Один Паскаль – це:

- а) Н/мм^2 ;
- б) 10 Н/м^2 ;
- в) 100 Н/мм^2 ;
- г) Н/м^2 .

6. Спиця велосипедного колеса змінила прямолінійну форму (отримала скривлення) за причиною недостатньої:

- а) міцності;
- б) жорсткості;
- в) стійкості;
- г) пластичності.

Робота 10. Основні поняття у деталях машин. Передачі

Мета роботи – вивчення основних понять у деталях машин та конструкційних особливостей і методів кінематичного й силового розрахунків механічних передач; навчити студентів виконувати розрахунок параметрів циліндричного прямозубого редуктора.

Загальні відомості

Основні поняття у деталях машин

Навчальну дисципліну "Деталі машин" традиційно вивчають як самостійну, однак її також вивчають і як третій розділ більш загальної навчальної дисципліни "Технічна механіка", яка включає ще два перші розділи: "Теоретична механіка" і "Опір матеріалів". Із цими розділами ми вже ознайомилися у цьому навчальному посібнику, навчилися розв'язувати задачі статички, кінематики, динаміки та виконувати розрахунки на міцність і жорсткість елементів конструкцій. Зараз переходимо до вивчення третього розділу навчальної дисципліни "Технічна механіка" – це "Деталі машин", який присвячено розгляду основ розрахунку і конструювання деталей і вузлів загального призначення, що зустрічаються у різних механізмах і машинах.

Машина – це механізм (поєднання механізмів), що здійснює доцільний рух для перетворення енергії або виконання робіт (перетворення матеріалів, інформації). Отже, *машиною* називається агрегат, що виробляє корисну роботу.

Залежно від характеру виконуваних робіт машини розрізняють:

- *машини-генератори*, які перетворюють механічну на інший вид енергії (наприклад, динамо-машини на електричну енергію, компресори на енергію стисненого повітря);

- *машини-двигуни* (енергетичні машини), що перетворюють теплову, електричну або іншу енергію на механічну роботу: електродвигуни, парові, гідравлічні й газові турбіни, двигуни внутрішнього згоряння;

- *машини-знаряддя* (технологічні машини) – машини, що призначені для виконання технологічних операцій оброблення матеріалів, виготовлення виробів (пресове обладнання, металорізальні верстати, автоматичні лінії та ін.);

- *транспортувальні машини* – це машини для переміщення вантажів;

- *керувальні машини* – це машини або системи, призначені для керування агрегатами (або іншими машинами), взаємопов'язаними між собою та з електронно-обчислювальною машиною або комп'ютером.

Отже, машини бувають різноманітними. Вони можуть різнитися за призначенням, розмірами і конструкцією, але всі складаються із однакових за формою і призначенням елементів – деталей.

Деталлю називається елементарна частина машини, яка не підлягає розбиранню, наприклад: болт, гайка, вал. Деталь, до якої кріпляться інші деталі, називається *базовою*. У токарному верстаті це станина, у автомобілі – рама, у двигуні внутрішнього згоряння – блок.

Кілька деталей, з'єднаних між собою, називаються *вузлом*. Кілька з'єднаних вузлів називається *складальною одиницею* або *машиною*.

Будь-яка машина завжди складається із трьох механізмів:

- робочий орган, або виконавчий механізм;
- двигун;
- передача.

Робочий орган виконує певну виробничу функцію. Наприклад, екскаватор повинен копати землю, отже, його робочим органом є ківш, стріла, напірний механізм. Щоб він працював, потрібно джерело енергії – двигун. Щоб енергію передати до робочого органу, потрібна передача.

Механізмом називається пристрій, що виконує строго закономірні рухи. Як правило, механізм є складовою частиною машини. Наприклад, у двигуні є кривошипно-шатунний механізм, завдання якого – перетворити поступальний рух поршня у обертальний рух вала.

До всіх машин пред'являються такі вимоги:

- висока продуктивність;
- економічність виробництва і експлуатації;
- міцність та технологічність конструкції;
- високий коефіцієнт корисної дії – к. к. д.;
- автоматизація робочих циклів;
- компактність, надійність та довговічність;
- низька вартість;
- простота управління і безпека обслуговування;
- естетичність.

Однією із головних вимог до машин і їх деталей слід розглядати технологічність конструкції, яка повинна характеризуватися мінімальними витратами на виробництво та експлуатацію. Це досягається:

- використанням у новій машині деталей із мінімальною механічною обробкою та широким застосуванням штампування, точного лиття, фасонного прокату, зварювання;
- уніфікації даної конструкції, тобто застосуванням однакових деталей у різних вузлах машини;
- максимальним застосуванням стандартних конструктивних елементів деталей (різьблення, канавок, фасок та ін.), а також стандартних квалітетів і посадок;
- застосуванням у новій машині деталей і вузлів, які раніше освоєно у виробництві.

У табл. 10.1 наведено 3D-моделі та креслення деталей машин, що отримали застосування у сучасному машинобудуванні. Ці деталі – складнопрофільні, виготовляються із різних за фізико-механічними властивостями матеріалів та вимагають застосування для механічного оброблення сучасного вискоефективного обладнання та інструментів, наприклад, металорізальних верстатів із числовим програмним управлінням (ЧПУ). Важливим є використання під час проектування деталей машин сучасних автоматизованих комп'ютерних систем.

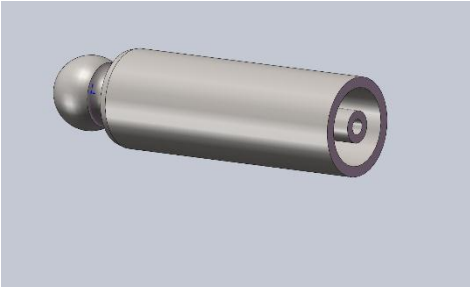

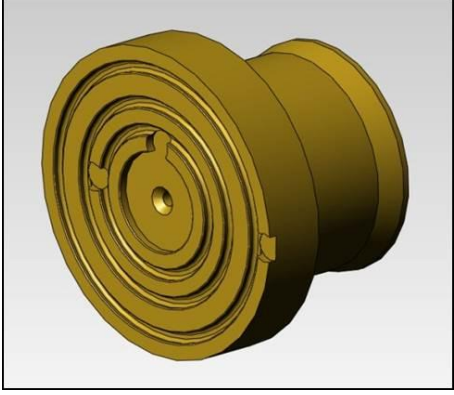
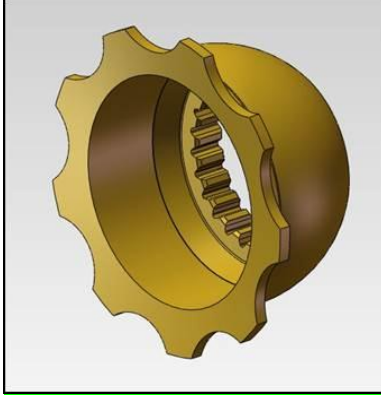


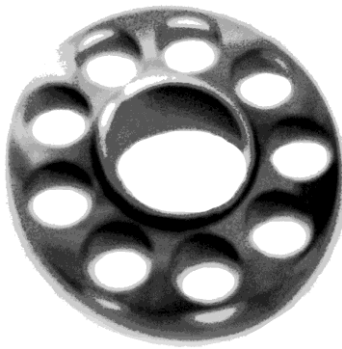

Проектуванням машин займається конструктор. При цьому вирішується, перш за все, проблема міцності деталей машин у вигляді двох видів завдань:

- за заданим навантаженням і допустимим напруженням визначення розмірів деталі;
- за заданими розмірами деталі визначення допустимого навантаження або перевірка деталі на міцність.







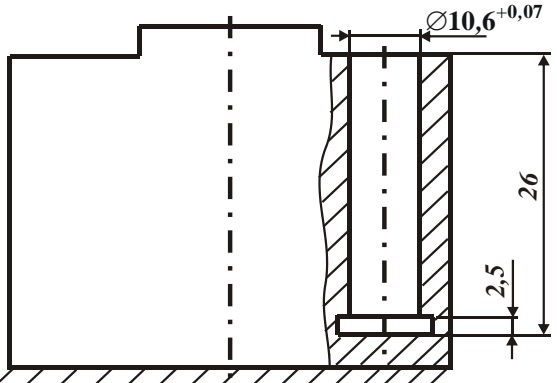
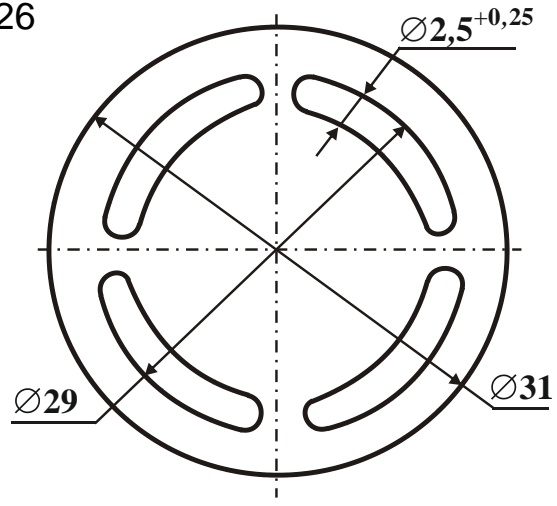
Під час розрахунку деталей одні розміри повинні бути округлені до стандартних, інші – приймаються конструктивно із подальшою перевіркою деталей на міцність.

Навчальна дисципліна "Деталі машин" вивчає деталі загального призначення, що застосовуються в усіх машинах – це з'єднання, передачі, деталі обертання. Деталі, властиві певному виду машин, вивчаються у спеціальних курсах. Наприклад, корпус цементного млина розглядається у курсі механічного обладнання промисловості будівельних матеріалів.

Таблиця 10.1 – 3D-моделі та креслення деталей машин

1 	2 
3 	4 
5 	6 
7 	8 

<p>9</p> 	<p>10</p> 
<p>11</p> 	<p>12</p> 
<p>13</p> 	<p>14</p> 
<p>15</p> 	<p>16</p> 
<p>17</p> 	<p>18</p> 

<p>19</p> 	<p>20</p> 
<p>21</p> 	<p>22</p> 
<p>23</p> 	<p>24</p> 
<p>25</p> 	<p>26</p> 

Вибір допустимих напружень

На вибір допустимих напружень впливають чинники: точність формул; достовірність механічних якостей матеріалу; правильна оцінка величини і характеру діючих навантажень.

Умови роботи різних деталей, наприклад, ресори і болта, валу і заклепки, не однакові. Таким чином, загальних норм допустимих напружень немає і бути не може. Проте, існують розроблені на основі практики норми допустимих напружень для окремих видів деталей: тільки для валів, тільки для болтів, тільки для зубчастих коліс тощо.

Допустиме напруження може бути визначено двома способами: *аналітично і за таблицею.*

Перший спосіб – розрахунок за формулою:

$$[\sigma] = \frac{\sigma}{n},$$

де n – коефіцієнт запасу.

Коефіцієнт запасу n визначити дуже складно. Він складається із великої кількості різних коефіцієнтів, що враховують характер навантаження і властивості матеріалу, тип і чистоту обробки, вплив місцевих напружень.

Другий спосіб – вибір допустимих напружень за таблицею. Зазвичай, застосовують другий спосіб, тому будемо користуватися ним.

Матеріали, які застосовують у машинобудуванні

Основним матеріалом для деталей є чорні метали: сталь і чавун.

Сталь буває вуглецева і легована. Вуглецеві сталі поділяють на конструкційні та інструментальні. Конструкційні сталі вміщують до 0,6 % вуглецю С. Їх поділяють на сталі звичайної якості та якісні. Сталі звичайної якості (ДСТ 380-88) виготовляють таких марок: Ст0, Ст1кп, Ст1пс, Ст1сп, Ст2кп, Ст2пс, Ст2сп, ..., Ст6пс, Ст6сп. Із збільшенням номеру сталь має більші значення міцності й твердості, але меншу пластичність. Із сталі звичайної якості виготовляють рядовий прокат (прутки, балки, швелери), а також листи, труби. Ці сталі широко застосовують у будівництві для зварних, клепаних та болтових конструкцій.

Сталі якісні конструкційні (ДСТ 1050-88) відрізняються меншим вмістом сірки та фосфору ($\leq 0,04$ %), обмеженим вмістом інших елементів, неметалевих домішок. Вони призначені для виготовлення ви-

робів, які піддають терміновій обробці, тому стандарт регламентує їх хімічний склад. Маркують ці сталі числом, яке вказує на вміст вуглецю у сотих частках процента (0,8; 10; 15; ... 60). У марці також вказується ступінь розкислення сталі (крім сталі спокійної) – 10кп, 10пс, 10. Залежно від призначення гарячекатана та кована сталі поділяються на такі підгрупи: для гарячої обробки тиском; для холодної механічної обробки (точінням, фрезеруванням); для холодного волочіння.

Інструментальні вуглецеві сталі виплавляють у мартенівських та електричних печах і поставляють згідно із ДСТ 1435-90 за хімічним складом. Їх поділяють на якісні і високоякісні. Якісні сталі позначають літерою У і цифрою, яка вказує на вміст вуглецю у десятих частках процента, наприклад: У8 (0,8%С), У12 (1,2%С). Високоякісні сталі, крім того, у кінці марки мають літеру А (У8А, У12А).

Вибирають інструментальні сталі для виготовлення того чи іншого інструменту, що працює без ударів (напилки, мітчики), застосовують сталі більш тверді, тобто з більшим вмістом вуглецю – У10, У12. Інструмент, який піддають ударним навантаженням (зубила, молотки) повинен мати деяку в'язкість, тому для його виготовлення застосовують менш тверді та менш міцні сталі із меншим вмістом вуглецю – У7, У8.

Леговані сталі. Легованими називають сталі, в яких є спеціально введені (легуючі) елементи: Сг, Ні, Мг, Ті, V тощо. Отже, легована сталь – це сталь, поліпшена леуючими елементами. Марганець і кремній введені у кількості більше 1%, також леуючі.

Легуючі елементи в марках сталі позначають такими літерами: В – W (вольфрам), Г – Mn (марганець), М – Мо (молібден), Н – Ні (нікель), С – Si (кремній), Т – Ті (титан), Х – Cr (хром) тощо. Число на початку марки конструкційної сталі вказує на вміст вуглецю у сотих частках процента, цифри після літерів – середній вміст позначеного цими літерами елемента у відсотках. Наприклад, марка 12Х2Н4В позначає сталь із середнім вмістом 0,12 С, 2% Сг, 4% Ні та близько 1% W. У склад сталі 37Х3Н2 входить 0,37% вуглецю, не більше 3% хрому і не більше 2% нікелю.

Під час маркування інструментальних та деяких спеціальних сталей іноді відходять від цього правила. Наприклад, марка Х12М позначає сталь вмістом близько 1,5% С, 12% Сг, майже 1% Мо. Деякі леговані сталі виділено в окремі групи: Ш – шарикопідшипникові (ШХ9, ШХ15), Р – швидкорізальні (Р9, Р18), А – підвищеної оброблюваності різанням (А30, АС14).

До конструкційних легованих сталей належать сталі, які застосовують для виготовлення деталей машин, ресор, пружин, шарико- та роликотітшипників, а також сталі з особливими властивостями (жароміцні, окалиностійкі, корозійностійкі тощо).

Інструментальні сталі призначено для виготовлення ріжучого, штампового та вимірювального інструментів. Ці сталі повинні мати високу твердість, стійкість проти спрацювання, в ряді випадків – високу теплостійкість. Їх легують, головним чином, карбідоутворюючими елементами Cr, W, V, Mn.

Звичайні інструментальні леговані сталі мають теплостійкість до 300 °С. Тому виготовлені із цих сталей інструменти можуть працювати із швидкостями різання у межах 15 ... 25 м/хв. Із цих сталей виготовляють свердла, розвертки, мітчики, плашки.

Особливе місце займають швидкорізальні сталі. Вони вміщують до 18% W, 4,5% Cr, 2,5% V, 8% Co та інші елементи. Після термічної обробки твердість швидкорізальної сталі досягає 62 ... 64 HRC, а її ріжучі властивості зберігаються до температури 600 ... 650 °С. Тому інструменти із цієї сталі можуть працювати зі швидкістю різання у 3 ... 4 рази більшою, ніж із вуглецевих сталей.

Із швидкорізальних сталей виготовляють свердла, зенкери, різці, фрези, протяжки. Найбільш поширено швидкорізальні сталі марок P9, P9K5, P9M4, P18Ф2К8М.

Штампові сталі призначено для виготовлення інструментів для холодного та гарячого деформування металів. Для холодного деформування металів у багатьох випадках використовують інструменти із сталей, призначених для виготовлення ріжучого інструменту (У10, У12, Х12М, Р12).

Сталі для інструментів гарячого деформування повинні мати більшу міцність, окалиностійкість, теплопровідність. Тому для їх виготовлення застосовують комплексно леговані сталі із більшим вмістом легуючих елементів (5ХНМ; 4Х5В2ФС, 2Х8В8М – 2К8).

Сталі для вимірювальних інструментів повинні мати високу твердість, стійкість проти спрацювання, стабільність у розмірах протягом експлуатації. Цим вимогам задовольняють маловуглецеві сталі, які піддають цементуванню (Ст 15, Ст 20), загартовані високовуглецеві сталі (Х, ХГ), а також сталі, які піддають азотуванню (38ХМЮА).

Чавун маркується СЧ10, СЧ15 та ін. Існує ковкий чавун КЧ12-28.

Широко застосовують кольорові метали та їхні сплави (бронза БрОФ10-1 та ін., латунь Л86, Л56 тощо). Із латуні виготовляють крани, вентиля, радіатори, трубопроводи. Застосовують також цинкові сплави.

Широко застосовують дерево, пластмаси, гуму, скло, фарфор.

Під час вибору матеріалу необхідно враховувати його вартість, довговічність та безпеку.

Приклад 10.1. Виконати техніко-економічне обґрунтування вартості виготовлення легованої сталі, виходячи із табл. 10.2, у якій наведено значення відносної вартості металів. За базовий метал прийнято залізо (Ж), відносна вартість якого дорівнює одиниці. Відносна вартість всіх інших металів перевищує одиницю.

Таблиця 10.2 – Відносна вартість металів

Метал	Відносна вартість	Метал	Відносна вартість
Залізо (Ж)	1	Титан (Т)	90
Свинець	2,5	Вольфрам (В)	120
Цинк	3	Молібден (М)	170
Алюміній (Ю)	6	Срібло	500
Сурма	6,5	Ванадій (Ф)	750
Мідь (Д)	7,5	Ніобій	800
Магній	8	Тантал	1 500
Марганець (Г)	10	Рубідій	2 200
Нікель (Н)	17	Паладій	5 000
Олово	22	Золото	11 000
Хром (Х)	25	Реній	12 000
Кобальт (К)	35	Іридій	25 000
Вісмут	50	Осмій	25 000
Ртуть	65	Платина	27 000
Кремній (С)	3,5	Родій	45 000

Тому вартість основних легуючих хімічних елементів для приготування легованих сталей можна оцінити через коефіцієнти відносної вартості щодо поточної вартості заліза (табл. 10.2).

Знаючи хімічний склад легованої сталі, можна легко розрахувати масу кожного із компонентів, що входять в одиницю маси легованої сталі, наприклад, в 1 кг або в 1 т. Приймаючи поточну вартість заліза як вартість якісної низьковуглецевої сталі (наприклад, сталі марки 10), можна визначити вартість легуючих елементів, що входять до складу

легованої сталі, із урахуванням коефіцієнтів відносної вартості металів (табл. 10.2). Наприклад, визначити орієнтовну вартість 1 т легованої сталі 30ХГС. Хімічний склад сталі 30ХГС: 0,3 % С; близько 1 % Сr; близько 1 % Сr; близько 1 % Si; інше – 96,7 % Fe.

Середні світові ціни на якісну низьковуглецеву Сталь 10 коливаються у межах 600 ... 650 \$/т. Приймаємо 600 \$/т.

Вартість заліза Fe у сталі: $1 \times 600 \times 0,967 = 580,2$ \$.

Вартість хрому Cr у сталі: $25 \times 600 \times 0,01 = 150,0$ \$.

Вартість марганцю Cr у сталі: $10 \times 600 \times 0,01 = 60,0$ \$.

Вартість кремнію Si у сталі: $3,5 \times 600 \times 0,01 = 21,0$ \$.

Сумарна орієнтовна вартість сталі 30ХГС:

$$580,2 + 150,0 + 60,0 + 21,0 = 811,2 \text{ \$}.$$

Таким чином, вартість сортового прокату зі сталі 30ХГС на ринку металів складає 830 ... 890 \$.

На підставі наведеного розрахунку слід виконати завдання:

1. Для наведених марок легованих сталей слід визначити поваріантно (табл. 10.3) відносні вартості легованих сталей, приймаючи середні значення елементів, які зазначено у марці (похибка 10 ... 40 %).

Таблиця 10.3 – Варіанти завдань

Варіант	Марки	Варіант	Марки
1	40X10C2M, 30XН3А, 40XМФА	12	15XГН2ТА, 35ХМ, 35Г2
2	10X13СЮ, 18Н10, 30ХГС	13	15X11МФ, 40Х, 18Н10
3	15X11МФ, 30ХМА, 35ХГСА	14	55Г9Н9Х3, 30Г, 10ХСНД
4	15X12ВНМФ, 38ХНГ, 20X2Н4А	15	30ХГСН2А, 9ХС, 12ХН2
5	40X9C2, 50НХ, 15X11МФ	16	30X3МФ, 45Г2, 45Х
6	12X18Н10Т, 17Х, 38ХНГ	17	40X9C2, 15ХФ, 50НХ
7	15XГН2ТА, 35Х, 30X3МФ	18	10X13СЮ, 40X13, 40XМФА
8	15Г2СФ, 4X5МФС, У8Г	19	11X4В2МФ3С2, 6X6В3МФС, X12
9	9X5ВФ, 8X6НФТ, 85X6НФТ	20	9ХВГ, АС35Г2, Р18
10	40X10C2M, 40X9C2, 55Г9Н9Х3	21	10X13СЮ, 15X11МФ, Р6М5
11	15X12ВНМФ, АС14, Р12Ф3	22	Р6М5Ф3, 18Н10, Р18К5Ф2

Результати необхідно подати у вигляді таблиці із зазначенням відсоткового вмісту кожного елементу, що входить до конкретної марки

легованої сталі, її вартість. Останній стовпець таблиці – вартість легованої сталі.

2. Необхідно визначити найбільш кошовну леговану сталь.

3. Самостійно, використовуючи довідкові дані (або із Інтернету) щодо механічних характеристик легованих сталей (межі міцності, межі текучості, твердості, відносного подовження, умовного показника, рівного добутку відношення межі текучості та межі міцності на відносне подовження сталі), доповніть дані, які наведено у табл. 10.2, відомостями щодо відносних переваг сталей порівняно із залізом (або мало-вуглецевою сталлю).

Передачі

Передачею називається пристрій, призначений для передачі крутного моменту від двигуна до робочого органу. Передачі бувають *механічні, гідравлічні, пневматичні та електричні*. Із механічних передач найпоширеніші передачі обертального руху, оскільки обертальний рух легко зробити безперервним, простіше і легше реалізувати у вигляді компактної конструкції та досягти рівномірності ходу, зменшити втрати на тертя.

У навчальній дисципліні "Деталі машин" розглядають *механічні передачі обертального руху*, які прийнято називати просто *передачами*. Інші види механічних передач, а також електричні, пневматичні та гідравлічні передачі (приводи) вивчають у спеціальних курсах розрахунку та конструювання тих машин, де ці передачі застосовують.

Передачі обертального руху призначено для передачі енергії від двигунів до робочих машин, зазвичай, із перетворенням сил, швидкостей і крутних моментів, а в деяких випадках і виду або закону руху.

Передачі обертального руху поділяють:

- на передачі із безпосереднім контактом тіл обертання;
- на передачі із гнучким зв'язком, у яких тіла обертання пов'язані між собою гнучкою ланкою.

До перших передач відносяться фрикційна (рис.10.1,а), зубчаста (рис. 10.1,б) і черв'ячна (рис. 10.1,в), а до других передач – ремінна (рис. 10.1,г) і ланцюгова (рис. 10.1,д).

Отже, передачі виконують такі функції: зміну частоти обертання валу, а отже, і крутного моменту; зміну напрямку обертання; регулювання частоти обертання.

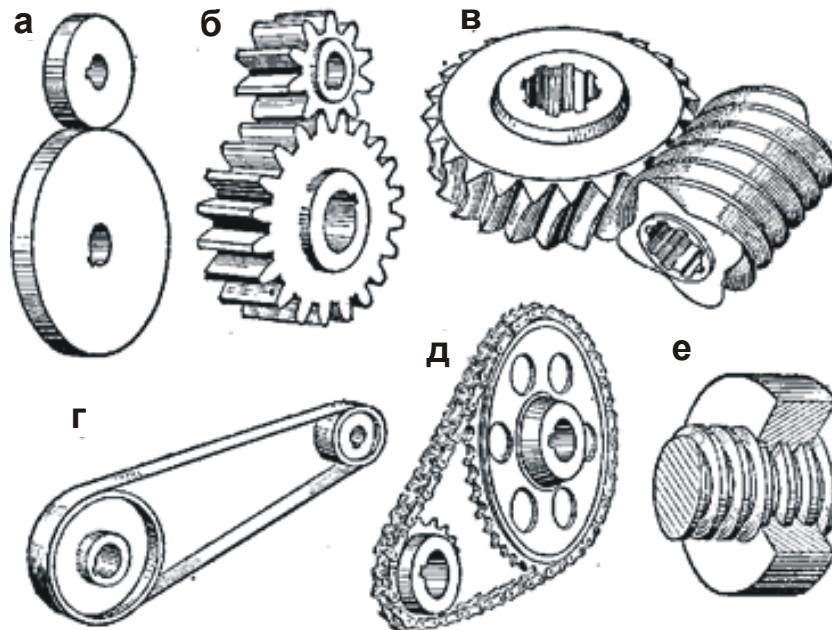


Рисунок 10.1 – Види механічних передач: фрикційна (а), зубчаста (б) і черв'ячна (в), ремінна (г), ланцюгова (д) і передача гвинт – гайка (е)

Обертальний момент на валу визначають за формулою:

$$T = \frac{1000 \cdot P}{\omega}, \quad \text{Н} \cdot \text{м},$$

де P – потужність, що передається;

$\omega = \frac{\pi \cdot n}{30}$ – кутова швидкість валу;

n – частота обертання валу.

Із формули витікає, що обертальний момент змінюється обернено пропорційно кутовій швидкості.

Розрізняють *передачі тертям і зачепленням*. До передач тертям відносять *ремінну і фрикційну передачі*, до передач зачепленням – *зубчасту, черв'ячну, ланцюгову і цівкову*, а також *передачу гвинт – гайка* (рис. 10.1).

Цівкову передачу призначено для передачі переривчастого руху і широко застосовують у автоматичних лініях. Працює така передача тільки від ланки 1 до ланки 2 (рис. 10.2), зворотній напрям неможливий. Ланка 1 здійснює постійне обертання, ланка 2 – переривчасте.

Застосовують цівкову передачу і в металорізальних верстатах. Прикладом є мальтійський хрест у багатошпindelних автоматах.

Будь-яка передача характеризується потужністю і передавальним відношенням. *Передавальним відношенням* називається відношення кутових швидкостей (або частоти обертання) передавальної пари:

$$i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2}.$$

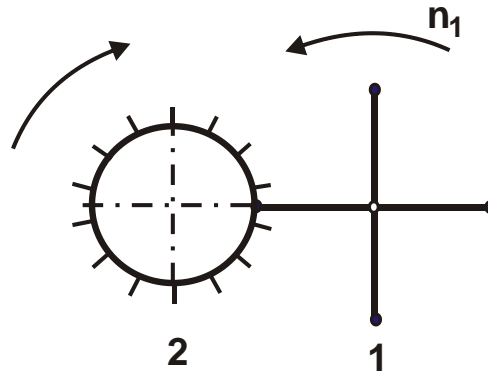


Рисунок 10.2 – Графічне зображення схеми цівкової передачі

Механізми із передавальним відношенням більше одиниці називають редукторами, а механізми із передавальним відношенням менше одиниці називають мультиплікаторами. Якщо механізм складається із однієї передавальної пари, то його називають *простим*. Механізм, що складається більш ніж із однієї передавальної пари, називається *складним*.

Передавальне відношення кожної пари окремо називається *частковим*, а всього механізму – загальним. *Загальне передавальне відношення* дорівнює добутку часткових передавальних відношень:

$$i_{\Sigma} = i_1 \cdot i_2 \cdot i_3 \cdot \dots \cdot i_n.$$

Під час роботи передавальної пари завжди відбувається втрата енергії, тому енергія, що підводиться, завжди більше енергії, що відводиться. Відношення енергії, що відводиться, до енергії, що підводиться, визначається *коефіцієнтом корисної дії* (к. к. д.) передачі та позначається η :

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{T_2}{T_1}.$$

Зубчаста передача

Зубчастою передачею називають передачу, яка здійснюється за допомогою зубчастих коліс.

Зубчаста передача – найбільш поширений вид передач. Її основні *переваги*: високі значення потужності, що передається, та надійності роботи; сталість передавального відношення; довговічність; простота обслуговування; високий к. к. д.; можливість перетворення обертального руху в поступальний. *Недоліком зубчастої передачі* є складність виготовлення.

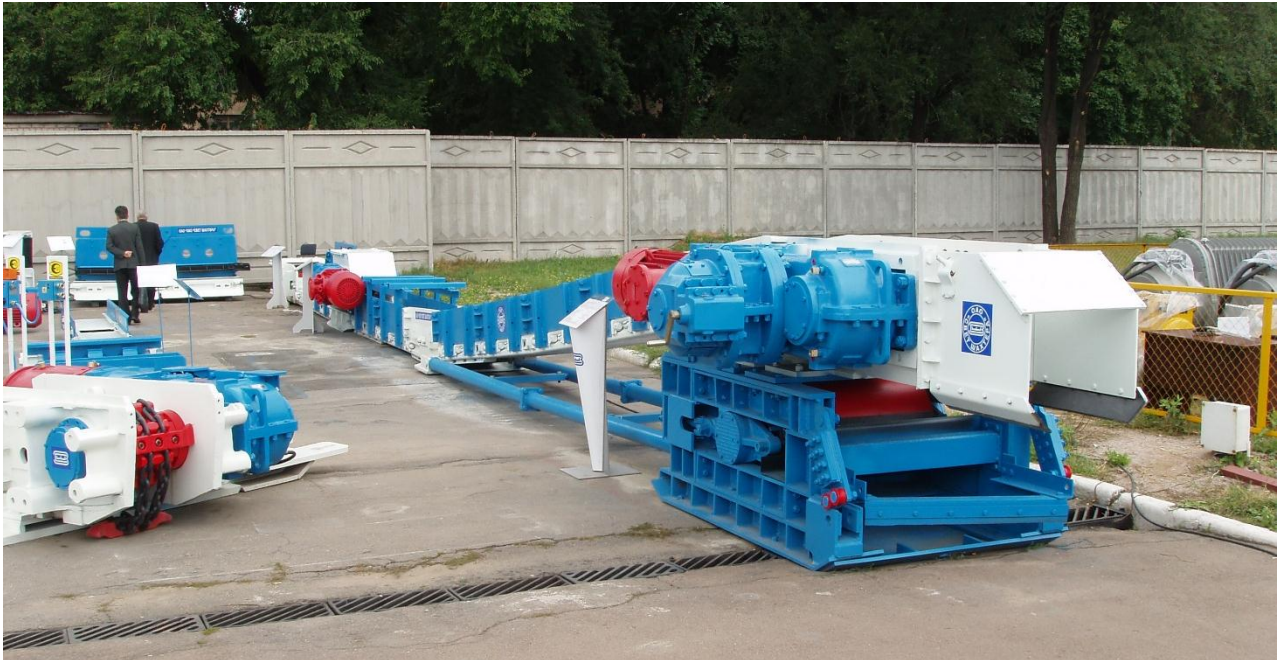
Приклад 10.2. На рис. 10.3 наведено загальний вигляд шахтного конвеєра (а) та приводу до нього (б), а на рис. 10.4, рис. 10.5 – зубчасті передачі, зубчасті колеса, зубчасті вали і сателіти редукторів, що застосовують у гірничих машинах під час видобутку вугілля. Для кращого розуміння ефективності застосування зубчастих передач слід розглянути основні умови виготовлення та експлуатації зубчастих передач редукторів гірничих машин.

Редуктори гірничих машин є основними елементами, що здійснюють привід багатьох виконавчих органів машин. Для більшості підземних гірничих машин технологічний процес виготовлення редукторів характеризується найбільшою металоємністю і трудомісткістю. Це пов'язано із тим, що для їх виготовлення застосовують найбільш міцні й коштовні матеріали та практично всі операції технологічного процесу (лиття, кування, штампування, механічна і хіміко-термічна обробка, регулювання зубчастих передач, підшипників та ін.). При цьому важливо забезпечити найвищу кваліфікацію робочого та інженерно-технічного персоналу. Зазначені чинники зумовлюють високу вартість виготовлення редукторів, яка досягає у ряді випадків половини вартості всієї гірничої машини. Однак трудові та матеріальні витрати на виготовлення редуктора окупаються за умови його надійної експлуатації, що значною мірою забезпечує надійність машини загалом.

Специфічні умови експлуатації підземних гірничих машин характеризуються вологістю та запиленістю рудничної атмосфери, абразивністю зруйнованого масиву (вугілля, породи), забрудненістю та хімічною активністю шахтних вод, небезпекою обвалення гірських порід на машину, а також різними гірничо-геологічними умовами. Тому для машин механізованого комплексу (очисні комбайни, скребкові конвеєри, кріплення) вимоги щодо обмеження габаритів та маси необхідно поєднувати із вимогами вибухобезпеки, міцності та надійності в експлуатації.

Забезпечення вимог щодо малогабаритності та мінімальної маси машини призводить до високої напруженості елементів машин дета-

лей редукторів, оскільки для забезпечення необхідної міцності та довговічності потрібно виготовлення цих деталей із високоміцних та зносостійких сталей із ефективним зміцненням (термічна і термохімічна обробка та ін.).



а



б

Рисунок 10.3 – Загальний вигляд шахтного конвеєра (а)
та приводу до нього (б)



а



б

Рисунок 10.4 – Зубчасті передачі редукторів
225



Рисунок 10.5 – Зубчасті колеса, зубчасті вали і сателіти редукторів

Досвід роботи гірничих машин та експериментальні дослідження, які здійснюють під час експлуатації, показують, що навантаження у різних їх елементах не є постійними, а змінюються зі змінними частотами та амплітудами. Головним джерелом силового напруження у гірничих машинах є процес взаємодії їх виконавчих органів із масивом, що руйнується, або транспортованим матеріалом. Для скребкових та стрічкових конвеєрів характерними джерелами силового напруження прийнято вважати навантаження, що виникають під час завантаження та транспортування відбитої гірської маси. На формування навантажень також впливають: конструкція конвеєра (довжина, число приводів, наявність гідромуфт, розміри жолоба, число скребкових ланцюгів, крок скребків, їх форма, число зубів та ін.), параметри режиму роботи (швидкість переміщення ланцюгів або стрічки та ін.), гірничо-геологічні умови (кут установки конвеєра, вологість матеріалу та ін.).

Крім наведених чинників, спільними для всіх гірничих машин є такі джерела обурення:

- різні кінематичні недосконалості, які органічно властиві деяким системам (кінематика зубчастих та ланцюгових передач, кінематична неурівноваженість виконавчих органів);

- кінематичні недосконалості, що виникають внаслідок похибок виготовлення та монтажу різних елементів (зубчастих передач, валів, підшипників, корпусів редукторів тощо);

- нестабільність характеристик джерел енергопостачання (напруги електромережі, тиску в пневмо- або гідромережі), внаслідок чого електричний струм і момент на валу електродвигуна можуть змінюватись у широких межах;

- залежність від оператора, який управляє машиною (його здібності швидко і безпомилково орієнтуватися у ситуації, професійної інтуїції, чіткості та плавності управління) та ін.

Сумарна дія зазначених вище чинників обумовлює основну особливість роботи гірничих машин – невпорядкований, стохастичний характер навантажень, що виникають у їх елементах, і, в першу чергу, у зубчастих передачах редукторів, які найбільше схильні до різних пошкоджень. Дослідженнями, проведеними на ряді рудоремонтних заводів, визначено наступний розподіл дефектів зубчастих коліс редукторів для скребкових конвеєрів: 61,5 % – зношування; 13 % – пітинг; 15,5 % – злам; 10 % – інші види.

Із цього витікає, що основним шляхом підвищення ресурсу роботи зубчастих коліс редукторів є підвищення їхньої зносостійкості. Очевидно, це досягається застосуванням більш міцних матеріалів (сталей) для виготовлення зубчастих коліс, використанням різних методів об'ємного та поверхневого зміцнення зубчастих коліс, прогресивних методів їх механічної обробки (особливо на фінішних операціях), що виключають утворення на оброблюваних поверхнях припикань, мікротріщин та інших температурних дефектів і забезпечують високі показники точності й шорсткості обробки. У значній мірі це вимагає вдосконалення операцій зубшліфування, на яких остаточно формуються параметри точності й якості обробки та які найбільш відповідальні за експлуатаційні характеристики оброблених зубчастих коліс.

Зубчасті передачі *класифікують* за характером розташування валів, за формою профілів зубів (евольвентні, циклоїдні, кругові та ін.); за числом ступенів (одно-, двох- і багатоступінчасті) із прямими, косими, шевронними і криволінійними зубами; за типом передач (із зовнішнім і внутрішнім зачепленням). На рис. 10.6 зображено види зубчастих передач.

Основним елементом будь-якого зубчастого колеса є зуб, утворений бічними поверхнями, поверхнею вершин і поверхнею западин.

Профіль зуба може окреслюватися прямою лінією або різними кривими: дугою кола, евольвентою, циклоїдними кривими. Найбільше застосування отримали евольвентні профілі зуба як найбільш технологічні, тобто найбільш прості у виготовленні та найбільш працездатні й надійні в експлуатації (рис. 10.7). Тому зубчасте зачеплення називається *евольвентним*.

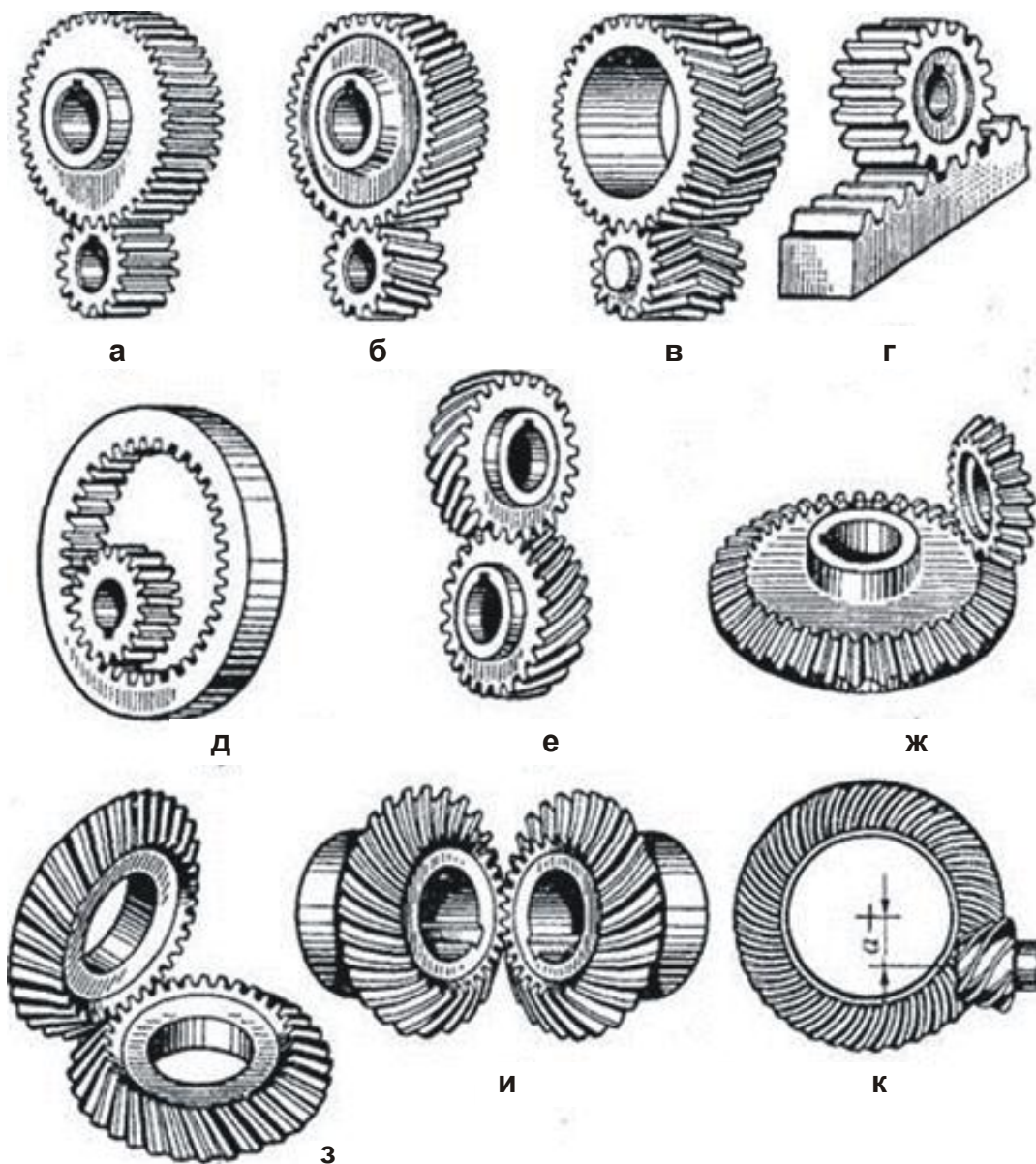


Рисунок 10.6 – Види зубчастих передач: а, б, в – циліндричні зубчасті передачі із зовнішнім зачепленням; г – рейкова передача; д – циліндрична передача із внутрішнім зачепленням; е – зубчаста гвинтова передача; ж, з, и – конічні зубчасті передачі; к – гіпоїдна передача

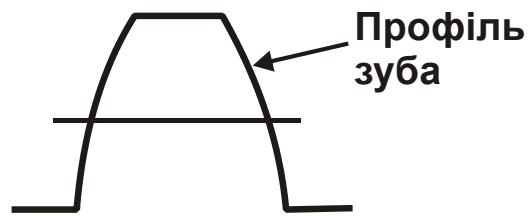


Рисунок 10.7 – Евольвентний профіль зуба

Зачеплення буває зовнішнім (рис. 10.8,а) і внутрішнім (рис. 10.8,б) із різними зубчастими колесами (рис. 10.9).

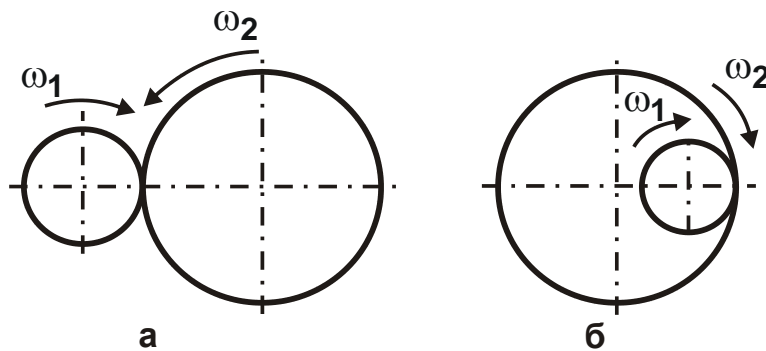


Рисунок 10.8 – Схеми зовнішнього (а) і внутрішнього (б) зачеплення

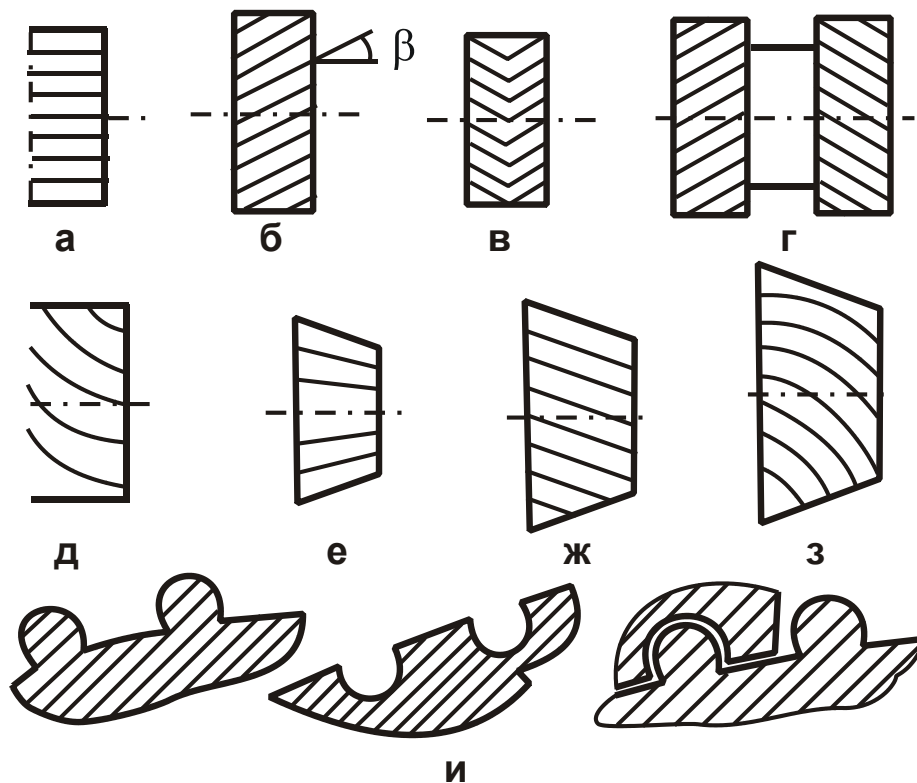


Рисунок 10.9 – Схематичне зображення зубчастих коліс

Зубчасті колеса бувають:

- циліндричні прямозубі (рис. 10.9,а);
- циліндричні косозубі (рис. 10.9,б);
- шевронні (рис. 10.9,в);
- шевронні із доріжкою, або роздвоєні (рис. 10.9,г), відрізняються простотою виготовлення;
- циліндричні із винтовим зубом (рис. 10.9,д), застосовуються для перехресшуваних валів;
- конічні прямозубі (рис. 10.9,е);
- конічні косозубі (рис. 10.9,ж);
- конічні з гвинтовим зубом (рис. 10.9,з);
- із зачепленням Новікова (рис. 10.9,и), може передавати за тих же розмірів потужність у 2 – 2,5 рази більшу;
- із хвильовим зачепленням, характеризується великим передавальним відношенням, плавністю, але термін служби дуже малий.

Для виготовлення зубчастих коліс використовують заготовки, отримані литтям, куванням у штампах або вільним куванням залежно від матеріалу, форми та розмірів. Зуби коліс виготовляють нагочуванням (гарячим та холодним), нарізуванням (методами копіювання та обкатки), рідше литтям. Зуби точних зубчастих коліс після нарізування піддають обробці шевінгуванням, шліфуванням, притиранням або обкаткою.

Вибір матеріалу зубчастих коліс залежить від призначення передачі та умов її роботи. Матеріали коліс застосовують сталі, чавуни та пластмаси. Основними матеріалами для зубчастих коліс служать термічно оброблені сталі. Залежно від твердості сталеві зубчасті колеса поділяються на дві групи: із твердістю поверхонь зубів $H \leq 350$ HB і $H > 350$ HB. Висока твердість робочих поверхонь зубів досягається об'ємним і поверхневим загартуванням, цементациєю, азотуванням, ціануванням.

Основними видами руйнування зубів є: поломка зубів, втомне викришування робочих поверхонь зубів, зношування зубів і заїдання зубів.

Прямозуба зубчаста передача

Розрахунок параметрів зубчастого колеса. Обертання зубчастих коліс можна умовно подати колами, які котяться одна по одній без ковзання із кутовими швидкостями, обернено пропорційними їх діаметрам (рис. 10.6,а, рис. 10.10). Такі кола називаються *початковими* або

ділильними. Фізично вони не існують, поняття щодо них введено умовно для побудови *теорії зачеплення*.

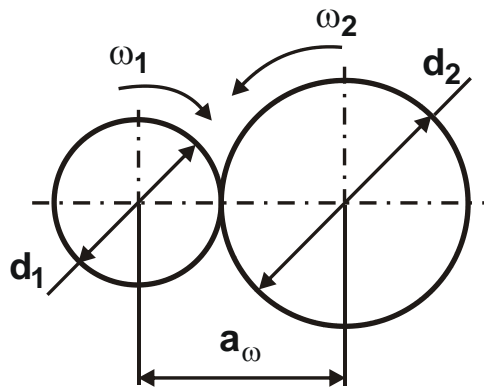


Рисунок 10.10 – Схема прямозубої зубчастої передачі

У основу розрахунку зубчастих коліс покладено *модуль* (у США – Рітч). *Модулем* називається відношення діаметра ділильної окружності d до числа зубів z :

$$m = \frac{d}{z}, \text{ мм.}$$

Модуль строго стандартизований. Для роботи зубчастої пари модуль у обох коліс повинен бути однаковим. Модуль характеризує величину зуба. У зубчастій парі менше колесо називають *шестернею*, а більше колесо – *колесом*. Ділильне коло ділить зуб на дві частини: верхню – *головку* і нижню – *ніжку*.

Для нормального зуба (рис. 10.11) висота головки і висота ніжки, відповідно, дорівнюють:

$$h_a = m; \quad h_f = 1,25 \cdot m.$$

Повна висота зуба:

$$h = h_a + h_f = 2,25 \cdot m.$$

Радіальний зазор у зачепленні:

$$c_r = h_f - h_a = 1,25 \cdot m - m = 0,25 \cdot m.$$

Діаметр початкової окружності:

$$d = m \cdot z.$$

Коло, що проходить через вершину зубів, називається *колом виступів*, а коло, що проходить через основу зубів, – *колом западин*.

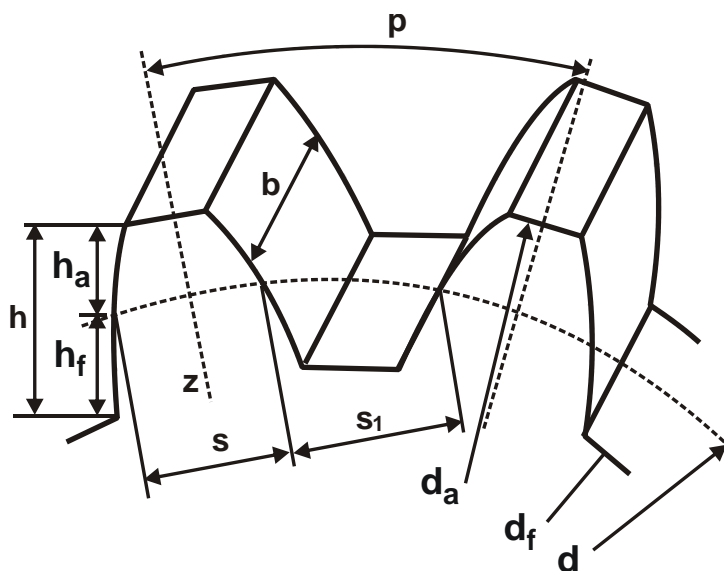


Рисунок 10.11 – Геометричні параметри зуба зубчастого колеса

Діаметр кола виступів і діаметр кола западин визначаються:

$$d_n = d + 2 \cdot m = m \cdot (z + 2);$$

$$d_f = d - 2h_f = d - 2,5 \cdot m = m \cdot (z - 2,25).$$

Відстань між центрами двох зубів на початковому колі називається *кроком* і позначається p . Між модулем і кроком існує залежність:

$$p = m \cdot \pi,$$

або

$$m = \frac{p}{\pi}.$$

Розмір b називається *довжиною зуба*, розмір s – *товщиною зуба*:
 $b = m \cdot \psi$, $\psi = 6 \dots 12$ – коефіцієнт ширини зуба:

$$s = \frac{39}{80} \cdot p.$$

Для литих коліс:

$$s = \frac{19}{40} \cdot p.$$

Розмір s_1 називається *шириною западини*:

$$s_1 = \frac{39}{80} \cdot p.$$

Для литих коліс:

$$s_1 = \frac{19}{40} \cdot p.$$

Розміри s і s_1 встановлюються автоматично під час нарізання зубів зубчастого колеса.

Міжосьову відстань визначають залежністю:

$$a_{\omega} = \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

Лінія і кут зачеплення. Точка дотику зубів від початку зачеплення до виходу переміщається вздовж прямої NN (рис. 10.12), називається *лінією зачеплення*.

Кут, під яким лінія зачеплення нахилена до загальної дотичної початкових кіл, називається *кутом зачеплення*.

Стандартний кут зачеплення $\alpha = 20^\circ$.

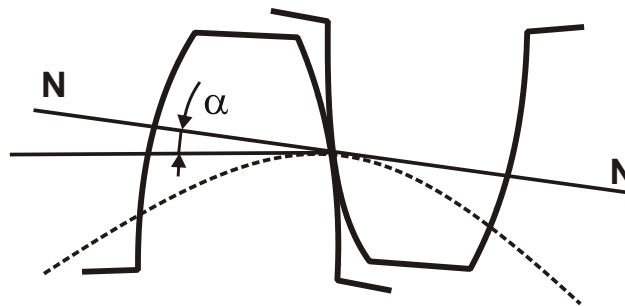


Рисунок 10.12 – Лінія і кут зачеплення зубів

Коригуванням називають зміну висоти або профілю зуба (рис. 10.13). Коригування буває висотне і кутове.



Рисунок 10.13 – Профілі нормального та коригованого зубів

Коригування виконується із метою підвищення міцності, створення компактності, коригування міжосьової відстані. Під час висотного коригування: $h_a = 0,8 \cdot m$; $h_f = m$.

Якщо $\alpha = 20^\circ$, то зуб є із кутовим коригуванням. Якщо $\alpha > 20^\circ$, то зуб товще, а якщо $\alpha < 20^\circ$, то зуб тонше.

Для того щоб не було заклинювання за великим передавальним відношенням, іноді виконують підрізання зубів (рис. 10.14).

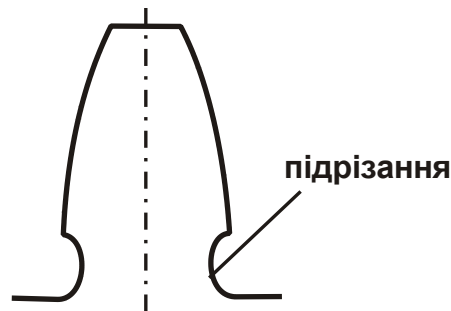


Рисунок 10.14 – Форма підрізаного зуба

Сили взаємодії у зубчастій парі. Сила взаємодії між зубами F_n завжди спрямована вздовж лінії зачеплення (рис. 10.15). Тому перенесемо цю силу на вісь симетрії зуба у точку O і розкладемо її на дві складові F_t і F_r . Отже, сила взаємодії між зубами має дві складові – окружну F_t і радіальну F_r сили:

$$F_t = \frac{2 \cdot T}{d};$$

$$F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

Кут $\alpha = 20^\circ$, тоді $\operatorname{tg} \alpha = 0,364$.

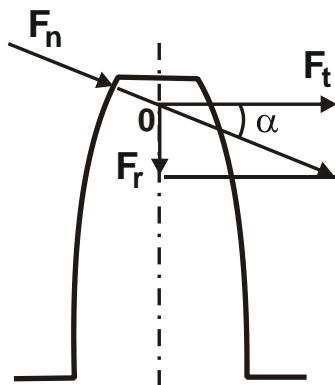


Рисунок 10.15 – Сила, що діє на зуб зубчастого колеса

Передавальне число. Існує поняття передавального числа, яке позначають u .

Передавальне число – це відношення параметрів коліс:

$$u = \frac{z_2}{z_1} = \frac{d_2}{d_1}; \quad u = i.$$

К. к. д. прямозубої передачі $\eta = 0,96$.

Порядок розрахунку прямозубої передачі. Під час роботи зуб-частої пари у зубі виникає два види напружень: напруження вигину від окружної сили F_t і контактне місцеве напруження від тиску одного зуба на інший. Якщо передача відкрита, то відбувається абразивне зношування зуба, на зубі з'являються задирки, і він руйнується від напруження вигину. Тому відкриті передачі розраховують тільки на вигин.

У закритих передачах абразивного зношування не відбувається. Зуби працюють довше. Тривала робота призводить до втоми матеріалу (втома – це утворення мікротріщин). На зубах з'являються плями, потім раковини, відбувається викришування матеріалу. Зуб руйнується від контактних напружень. Тому закриті передачі розраховують на контактну міцність, що є розрахунком на втомну міцність, із подальшою перевіркою на вигин.

I. Порядок розрахунку на вигин.

Вихідними даними завжди є такі параметри: P , ω_1 і ω_2 , або n_1 і n_2 , або i .

1. Визначають передавальне відношення: $i = \frac{n_1}{n_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

2. Вибирають матеріал і напруження, що допускається:

$$\sigma_{F0} = 1,8 \cdot HB; \quad [\sigma]_F = \frac{\sigma_{F0}}{S_F},$$

де $HB = 200 \dots 350$ – твердість за Брінеллем;

$S_F = 2$ – необхідний запас міцності на вигин.

3. Задають кількість зубів z_1 : $z_1 \geq 17$.

4. Визначають модуль:

$$m = \sqrt[3]{\frac{Y_F \cdot 2 \cdot T_1 \cdot K_{F\beta} \cdot K_{FV}}{\psi_{ba} \cdot z_1 \cdot [\sigma]_F^2}},$$

де Y_F – коефіцієнт форми зуба;

$T_1 = \frac{1000 \cdot P_1}{\omega}$ – крутний момент;

$K_{F\beta} = 1,1 \dots 1,4$ – коефіцієнт нерівномірності навантаження;

$K_{FV} = 1,4$ – коефіцієнт динамічності;

$\psi_{ba} = 0,2 \dots 1$ – коефіцієнт довжини зуба.

5. Округляють модуль до стандартного значення, далі визначають геометричні розміри коліс і зусилля у зачепленні:

$$\begin{aligned}d_1 &= m \cdot z_1; & d_2 &= m \cdot z_2; \\d_{a1} &= d_1 + 2 \cdot m; & d_{a2} &= d_2 + 2 \cdot m; \\d_{f1} &= d_1 - 2,5 \cdot m; & d_{f2} &= d_2 - 2,5 \cdot m;\end{aligned}$$

$$b_1 = \psi_{ba} \cdot d_1; \quad a_\omega = \frac{d_1 + d_2}{2};$$

$$F_t = \frac{2 \cdot T_1}{d_1}; \quad F_r = F_t \cdot \operatorname{tg} \alpha.$$

6. Виконують перевірочний розрахунок:

$$\sigma_F = \frac{Y_{F1} \cdot F_1 \cdot K_{F\beta} \cdot K_{FV}}{b \cdot m} \leq [\sigma]_F.$$

II. Порядок розрахунку на контактну міцність.

1. Визначають передавальне відношення: $i = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

2. Вибирають матеріал, вид термообробки і напруження, що допускається:

$$\sigma_{H_0} = 2 \cdot HB + 70; \quad HB = 250 \dots 400;$$

$$[\sigma]_H = \frac{\sigma_{H_0}}{S_H}; \quad S_H = 1,1.$$

3. Визначають необхідну міжосьову відстань:

$$a_\omega = 4950 \cdot (i + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{T_1 \cdot K_{H\beta}}{\psi_{ba} \cdot i \cdot [\sigma]_H^2}}.$$

4. Округляють значення a_ω до стандартного значення і визначають модуль:

$$m = (0,01 \dots 0,02) \cdot a_\omega.$$

5. Визначають сумарну кількість зубів:

$$z_\Sigma = \frac{2 \cdot a_\omega}{m}.$$

6. Визначають кількість зубів шестерні і колеса:

$$z_1 = \frac{z_\Sigma}{i + 1}; \quad z_2 = z_1 \cdot i.$$

7. Уточнюють передавальне число: $u = \frac{z_2}{z_1}$.

8. Визначають розміри коліс і зусилля у зачепленні.

9. Виконують перевірочний розрахунок:

$$\sigma_H = 436 \cdot 10^3 \cdot \sqrt{\frac{F_1 \cdot (u+1) \cdot K_{H\beta} \cdot K_{H\nu}}{d_1 \cdot b_2 \cdot u}} \leq [\sigma]_H,$$

де $K_{H\beta} = 1,2$;

$K_{H\nu} = 1,1$.

Косозуба передача

У косозубій передачі зуб нахилений до утворюючої циліндра під кутом β (рис. 10.6,б,е, рис. 10.16), який приймається рівним $8 \dots 15^\circ$.

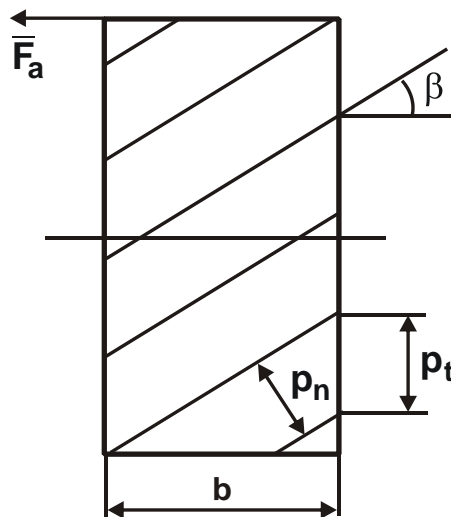


Рисунок 10.16 – Схема косозубої передачі

Переваги косозубої передачі: більше потужність, що передається, за тих же розмірів; менше шуму; вище плавність роботи. *Недоліки косозубої передачі:* наявність осьового зусилля F_a та складніше виготовлення.

У косозубій передачі є два кроки: нормальний p_n і торцевий p_t (рис. 10.16). Тому модулів теж два – нормальний m_n і торцевий m_t :

$$m_t = \frac{p_t}{\pi};$$

$$m_n = \frac{p_n}{\pi},$$

$$\text{де } p_t = \frac{p_n}{\cos\beta}.$$

У основу розрахунків покладено нормальний модуль. Розміри зубчастого колеса:

$$d = \frac{m_n \cdot z}{\cos\beta};$$

$$d_a = d + 2 \cdot m_n;$$

$$d_f = d + 2,5 \cdot m_n.$$

Сила взаємодії між зубами має три складові: окружну F_t , радіальну F_r і осьову F_a сили (рис. 10.17):

$$F_t = \frac{2 \cdot T_1}{d_1};$$

$$F_r = F_t \cdot \frac{\text{tg}\alpha}{\cos\beta};$$

$$F_a = F_t \cdot \text{tg}\beta.$$

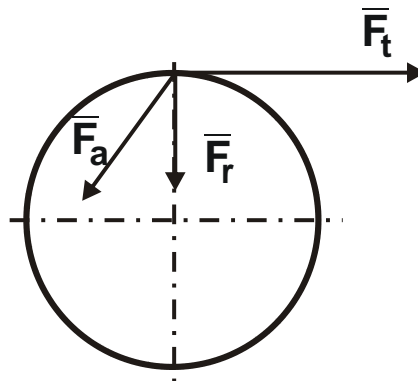


Рисунок 10.17 – Сила, що діє на зуб косозубої передачі

Косозубу передачу розраховують так само, як і прямозубу, але коефіцієнт Y_F вибирають за фіктивною кількістю зубів:

$$z_\phi = \frac{z}{\cos^3\beta}.$$

Міжосьову відстань розраховують за залежністю:

$$a_\omega = 4300 \cdot (i + 1) \cdot 3 \sqrt{\frac{T_1 \cdot K_{H\beta}}{\psi_{ba} \cdot i \cdot [\sigma_H]^2}}.$$

Шевронна передача

Шевронна передача (рис. 10.6,в, рис. 10.18) має всі переваги косозубої передачі, але не має осьового зусилля F_a . Воно урівноважується на самому колесі. Розраховують шевронну передачу так саме, як і косозубу передачу. Застосовують шевронну передачу в умовах великих потужностей, зокрема, у редукторах для приводу цементних млинів і обертових печей.

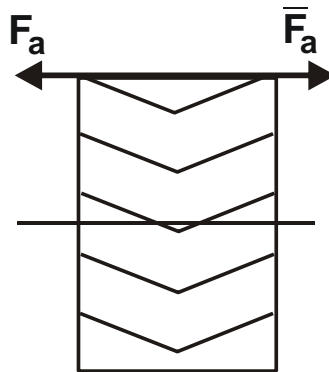


Рисунок 10.18 – Схема шевронної передачі

Конічна передача

Конічну передачу (рис. 10.6,ж,з,и; рис. 10.19) застосовують під час взаємодії пересічних валів для зміни напрямку осі валу.

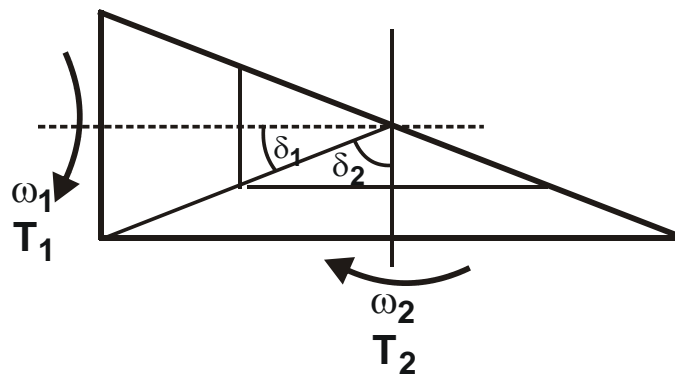


Рисунок 10.19 – Схема конічної передачі

$$\text{Передавальні відношення: } i = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \operatorname{tg} \delta_2 = \operatorname{ctg} \delta_1.$$

$$\text{Передавальне число: } u = \frac{z_2}{z_1}.$$

Переваги конічної передачі: можливість передачі руху між перехресними і пересічними осями валів. *Недоліки конічної передачі:* більше шуму, нижче плавність роботи, менше к. к. д. (дорівнює 0,92).

Модуль за довжиною зуба неоднаковий. За стандартний приймають максимальний модуль, який називають *виробничим*.

Замість міжосьової відстані у конічній передачі застосовують конусну відстань R_e (довжину утворюючого конуса):

$$R_e = \frac{d_{e1}}{2 \cdot \sin \delta_1},$$

де d_{e1} – зовнішній ділительний діаметр шестерні.

Максимальний модуль позначається m_e (або m , тоді середній модуль – m_{cp}). Кути у вершин дорівнюють $\delta_1 = \text{arctg} i$, $\delta_2 = \text{arctg} i$, $\delta = \delta_1 + \delta_2$. Кут між пересічними осями може бути абсолютно будь-який, але найчастіше 90° . Цей кут завжди задається.

Розміри коліс (рис. 10.20):

$$\begin{aligned} d_{e1} &= m_e \cdot z_1; \\ d_{ae1} &= d_{e1} + 2 \cdot m_e + 2 \cdot m_e \cdot \cos \delta_1; \\ d_{fe1} &= d_{e1} - 2,5 \cdot m_e \cdot \cos \delta_1; \\ d_{e2} &= m_e \cdot z_2; \\ d_{ae2} &= d_{e2} + 2 \cdot m_e \cdot \cos \delta_2; \\ d_{fe2} &= d_{e2} - 2,5 \cdot m_e \cdot \cos \delta_2; \\ h_{ae} &= 1,2 \cdot m_e; \\ R_e &= \frac{d_{e1}}{2 \cdot \sin \delta_1}. \end{aligned}$$

Довжина зуба визначається:

$$b = R_e \cdot \psi_{bd},$$

де $\psi_{bd} \approx \frac{1}{3}$ – коефіцієнт довжини зуба.

Кут, відповідний голівці зуба:

$$\theta_a = 57,3^\circ \cdot \frac{m_e}{R_e}.$$

Кут, відповідний ніжці зуба:

$$\theta_f = 57,3^\circ \cdot \frac{1,2 \cdot m_e}{R_e}.$$

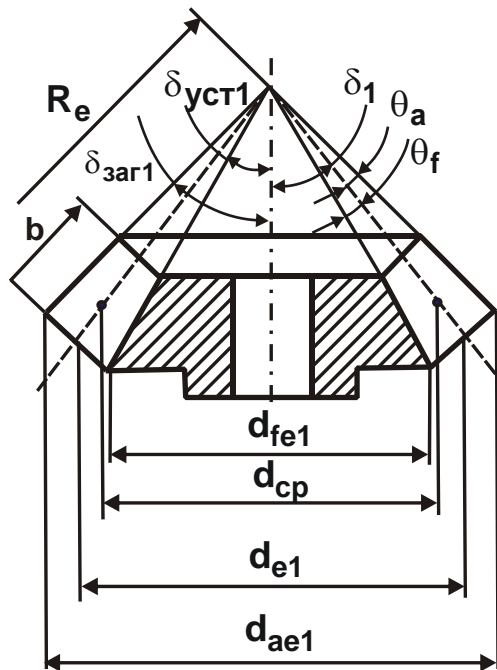


Рисунок 10.20 – Схема розташування розмірів колеса конічної передачі

Кут заготовки колеса:

$$\delta_{заг1} = \delta_1 + \theta_a;$$

$$\delta_{заг2} = \delta_2 + \theta_a.$$

Кут установлення під час нарізання:

$$\delta_{уст1} = \delta_1 - \theta_a;$$

$$\delta_{заг2} = \delta_2 - \theta_a.$$

Слід зазначити, що токар здійснює обробку заготовки за кутом $\delta_{заг}$, а зуборізальник встановлює заготовку для нарізання зубів за кутом $\delta_{уст}$.

Сили взаємодії у конічній передачі. У конічній передачі діють три складові сили взаємодії: окружна F_t , радіальна F_r і осьова F_a (рис. 10.21).

Осьова сила шестерні є радіальною для колеса ($F_{a1} = F_{r2}$), а радіальна сила шестерні – осьовою для колеса ($F_{r1} = F_{a2}$):

$$F_{a1} = F_{r2} = F_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \sin \delta_1;$$

$$F_{r1} = F_{a2} = F_1 \cdot \operatorname{tg} \alpha \cdot \cos \delta_1.$$

Окружні сили шестерні та колеса однакові:

$$F_1 = F_{t1} = F_{t2} = \frac{2 \cdot T_1}{d_1}.$$

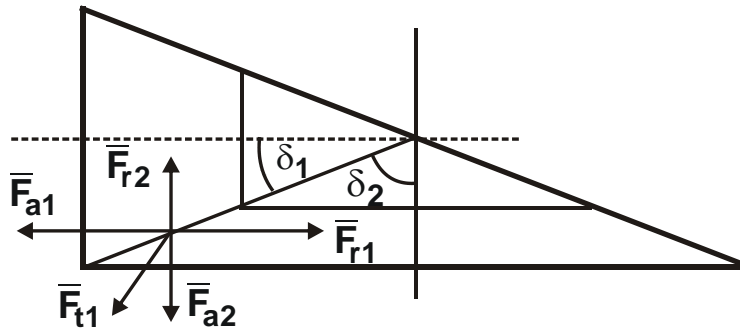


Рисунок 10.21 – Сили взаємодії у конічній передачі

Осьові сили F_{a1} і F_{a2} завжди спрямовані до основи конусів і прагнуть вивести колеса із зачеплення.

Під час розрахунку зубів на вигин спочатку визначають середній модуль:

$$m_{cp} = 1,4 \cdot 3 \sqrt{\frac{Y_F \cdot T_1 \cdot K_{F\beta}}{0,85 \cdot \psi_{bd} \cdot z_1 \cdot [\sigma]_F}}.$$

Всі коефіцієнти для конічних передач вибирають за тими ж таблицями, що і для прямозубих передач.

Виробничий модуль визначають:

$$m_e = m_{cp} + \frac{b \cdot \sin \delta_1}{z_1}.$$

Далі визначають всі розміри. Під час розрахунку на контактну міцність визначають діаметр шестірні:

$$d_1 = 7700 \cdot 3 \sqrt{\frac{T_1 \cdot K_{H\beta} \cdot \sqrt{i^2 + 1}}{0,85 \cdot \psi_{bd} \cdot i \cdot [\sigma]_H^2}};$$

$$b = \psi_{bd} \cdot d_1;$$

$$d_{e1} = \frac{d_1 + b}{\sqrt{i^2 + 1}}; \quad d_{e2} = i \cdot d_{e1};$$

$$m_e = \frac{d_{e2}}{(18 + 28) \cdot i}.$$

Модуль округляють до стандартного і визначають розміри коліс.

Рейкова передача

Рейкова передача призначена для перетворення обертального руху у прямолінійний рух (рис. 10.6,г).

Рейкова передача містить як провідну ланку зубчасте колесо або черв'як. Рейка може бути із прямими або косими зубами. Рейкова передача із зубчастим колесом характеризується більшим к. к. д. порівняно із черв'ячно-рейковою передачею, перевагою її є також більша плавність та редукція. За один оберт зубчастого колеса рейка переміститься на величину:

$$l = \pi \cdot m \cdot z,$$

де m – модуль зубчастого колеса;

z – кількість зубів.

Передача гвинт – гайка

Передачу гвинт – гайка призначено для перетворення обертального руху у поступальний (рис. 10.1,е). Застосовують передачу гвинт – гайка у домкратах, пресах, лещатах. При цьому обертатися може або гайка, тоді гвинт виконує поступальний рух (приклад – домкрат), або гвинт, тоді гайка із закріпленою деталлю виконує поступальний рух (приклад – лещата або супорт токарного верстата).

Передача гвинт-гайка забезпечує набагато більшу редукцію, ніж рейкова передача із зубчастим колесом, та підвищену плавність руху. Обертальний і прямолінійний рухи оборотні.

Переваги передачі гвинт – гайка: простота конструкції, компактність, надійність, плавність і безшумність роботи, великий виграш у силі, висока точність переміщень. *Недоліки передачі гвинт – гайка*: значне зношування різьблення, низький к. к. д.

Гвинти бувають вантажні (лещата, домкрати), ходові (токарні верстати), установчі (мікрометр). Гайки можуть бути цілісні, рознімні (розсувні) та напівгайки (у токарних верстатах). Застосовують передачі гвинт-гайка ковзання та гвинт-гайка кочення, наприклад, у верстатах із ЧПУ – останні мають високий к. к. д., велику швидкість і продуктивність.

Передачу гвинт-гайка широко використовують у техніці: від різних з'єднань (болт-гайка, шпилька або гвинт-гайка) до механізмів, що переміщують робочі органи (супорт, стіл верстата, повзун преса).

За один оберт гвинта або гайки елемент, що сполучається, переміститься на величину

$$l = t \cdot z,$$

де z – кількість заходів різьбового з'єднання;

t – крок різьблення, мм.

Існує також передача для перетворення поступального руху в обертальний (наприклад, дзига – дитяча іграшка). У цьому випадку повинен бути дуже великий крок різьблення.

Швидкість поступального руху:

$$V = \frac{p \cdot n}{60 \cdot 1000}, \text{ м/с,}$$

де p – крок різьблення, мм;

n – частота обертання, об./хв.

За один оберт гайка переміститься поступально на величину кроку різьблення p (рис. 10.22). Виходячи із цього, передавальне відношення передачі гвинт – гайка визначають:

$$i = \frac{2 \cdot \pi \cdot n}{p}$$

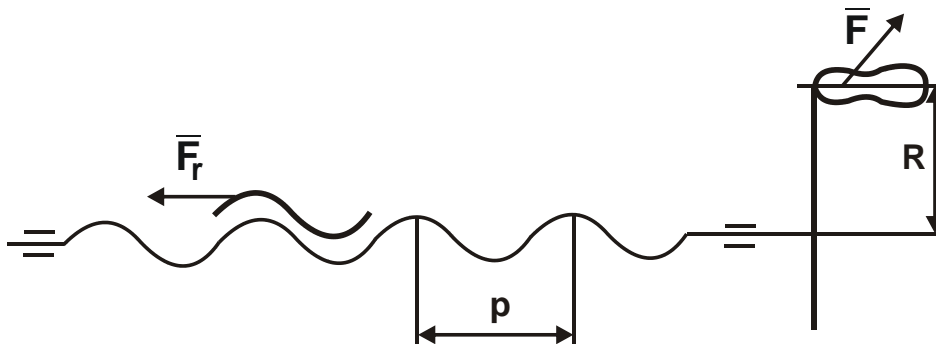


Рисунок 10.22 – Графічне зображення передачі гвинт – гайка

Оскільки радіус рукоятки R можна значно збільшувати, то передавальне відношення i може бути дуже великим. Отже, у багато разів збільшиться сила, вона буде дорівнювати $F_r = F_i$.

Гвинт, зазвичай, виготовляють із сталі, гайку – із чавуну або бронзи. К. к. д. передачі гвинт – гайка дорівнює $\eta = 0,5 \dots 0,7$. Чим менше тертя між гвинтом і гайкою, тим більше к. к. д.

Кількість витків різьблення гайки повинно бути не більше 10.

Черв'ячна передача

Черв'ячна передача складається із черв'яка і черв'ячного колеса, застосовується між перехресними осями валів (рис. 10.1,в). За принципом роботи – це зубчасто-гвинтова передача. У черв'ячній парі має місце тертя ковзання. Для виготовлення черв'яка використовують сталь (Ст5, сталь 45) із наступним загартуванням і шліфуванням, а для виго-

товлення черв'ячного колеса або його вінця використовують бронзу або чавун.

Переваги черв'ячної передачі: плавність і безшумність роботи, компактність, велике передавальне число (від 8 до 80), можливість самогальмування. *Недоліки черв'ячної передачі:* низький к. к. д. (не більше 0,8, а буває і 0,45), значне нагрівання, незначна потужність, що передається (до 50 кВт), суттєве зношування.

Черв'яки бувають *однозахідні* (рис. 10.23,а) та *багатозахідні* (рис. 10.23,б). Кількість заходів позначається z_1 , кількість зубів черв'ячного колеса позначається z_2 . Для визначення кількості заходів потрібно дивитися із торця.

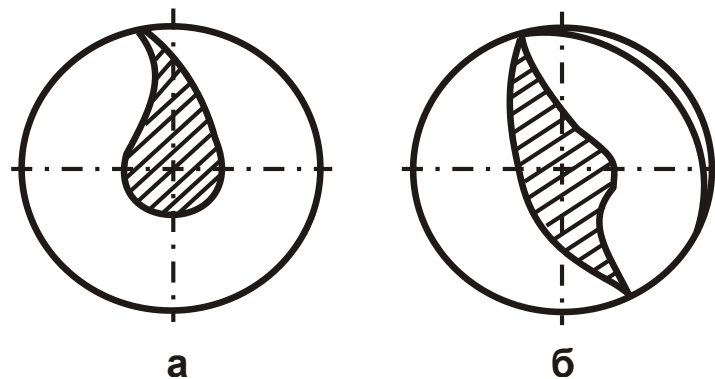


Рисунок 10.23 – Схеми однозахідних (а) та багатозахідних (б) черв'яків

Передавальне число визначається залежністю:

$$u = \frac{z_2}{z_1},$$

де z_2 – кількість зубів колеса;

z_1 – кількість заходів черв'яка.

Черв'як є гвинт із модульним різьбленням. Різьблення буває ліве і праве. У черв'ячній парі є нормальний і торцевий крок, нормальний і торцевий модуль.

У основу розрахунку параметрів черв'ячної передачі покладено торцевий модуль, який позначається m .

Для того щоб черв'ячна передача була такою, що самогальмується, кут підйому гвинтової лінії γ повинен приймати значення не більше 6° (рис. 10.24).

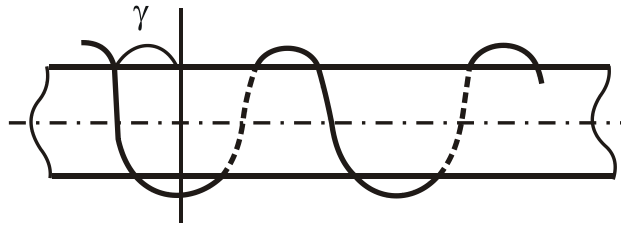


Рисунок 10.24 – Положення кута підйому гвинтової лінії γ

Розміри черв'ячної пари (рис. 10.25):

$$d_1 = q \cdot m;$$

$$d_{a1} = d_1 + 2 \cdot m;$$

$$d_{f1} = d_1 - 2,5 \cdot m;$$

$$d_2 = m \cdot z_2;$$

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot m;$$

$$d_{f2} = d_2 - 2,5 \cdot m;$$

$$d_{a2max} = d_{a2} + 1,5 \cdot m;$$

$$b_2 \approx 0,7 \cdot d_1,$$

де $q = 8 \dots 12$ – коефіцієнт діаметра черв'яка (вибирається за таблицею).

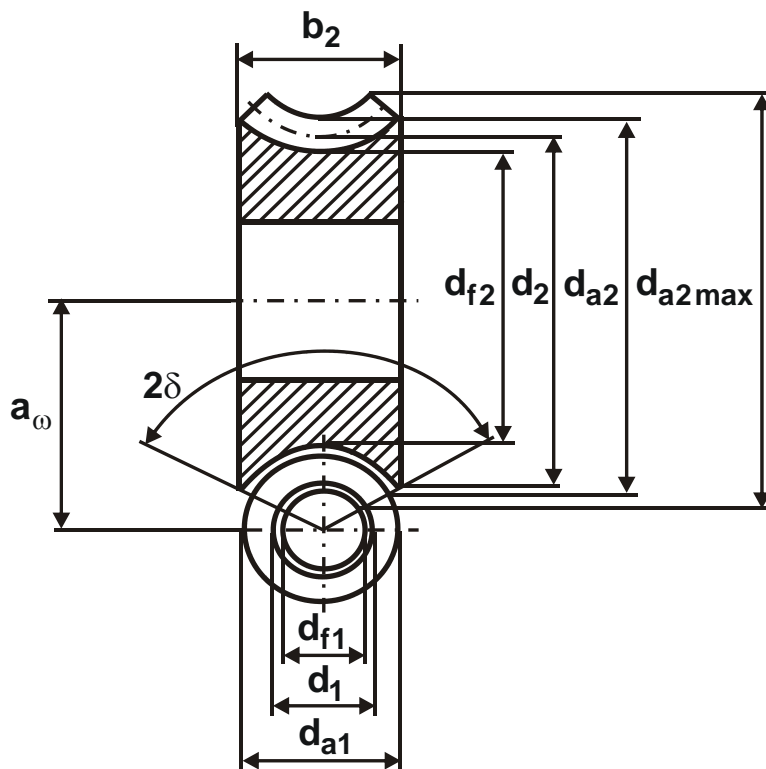


Рисунок 10.25 – Схема розташування розмірів черв'ячної пари

Центральний кут охоплення:

$$2 \cdot \delta = 189^\circ \cdot \frac{60 \cdot \pi \cdot d_1}{2 \cdot b_2}.$$

Цей кут повинен дорівнювати $100^\circ \dots 110^\circ$ (у передачах із ручним приводом може змінюватися у межах до 90°).

Міжосьова відстань визначається:

$$a_\omega = \frac{d_1 + d_2}{2}.$$

Довжина нарізаної частини черв'яка:

$$b_1 \geq (11 + 0,06 \cdot z_2) \cdot m \quad \text{за умови } z_1 = 1 \div 2$$

$$b_1 \geq (12,5 + 0,09 \cdot z_2) \cdot m \quad \text{за умови } z_1 = 3 \div 4$$

К. к. д. черв'ячної передачі:

$$\eta = (0,95 \dots 0,96) \cdot \frac{\operatorname{tg} \gamma}{\operatorname{tg}(\gamma + p')},$$

де $p' = 1,5 \dots 3^\circ$ – наведений кут тертя, що залежить від матеріалу та чистоти обробки поверхні зубів.

Окружні швидкості черв'яка і колеса неоднакові, тому існує поняття *швидкості проковзування*:

$$V_1 = \frac{\omega_1 \cdot d_1}{2}; \quad V_2 = \frac{\omega_2 \cdot d_2}{2}.$$

Швидкість ковзання визначається:

$$V_{p'} = \frac{V_1}{\cos \gamma};$$

або

$$V_{p1} = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}.$$

Черв'ячні передачі поділяють на тихохідні та швидкохідні:

- якщо $V_{p'} \leq 3$ м/с – то це тихохідна передача;
- якщо $V_{p'} > 3$ м/с – то це швидкохідна передача.

Сили взаємодії у черв'ячній парі. У черв'ячній парі діють три складові сили взаємодії: окружна F_t , осьова F_a і радіальна сила F_r (рис. 10.26).

У черв'ячній передачі окружна сила черв'яка є осьовою для черв'ячного колеса ($F_{t1} = F_{a2}$), а осьова сила черв'яка є окружною для черв'ячного колеса ($F_{a1} = F_{t2}$):

$$F_{r1} = F_{a2} = \frac{2 \cdot T_1}{d_1};$$

$$F_{r1} = F_{r2} = F_{t1} \cdot \operatorname{tg} \alpha;$$

$$F_{r2} = F_{a2} = \frac{2 \cdot T_2}{d_2}.$$

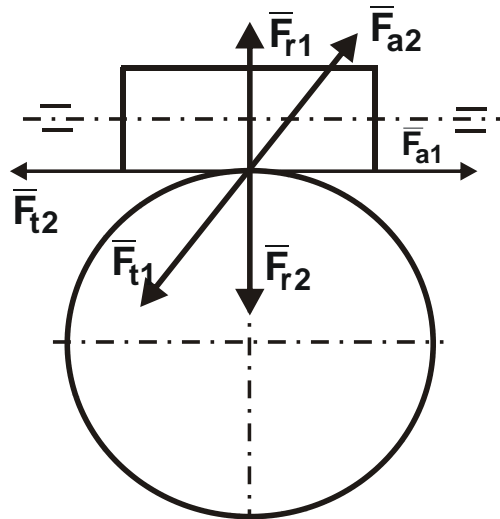


Рисунок 10.26 – Сили взаємодії, які виникають у черв'ячній парі

Черв'ячну передачу завжди розраховують на контактну міцність, при цьому визначають міжосьову відстань за залежністю:

$$a_{\omega} = \left(\frac{z_2}{q} + 1 \right) \cdot 3 \sqrt{\left(\frac{170}{\frac{z_2}{q} \cdot [\sigma]_H} \right)^2} \cdot T_2 \cdot K_{H\beta},$$

де $q = 8 \dots 10$.

Величина T_2 вимірюється у Н·мм; величина $[\sigma]_H$ – у МПа; величина ω – у мм.

Модуль визначають за залежністю:

$$m = \frac{2 \cdot a_{\omega}}{q + z_2}.$$

Модуль округляють до стандартного, після чого визначають розміри передачі.

Черв'ячну передачу необхідно розраховувати на нагрівання.

Температура масла:

$$t_M = t_n + \frac{(1-\eta) \cdot P_1}{k_T \cdot A} \leq [t]_M,$$

де $t_n = 20 \text{ }^\circ\text{C}$ – температура повітря;

η – к. к. д.;

P_1 – потужність двигуна;

$k_T = 8 \dots 17 \text{ Вт}/(\text{м}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C})$ – коефіцієнт теплопередачі;

A – площа поверхні корпусу;

$[t]_M = 70 \text{ }^\circ\text{C}$ (іноді $90 \text{ }^\circ\text{C}$) – допустима температура масла.

Для відводу тепла корпус повинен бути ребристим, обсяг масла – підвищеним, іноді використовують крилатки або зміювик із охолоджувальною водою.

Фрикційна передача: кінематичний і геометричний розрахунки

Фрикційна передача працює шляхом тертя між двома катками (рис. 10.1,а, рис. 10.27). Прикладами її застосування є швейна машина, магнітофон, програвач.

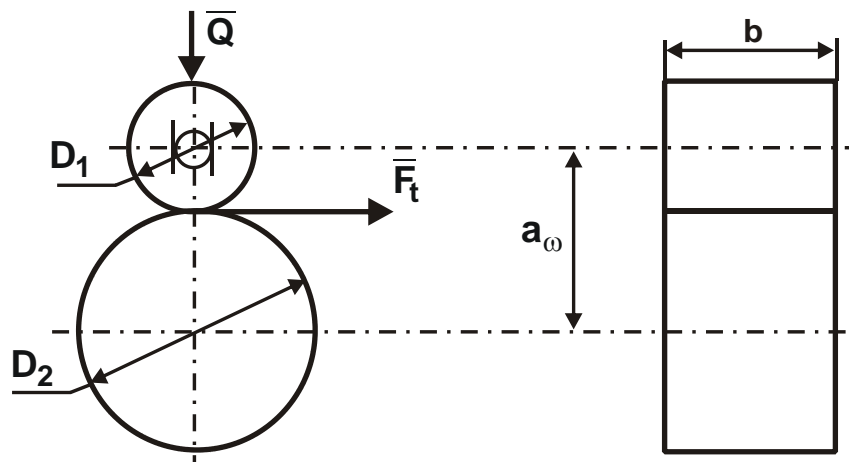


Рисунок 10.27 – Схема фрикційної передачі

Переваги фрикційної передачі: простота конструкції; плавність і безшумність роботи; можливість регулювання частоти обертання. *Недоліки фрикційної передачі:* мала потужність, що передається; проковзування (мінливість передавального відношення); значне зношування; значна сила натискання Q ; низький к. к. д. (дорівнює $\eta = 0,88 \dots 0,9$).

Катки фрикційної передачі можуть бути сталеві, обгумовані, текстолітові.

Фрикційна передача може бути циліндричною із гладкими катками, клиновими (рис. 10.28,а) або конічними (рис. 10.28,б). Клинові катки застосовують для зменшення сили натискання Q , однак при цьому зменшується к. к. д.

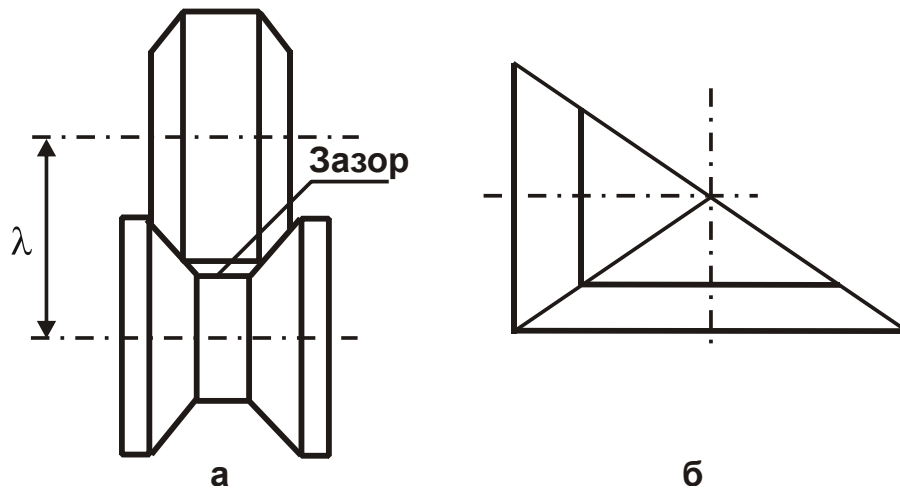


Рисунок 10.28 – Гладкі, клинові (а) та конічні (б) катки фрикційної передачі

Порядок розрахунку параметрів фрикційної передачі:

1. Визначають передавальне відношення: $i = n_1/n_2$.
2. Визначають діаметри катка і окружну силу:

$$D_1 \approx 3 \cdot d,$$

або, якщо задано a_{ω} , то

$$D_1 = \frac{2 \cdot a_{\omega}}{i+1};$$

$$D_2 = D_1 \cdot i;$$

$$F_t = \frac{2 \cdot T_1}{D_1},$$

де d – діаметр ведучого валу.

3. Визначають силу тиску:

$$Q = \frac{2 \cdot T_2}{f},$$

де $f = 0,2 \dots 0,3$ – коефіцієнт тертя.

4. Визначають ширину катка:

$$b = \frac{Q}{[q]},$$

де $[q]$ – допустимий питомий тиск, який залежить від матеріалу і визначається за таблицею.

Фрикційні варіатори

Варіатором називається пристрій, призначений для плавного регулювання частоти обертання під час ходу. Найбільш поширені такі варіатори: дисковий (рис. 10.29,а), конічний (рис. 10.29,б), сферичний (рис. 10.29,в) і з розсувними катками (рис. 10.29,г).

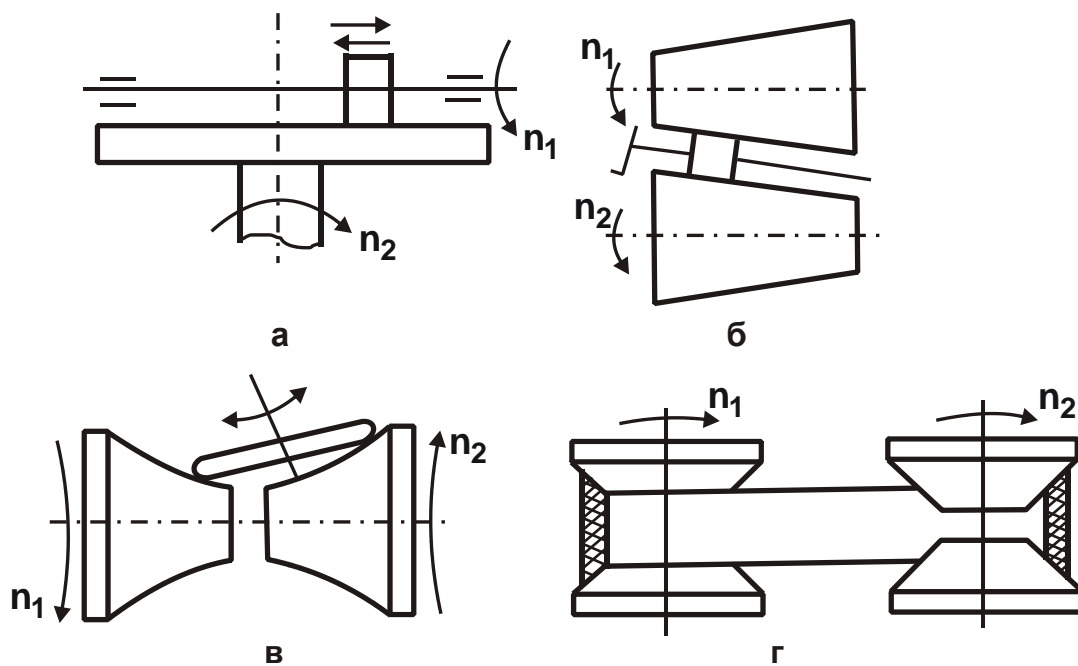


Рисунок 10.29 – Схеми дискового (а), конічного (б), сферичного (в) і з розсувними катками (г) варіаторів

Дисковий варіатор застосовують у фрикційно-гвинтових пресах, варіатор із розсувними катками – у верстатах. При цьому можлива восьмикратна зміна частоти обертання.

Ремінна передача: кінематичний і геометричний розрахунки плоскоремінних і клиноремінних передач

Ремінна передача працює завдяки тертя і відноситься до передачі з гнучким зв'язком (рис. 10.1,г). Гнучким зв'язком є ремінь. Реміні бувають плоскі, клинові, зубчасті та круглі.

Плоскі реміні бувають шкіряні, прогумовані, текстильні (зшивні та цільноткані). Круглі реміні бувають шкіряні, гумові, із шпагату, сталеві.

Переваги ремінної передачі: простота конструкції, велика міжосьова відстань, плавність і безшумність роботи, згладжування поштовхів. *Недоліки ремінної передачі:* незначна потужність, що передається, громіздкість, проковзування, ненадійність, великі навантаження на вали.

Залежно від розташування ременя передача буває:

- *відкрита* (рис. 10.30,а);
- *перехресна* (рис. 10.30,б);
- *напівперехресна* (рис.10.30,в);
- *із натяжним роликом* (рис. 10.30,г).

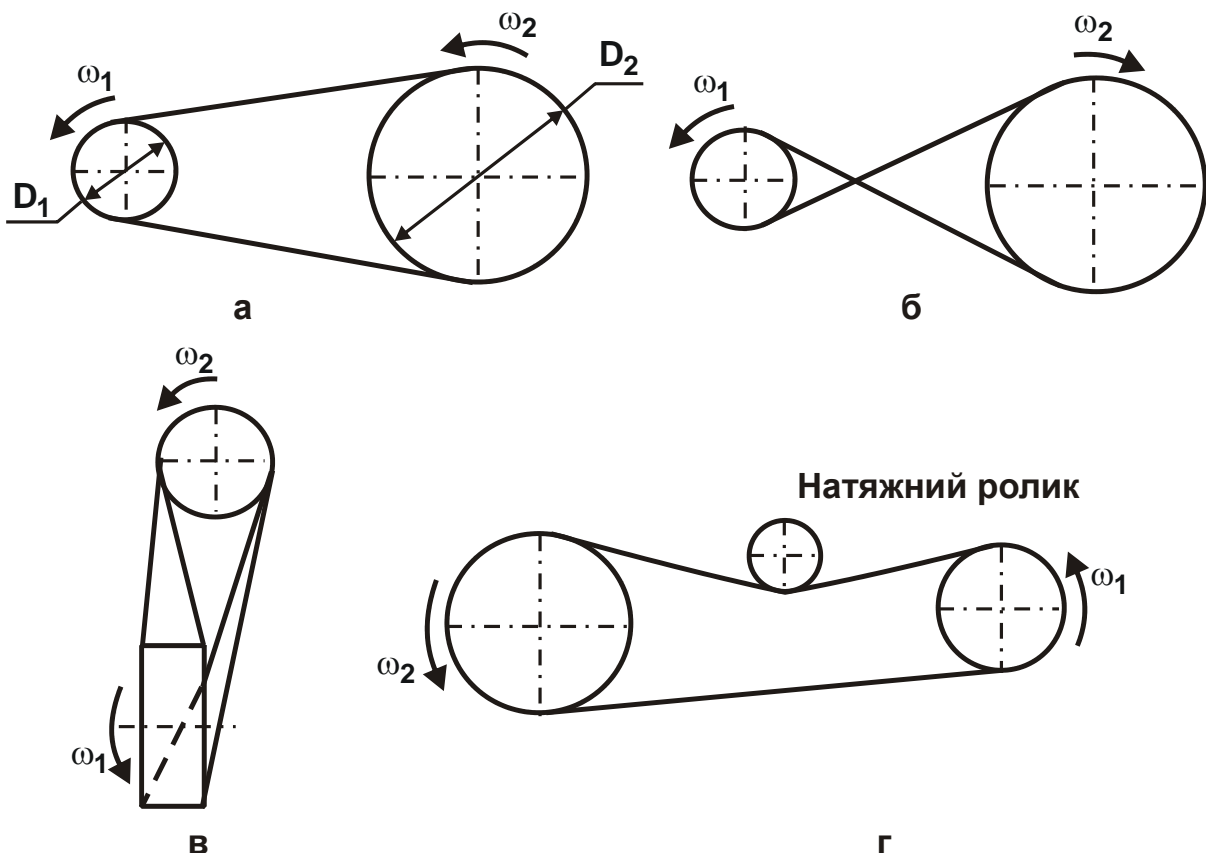


Рисунок 10.30 – Види ремінних передач

Кінці ременів з'єднують склеюванням, зшиванням або дужками. Передавальне число визначається:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{D_2}{D_1 \cdot (1 - \varepsilon)} = \frac{T_2}{T_1},$$

де $\varepsilon = \frac{\omega'_2 - \omega_2}{\omega'_2}$ – коефіцієнт проковзування катків;

ω_2 – теоретична кутова швидкість веденого вала;

ω_2 – реальна кутова швидкість.

К. к. д. пасової передачі дорівнює $\eta \approx 0,95 \dots 0,97$.

Для роботи ремінної передачі застосовують натяжний пристрій, тобто, зазвичай, двигун, який встановлюють на полозках. Не допускається змазування ременя смолою і каніфоллю. Попередній натяг ременя приймається рівним окружній силі F_t .

Зусилля у гілках ременя. Для ведучої гілки (рис. 10.31):

$$F_1 = F_1 + F_0,$$

де $F_1 = \frac{1000 \cdot P}{V}$, Н.

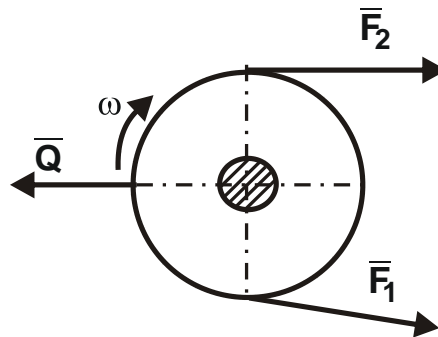


Рисунок 10.31 – Схема виникаючих зусиль у гілках ременя

Якщо $F_0 = F_t$, то $F_1 = 2 \cdot F_t$. Для веденої гілки (рис. 10.31):

$$F_2 = F_0 = F_1.$$

Сила тиску на вал дорівнює $Q \approx 3 \cdot F_t$.

Плоскоремінна передача

Порядок розрахунку:

1. Визначають передавальне число:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \text{або} \quad u = \frac{n_1}{n_2}.$$

2. Визначають діаметр малого шківa:

$$D_1 = (0,052 \dots 0,061) \cdot 3 \sqrt{\frac{P_1}{\omega_1}}.$$

За таблицею діаметр малого шківa округляють до стандартного.

3. Визначають діаметр великого шківa (без урахування ковзання):

$$D_2 = D_1 \cdot u,$$

або більш точно

$$D_2 = u \cdot D_1 \cdot (1 - \varepsilon),$$

де $\varepsilon \approx 0,01$.

4. Визначають швидкість ременя:

$$V = \frac{\omega_1 \cdot D_1}{2} \quad \text{або} \quad V = \frac{\pi \cdot D_1 \cdot n_1}{60}.$$

5. Задають міжосьову відстань a_ω .

6. Визначають окружне зусилля:

$$F_1 = \frac{1000 \cdot P}{V}.$$

7. Визначають кут охоплення на малому шківі (рис. 10.32):

$$\alpha_1 = 180^\circ - 57,3^\circ \cdot \frac{D_2 - D_1}{a_\omega}.$$

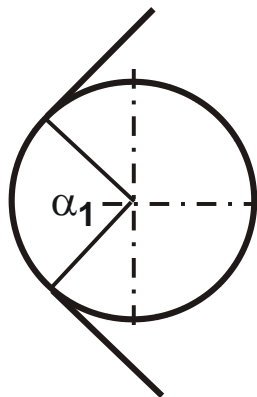


Рисунок 10.32 – Розрахункова схема визначення кута охоплення на малому шківі

8. Задають тип ременя і вибирають додаткове напруження K_0 .

9. Задають товщину ременя: $\delta = \left(\frac{1}{50} \dots \frac{1}{30}\right) \cdot D_1$ або кількість прокладок. Товщина однієї прокладки дорівнює 1,5 мм.

10. Визначають поперечний перетин ременя:

10. Визначають поперечний перетин ременя:

$$A = \frac{F_1}{K_0 \cdot C_\alpha \cdot C_V \cdot C_p \cdot C_0},$$

де C_α – коефіцієнт кута охоплення;

$C_V = (1,04 \dots 0,0004) \cdot V^2$ – швидкісний коефіцієнт;

$C_p = 0,7 \dots 1$ – коефіцієнт навантаження;

C_0 – коефіцієнт кута нахилу.

11. Визначають ширину ременя:

$$b = \frac{A}{\delta}.$$

За таблицею вибирають ремінь стандартних розмірів.

12. Визначають довжину ременя:

$$l = 2 \cdot a_{\omega} + \frac{\pi \cdot (D_2 + D_1)}{2} + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4 \cdot a_{\omega}}.$$

Для зшивання довжину ременя слід збільшити на величину $0,5 \cdot b$.

Клиноремінна передача.

Клиноремінною передачею називають передачу із застосуванням спеціальних клинових ременів (рис. 10.33). Виготовляють спеціальні реміні стандартної довжини. Реміні бувають семи профілів: О, А, Б, Г, Д, Е. Чим більше профіль, тим більше поперечний перетин ременя.

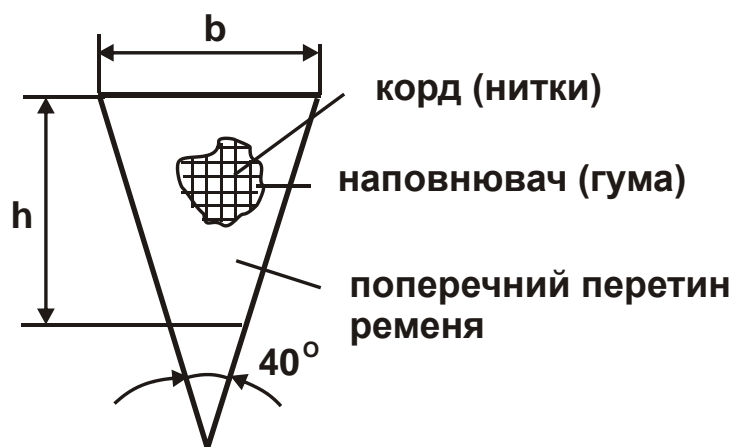


Рисунок 10.33 – Структура ременя

Іноді реміні виготовляють зубчастими (оскільки вони краще вигинаються). Зношування ременя відбувається, в основному, через вигин із-за облягання шківу. Якщо ремінь зубчастий, а канавка шківу гладка – це звичайна клиноремінна передача. Якщо шків із зубами – це ланцюгова передача із гумовим або пластмасовим зубчастим ланцюгом.

Переваги клиноремінної передачі: вище надійність, компактність, менше проковзування, більше строк експлуатації ременя.

Недоліки клиноремінної передачі: менше к. к. д. (дорівнює 0,95 замість 0,96), складне виготовлення шківів.

Клиноремінну передачу широко застосовують у металорізальних верстатах, автомобілях.

Якщо між ременем і шківом немає зазору (рис. 10.34), то передача буде працювати як плоскоремінна передача, але у декілька разів гірше.

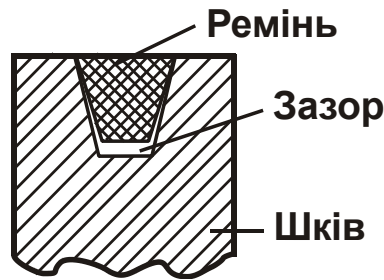


Рисунок 10.34 – Взаємне положення ременя і шківа клиноремінної передачі

Порядок розрахунку параметрів клиноремінної передачі:

1. Визначають передавальне число: $u = \frac{\omega_1}{\omega_2}$.

2. Залежно від переданої потужності за таблицею вибирають профіль ременя.

3. Залежно від вибраного профілю за таблицею вибирають діаметр малого шківа D_1 .

4. Визначають діаметр великого шківа:

$$D_2 = D_1 \cdot u.$$

5. Визначають швидкість ременя:

$$V = \frac{\omega_1 \cdot D_1}{2} \quad \text{або} \quad V = \frac{\pi \cdot D_1 \cdot n_1}{60}.$$

6. Визначають окружне зусилля:

$$F_1 = \frac{2 \cdot T_1}{D_1},$$

де $T_1 = \frac{1000 \cdot P_1}{\omega_1}$.

7. Задають міжосьову відстань a_ω :

$$a_{\omega \min} = 2 \cdot D_2.$$

8. Визначають кут охоплення:

$$\alpha_1 = 180^\circ - 57,3^\circ \cdot \frac{D_2 - D_1}{a_\omega}.$$

9. Визначають довжину ременя:

$$l = 2 \cdot a_\omega + \frac{\pi \cdot (D_2 + D_1)}{2} + \frac{(D_2 - D_1)^2}{4 \cdot a_\omega}.$$

За таблицею вибирають стандартну довжину ременя.

10. Визначають необхідну кількість ременів:

$$z = \frac{F_1}{K_0 \cdot C_\alpha \cdot C_v \cdot C_p \cdot C_0}.$$

Ременів повинно бути не більше 12.

11. Уточнюють міжосьову відстань:

$$a_\omega = \frac{1}{8} \cdot [2 \cdot l - \pi \cdot (D_2 + D_1) + \sqrt{[2 \cdot l - \pi \cdot (D_2 + D_1)]^2 - (D_2 - D_1)^2}].$$

Ланцюгова передача: пристрій і послідовність розрахунку

Ланцюгову передачу відносять до передачі зачепленням із гнучким зв'язком (ланцюгом), рис. 10.1, д. Ланцюги бувають втулково-роликкові та зубчасті. Зубчасті ланцюги кращі, безшумні, але вони більш коштовні та важкі. Застосовуються зубчасті ланцюга в умовах значних швидкостей.

Переваги ланцюгової передачі: велика міжосьова відстань (до 8 м), відсутність проковзування, передача значних потужностей (3000 кВт) та компактність.

Недоліки ланцюгової передачі: шум під час роботи, значне зношування ланцюга, подовження ланцюга.

Ланцюгова передача складається із ланцюга і зірочок. Для роботи ланцюгової передачі необхідно застосувати натяжний пристрій. Кінці ланцюга з'єднуються спеціальним замком. Ланцюги характеризують кроком ланцюга.

Передавальне число визначають:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{z_2}{z_1} = \frac{T_2}{T_1 \cdot \eta},$$

де z_1, z_2 – кількість зубів зірочок.

Порядок розрахунку:

1. Визначають передавальне число:

$$u = \frac{\omega_1}{\omega_2}.$$

2. За таблицю приймають кількість зубів малої зірочки z_1 .
3. Визначають z_2 :

$$z_2 = z_1 \cdot u.$$

4. Визначають крутний момент T_1 :

$$T_1 = \frac{1000 \cdot P_1}{\omega_1}, \text{ Н}\cdot\text{м}.$$

5. За таблицю визначають допустимий тиск у шарнірах $[P]_u$.
6. Визначають коефіцієнт експлуатації $K \approx 2 \dots 3$.
7. Визначають крок ланцюга:

$$p = 2,8 \cdot 3 \sqrt{\frac{T_1 \cdot R}{m \cdot z_1 \cdot [P]_u}},$$

де R – коефіцієнт, що ураховує умови монтажу передачі, її експлуатації;
 m – кількість рядів ланцюга.

8. Визначають швидкість ланцюга:

$$V = \frac{p \cdot z_1 \cdot \omega_1}{2 \cdot \pi}.$$

9. Визначають окружну силу:

$$F_1 = \frac{1000 \cdot P}{V}, \text{ Н}.$$

10. Перевіряють тиск у шарнірах ланцюга:

$$P_u = \frac{F_t \cdot K}{S} \leq [P]_u,$$

де $S = d_0 \cdot b$ – площа тиску;

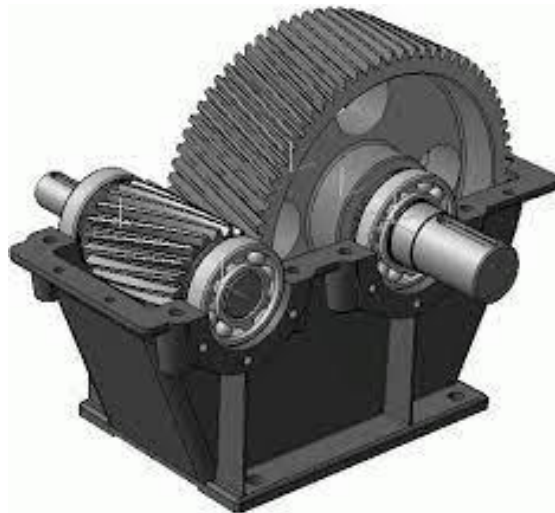
d_0 – діаметр вісі;

b – довжина втулки ланцюга.

Приклад 10.3. Розрахунок параметрів одноступінчастого циліндричного прямозубого редуктора

Редуктором називається механізм, що знижує кутову швидкість і збільшує крутний момент у приводах від електродвигуна до робочої машини. Редуктор складається зі зубчастих або черв'ячних передач,

встановлених в окремому герметичному корпусі, що принципово відрізняє його від зубчастої або черв'ячної передачі, вбудованої у виконавчий механізм або машину (рис 10.35). Редуктори широко застосовують у різних галузях машинобудування, тому кількість їх різновидів велика. Щоб зменшити габарити приводу і поліпшити його зовнішній вигляд, у машинобудуванні застосовують мотор-редуктори, які є агрегатами, в яких об'єднані електродвигун і редуктор.



а



б

Рисунок 10.35 – Одноступінчастий (а) та двоступінчастий (б) циліндричні редуктори

Значне поширення отримали одноступінчасті циліндричні прямозубі редуктори завдяки широкому діапазону потужностей, що передаються, довговічності, простоті виготовлення та обслуговування.

Проектований одноступінчастий редуктор складається із наступних частин: корпус, кришка корпусу, зубчаста пара, швидкохідний і тихохідний вали, підшипники кочення, кришки підшипників, шпонки, розпірні втулки, масловідражаючі кільця, кріпильні деталі (болти), оглядовий люк, пробка-віддушина, масломірний пристрій (щуп), маслозливна пробка, рим-болт.

Швидкохідний вал редуктора з'єднується із електродвигуном за допомогою муфти та передає обертальний момент через зубчасту передачу робочому органу конвеєра (провідному барабану), який з'єднаний із тихохідним валом муфтою. Зубчаста передача працює у масляній ванні.

Вихідні дані для розрахунку параметрів одноступінчатого циліндричного прямозубого редуктора: частота обертання $n_2 = 110$ об./хв.; вихідна потужність (потужність на веденому валу) $P_2 = 2,4$ кВт.

1. Кінематичний і силовий розрахунок параметрів одноступінчатого циліндричного прямозубого редуктора (рис. 10.36)

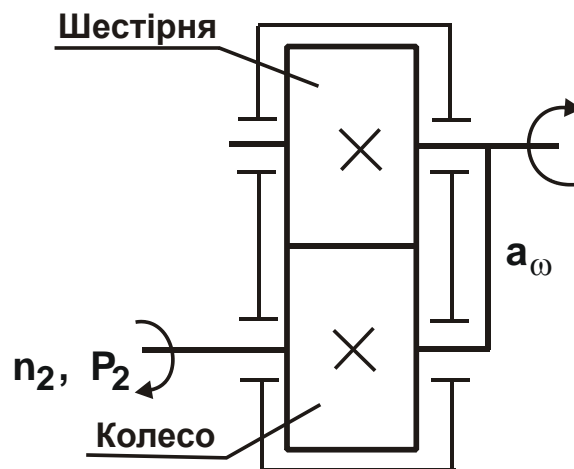


Рисунок 10.36 – Схематичне зображення одноступінчастого циліндричного прямозубого редуктора

1.1. Вибір електродвигуна.

Передавальне відношення редуктора: $i = 4$.

Попереднє число обертань електродвигуна:

$$n_d = n_2 \cdot i = 110 \cdot 4 = 440 \text{ об./хв.}$$

Коефіцієнт корисної дії для зубчастої передачі $\eta = 0,97$.

Визначаємо необхідну потужність електродвигуна:

$$P_1 = \frac{P_2}{\eta} = \frac{2,4}{0,97} = 2,47 \text{ кВт.}$$

За таблицею вибираємо електродвигун типу 4A112M8, що має такі характеристики:

Тип	Потужність	Число обертів за хв
4A112M8	3 кВт	750 об./хв

1.2. Передавальне число:

$$i = u = \frac{n_d}{n_2} = \frac{750}{110} = 6,82.$$

Оскільки рекомендоване передавальне число для одноступінчастого циліндричного редуктора складає $2,5 < i < 8$, а встановлене значення $i = 6,82$, то у даному випадку можна застосувати одноступінчастий циліндричний редуктор.

1.3. Розрахунок кутової швидкості.

Ведений вал :

$$\omega_2 = \frac{\pi}{30} \cdot n_2 = \frac{3,14}{30} \cdot 110 = 11,5 \approx 12 \text{ рад./с.}$$

Ведучий вал (ведучої шестірні):

$$\omega_1 = \frac{\pi}{30} \cdot n_d = \frac{3,14}{30} \cdot 750 \approx 78,5 \text{ рад./с.}$$

1.4. Розрахунок обертальних моментів.

Ведучий вал:

$$T_1 = \frac{1000 \cdot P_1}{\omega} = \frac{1000 \cdot 3}{78,5} = 38,2 \text{ Н·м.}$$

Ведений вал:

$$T_2 = T_1 \cdot i \cdot \eta = 38,2 \cdot 6,82 \cdot 0,97 = 252,7 \text{ Н·м.}$$

2. Ескізне компонування редуктора

2.1. Орієнтовний розрахунок діаметрів валів зубчастої передачі.

Розрахунок виконується на крутіння для вихідних кінців ведучого і веденого валів за умови:

$$W_p \geq \frac{T}{[\tau]_k},$$

де W_p – полярний момент опору крутіння, см^3 .

Для великого перетину:

$$W_p = \frac{\pi \cdot d^3}{16} \approx 0,2 \cdot d^3,$$

тоді

$$d = \sqrt[3]{\frac{T}{0,2 \cdot [\tau]_k}}.$$

Визначаємо діаметри ведучого валу d_1 (валу шестірні) та веденого валу d_2 за умови: $[\tau]_k = 20 \text{ МПа} = 20 \cdot 10^6 \text{ Н/м}^2$.

$$d_1 = \sqrt[3]{\frac{T_1}{0,2 \cdot [\tau]_k}} = \sqrt[3]{\frac{38,2}{0,2 \cdot 20 \cdot 10^6}} = 0,021 \text{ м} = 21 \text{ мм};$$

$$d_2 = \sqrt[3]{\frac{T_2}{0,2 \cdot [\tau]_k}} = \sqrt[3]{\frac{252,7}{0,2 \cdot 20 \cdot 10^6}} = 0,040 \text{ м} = 40 \text{ мм}.$$

2.1.1. Розрахунок конструктивних елементів редуктора.

За таблицями вибираємо матеріали шестірні та зубчастого колеса.

- для шестірні – сталь 55;
- для зубчастого колеса – сталь 45.

2.1.2. Розрахунок напруження на контактну витривалість.

Наближене значення міжконтактної витривалості визначаємо за таблицями. Для зубчастого колеса:

$$\sigma_{H.limb} = 2 \cdot H_V + 70 = 2 \cdot 269 + 70 = 482 \text{ МПа}.$$

Допустиме контактне напруження:

$$[\sigma]_H = \frac{\sigma_{H.limb}}{S_H} \cdot K_{HL} = \frac{578 \cdot 10^6}{1,2} \cdot 1,0 = 482 \text{ МПа},$$

де $S_H = 1,2$; – коефіцієнт безпеки (запас міцності);

$K_{HL} = 1,0$ – коефіцієнт довговічності.

2.1.3. Визначення геометричних розмірів зубчастої передачі.

Міжосьова відстань:

$$a_\omega = K_a \cdot (u + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2 \cdot K_{H\beta} \cdot 10^3}{u^2 \cdot [\sigma]_H^2 \cdot \psi_a}},$$

де ψ_a – коефіцієнт ширини шестірні щодо міжосьової відстані, $\psi_a = 0,40$;

K_a – допоміжний коефіцієнт; $K_a = 43 \text{ (Н/мм}^2\text{)}^{1/3}$;

$K_{H\beta}$ – коефіцієнт, що ураховує нерівномірність розподілу навантаження за довжиною контактних ліній.

Тоді

$$a_{\omega} = 43 \cdot 10^6 \cdot (6,82 + 1) \cdot \sqrt[3]{\frac{252,7 \cdot 1,025 \cdot 10^3}{6,82^2 \cdot 482^2 \cdot 0,40}} = 127 \text{ мм.}$$

Згідно стандартів приймаємо найближче стандартне значення $a_{\omega} = 140 \text{ мм.}$

Визначаємо модуль:

$$m = \frac{b}{\psi_m}$$

за умови $b = \psi_{ba} \cdot a_{\omega} = 0,40 \cdot 140 = 56 \text{ мм.}$

Коефіцієнт модуля $\psi_m = 28$ вибираємо за таблицею, тоді

$$m = \frac{b}{\psi_m} = \frac{56}{28} \approx 2 \text{ мм.}$$

Ділильне коло:

- шестірні

$$d_1 = \frac{2 \cdot a_{\omega}}{u + 1} = \frac{2 \cdot 140}{6,82 + 1} = 35,8 \text{ мм.}$$

- зубчастого колеса

$$d_2 = d_1 \cdot u = 35,8 \cdot 6,82 = 244,1 \text{ мм.}$$

Робоча ширина:

- шестірні

$$b_1 = 56 \text{ мм.}$$

- зубчастого колеса

$$b_2 = b_1 + 5 = 56 + 5 = 61 \text{ мм.}$$

Сумарне число зубів:

$$z_{\Sigma} = \frac{2 \cdot a_{\omega}}{m} = \frac{2 \cdot 1400}{20} = 140.$$

Кількість зубів на шестірні:

$$z_1 = \frac{z_{\Sigma}}{i + 1} = \frac{140}{6,82 + 1} = 18.$$

Кількість зубів на колесі:

$$z_2 = z_{\Sigma} - z_1 = 140 - 18 = 122.$$

Перевіряємо збіг початкових кіл у полюсі зачеплення:

$$a = a_{\omega} = \frac{d_1 + d_2}{2} = \frac{35,8 + 244,1}{2} = 140 \text{ мм.}$$

Визначаємо діаметри кіл вершин (виступів) шестірні та колеса:

$$d_{a1} = d_1 + 2 \cdot m = 35,8 + 2 \cdot 2 = 39,8 \text{ мм};$$

$$d_{a2} = d_2 + 2 \cdot m = 244,1 + 2 \cdot 2 = 248,1 \text{ мм}.$$

Визначаємо діаметри кіл западин шестірні та колеса:

$$d_{f1} = d_1 - 2,5 \cdot m = 35,8 - 2,5 \cdot 2 = 30,8 \text{ мм};$$

$$d_{f2} = d_2 - 2,5 \cdot m = 244,1 - 2,5 \cdot 2 = 239,1 \text{ мм}.$$

Послідовність складання редуктора:

- установити шпонку й напресувати шестірню на швидкохідний вал;
- установити масловідражальні кільця й напресувати підшипники на швидкохідний вал;
- аналогічно зібрати тихохідний вал;
- установити зібрані вузли в корпус;
- установити кришку корпусу й закріпити болтами;
- наповнити змащенням кришки підшипників;
- установити й закріпити кришки підшипників;
- установити маслосливну пробку, рим-болт і щуп;
- залити змащення;
- установити кришку оглядового люка й пробку-віддушину;
- перевірити роботу редуктора;
- перевірити відсутність течі масла.

Розбирання редуктора здійснюється у зворотній послідовності.

Порядок виконання роботи

Отримати у викладача варіант свого завдання та виконати розрахунок параметрів механічного пристрою – одноступінчастого циліндричного прямозубого редуктора.

Звіт по роботі

Звіт складається із основних понять та визначень у деталях машин та конструкційних особливостей і методів кінематичного й силового розрахунків механічних передач; із описання конструкції одноступінчастого циліндричного прямозубого редуктора, кінематичного та силового розрахунків його параметрів, ескізної компоновки редуктора та висновків із роботи.

Література [1, 2, 4, 6, 7, 11].

Питання для самоконтролю

1. Чим відрізняються машини-генератори від машини-двигуна?
 - а) перетворенням електричної енергії в механічну;
 - б) перетворенням механічної енергії в електричну;
 - в) наявністю комп'ютера;
 - г) наявністю коробки передач.
2. Що відноситься до видів виробів?
 - а) заготовки;
 - б) деталі;
 - в) машини;
 - г) системи.
3. До механічних властивостей металів не відноситься така властивість:
 - а) міцність;
 - б) твердість;
 - в) щільність;
 - г) корозійна стійкість.
4. Міцність матеріалу оцінюють:
 - а) напруженням;
 - б) потужністю;
 - в) силою;
 - г) роботою.
5. Міцність матеріалу визначається значенням, вираженим у:
 - а) Н/м^2 ;
 - б) Дж;
 - в) Вт;
 - г) $\text{Н}\cdot\text{м}$.
6. Передавальне відношення у передачі – це відношення:
 - а) моментів;
 - б) потужностей;
 - в) частот обертання;
 - г) сил.
7. Передаточне число не може бути:
 - а) менше 1;
 - б) більше 1000;
 - в) більше 100;
 - г) менше 5.

8. Назвіть основні зубчасті механічні передачі:
- а) радіальні;
 - б) плоскоремінні;
 - в) циліндричні;
 - г) клиноремінні.
9. Зубчасті передачі призначено для перетворення:
- а) обертальних рухів;
 - б) прямолінійних рухів;
 - в) обертальних і прямолінійних рухів;
 - г) змінних у часі рухів.
10. Основна перевага зубчастої передачі – це:
- а) велика швидкість обертання валу, що передається;
 - б) великий момент, що передається;
 - в) велика потужність, що передається;
 - г) можливість перетворення поступального руху в обертальний рух.
11. Модуль – це відношення:
- а) ширини зуба до його висоти;
 - б) висоти зуба до його ширини;
 - в) кількості зубів до діаметра ділильної окружності;
 - г) діаметра ділильної окружності до кількості зубів.
12. Передача тертям – це:
- а) черв'ячна передача;
 - б) фрикційна передача;
 - в) зубчаста передача;
 - г) передача гвинт – гайка.
13. Головний недолік фрикційної передачі – це:
- а) значні радіальні навантаження на опори валів;
 - б) зношування приводних ременів;
 - в) зношування зубчастих коліс;
 - г) зношування шестерень.
14. Передача гвинт – гайка служить для перетворення:
- а) поступального руху в обертальний;
 - б) обертального руху в поступальний;
 - в) поступального руху в поступальний за допомогою гвинта;
 - г) поступального руху в поступальний за допомогою гайки.

Робота 11. Деталі обертання. З'єднання

Мета роботи – вивчення конструкційних особливостей і методів розрахунку параметрів деталей обертання та з'єднань для проектування й виконання кінематичного та силового розрахунків різних механічних пристроїв.

Загальні відомості

Вали й вісі

Вал – це деталь, що обертається, яка призначена для підтримки насаджених на неї деталей і передачі крутного моменту (рис. 11.1,а). За геометричною формою вали діляться на *прямі*, *колінчасті* та *гнучкі*.

Вісь – це нерухома деталь або деталь, що обертається, яку призначено для підтримання насаджених на неї деталей (рис. 11.1,б). Вісь обертаючого моменту не передає. Вісі можуть бути *нерухомими* або *обертатися* разом із насадженими на них деталями. Виготовляються, як правило, прямими і мало чим відрізняються від прямих валів.



а



б

Рисунок 11.1 – Колінчастий вал (а) і вісь для напівпричіпу (б)

Класифікація валів. Залежно від призначення вали бувають:

- корінні – сприймають роботу машини (вали двигунів, шпинделі);
- передавальні – передають момент;
- трансмісійні – розподіляють момент між окремими споживачами.

Вал, від якого передається момент, називається *ведучим*, а вал, до якого передається, – *веденим*. *Передавальні вали* є одночасно і ведучими і веденими.

Залежно від конструкції вали бувають: гладкі (рис. 11.2,а), ступінчасті (рис. 11.2,б), фасонні (рис. 11.2,в), а також суцільні та порожнисті.

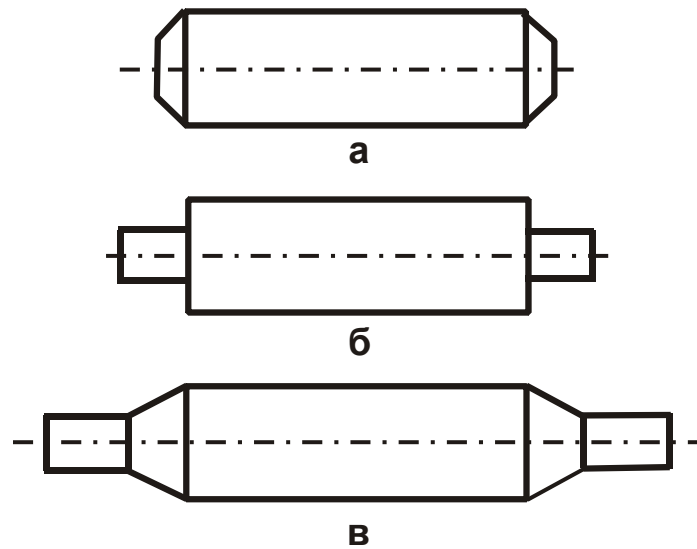


Рисунок 11.2 – Види валів: гладкий (а), ступінчастий (б), фасонний (в)

Вали виготовляють порожніми із конструктивної необхідності (подача мастила, охолодження води, електроприводу, один вал розташований всередині іншого). Щоб порожнистий вал був легшим, має виконуватися умова $d/D \geq 0,7$ (рис. 11.3).

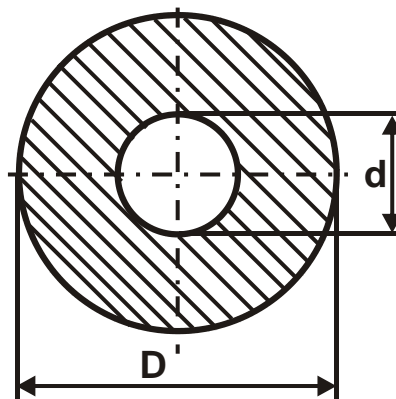


Рисунок 11.3 – Загальний вигляд порожнистого валу

Якщо $d/D = 0,2 \dots 0,3$, то вал буде важчим. Із метою полегшення виготовляють порожнисті, шліцьові вали, вали-шестерні, вали із зовнішнім або внутрішнім різьбленням.

Елементи вала. Частина вала, що знаходиться у підшипнику, називається *цапфою* (рис. 11.4). Цапфа на кінці вала називається *шипом*, на середині вала – *шийкою*. Якщо цапфа сприймає осьове навантаження, вона називається *п'ятою*, а підшипник – *підп'ятником*.

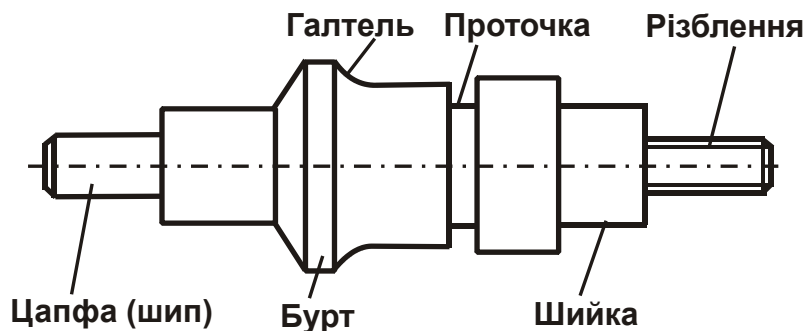


Рисунок 11.4 – Елементи вала

П'яти бувають суцільні. На валах буває проточка або наплавлення для установки стопора.

Для виготовлення валу найчастіше використовують сталь 45, Ст5, іноді у коробках передач – сталь 40Х або інші сталі.

Розрахунок вісі. Вісь працює тільки на вигин. Її діаметр визначають за формулою:

$$d = \sqrt[3]{\frac{M_B}{0,1 \cdot [\sigma]}}$$

де M_B – вигинний момент;

$[\sigma]$ – допустиме напруження.

Якщо вісь нерухома, приймається $[\sigma_0]$ – межа витривалості в умовах нульового циклу напруження. Якщо вісь обертається, то приймається $[\sigma_{-1}]$ – межа витривалості в умовах симетричного циклу напруження, оскільки навантаження при цьому зміщено у напрямі осьової сили.

Розрахунок валу. Розрахунок складається із чотирьох стадій:

- орієнтовний розрахунок;
- ескізна компоновка (створення конструкції валу);

- перевірка на спільну дію вигину і крутіння;
- уточнений розрахунок (перевірка на втомну міцність).

Під час орієнтовного розрахунку визначають діаметр вихідного кінця валу за умови міцності на крутіння:

$$d \geq 3 \sqrt{\frac{T}{0,2 \cdot [\tau]_k}},$$

де T – крутний момент;

$[\tau]_k$ – допустиме напруження крутіння.

Отриманий діаметр округляють до стандартного.

Допустиме напруження крутіння приймають залежно від марки сталі (табл. 11.1).

Таблиця 11.1 – Допустиме напруження крутіння для різних марок сталі

Марка сталі	Ст3	Ст4	Ст5	Сталь 45	Сталь 40Х
$[\tau]_k$, МПа	20	25	30	40	45

Підшипники

Пристрій і порівняльна характеристика підшипників ковзання і підшипників кочення

Підшипником називається опора деталі, що обертається (вісь, вал, ролик, блок). Підшипник розташований під шипом валу, звідси і назва – *підшипник* (рис. 11.5). Найпростішим підшипником є *втулка*.

Залежно від роду тертя розрізняють *підшипники ковзання* і *підшипники кочення*.

Залежно від навантаження, що сприймається, підшипники бувають:

- радіальні – сприймають тільки радіальне навантаження;
- радіально-упорні – сприймають радіальне і осьове навантаження;
- упорні – сприймають осьове навантаження.

Підшипники ковзання. У підшипнику ковзання діє тертя ковзання. Підшипник складається із корпусу і антифрикційного вкладишу або втулки. Між вкладишем і цапфою обов'язково повинен бути масляний шар для зменшення тертя і зношування підшипника. Мастильні матеріали можуть бути рідкими, пластичними (густими), твердими та газоподібними. При цьому вони повинні бути маслянистими і в'язкими. Основними мастильними матеріалами є рідкі масла (органічні та мінеральні масла).

Також використовують воду, мазі, графіт, слюду та ін. Змащування підшипників буває: періодичним, кільцевим, крапельним, змащуванням під тиском, циркулярним.

Перевагами підшипника ковзання є: великі значення допустимого навантаження та допустимої частоти обертання, безшумність, можливість установки на колінчасті вали. *Недоліками підшипника ковзання є:* низький к. к. д., великі втрати на тертя, складність експлуатації та змащування, обмежена взаємозамінність (тільки у межах однотипних машин), застосування коштовних антифрикційних матеріалів.



Рисунок 11.5 – Загальний вигляд підшипника кочення (а) та підшипників кочення і ковзання, що застосовують у редукторах (б)

Корпус підшипника – чавунний вкладиш – антифрикційний. Для виготовлення підшипника застосовують бронзу, бабіт, антифрикційний чавун, пластмасу, дерево, графіт, металографіт, фторопласт, капралон.

К. к. д. підшипників ковзання дорівнює 0,95 ... 0,96.

Розрахунок підшипників ковзання. Робота підшипників ковзання супроводжується абразивним зношуванням вкладишів та цапф, заїданням та втомним викришуванням. Тому основним критерієм працездатності опор ковзання є зносостійкість – опір зношуванню та заїданню. Для оцінювання працездатності та надійності підшипників, що працюють у режимі недосконалого змащування, прийнято *середній тиск* p на поверхнях, що труться, і *питома робота сил тертя* $p \cdot V$, де $V = \pi \cdot d \cdot n / 60$ – окружна швидкість поверхні цапфи, м/с.

Під час розрахунку діаметр вкладишу приймають рівним діаметру цапфи (рис. 11.6). Довжина вкладишу $l = (0,5 \dots 1,3) \cdot d$.

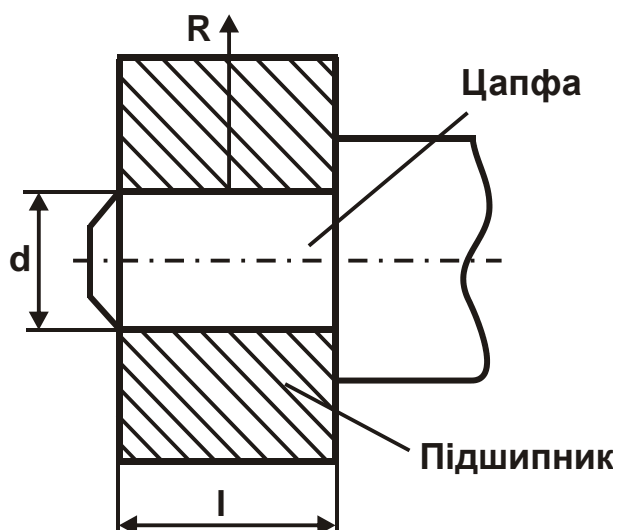


Рисунок 11.6 – Розрахункова схема діаметра вкладишу

Здійснюють перевірку на видавлювання масла і нагрівання за умовами:

$$p = \frac{R}{S} \leq [p];$$

$$p \cdot V \leq [p \cdot V],$$

де R – радіальне навантаження, Н;

$S = d \cdot l$ – площа проекції цапфи, м².

Допустимі значення величин $[p]$ і $[p \cdot V]$ залежать від матеріалу, із якого виготовлено підшипник (табл. 11.2).

Таблиця 11.2 – Допустимі значення $[p]$ і $[p \cdot V]$ для ряду матеріалів

Матеріал	$[p]$, МПа	$[p \cdot V]$, МПа·м/с
Бронза	4 ... 6	4 ... 6
Баббіт	6 ... 10	15 ... 20
Чавун	2 ... 4	1 ... 3

Підшипники кочення. У підшипниках кочення діє тертя кочення. Підшипник складається із зовнішнього кільця, внутрішнього кільця, тіл кочення і сепаратора (рис. 11.5, рис.11.7).

Залежно від тіл кочення підшипники бувають кулькові та роликові.

Залежно від напрямку навантаження, що сприймається, підшипники кочення бувають:

- радіальні – сприймають тільки радіальне навантаження;

- радіально-упорні – сприймають радіальне і осьове навантаження;
- упорні – сприймають осьове навантаження.

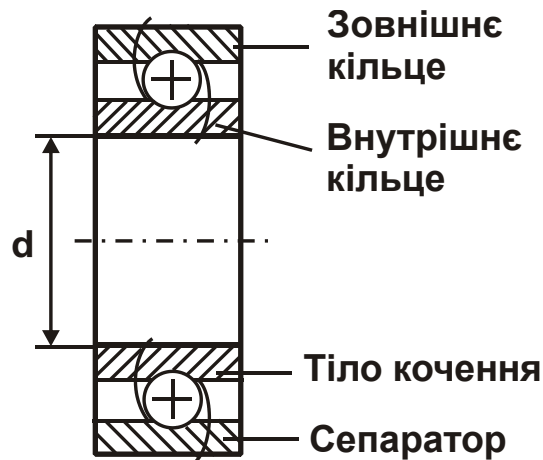


Рисунок 11.7 – Будова підшипника кочення

Залежно від кількості рядів тіл кочення підшипники бувають однорядні і багаторядні, а залежно від можливості самовстановлюватися – несамовстановлювані і самовстановлювані (сферичні).

Мастильні матеріали у підшипниках зменшують тертя та шум, відводять теплоту, захищають підшипник від корозії, заповнюють зазори в ущільненнях, забезпечують герметизацію підшипникового вузла.

Переваги підшипника кочення: високий к. к. д. (дорівнює $\eta = 0,99$), низька вартість, висока взаємозамінність, простота обслуговування.

Недоліки підшипника кочення: шум під час роботи, обмежені значення навантаження і частоти обертання, великі радіальні розміри.

Маркування підшипників кочення. У загальному випадку підшипники маркуються семизначним числом у кінці, а частіше – трьох- або чотиризначним числом:

206;
6257205;
8304;
6308.

Перша і друга цифри праворуч – внутрішній діаметр, розділений на 5. Це правило справедливе для діаметрів від 20 до 495 мм, тобто із номера 04 до 99.

Для діаметрів від 10 до 20 мм цифри означають:

00 – 10 мм;

- 01 – 12 мм;
- 02 – 15 мм;
- 03 – 17 мм.

Для діаметрів до 10 мм перша цифра означає діаметр, наприклад:

Підшипник	№ 28	№ 6	№ 3,5
D, мм	28	6	3,5

Третя цифра праворуч означає радіальну серію:

- 1 – особливо легка;
- 2 – легка;
- 3 – середня;
- 4 – важка.

Четверта цифра праворуч означає тип підшипника:

- 0 – кульковий, радіальний, однорядний;
- 1 – кульковий, радіальний, дворядний;
- 2 – роликовий, однорядний, радіальний;
- 3 – роликовий, дворядний;
- 4 – голчастий;
- 5 – роликовий із витими роликами;
- 6 – кульковий, радіально-упорний;
- 7 – роликовий, конічний, радіально-упорний;
- 8 – кульковий, упорний;
- 9 – роликовий, упорний.

П'ята і шоста цифри означають конструктивні особливості (канавка, борт, захисні шайби). Сьома цифра означає серію за шириною. Крім номера, обов'язково вказується завод-виготовлювач.

Існують додаткові позначення праворуч від основного номера:

- Б – сепаратор бронзовий;
- Е – сепаратор пластмасовий;
- К – сепаратор кований;
- Л – сепаратор латунний;
- С1, ..., Сn – самозмащувальний підшипник;
- Т1, ..., Тn – підшипник, який працює в умовах високих температур;
- Ш – безшумний підшипник;
- Я – підшипник із неметалевих матеріалів;
- V – підвищені вимоги за шириною.

Розрахунок підшипників кочення. Основні причини втрати працездатності підшипників кочення наступні: втомне викришування, пластичні деформації, задирки, абразивне зношування, руйнування сепараторів, розколювання кілець і тіл кочення. Основними критеріями працездатності підшипників кочення є довговічність за втомним викришуванням і статична вантажопідйомність за пластичними деформаціями.

Тип підшипників вибирають залежно від характеру навантаження, номер підшипника – залежно від діаметра валу. Для цього складають розрахункову схему, і здійснюють перевірку підшипника на довговічність.

Визначають реакцію підшипників R_A і R_B (рис. 11.8), потім визначають еквівалентне навантаження на підшипник:

$$R_{екв} = (X \cdot R \cdot K_K + Y \cdot F_a) \cdot K_B \cdot K_T,$$

де X – коефіцієнт радіального навантаження;

Y – коефіцієнт осьового навантаження;

R – радіальне навантаження (R_A або R_B залежно від того, який підшипник розраховується), приймається більше із навантажень;

K_K – коефіцієнт обертання (якщо обертається внутрішнє кільце, $K_K = 1$, якщо обертається зовнішнє кільце – $K_K = 1,2$);

K_B – коефіцієнт безпеки ($K_B = 1 \dots 3$; для редукторів $K_B = 1,3 \dots 1,4$);

K_T – температурний коефіцієнт ($K_T = 1$ для $t < 100$ °С).

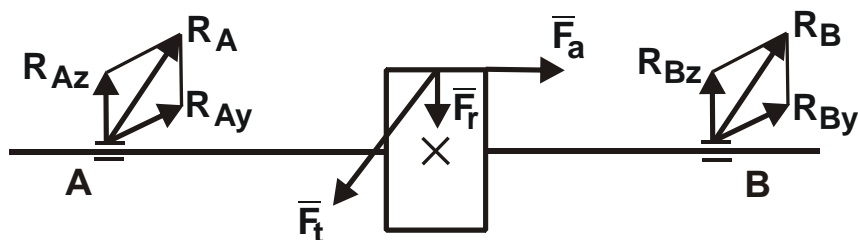


Рисунок 11.8 – Виникаючі реакції підшипників

Далі визначають фактичну довговічність роботи підшипника L_h . Для шарикового підшипника:

$$L_h = \frac{10^6}{60 \cdot n} \cdot \left(\frac{C}{R_{екв}} \right)^3 \geq [L_h \text{ зад}],$$

де C – динамічна вантажопідйомність підшипника (приймається із таблиці для кожного підшипника);

n – частота обертання валу, об./хв;

$[L_h \text{ зад}]$ – задана довговічність роботи підшипника.

Якщо умова $L_h \geq [L_h \text{ зад}]$ не виконується, необхідно прийняти вищу серію або інший тип підшипника і повторити розрахунок.

За відсутності осьового навантаження:

$R_{\text{екв}} = R \cdot K_K \cdot K_B \cdot K_T$ – для радіальних підшипників;

$R_{\text{екв}} = F_a \cdot K_B \cdot K_T$ – для упорних підшипників.

Для $n > 10$ об./хв підшипник на довговічність не перевіряється.

Крім довговічності, підшипник перевіряється на статичну вантажопідйомність:

$$R_{\text{екв}} \leq C_0,$$

де C_0 – статична вантажопідйомність підшипника.

Посадки деталей

Посадкою називається ступінь рухливості з'єднаних деталей. Посадки бувають *із натягом*, коли $d < D$, *із зазором*, коли $d > D$. Посадка буває у *системі вала*, коли вал – основний розмір, а отвір підганяється, і у *системі отвору*, коли вал підганяється.

Основний розмір позначається: H – отвір; h – вал.

Посадка підшипника на вал здійснюється у системі отвору (позначається $H6$ або $H7$), а посадка підшипників у отвір – у системі вала (позначається $k6$ або $h6$). Буква означає характер посадки, цифра – квалітет.

Посадка зубчастих коліс приймається $\frac{H7}{m6}$ або $\frac{H7}{r6}$. Якщо посадка

рухлива, із зазором, тоді $\frac{H7}{f6}$.

Муфти: призначення і класифікація

Муфтою називається пристрій, призначений для з'єднання двох кінців валів і передачі крутного моменту без зміни його значення та напрямку (рис. 11.9).

Муфти можуть виконувати й інші функції: електроізоляцію; згладжування поштовхів; захист від перевантажень; вмикання і вимикання руху. Крім того, муфти можуть виконувати роль маховика і гальмівного барабана.



Рисунок 11.9 – Види муфт

Муфти поділяють на *жорсткі* (передають всі поштовхи під час роботи) і *пружні* (частково згладжують виникаючі поштовхи). Ті та інші муфти бувають *глухі* (постійно з'єднані) і *керовані* (їх можна включати і вимикати, вони призначені для включення руху).

До жорстких муфт відносяться:

- втулкова – найпростіша, із застосуванням штифтів може бути захисною;
- поперечно-з'єднувальна, або дискова – складається із двох напівмуфт, з'єднаних болтами, широко поширена;
- поздовжньо-з'єднувальна – має рознімач уздовж осі;
- хрестова (муфта Ольдгема) – допускає неспіввісність, застосовується за невеликих потужностей, складається із сухаря і двох напівмуфт із пазом;
- фрикційна – буває дискова і конічна, однодискова і багатодискова, суха та що працює у масляній ванні; застосовується в автомобілях як зчеплення, у верстатах – як фрикціон;
- обгонна – передає обертання тільки у одному напрямі, застосовується у двигунах внутрішнього згорання як пусковий пристрій (храповик);
- муфта із шарніром Гука – застосовується у пересічних валах, у карданних передачах.

До пружних муфт відносяться:

- втулково-пальцева – завдяки деформації втулки (гумовій або шкіряній) відбувається згладжування поштовху, застосовується дуже широко за будь-яких потужностей;

- муфта із пружним кільцем – широко застосовується для приводів насосів у котельнях;
- пружинна – є компенсуючою;
- зубчаста – допускає неспіввісність валів (компенсуюча муфта), характеризується дуже високою надійністю, застосовується у вантажо-підйомних машинах;
- кулачкова – застосовується як керована;
- розширювальна – аналогічна кулачковій муфті, але має збільшені зазори, працює за великою різницею температур;
- гідравлічна – може не тільки передавати, а й змінювати момент, застосовується на кораблях, у автомобілях, характеризується дуже високою плавністю.

Основною характеристикою муфт є обертальний момент T , що передається. Муфти вибирають за більшим діаметром кінців валів, що з'єднуються, і розрахунковим моментом:

$$T_{\text{розр}} = K \cdot T,$$

де K – коефіцієнт режиму роботи муфти.

Для приводів від електродвигуна приймають: для спокійного навантаження $K = 1,15 \dots 1,4$; для змінного навантаження $K = 1,5 \dots 2$; для ударного навантаження $K = 2,5 \dots 3$.

З'єднання

У машинах деталі з'єднуються між собою. З'єднання бувають рознімними (рис. 11.10) та нерознімними (рис. 11.11).

Рознімним з'єднанням називають таке з'єднання, яке підлягає розбиранню (різьбові, шпонкові, шліцьові та ін.).



Рисунок 11.10 – Рознімне (різьбове) з'єднання

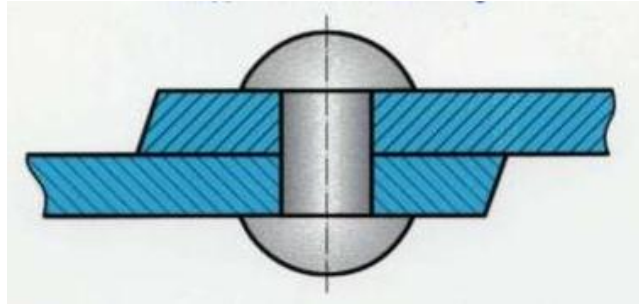


Рисунок 11.11 – Нерознімне (заклепувальне) з'єднання

Рознімним з'єднанням називають таке з'єднання, яке підлягає розбиранню (різьбові, шпонкові, шліцьові та ін.).

Нерознімним з'єднанням називають таке з'єднання, яке не підлягає розбиранню або під час розбирання якого одна із деталей руйнується (зварне, заклепувальне та ін.).

Рознімні з'єднання

Шпонкові з'єднання

Шпонка служить для відносно нерухомого з'єднання зубчастого колеса, шківів або напівмуфти із валом (рис. 11.12). Шпонка є сталевим брусом, що встановлюється у пази валу і маточини. Вона призначена для передачі обертального моменту між валом і маточиною колеса, шківів, зірочки та ін.

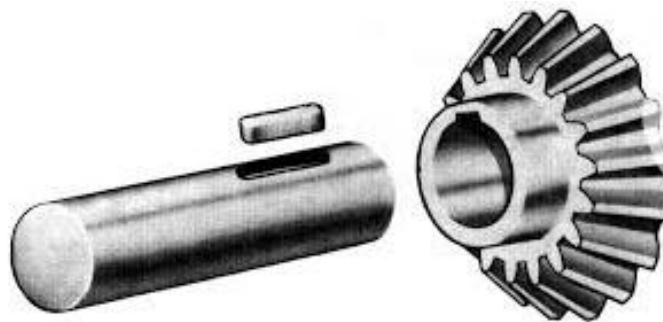


Рисунок 11.12 – Шпонкове з'єднання

Шпонка буває:

- на лисці (рис. 11.13,а);
- фрикційна (рис. 11.13,б) – працює завдяки тертя, застосовується як захисна за малих потужностей (у приладах);
- урізна (рис. 11.13,в) – найбільш поширена шпонка;

- тангенціальна (рис. 11.13,г) – застосовується за умов великих потужностей, гарно працює тільки в одному напрямі. Якщо робота реверсивна, то встановлюють дві шпонки під кутом;
- сегментна (рис. 11.13,д) – застосовується за умов невеликих потужностей, дуже зручна у монтажі.

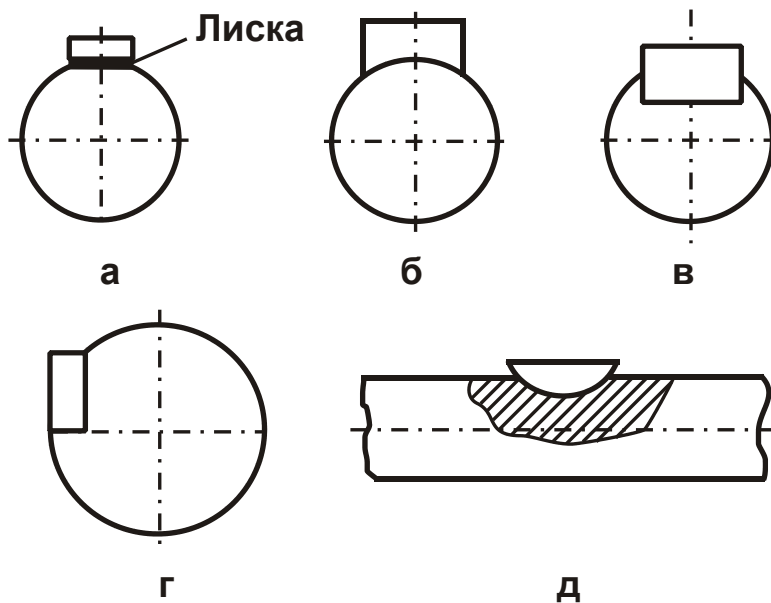


Рисунок 11.13 – Види шпонок

Урізні шпонки бувають призматичні (рис. 11.14,а) (із прямим і округленими торцями) і клинові (рис. 11.14 б) (без головки та із головкою).

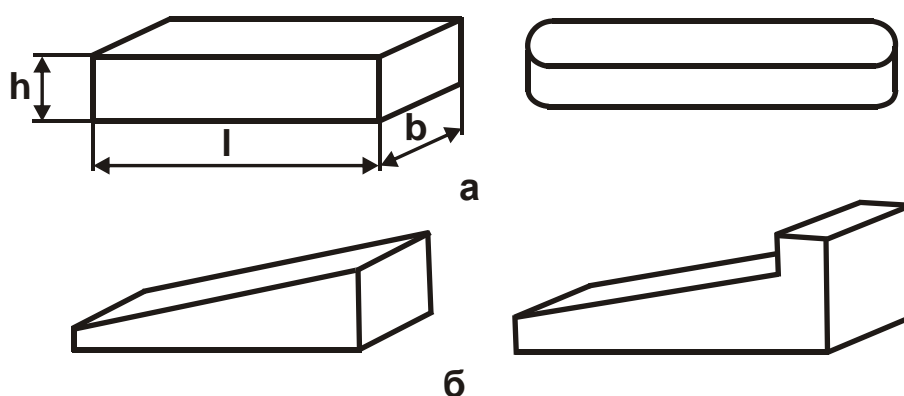


Рисунок 11.14 – Види урізних шпонок

Нахил повинен бути не більше $1/50$, інакше шпонка не буде триматися. Головку призначено для демонтажу.

Перевагами шпонок є: простота виготовлення і низька вартість, нескладний монтаж і демонтаж. *Недоліками шпонок є:* ослаблення валу і недостатнє центрування.

Розрахунок шпонок. Шпонка працює на зріз (площа $A_{зр}$) і зминання (площа $A_{зм}$) осьовою силою (рис. 11.15). Розміри шпонки вибирають за таблицею залежно від діаметра валу.

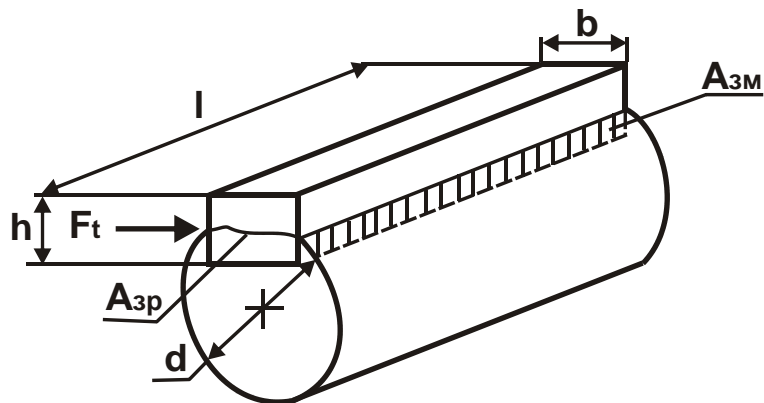


Рисунок 11.15 – Розрахункова схема шпонки

Довжину шпонки приймають залежно від довжини маточини колеса. Перевірку на зминання виконують за формулою:

$$\sigma_{зм} = \frac{4 \cdot T}{d \cdot h} \cdot (l - b) \leq [\sigma]_{зм};$$

$$[\sigma]_{зм} = 90 \dots 100 \text{ МПа},$$

де T – момент, що передається;

d – діаметр валу;

h, l, b – відповідно, висота, довжина і ширина шпонки;

Для прямих торців:

$$\sigma_{зм} = \frac{4 \cdot T}{d \cdot h \cdot l} \leq [\sigma]_{зм}.$$

Перевірювання на зріз виконують за формулою:

$$\tau_{зр} = \frac{2 \cdot T}{d \cdot b \cdot l} \leq [\tau]_{зр}.$$

Приймається: $[\tau]_{зр} = 100 \dots 110 \text{ МПа}$.

Найбільш небезпечним є зминання, тому, якщо результат перевірювання шпонки на зминання задовільний, то на зріз розрахунок можна не виконувати.

Шліцьові з'єднання

Шліцьові з'єднання утворюються виступами – зубами на валу та відповідними западинами – шліцями на маточині. Робочими поверхнями є бічні сторони зубів. Зуби фрезерують методом обкату або накочують у холодному стані профільними роликками методом поздовжньої накатки. Шліці отвору маточини виготовляють протягуванням. Отже, шліцьові зуби нарізають на фрезерних, зуборізних або довбальних верстатах. Їх також піддають поверхневому загартуванню.

Шліцьові зуби бувають прямобічні (рис. 11.16,а), евольвентні (рис. 11.16,б), і трикутні (рис. 11.16,в).

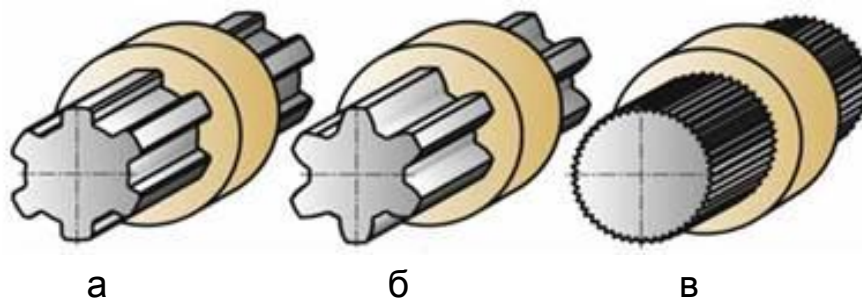


Рисунок 11.16 – Шліцьові з'єднання

Центрування можна здійснювати за зовнішньою або внутрішньою поверхнями, для евольвентних зубів – за боковими поверхнями.

Шліцьові з'єднання широко застосовують у коробках передач. З'єднання із трикутними зубами застосовують для різних рукояток і фіксують болтами.

Перевагами шліцьового з'єднання є: висока міцність, краще центрування, менше ослаблення валу. Недоліками шліцьового з'єднання є: більш складне виготовлення та вища вартість.

Основними критеріями працездатності шліцевих з'єднань є опір робочих поверхонь зминанню та зношуванню.

Розміри і кількість зубів вибирають за таблицею, а потім виконують перевірку на зминання:

$$\sigma_{зм} = \frac{T}{S_F \cdot I_p} \leq [\sigma]_{зм},$$

де T – крутний момент, що передається, Н·мм;

S_F – питомий (на одиницю довжини) сумарний статичний момент площі робочих поверхонь, мм³/мм;

l_p – робоча довжина зубів, мм;

$[\sigma]_{3M}$ – допустиме напруження змінання, Н/мм².

У табл. 11.3 наведено значення номінального розміру $z \times d \times D$ (де z – кількість зубів; d – внутрішній діаметр; D – зовнішній діаметр), ширини зуба b і S_F для різних серій шліцевих прямобічних з'єднань, а на рис. 11.17 зображено геометричні розміри шліцевого прямобічного з'єднання.

Таблиця 11.3 – Значення номінального розміру $z \times d \times D$, ширини зуба b і S_F для шліцевих прямобічних з'єднань, розміри в мм

Серія	Номінальний розмір $z \times d \times D$	b	S_F , мм ³ /мм
Легка	8×32×36	6	163
	8×36×40	7	182
	8×42×46	8	211
	8×46×50	9	230
Середня	8×32×38	6	308
	8×36×42	7	343
	8×42×48	8	396
	8×46×54	9	600
Важка	10×32×40	5	576
	10×36×45	5	749
	10×42×52	6	978
	10×46×56	7	1020

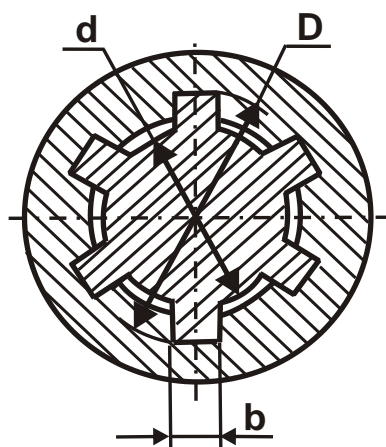


Рисунок 11.17 – Шліцеве прямобічне з'єднання

Далі виконують також розрахунок на зношування:

$$\sigma_{зм} = \frac{T}{S_F \cdot l_p} \leq [\sigma]_{знош},$$

де $[\sigma]_{знош}$ – допустиме напруження на обмеження зношуванню, Н/мм².

Значення $[\sigma]_{знош}$ для необмеженого числа циклів навантаження приймають залежно від виду термообробки і твердості робочих поверхонь деталей, що з'єднуються (Н/мм²):

$$[\sigma]_{знош} = 0,032 \cdot HB \text{ – для поліпшених зубів};$$

$$[\sigma]_{знош} = 0,3 \cdot HRC_e \text{ – для загартованих зубів}.$$

Штифтові з'єднання

Штифтові з'єднання є рознімними і призначені для з'єднання різних плоских деталей, для їх фіксації і центрування (рис. 11.18).

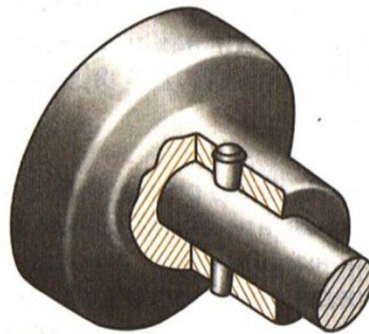


Рисунок 11.18 – Штифтове з'єднання

Штифти працюють на зріз. Перевірювання міцності на зріз виконують за формулою:

$$\tau_{зр} = \frac{F}{A_{зр}} \leq [\tau]_{зр},$$

або

$$\tau_{зр} = \frac{4 \cdot F}{\pi \cdot d^2} \leq [\tau]_{зр};$$

$$[\tau]_{зр} = 30 \dots 50 \text{ МПа}.$$

Необхідний діаметр штифта визначають за формулою (рис. 11.19):

$$d = \sqrt{\frac{4 \cdot F}{\pi \cdot [\tau]_{зр}}}.$$

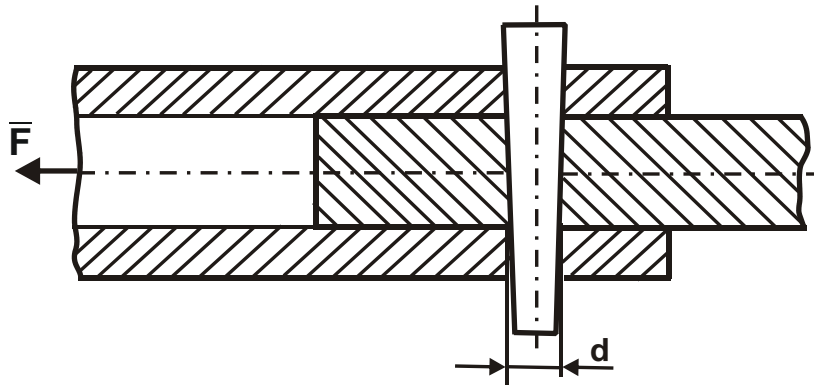


Рисунок 11.19 – Розрахункова схема штифтового з'єднання

Різьбові з'єднання

Різьбове з'єднання є найбільш поширеним рознімним з'єднанням. Їх утворюють болти, гвинти, шпильки, гайки та інші деталі, які мають різьблення. Основними різьбовими з'єднаннями є з'єднання болтами, гвинтами та шпильками (рис. 11.10).

Основним елементом різьбового з'єднання є різьблення.

Різьбленням називається гвинтова лінія, яку нанесено на циліндричну або конічну поверхню. Різьблення бувають *кріпильні* (служать для з'єднання деталей) і *спеціальні* (виконують як функцію з'єднання, так і інші функції: перетворення руху, ущільнення та ін.).

До кріпильного різьблення відносяться:

- основне метричне різьблення – характеризується зовнішнім діаметром d (в мм), кроком p і кутом профілю 60° (рис. 11.20). Дуже важливим параметром є діаметр. Основним називається таке різьблення, для якого справедливе відношення:

$$\frac{d_1}{d_2} = 0,85.$$

Позначається метричне різьблення М6, М10, М12, М18 та ін.;

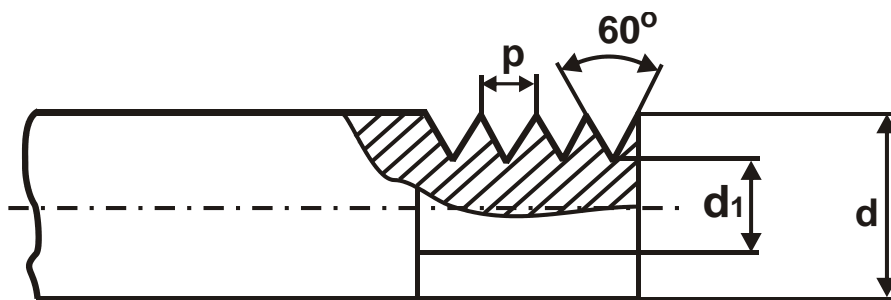


Рисунок 11.20 – Параметри основного метричного різьблення

- дрібне метричне різьблення – характеризується так саме, як основне метричне різьблення, але має невеликий крок.

Існує п'ять дрібних різьблень (чим більше номер різьблення, тим менше крок).

Перевагами дрібного різьблення є: кращий опір самовідгвинчуванню, вище міцність різьблення, менше ослаблення тіла болта різьбленням;

- дюймове різьблення – характеризується зовнішнім діаметром d (у дюймах), кутом профілю 55 і кількістю ниток K на 1 дюйм довжини різьблення. Позначається $5/8"$, $5/16"$, $1/2"$ та ін.

Кріпильне різьблення буває *праве і ліве*.

До спеціальних різьблень відносять:

- вантажне різьблення – буває прямокутне, упорне і трапецеїдальне.

Прямокутне різьблення застосовують у пресах, домкратах, а упорне і трапецеїдальне різьблення – у металорізальних верстатах і ходових гвинтах.

Прямокутне вантажне різьблення позначають *прям. 40x6, прям. 50x8 та ін.*, а трапецеїдальне – відповідно, *уп. 50x8, трап.60x8 та ін.*;

- трубне дюймове різьблення – застосовується для з'єднання водопровідних труб. Позначається: *труб. 1/2"*, *труб. 3/4"* та ін. Цифра указує внутрішній діаметр труби, на якій нарізане різьблення;

- конічне різьблення – має дуже високу міцність і щільність, застосовується у штуцерах, вентилях. Позначається: *к30x1,5, к40x2 та ін.*;

- кругле різьблення – застосовується на штампованих і литих виробках (електролампи, кришки термосів, кришки фляг);

- годинникове різьблення – діаметр менше 1 мм;

- багатозахідне різьблення;

- модульне (черв'ячне) різьблення;

- пітчеве різьблення.

Перевагами різьбових з'єднань є: висока навантажувальна здатність і надійність; наявність великої номенклатури різьбових деталей щодо різноманітних умов роботи; зручність складання та розбирання; можливість застосовувати механізацію; незначна вартість, обумовлена стандартизацією та високопродуктивними процесами виготовлення.

Недоліками різьбових з'єднань є: наявність великої кількості концентраторів напружень на поверхнях різьбових деталей, які знижують їх опір втомі для змінних напружень.

Способи виготовлення різьблення. Існує два основних способи виготовлення різьблення: нарізанням і накочуванням.

Нарізання різьблення здійснюється різцями, гребінками, плашками, мітчиками, різьбовими головками, фрезами.

Накочування різьблення здійснюється гребінками або роликами на різьбонакатних автоматах шляхом пластичної деформації заготовки. Цей спосіб високопродуктивний, знайшов широке застосування у масовому виробництві в умовах виготовлення стандартних кріпильних деталей.

Для закріплення різьбових з'єднань застосовують болти і засоби проти самовідгвинчування.

Класифікація болтів. *Болти* бувають чорні (допуски не нормуються), напівчистові (мають певні допуски) і чисті (спеціально пригнані).

Болти відрізняються формою головки (шестигранна, прямокутна та ін.), діаметром і довжиною нарізної частини (рис. 11.21).



Рисунок 11.21 – Болт із шестигранною головкою

Засоби проти самовідгвинчування. *Самовідгвинчуванням* називається довільне відкручування болта або гайки у результаті вібрації.

Проти самовідгвинчування застосовуються:

- прорізна або коробчата гайка із шплинтом;
- шайби-гровери;
- контргайки;
- різні стопори;
- сполучення за конічною поверхнею.

Розрахунок різьбового з'єднання традиційно виконують за основним критерієм працездатності – міцності нарізаної частини стержня на розтягання:

$$\sigma = \frac{4 \cdot F_{\text{розр}}}{\pi \cdot d_p^2} \leq [\sigma]_p,$$

де $F_{\text{розр}} = 1,3 \cdot F_0$ розрахункова сила;

F_0 – сила зтягання;

d_p – діаметр різьблення болта;

$[\sigma]_p = \sigma_T / n_T$ – допустиме напруження для болта;

σ_T – межа текучості матеріалу болта;

n_T – допустимий коефіцієнт запасу міцності.

За умови міцності можна визначити діаметр різьблення болта:

$$d_p \geq \sqrt{\frac{4 \cdot F_{\text{розр}}}{\pi \cdot [\sigma]_p}}.$$

Нерознімні з'єднання

Більшість нерознімних з'єднань можна віднести до однієї з груп:

- з'єднання із силовим замиканням, відносна нерухомість деталей яких забезпечується механічними силами, що виникають у результаті пружно-пластичних деформацій;
- з'єднання із геометричним замиканням, які здійснюються завдяки формі деталей, що з'єднуються;
- з'єднання, які засновано на атомно-молекулярних силах (зачеплення або адгезія).

Типові нерухомі нерознімні з'єднання – це з'єднання із гарантованим натягом, зварні, паяні, клейові та заклепувальні.

Нерухомі нерознімні з'єднання із гарантованим натягом широко застосовують під час з'єднання із втулками, кільцями, підшипниками, буксами, роторами, зубчастими колесами, маховиками та ін. Їх міцність визначається силами зачеплення на контактних поверхнях, тобто величиною натягу після складання.

З'єднання можна здійснювати нагріванням деталі, що охоплює (втулки), або охолодженням охопленої деталі (валу) перед складанням, наданням пластичної деформації одній із деталей, що з'єднуються (наприклад, розвальцюванням), шляхом створення пружної деформації охопленої деталі або запресовуванням охопленої деталі у охоплювану деталь із натягом.

Міцність з'єднань, зібраних із охолодженням охопленої деталі, вище за інших рівних умов у 2 – 2,5 рази міцності з'єднань із запресовуванням і на 10 – 15 % вище міцності з'єднань, отриманих у результаті нагрівання охоплюваної деталі. Під час охолодження виключаються викривлення та місцеві деформації деталей, зменшення твердості, окислення поверхонь, порушення гальванічних покриттів, структури та інших фізико-механічних властивостей. Крім того, охолодження вимагає значно меншого часу, ніж нагрівання. Однак даний метод можна використовувати у з'єднаннях із відносно невеликими натягами.

Складання запресовуванням можна здійснити механічним або гідравлічним методами. Під час механічного методу складання охопленої деталь запресовується в охоплювану деталь у поздовжньому напрямі за температурою 20 °С. Цей метод застосовується для невеликих натягів (до 0,1 %) і характеризується високою продуктивністю. При цьому конструкція достатньо проста і витримує великі навантаження, досягається гарне розташування деталей одна відносно одної. Однак метод має і характерні *недоліки*: складність процесу складання; неможливість використання антикорозійного покриття; пошкодження поверхонь, що з'єднуються; розкид зусиль запресовування.

Гідравлічний метод складання здійснюється шляхом нагнітання за передбаченими каналами у зону поверхонь, що з'єднуються, масла під тиском. Завдяки цьому, зусилля запресовування порівняно із механічним способом, зменшуються у 10 – 15 разів.

Пайкою називається процес отримання нерознімного з'єднання двох або декількох деталей із застосуванням присадки – припою (рис. 11.22).

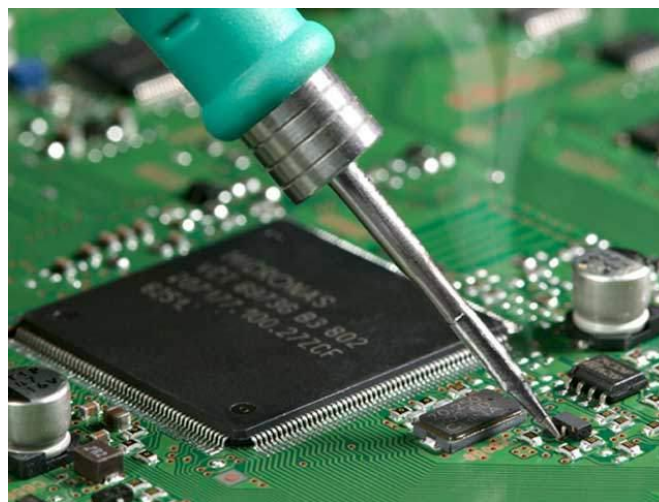


Рисунок 11.22 – Процес пайки

Під час нагрівання у зібраному вигляді до температури плавлення припою (м'якого або твердого) він заповнює зазори між деталями.

У паяних конструкціях застосовують різні метали і сплави: сталі, чавуни, мідь та її сплави, легкі сплави на основі титану, алюмінію, магнію, берилію та ін. Сучасні методи пайки забезпечують з'єднання конструкційних матеріалів із різними фізико-хімічними властивостями за умови збереження фактично незмінними вихідні властивості матеріалу.

Перевагами пайки є: відсутність деформації поверхонь деталей, висока точність, можливість розпаювання. *Недоліками пайки є:* складний процес підготовки підстав, повинен забезпечуватися мінімальний зазор.

Склеювання – спосіб отримання нерухомого нерознімного з'єднання за допомогою спеціальних речовин, здатних за певного фізичного стану скріплювати деталі завдяки прояву сил адгезії. Для такого способу не потрібен розігрів поверхонь.

Під кожен вид металу підбирається свій клей, який забезпечує щільне зчеплення. Для таких операцій деталі, які підлягають склеюванню, необхідно попередньо підготувати. Їх поверхні шліфують, обезжирюють, на них наносять спеціальне ґрунтування, після чого здійснюють операцію зі склеювання. Застосовувані склади клею відрізняються додатковими властивостями і адгезією до різних поверхонь.

Важливою перевагою склеювання є можливість отримання з'єднань із різнорідних матеріалів, уникнути внутрішнього напруження та деформацій, оскільки технологія не вимагає підвищених температур. Перевагами склеювання також є невисока вартість, відсутність ослаблення робочого перетину, можливість комбінованого використання із іншими видами з'єднань, герметичність стику, підвищення антикорозійних властивостей шва та стійкості до впливу води, хімії, температурних перепадів, простота технології нанесення. Суттєвим *недоліком склеювання є* – низька термостійкість та схильність до старіння.

Заклепувальні з'єднання

Заклепувальні з'єднання – одні із найдавніших способів з'єднання (рис. 11.11). Цей спосіб застосовують в основному для з'єднання листового металу і фасонних профілів. Технологічний отвір у поверхнях здійснюють свердлінням, куди потім вставляють заклепку.

Перевагами заклепувальних з'єднань є: простота технології, висока міцність, рухливість з'єднання, що запобігає утворенню тріщин,

можливість застосування до матеріалів, які не піддаються зварюванню, надійність.

Недоліками заклепувальних з'єднань є: дуже низька продуктивність клепання, великі витрати матеріалу, ослаблення деталі отвором, недостатня герметичність.

Клепання буває ручне і машинне, холодне і гаряче (для $d > 12$ – тільки гаряча). Зварні шви бувають міцні, щільні і міцнощільні, однорядні та багаторядні.

Заклепки бувають із напівкруглою головкою, круглою головкою, потайною і трапецеїдальною головками.

Головка формується за допомогою оправлення. Висота заклепки під головку дорівнює $X = 1,5 \cdot d$.

Заклепувальні з'єднання дуже широко застосовують у авіації.

Заклепка працює на зріз і зминання, іноді – на відрив головки. Методи розрахунків заклепувальних з'єднань на міцність наведено раніше у Роботі 5.

Зварні з'єднання

Зварюванням називається процес з'єднання деталей шляхом розплавлення кромки (рис. 11.23).



Рисунок 11.23 – Зварювання деталей

Зварювання дозволило замінити заклепувальні з'єднання. Зварювання буває електричне і газове, а електрозварювання – дугове і контактне.

Найбільш поширене електродугове зварювання. Залежно від ступеня автоматизації зварювальних процесів можна виділити три основні підвиди електродугового зварювання: автоматичне під флюсом (відрізняється високою продуктивністю і якістю, використовується у масовому виробництві), напівавтоматичне під флюсом (використовується для зварювання коротких переривчастих швів), ручне (здійснюється із меншою продуктивністю, якість шва залежить безпосередньо від досвіду зварника).

Контактне зварювання застосовують у масовому виробництві для зварювання тонколистоного металу.

Існують комбіновані методи зварювання, наприклад, зварювання тертям, ультразвуковий, вибуховий та холодний методи зварювання, зварювання стикове, мікрозварювання та ін.

Крім зварювання металів та їх сплавів в однорідних і різнорідних поєднаннях можливе також зварювання неметалічних матеріалів (скла, пластмас, кераміки тощо) як між собою, так і з металами. Зараз існує понад 60 різновидів зварювання, які класифікують за фізичними, технічними і технологічними ознаками.

Перевагами зварювання є: висока міцність і щільність з'єднання, висока продуктивність зварювання, невеликі витрати металу, можливість ремонту і реставрації деталей, невисока вартість робіт, отримання з'єднання герметичним і щільним, можливість застосування автоматизованих процесів та роботи із товстим профілем.

Недоліками зварювання є: складність обладнання та необхідність високої кваліфікації робітника, поява деформацій поверхні деталей під час нагрівання, низька надійність деталей в умовах роботи із вібраціями і ударними навантаженнями.

Зварні шви бувають стикові та валикові. Для отримання якісного шва необхідно відчистити деталі від масла, бруду, іржі, фарби і виконати оброблення кромки.

За товщиною зварюваних деталей до 6 мм шов зварюють без оброблення кромки (рис. 11.24,а).

За товщиною більше 6 мм шов зварюють із обробленням кромки:

- V-подібне – за товщиною до 12 мм (рис. 11.23,б);
- X-подібне – за товщиною до 20 мм (рис. 11.23,в);
- U-подібне – за товщиною до 50 мм (рис. 11.23,г).

Шов може бути одно- і багат шаровим.

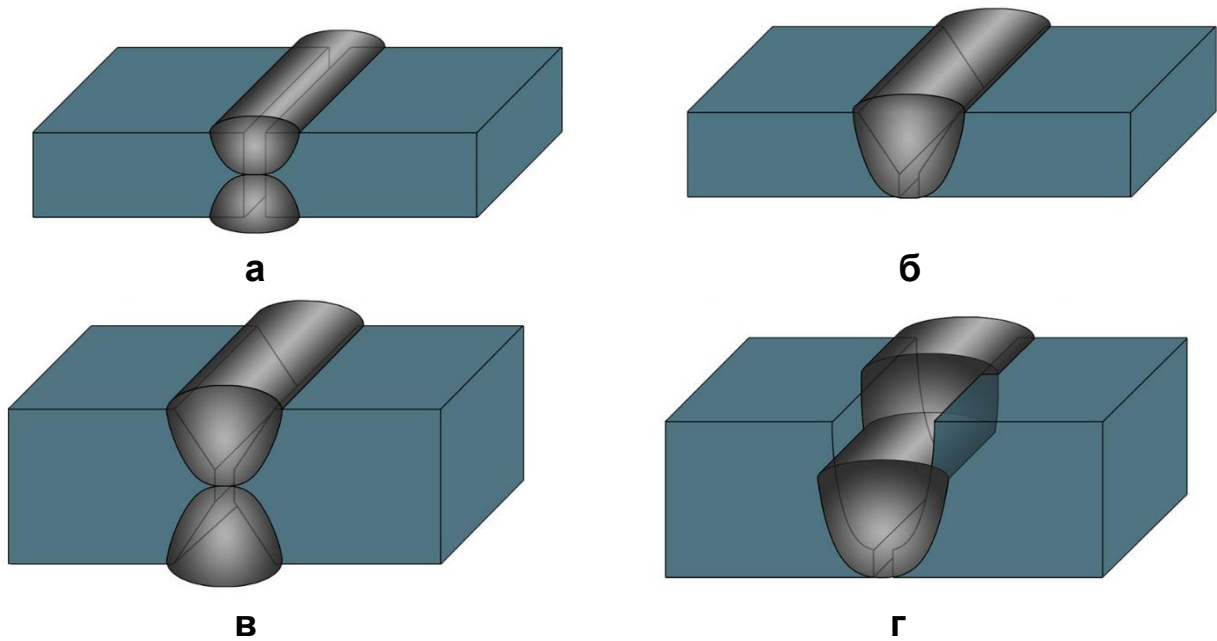


Рисунок 11.24 – Зварювальні з'єднання: без скосу кромки (а), V-подібний скіс кромки (б), X-подібний скіс кромки (в), криволінійний скіс кромки (г)

Основним критерієм працездатності швів зварних з'єднань є міцність на розтягання або стиск за перетином деталей, що з'єднуються, без урахування стовщення шва.

Умова міцності шва на розтягання:

$$\sigma'_p = \frac{F}{A} = \frac{F}{\delta \cdot l_{\text{ш}}} \leq [\sigma]'_p,$$

де F – розтягуюча сила;

δ – товщина шва (приймається рівною товщині деталі);

$l_{\text{ш}}$ – довжина шва;

σ'_p , $[\sigma]'_p$ – розрахункове і допустиме напруження на розтягання шва.

Здійснюють розрахунок міцності шва на зріз за умови $\delta = 0,7 \cdot k$:

$$\tau'_{зр} = \frac{F}{A} = \frac{F}{0,7 \cdot k \cdot l_{\text{ш}}} \leq [\tau]_{зр},$$

де $\tau'_{зр}$, $[\tau]_{зр}$ – розрахункове і допустиме напруження на зріз шва.

Приклади практичного застосування з'єднань

Різьбове, клейове, зварне з'єднання зустрічаються у будь-якій галузі. Наприклад, у будівельній, меблевій, у важкій промисловості та ін.

Так, *шпонкові та шліцьові з'єднання* широко використовують в електроінструментах, обладнанні, машинобудуванні. *Пресове з'єднання* використовують під час насадження зубчастого колеса на вал. *Пайку* часто застосовують під час роботи із електронними системами, де потрібна максимальна точність. *Заклепувальні з'єднання* застосовують для зшивання аркушів тонкого металу. Однак, за допомогою заклепок можна скріпити і достатньо великі швелери. Це лише незначний список застосування окремих варіантів кріплення. Слід зазначити, що із науково-технічним прогресом технології з'єднань деталей бурхливо розвиваються, а це значить, що будуть з'являтися нові види з'єднань деталей.

Сучасний світ наповнений агрегатами, машинами і механізмами. Від того, наскільки міцно закріплено деталі, залежить якість і термін служби вузлів. Також важливо, щоб з'єднання не вносило додаткових змін у конструкцію вузлів. Тому воно повинно відповідати технологічним нормам. Якщо їх дотримуватися, то кількість аварійних ситуацій на підприємствах скоротиться у декілька разів, а самі агрегати будуть працювати дуже довго.

Порядок виконання роботи

Отримати у викладача варіант свого завдання та виконати розрахунок параметрів заданої деталі обертання або параметрів з'єднання.

Звіт по роботі

Звіт складається із аналізу основних понять, конструкційних особливостей і методів розрахунку параметрів деталей обертання та з'єднань для проектування і виконання кінематичного та силового розрахунків різних механічних пристроїв; із описання методики розрахунку параметрів заданої деталі обертання або параметрів з'єднання та висновків із роботи.

Література [1, 2, 4, 6, 19].

Питання для самоконтролю

1. Вал призначений для:
 - а) передачі крутного моменту;
 - б) з'єднання деталей, які не обертаються;
 - в) для кріплення підшипників;
 - г) передачі вигинного моменту.

2. Обертальний момент на валу визначається формулою:
- а) $T = 1000 \cdot P / \omega$;
 - б) $T = 1000 \cdot P \cdot \omega$;
 - в) $T = 1000 \cdot P / n$;
 - г) $T = 1000 \cdot P \cdot n$.
3. Опорами для шипів і шийок служать:
- а) маточини;
 - б) шпонки;
 - в) муфти;
 - г) підшипники.
4. Вісь – це деталь:
- а) що сприймає роботу машини;
 - б) що забезпечує передачу обертального моменту;
 - в) що не забезпечує передачу обертального моменту;
 - г) що розподіляє момент між окремими споживачами.
5. Підшипник ковзання складається із:
- а) сепаратора;
 - б) втулки;
 - в) зовнішнього кільця;
 - г) внутрішнього кільця.
6. Підшипник кочення складається із:
- а) антифрикційного вкладиша;
 - б) втулки;
 - в) цапфи;
 - г) сепаратора.
7. Муфта це:
- а) деталь, яка призначена для підтримання деталей, які на ній знаходяться, та для передачі крутного моменту.
 - б) виріб, який служить опорою для валів і осей, які обертаються;
 - в) пристрій для з'єднання кінців валів;
 - г) зубчаста передача.
8. Механічні муфти призначені для:
- а) передачі крутного моменту із одного валу на інший;
 - б) з'єднання деталей машин;
 - в) перетворення обертального руху в поступальний рух;
 - г) зниження тертя у зубчастих передачах.
9. Втулкова муфта – це:

- а) пружна муфта;
 - б) жорстка муфта;
 - в) фрикційна муфта;
 - г) муфта Ольдгема.
10. Назвіть основні різновиди шпонок:
- а) ланцюгові;
 - б) сегментні;
 - в) зубчасті;
 - г) фрикційні.
11. Рознімні з'єднання деталей – це:
- а) пресові з'єднання;
 - б) зварювальні з'єднання;
 - в) шліцьові з'єднання;
 - г) клепані з'єднання.
12. До нерознімних з'єднань відносяться:
- а) різьбові;
 - б) шпонкові;
 - в) шліцьові;
 - г) зварні.
13. Шліцьові з'єднання – це:
- а) нерознімні з'єднання деталей;
 - б) рознімні з'єднання деталей;
 - в) пресові з'єднання деталей;
 - г) зварювальні з'єднання деталей.
14. Шпонкові з'єднання – це:
- а) нерознімні з'єднання;
 - б) рознімні з'єднання;
 - в) компенсуючі з'єднання;
 - г) шліцьові з'єднання.
15. Назвіть основні типи різьблень:
- а) ланцюгові;
 - б) метричні;
 - в) зубчасті;
 - г) фрикційні.

Робота 12. Параметри якості деталей машин та методи їх оцінювання, технологічне забезпечення виготовлення деталей машин. Загальні відомості щодо правил виконання конструкторської та технологічної документації

Мета роботи – вивчення закономірностей формування і умов технологічного забезпечення якості деталей машин та правил виконання конструкторської та технологічної документації

Загальні відомості

Якість машин та її показники

Від якості виготовлених машин залежить економічна ефективність їх використання. Під *якістю промислової продукції* розуміють сукупність властивостей, що визначають її придатність задовольняти певні потреби відповідно до її призначення.

Якість машин характеризується системою показників, що мають кількісні характеристики, які визначаються службовим призначенням виробу. Якість машин закладається під час проектування, забезпечується на заданому рівні технологією виготовлення і підтримується протягом певного часу в експлуатації.

Показники якості машин можна розділити на три групи.

1. *Технічний рівень*, який визначає ступінь досконалості машини: потужність, ККД, продуктивність, економічність, ступінь автоматизації, точність роботи та ін. Оцінюється в абсолютних і відносних одиницях. Технічний рівень залежить не тільки від конструкції, але й від технології виготовлення машини.

Економічні показники – капітальні вкладення у виробництво та експлуатацію машини, собівартість її виготовлення та виробленої нею одиниці продукції.

2. *Виробничо-технологічні показники*, що характеризують технологічність конструкції машини (використання матеріалів, трудомісткість та ін.).

Технологічні показники характеризують найменші витрати на обслуговування, ремонт і виробництво виробу.

Технологічність – сукупність властивостей конструкції, які забезпечують її виготовлення, ремонт і технічне обслуговування за умови найменших витрат порівняно з аналогічними конструкціями, за однакових умов виготовлення, експлуатації та порівняльних показників якості.

3. Експлуатаційні показники:

- функціональність – це здатність реалізувати показники призначення;
- надійність – комплексна властивість, що включає безвідмовність, довговічність, ремонтпридатність, стабільність властивостей;
- естетичність (дизайн, товарний вигляд виробу);
- екологічність (відображення взаємодії системи "людина – машина – середовище");
- безпечність;
- транспортабельність (пристосованість до транспортування);
- патентоспроможність (правова забезпеченість авторства).

Ергономічні показники характеризують гігієнічні, фізіологічні, психологічні та організаційні умови продуктивної праці при досягненні високих технічних та якісних показників її результатів (найбільш важливі: зручне розташування органів управління машини, простота експлуатації, рівень шуму й вібрацій).

Якість продукції, що випускається, забезпечується дослідженнями ринку, оптимізацією проектування, передовою технологією та її суворим дотриманням, застосуванням комп'ютерних інтегрованих технологій, автоматизацією і механізацією виробництва, якістю сировини та матеріалів, надійністю, технічною естетикою, технологічністю й ремонтпридатністю, техніко-економічною ефективністю, патентною чистотою, якістю обладнання та технологічної оснастки, технічною підготовкою виробництва, науковою організацією праці, метрологічним забезпеченням та ін. Застосування ефективної технології припускає оптимальні витрати праці, матеріалів, засобів, часу під час технологічної підготовки виробництва, у процесі виготовлення, експлуатації та ремонту, включаючи підготовку виробу до функціонування, контроль його працездатності, профілактичне обслуговування.

Якість деталей машин

Якість виробу (машини) забезпечується відповідними вимогами до якості деталей, із яких складається виріб. Під *якістю деталі* мають

на увазі точність розмірів, відхилення від форми, взаємне розташування, стан оброблених поверхонь.

Під *якістю поверхні деталей* розуміють геометричний і фізико-хімічний стан поверхневого шару як результат дій на нього різних силових полів (шляхом послідовного застосування прийомів, способів, методів обробки).

Важливою складовою якості є *точність* – ступінь відповідності виготовлених виробів встановленим зразкам (відповідність вимогам креслення). Точність – поняття комплексне. Точність забезпечується на всіх етапах технологічного процесу. Встановлення необхідної точності й технологічне забезпечення її у виробничих умовах є складним завданням конструктора виробу і технолога.

Розрізняють досяжну та економічну точність.

Досяжною точністю називається точність, яку можна досягти даним методом висококваліфікований робочий на високоточному обладнанні високоякісним інструментом без обмеження часу обробки.

Під *економічною точністю* розуміють точність, яка досягається при мінімальній собівартості на звичайному обладнанні, робочим відповідної кваліфікації в нормальних виробничих умовах.

Із підвищенням точності підвищується собівартість. Більш висока точність досягається застосуванням трудомістких оздоблювальних методів обробки, виконуваних висококваліфікованими робітниками, складністю технологічних процесів, коштовністю унікального обладнання і оснастки. Так, середня економічна точність чистового точіння – IT9 ... IT10, чистового шліфування – IT7 ... IT8.

Під *точністю форми поверхні* розуміють ступінь її відповідності геометрично правильній формі (площинність, лінійність, циліндричність, круглість).

До похибок взаємного розташування поверхонь відносять: неспіввісність, несиметричність, неперпендикулярність, биття (торцеве, радіальне), непаралельність.

Граничні відхилення (допуски) форми поверхні та взаємного розташування поверхонь указуються умовними знаками на робочих кресленнях або описуються у тексті технічних умов.

Якість оброблених поверхонь деталей характеризується хвилястістю, шорсткістю, станом поверхневого шару (його зміцненням, залишковими напруженнями).

Хвилястість – це сукупність виступів і западин, що регулярно повторюються, із відношенням кроку L до висоти H більше 40.

Шорсткість – сукупність нерівностей із малим кроком ($L/H < 40$), що утворюють рельєф поверхонь.

Встановлюють параметри шорсткості поверхні: R_z , R_a , R_{max} , S_m , S , t_p (рис. 12.1):

R_a – середнє арифметичне відхилення профілю шорсткості:

$$R_a = \frac{\sum_{i=1}^n (y_i)}{N} \quad \text{або} \quad R_a = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\alpha} (y_i) dx;$$

R_z – середня висота нерівностей за 10-ма точками:

$$R_z = \frac{1}{5} \sum_{i=1}^5 h_i; \max;$$

S_m – середній крок нерівності вздовж середньої лінії:

$$S_m = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_n;$$

S – середній крок нерівності за вершинами виступів:

$$S = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n S_i;$$

t_p – відносна опорна довжина профілю;

R_{max} – максимальна висота нерівностей (профілю) – відстань між лініями виступів і западин.

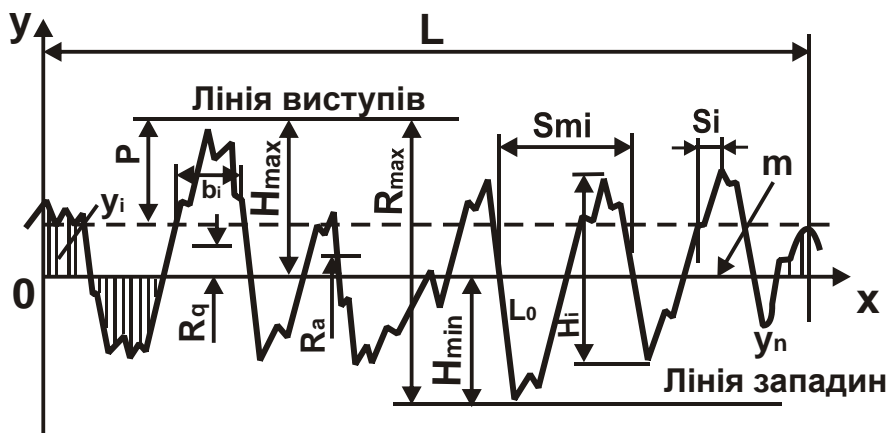


Рисунок 12.1 – Профілограма поверхні для визначення параметрів шорсткості

Параметри шорсткості призначаються конструктором, виходячи із експлуатаційних вимог до деталі. Існують нормативи на шорсткість залежно від точності відповідних розмірів поверхонь та від призначення. На кресленнях шорсткість позначається знаками і параметрами (найчастіше R_z і R_a).

Оцінювання параметрів шорсткості може здійснюватися прямим або непрямим методами.

Непрямий метод визначення шорсткості поверхні полягає у візуальному порівнянні шорсткості поверхні деталі із поверхнею еталонного атестованого зразка.

Методи прямого контролю реалізуються щуповими приладами (наприклад, профілографом-профілометром, рис. 12.2) або оптичними приладами.



Рисунок 12.2 – Профілограф-профілометр

Важливі експлуатаційні характеристики деталей визначаються якістю поверхневого шару. Так, значна шорсткість поверхонь, що труться, призводить до інтенсивного початкового зношування, збільшення зазору в парі, що треться, підвищеного тепловиділення, видалення окисної плівки. З іншого боку, зменшення висоти нерівностей нижче оптимальних значень призводить до різкого зношування через молекулярне зчеплення і видавлювання мастила. У більшості випадків поверхневе зміцнення (наклеп) сприяє підвищенню зносостійкості, як в умовах тертя із мастилом, так і в умовах сухого тертя. Поверхневі залишкові напруження в основному знижують корозійну стійкість, але, разом із тим, залишкове напруження стиску підвищує втомну міцність.

Крім шорсткості поверхні деталі, на її якість суттєво впливає стан поверхневого шару. Під дією сили різання відбуваються пластичні деформації, які викликають зміцнення (наклеп). Оцінювання зміцнення поверхневого шару можна вимірами мікротвердості та визначенням її інтенсивності за глибиною.

Інтенсивність мікротвердості визначається виразом:

$$h = \frac{H - H_0}{H_0} \cdot 100 \%,$$

де H_0 – твердість вихідного матеріалу, H/m^2 ;

H – твердість після наклепу, H/m^2 .

Твердість – це властивість металу чинити опір під час вдавлювання у нього більш твердого тіла – спеціального наконечника (індентора). Існує три основні статичні методи випробувань (вимірювань) твердості матеріалу за іменами їх винахідників: Брінелля, Роквелла, Віккерса.

Метод Брінелля: у поверхню металу вдавлюють кульку діаметром 2,5 ... 10 мм в умовах статичного навантаження (позначають HB).

Метод Роквелла: у поверхню металу вдавлюють кульку діаметром 1,59 мм або алмазний конус із кутом у вершині 120° (позначають HRC або HRA залежно від навантаження під час випробування алмазним конусом і HRB під час вдавлювання сталеві кульки).

Метод Віккерса: у поверхню металу впроваджують алмазну чотиригранну піраміду із кутом у вершині 136° (позначають HV, вимірюють твердість загартованих сталей, тонких покриттів та ін.).

Для вивчення структури металів застосовують неруйнівні та руйнівні методи (макро- і мікроаналіз, рентгенівський, спектральний, термічний, рентгенівська магнітна і ультразвукова дефектоскопія).

Макроаналіз – інструмент лупа (збільшувальне скло).

Мікроаналіз – інструмент мікроскопи (вивчають мікроструктуру).

Рентгенівський аналіз (вивчають структуру металів).

Магнітний метод (вивчають дефекти у магнітних металах).

Із метою підвищення зносостійкості поверхонь деталей, що працюють в умовах знакозмінних навантажень, у машинобудуванні застосовують технологічні методи поверхневого зміцнення (вигладжування, обкатку, обробку дробом).

У процесі отримання заготовок в їх поверхневому шарі утворюються залишкові внутрішні напруження.

Залишкове напруження – це напруження, яке існує у поверхневому шарі заготовки без додаткової дії зовнішніх навантажень. У заготовках воно урівноважується у повному обсязі. Для виключення деформації заготовок у процесі та після механічної обробки застосовують спеціальні методи, наприклад, старіння (штучне, природне).

Підводячи підсумки проведеного аналізу параметрів якості поверхонь деталей машин, можна зазначити, що в узагальненому поданні *якість поверхонь деталей машин* – це геометричний та фізико-хімічний стан поверхневого шару в результаті дій на нього різних силових полів (шляхом послідовного застосування прийомів, способів, методів обробки). У табл. 12.1 наведено показники якості оброблених поверхонь.

Таким чином, якість поверхні деталі характеризується, в основному, відхиленням форми та розташування поверхонь, точністю їх розмірів, шорсткістю і фізико-хімічним станом поверхневого шару.

Щоб виріб відповідав своєму цільовому призначенню, його розміри необхідно виконувати із достатньою точністю. Точність розмірів регламентується єдиною системою допусків і посадок (ЕСДП).

Розміром називають числове значення лінійної величини (діаметру, довжини тощо) у вибраних одиницях вимірювання. На машинобудівних кресленнях розміри проставляються у міліметрах без указівки розмірності.

Розрізняють номінальний, дійсний і граничний розміри.

Номінальний розмір – це розмір, відносно якого встановлюються граничні розміри і який служить також початком відліку відхилень. Номінальні розміри, що визначають величину деталі, вибирають із числа нормальних лінійних розмірів згідно стандартів на підставі розрахунків на міцність, жорсткість та інших міркувань.

Номінальний розмір – це розмір, який служить відліком граничних відхилень (D, L – отвір; d, l – вал).

Розміри реально існуючих деталей можна визначити лише шляхом вимірювання. Розмір, встановлений вимірюванням із допустимою погрішністю, називається *дійсним*.

Граничні розміри: найбільший – D_{\max}, d_{\max} ; найменший – D_{\min}, d_{\min} . Граничні відхилення (ES, es – верхні; EI, ei – нижні) можуть бути негативними, позитивними або рівними нулю.

Таблиця 12.1 – Показники якості деталей сучасних машин

Група параметрів	Підгрупа параметрів	Найменування параметрів
Точність обробки поверхні	Точність форми	Відхилення від круглості, циліндричності, прямолінійності, площинності
	Точність взаємного розташування	Відхилення від паралельності, співвісності. Радіальне (торцеве) биття
	Точність лінійних і кутових розмірів	Квалітет
Нерівності поверхні	Шорсткість	Висота нерівностей профілю за 10 точкам. Середнє арифметичне відхилення профілю. Найбільша висота нерівностей профілю. Середній крок нерівностей за вершинами локальних виступів. Середній крок нерівностей. Відносна опорна довжина профілю
	Хвилястість	Висота хвилястості. Середній крок хвилястості
		Напрямок нерівності. Кут між напрямом нерівностей і напрямом дії зовнішніх навантажень.
Фізичний стан матеріалу	Структура	Параметр грат. Щільність дислокацій. Концентрація вакансій. Рівновісність структури. Однорідність структури
	Субструктура	Розміри фрагментів, блоків. Кут розорієнтування фрагментів, розорієнтування блоків
	Деформаційне зміцнення (наклеп)	Ступінь деформації зерен, деформації шарів, наклепу. Глибина наклепу. Градієнт наклепу.
Напружений стан матеріалу (технологічне залишкове напруження)	Напруження поверхневого шару	Знак і характер епюри напруження I роду. Мікронапруження (напруження II роду). Субмікронапруження (напруження III роду)
	Об'ємне напруження	Найбільша величина макронапруження. Ступінь неоднорідності макронапруження.

Допуск – це різниця між найбільшими та найменшими граничними розмірами або модуль різниці граничних відхилень:

$$T_d = d_{\max} - d_{\min} = [es - ei].$$

Допуск – завжди позитивна величина.

Поле допуску називають поле, обмежене верхнім і нижнім граничними відхиленнями, яке визначається величиною допуску та його положенням щодо номінального розміру. У графічному зображенні поля допуску проводять нульову лінію, яка визначає номінальний розмір (рис. 12.3).

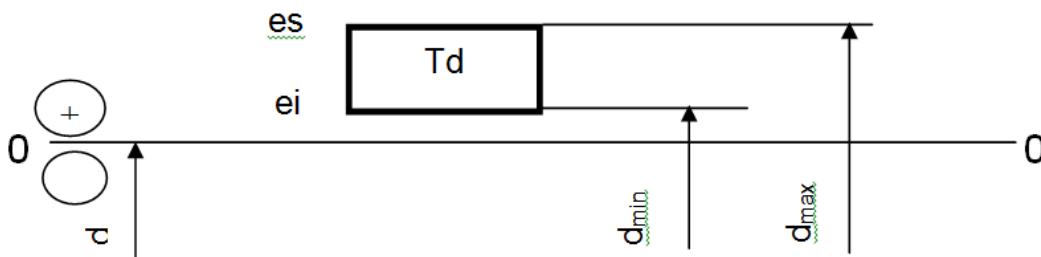


Рисунок 12.3 – Схема розташування поля допуску валу

Граничне відхилення (верхнє або нижнє), що розташовано ближче до нульової лінії, називають *основним* (згідно ЕСДП). Основні відхилення визначають положення поля допуску відносно нульової лінії та позначаються буквами латинського алфавіту: великими – для отворів, прописними – для валів. Літерні позначення основних відхилень утворюють ряди, їх 27 для валів і 27 для отворів.

Для нормування необхідних рівнів точності ЕСДП передбачає квалітети (0,1; 0,1 ... 17). Мірою збільшення порядкового номера квалітету допуск збільшується, а точність зменшується.

Квалітет – сукупність допусків, які характеризують сталість відносної точності, тобто допуски у межах квалітету залежні тільки від номінальних розмірів, а для кожного номінального розміру допуск залежить від квалітету.

Таким чином, величина допуску залежить від номінального розміру і квалітету.

Згідно вимогам ЕСДП, на кресленнях всі розміри указуються із граничними відхиленнями.

Умовне позначення поля допуску складається із позначення основного відхилення та квалітету: вали – h6, d11, отвори – H6, D8.

Деталі, які складаються, містять поверхні, що з'єднуються і не з'єднуються (вільні). Дві або кілька рухомо- або нерухомо з'єднаних деталей називаються *деталлями, що з'єднуються*, а поверхні, якими з'єднуються деталі – *поверхнями, що з'єднуються*. Розрізняють поверхні, що з'єднуються, на поверхні, що охоплюються, та поверхні, що охоплюють.

Вал – це термін, який застосовують для зовнішніх охоплених поверхонь. *Основний вал* – це вал, у якого верхнє граничне відхилення $e_s = 0$ (позначається h).

Отвір – це термін, який застосовують для внутрішніх поверхонь, що охоплюють. *Основний отвір* – це отвір, у якого нижнє граничне відхилення $e_i = 0$ (позначається H).

Поля допусків основних валів і отворів розташовують "у тіло".

Посадкою називається характер з'єднання деталей, який визначається *зазором* або *натягом*. Розрізняють зазори та натяги: максимальні, мінімальні та середні. Наприклад,

максимальний зазор:

$$S_{\max} = D_{\max} - d_{\min} = ES - ei;$$

мінімальний зазор:

$$S_{\min} = D_{\min} - d_{\max} = EI - es;$$

середній зазор:

$$S_{\text{ср}} = \frac{S_{\max} + S_{\min}}{2}.$$

Посадка із зазором – це така посадка, коли під час сполучення двох деталей утворюється зазор.

Посадка із натягом – це така посадка, за якою забезпечується натяг у з'єднанні.

Перехідна посадка – це така посадка, за якою із партії деталей, що сполучуються, можуть утворюватися як зазори, так і натяги.

Для всіх типів посадок допуск посадки дорівнює сумі допусків отвору і валу:

$$TS = S_{\max} - S_{\min}; \quad TN = N_{\max} - N_{\min};$$

$$TS(TN) = TD + Td.$$

Посадкою у системі отвору називається така посадка, у якій різні зазори та натяги забезпечуються за рахунок різних валів із основним отвором. На рис. 12.4 показано приклад схеми полів допусків для таких посадок.

Посадка у системі валу – це посадка, у якій різні зазори і натяги отримують з'єднання різних отворів із основним валом. Перевага у машинобудуванні віддається посадкам у системі отвору, оскільки процес отримання отворів більш трудомісткий.

Умовне позначення посадки складається із позначення полів допусків отвору і валу, які записуються у вигляді дроби: у чисельнику – для отвору, у знаменнику – для валу, наприклад: $40 \frac{H7}{g6}$ – посадка у системі отвору; $40 \frac{E8}{h7}$ – посадка у системі валу.

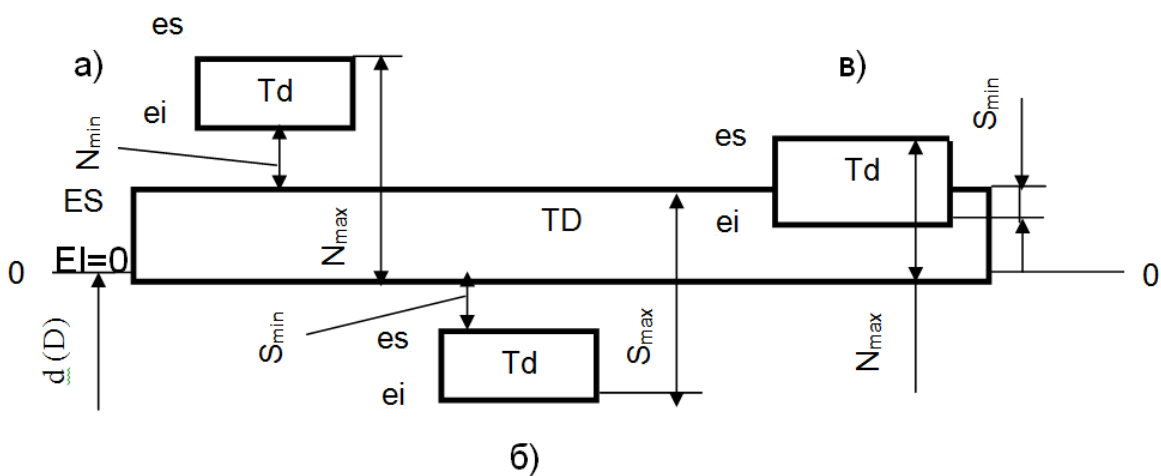


Рисунок 12.4 – Схема полів допусків посадок у системі отвору: із натягом (а); із зазором (б); перехідна (в)

Граничні калібри для контролювання гладких з'єднань

Під час виготовлення деталей їх справжні розміри із різних причин можуть виходити за межі поля допуску. Придатність деталі за заданим розміром встановлюють або шляхом вимірювання, або шляхом контролю зазначеного розміру.

Вимірювання (визначення дійсного розміру) виконують в умовах одиничного або дрібносерійного виробництва за допомогою універсальних вимірювальних інструментів (штангенциркуль, штангенглибинномір) та мікрометричних інструментів. Контроль розміру, що перевіряється, здійснюється із метою визначення його придатності або непридатності без встановлення дійсного розміру у масовому і великосерійному виробництві. Контроль деталей із точністю від IT6 ... IT17 здійснюється граничними калібрами.

Калібр – це безшкальний вимірювальний інструмент, призначений для контролю розмірів, форми, взаємного розташування поверхонь деталей. Оскільки розмір поверхні обмежено двома граничними розмірами, наприклад, для отвору (D_{max} і D_{min}), то для контролю потрібно мати два калібри: один із яких контролює розмір найбільшого граничного розміру, а інший – розмір найменшого граничного розміру. Тому такі калібри називають *граничними*.

Прохідний розмір – той із двох граничних розмірів, який відповідає більшій кількості матеріалу у виробі, тобто для вала – d_{max} , для отвору – D_{min} . Прохідні граничні розміри контролюються прохідними (ПР) калібрами. Для контролю отворів у виробках застосовують гладкі калібри-пробки, для контролю валів – калібри-скоби (рідше – кільця).

Виготовлення деталей методами обробки металів різанням

Для виготовлення деталі із заготовки застосовують методи обробки металів різанням, які здійснюються шляхом механічного зрізання із поверхонь заготовки ріжучим інструментом матеріалу технологічного припуску у вигляді стружки. У результаті забезпечується необхідна якість деталі, що визначає її задану конфігурацію, види поверхні, задані розміри, точність розмірів, взаємне розташування і шорсткість поверхонь, міцність матеріалу. Методи обробки металів різанням мають малу енергоємність і високу продуктивність, тому вони отримали широке застосування у промисловості під час розмірної обробки деталей.

Заготовками для виготовлення деталей є прокат, виливки, поковки, штампування та ін. Після зняття припуску на металорізальних верстатах оброблювана деталь набуває форму й розміри, відповідні робочим кресленням. Для зменшення трудомісткості та собівартості виготовлення деталі, а також заради економії металу, розмір припуску повинен бути мінімальним, але в той же час достатнім для отримання високої якості деталі та із необхідною шорсткістю поверхні.

У сучасному машинобудуванні є тенденція знижувати обсяг обробки металів різанням шляхом підвищення точності вихідних заготовок.

Залежно від характеру виконуваних робіт і виду ріжучого інструменту розрізняють такі методи обробки металів різанням: *точіння, фрезерування, свердління, зенкерування, розвертання, стругання, довбання, шліфування, протягання та ін.* (рис. 12.5).

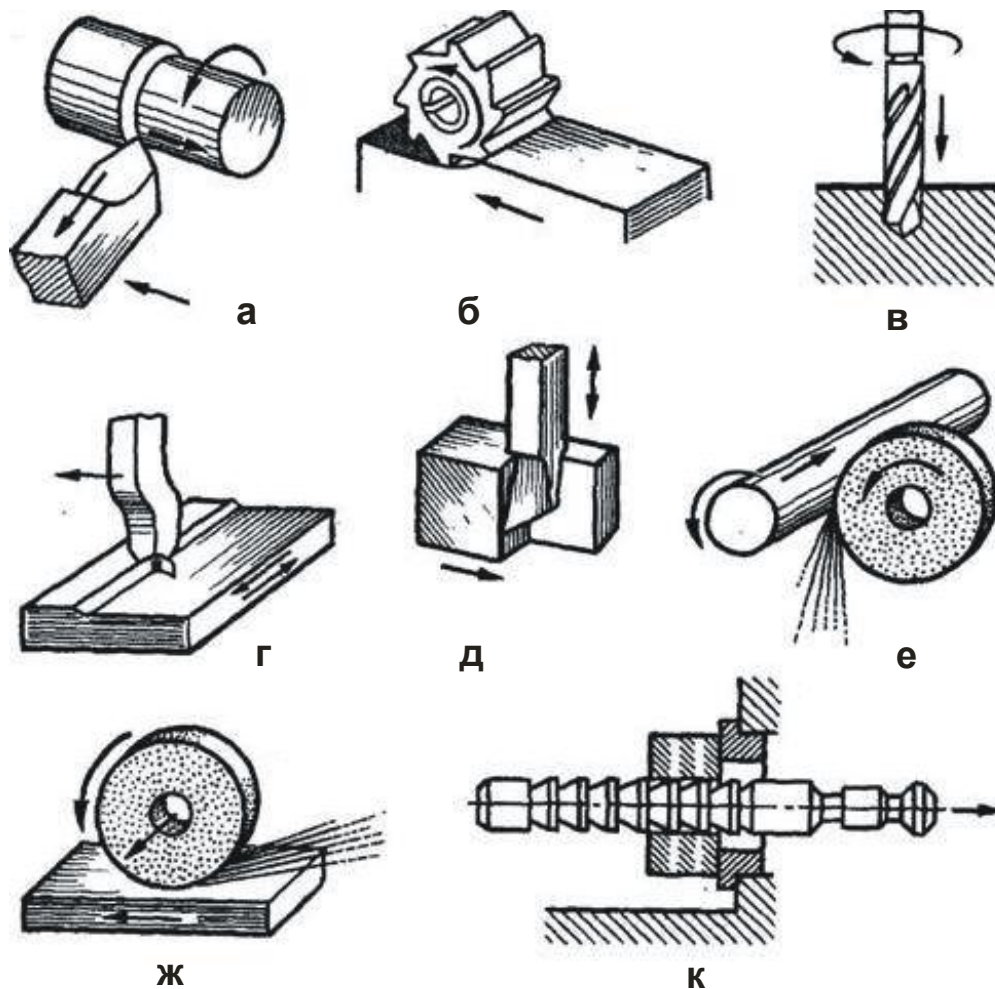


Рисунок 12.5 – Методи обробки металів різанням: а – точіння; б – фрезерування; в – свердління (зенкерування та розвертання); г – стругання; д – довбання; е – кругле зовнішнє шліфування; ж – плоске шліфування; к – протягування

Основними методами лезової обробки є точіння, свердління, фрезерування, стругання та протягання. До абразивної обробки відносяться методи шліфування, хонінгування і суперфініш. У основу класифікації методів обробки металів різанням закладено тип ріжучого інструменту і кінематику рухів. Так, точіння здійснюють токарними різцями, свердління – свердлами, фрезерування – фрезами, стругання – стругальними різцями, протягування – протяжками, шліфування – шліфувальними кругами, хонінгування – хонами, суперфініш – абразивними брусками тощо.

Обробка включає два рухи: головний – рух різання і допоміжний – рух подачі. Головний рух забезпечує знімання металу, а допоміжний –

подачу у зону обробки наступної необробленої ділянки заготовки. Ці рухи здійснюються шляхом переміщення заготовки або інструменту. Під час точіння, свердління, фрезерування та шліфування головний рух і рух подачі здійснюються одночасно, а під час стругання та хонінгування рух подачі здійснюється після головного руху.

Точіння призначене для обробки тіл обертання із метою отримання циліндричних, конічних, торцевих поверхонь, обробки гвинтових і спіральних поверхонь, свердління осьового отвору, нарізування різьблення. Точіння здійснюють із застосуванням однолезового інструменту – різця – на верстатах токарної групи. Під час точіння (рис. 12.5,а) заготовці надається обертальний рух (головний рух), а ріжучому інструменту (різцю) – повільне поступальне переміщення у поздовжньому або поперечному напрямках (рух подачі).

Фрезерування призначене для отримання фасонних поверхонь, площин, пазів, шліців, нарізування зубчастих коліс. Обробка виконується циліндричними і торцевими фрезами. Фрезерування – високопродуктивний і поширений процес обробки матеріалів різанням, що здійснюється на фрезерних верстатах. Головний (обертальний) рух у процесі фрезерування здійснює фреза, а рух подачі у поздовжньому напрямі – заготовка (рис. 12.5,б).

Свердління призначене для отримання глухих і наскрізних отворів, нарізування внутрішнього різьблення. Процес свердління здійснюється осьовим, як правило, дволезовим інструментом – свердлом, яке здійснює обертальний рух (головний рух) різання та осьове переміщення подачі. Процес свердління виконується на свердлильних верстатах (рис. 12.5,в).

Для остаточної обробки отворів також широко застосовують методи *зенкерування і розвертання*, які здійснюють осьовими багатолезовими інструментами – зенкером і розверткою.

Стругання призначене для обробки площин або лінійчатих поверхонь значної довжини та площі, отримання пазів, поздовжніх каналів. Для обробки використовують вигнуті стругальні різці, які конструктивно відрізняються від різців, які застосовують під час точіння. Головний рух (прямолінійний зворотно-поступальний) здійснює різець, а рух подачі (прямолінійний, перпендикулярний головному руху, переривчастий) здійснює заготовка. Процес стругання здійснюється на стругальних верстатах (рис. 12.5,г).

Довбання – спосіб обробки різцем площин або фасонних поверхонь. Головний рух (прямолінійний зворотно-поступальний) здійснює різець, а рух подачі (прямолінійний, перпендикулярний головному руху, переривчастий) – заготовка. Процес довбання здійснюють на довбальних верстатах (рис. 12.5,д).

Шліфування – процес чистової та оздоблювальної обробки деталей машин та інструментів шляхом зняття із їх поверхні тонкого шару металу шліфувальним кругом, на поверхні якого розташовано абразивні зерна. Шліфування призначене для фінішної обробки, яка забезпечує необхідну точність розміру і низьку шорсткість (високу чистоту) оброблюваної поверхні.

Процес різання здійснюється абразивними інструментами – шліфувальними кругами. Шліфувальний круг є пористе тіло, що складається із великої кількості абразивних зерен, скріплених між собою зв'язкою. Між зернами круга та зв'язкою розташовано пори. Матеріали високої твердості, із яких утворено зерна шліфувального круга, називають абразивними матеріалами.

Головний рух під час шліфування – обертальний – здійснюється шліфувальним кругом. Під час круглого шліфування (рис. 112.5,е) обертається одночасно і заготовка. Під час плоского шліфування продовжня подача здійснюється, як правило, заготовкою, а поперечна подача – шліфувальним кругом або заготовкою (рис. 12.5,ж).

Процес шліфування полягає у тому, що шліфувальний круг, обертаючись навколо своєї вісі, знімає тонкий шар металу (стружку) вершинами абразивних зерен, розташованими на різучих поверхнях шліфувального круга (периферії круга). Кількість абразивних зерен, розташованих на периферії круга, дуже велика; у кругів середніх розмірів вона досягає десятків і сотень тисяч штук. Таким чином, під час шліфування стружка знімається величезною кількістю безладно розташованих різучих зерен неправильної форми, що призводить до дуже сильного подрібнення стружки та великої витрати енергії.

Протягування призначене для механічної обробки отворів різної геометричної конфігурації, а також площин на протяжних станах багатрядним багатолезовим інструментом – протяжкою. При цьому протяжка, на відміну від свердла під час свердління, не обертається, що дозволяє отримувати отвори некруглої форми. Протягування – процес різання, продуктивність якого у кілька разів більше продуктивності про-

цесу стругання і навіть фрезерування. Головний рух протяжки – прямолінійний та рідше обертальний (рис. 12.5,к).

У даний час з'явилися нові технології обробки металів різанням. Якщо раніше домінували методи холодної обробки металів різанням, то зараз все ширше використовують методи хімічної та електрохімічної обробки, що дозволяє отримувати деталі високої точності розмірів та якості поверхні. До них слід віднести такі методи: електрохімічний, анодно-механічний, електроконтактний, електроімпульсний, ультразвуковий, плазмово-механічний, який є одним із нових високоефективних методів обдирання поковок вагою до 50 т й полягає в обробці різанням матеріалів, попередньо оброблених плазмовою дугою в активних середовищах.

Ефективність застосування сучасного металообробного обладнання та інструментів на підприємствах

В останні роки на багатьох промислових підприємствах України здійснюється модернізація виробництва. На зміну застарілому металообробному обладнанню приходять нові високооборотні верстати із числовим програмним управлінням (ЧПУ) типу "обробний центр", що дозволяє багаторазово збільшити продуктивність праці за умов забезпечення високоякісного виготовлення продукції. Це відкриває нові технологічні можливості виготовлення конкурентоспроможної машинобудівної продукції та виходу на світові ринки. Особливо це відноситься до таких наукомістких галузей промисловості як літакобудування, енергетичне і транспортне машинобудування, а також інших галузей, де використовуються останні досягнення науки і техніки.

Характерною особливістю машинобудівної продукції, що випускається, є її високий технічний рівень і складність виготовлення. Це пов'язано із високими вимогами до точності та якості її виготовлення, особливо складнопрофільних деталей, що входять, наприклад, до складу виробів гідроапаратури, оскільки вони повинні забезпечувати задану гідроциліність і витримувати високі тиски в системах, здійснювати впорскування порції рідини за час, що обчислюється в сотих і тисячних частках секунди. У значній мірі це стосується прецизійних деталей пар тертя, які працюють в умовах інтенсивного тертя та зношування. У зв'язку з цим потрібно забезпечити високу точність розмірів, форми і взаємного розташування поверхонь деталей (1 ... 10 мкм), шорсткість поверх-

ні на рівні $R_a = 0,04 \dots 0,2$ мкм. При цьому на оброблених поверхнях не повинно бути припікань, мікротріщин, відколів та інших температурних дефектів. Необхідно виключити глибокі структурні перетворення у поверхневих шарах оброблюваної деталі, викликані температурним чинником, оскільки це може привести до прихованих дефектів обробки і передчасного виходу із ладу деталі. Необхідно також під час обробки домогтися суттєвого зменшення теплової напруженості процесу, щоб виключити появу небажаних температурних деформацій тонкостінних оброблюваних деталей, які широко застосовують у гідроапаратурі. При цьому надзвичайно важливо домогтися максимально можливої продуктивності праці та знизити собівартість обробки до економічно прийнятого рівня.

Однак, як показує виробничий досвід, виконати зазначені вимоги достатньо складно, тому що деталі виготовляються із матеріалів із високими фізико-механічними властивостями (високоміцні сталі та сплави, високотверді крихкі магнітні сплави, пластичні кольорові метали та ін.) і їх обробка пов'язана з утворенням різноманітних похибок обробки, температурних дефектів і окремих рисок-подряпин на оброблюваних поверхнях. Для їх усунення технологічними процесами передбачено виконання великої кількості додаткових трудомістких операцій доведення, полірування та ручної обробки, що значно підвищує собівартість і, відповідно, знижує ефективність виготовлення деталей. Тому вдосконалення технологій їх обробки на основі критеріїв максимальної продуктивності та найменшої собівартості обробки є актуальним завданням, спрямованим на створення конкурентоспроможної машинобудівної продукції.

Для підвищення ефективності механічної обробки відповідальних деталей гідравлічних систем, виготовлених із матеріалів із підвищеними фізико-механічними властивостями, як зазначено раніше, широко застосовують сучасні високообертальні металорізальні верстати із ЧПУ типу "обробний центр" і ріжучі лезові твердосплавні та керамічні інструменти зі зносостійкими покриттями (рис. 12.6 – рис. 12.9). У результаті на ряді провідних машинобудівних підприємств завдяки інвестиційній діяльності експлуатується від 10 до 100 одиниць та більше сучасного високоточного металообробного обладнання. Це дозволило перевести виготовлення найбільш відповідальних деталей і вузлів машин на нові технології із застосуванням високопродуктивних прогреси-

вних ріжучих інструментів. Перспективними у цьому напрямі є високошвидкісні методи точіння (розточування) і фрезерування, які дозволяють суттєво зменшити силову й теплову напруженості процесу різання та підвищити показники точності та якості обробки.



Рисунок 12.6 – Високотужний токарний обробний центр PUMA 4100B

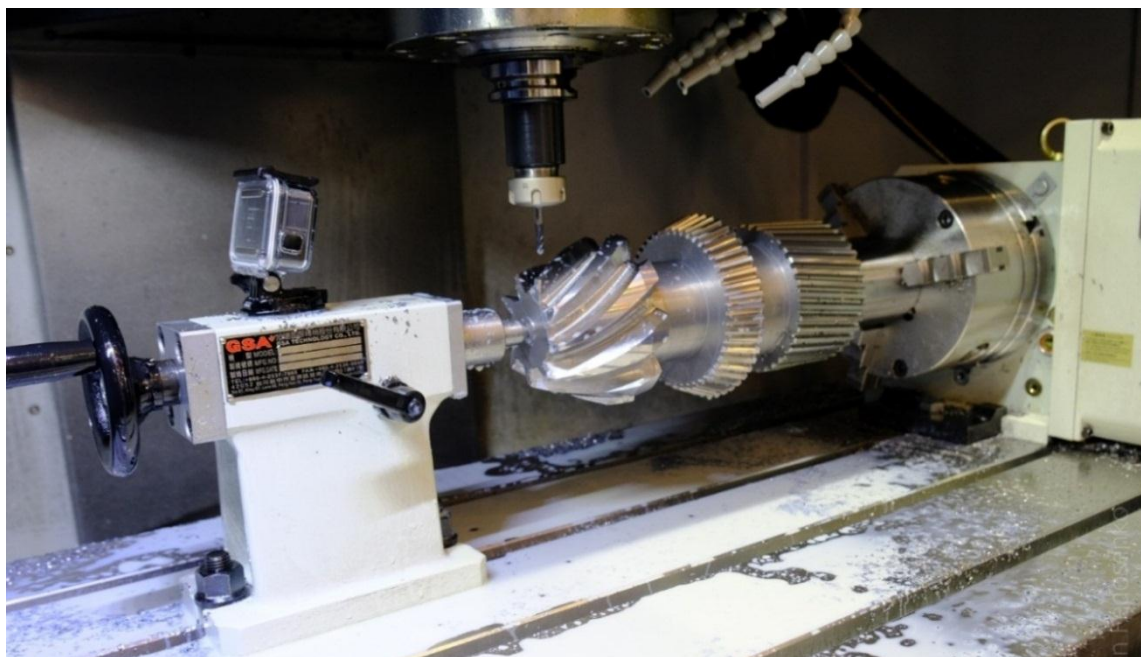


Рисунок 12.7 – Високоєфективне оброблення деталі "вал зубчастий"

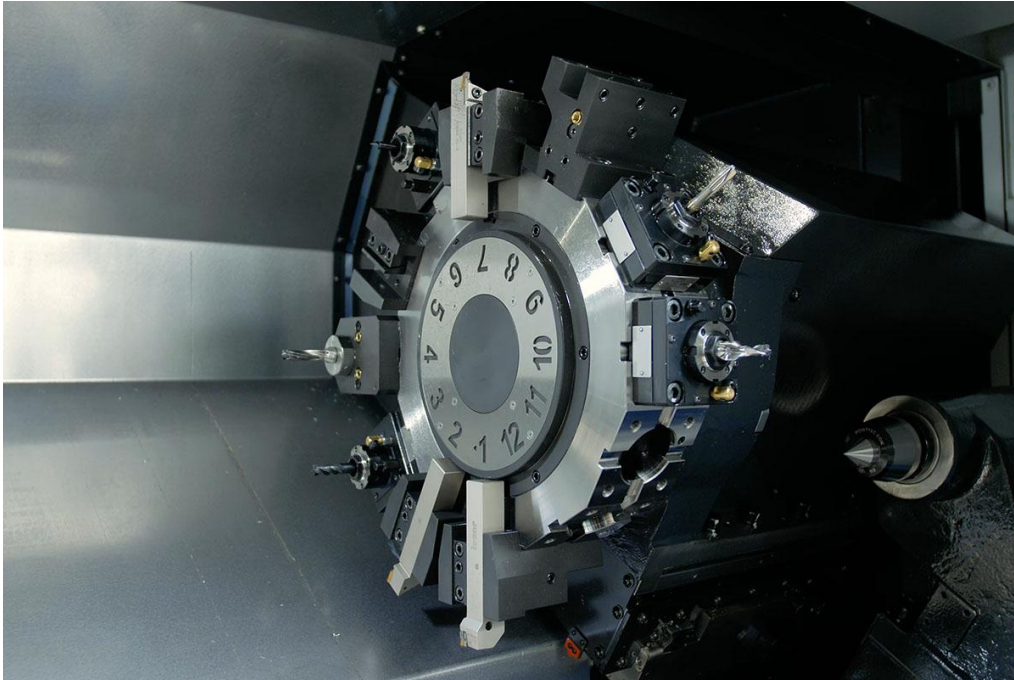


Рисунок 12.8 – Револьверна головка верстата DOOSAN PUMA 4100

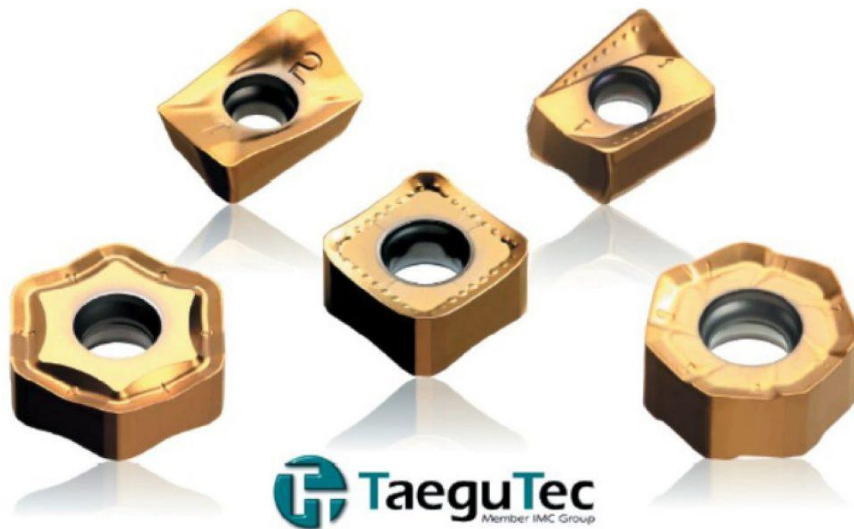


Рисунок 12.9 – Сучасні закордонні металорізальні інструменти зі зносостійкими покриттями

Впровадження розроблених на цій основі нових технологій металообробки на ряді машинобудівних підприємств дозволило скоротити трудомісткість виготовлення складнопрофільних високоточних деталей у 2 – 3 рази і завдяки стабільному забезпеченні високих показників точності та якості оброблюваних поверхонь підвищити на 30 – 50 % ресурс роботи виготовлених машин, вузлів і агрегатів.

Імпульсні процеси обробки

Особливо значні переваги мають імпульсні процеси обробки, які використовують висококонцентровані силові дії за допомогою спеціальних пристроїв і способів:

1. *Розділові процеси*: різання холодних і гарячих металів великого перетину (наприклад, різання злитків в умовах безперервного розливання сталі та прокату), різання профілів, у тому числі сортових, а також безвідходне різання.

2. *Деформуючі процеси*: листове і об'ємне штампування, брикетування сипучих матеріалів.

3. *Клепально-складальні процеси*: клепка, карбування, розвальцювання, пробивання отворів, обтискання кінців електричних кабелів та ін.

Магнітно-імпульсні машини (пристрої) мають можливість автоматизації технологічних процесів завдяки своїй сумісності із засобами автоматичного управління. Стримуючими чинниками під час їх застосування є: використання високих електричних напруг у сукупності з коштовними масивними і великогабаритними приводами, низький коефіцієнт корисної дії, складності системи управління, наявність шкідливих магнітних полів, що вимагає захисту операторів.

Пневмогідравлічні машини (пристрої) зручні в експлуатації завдяки використанню стиснутого повітря, мають високу питому енергоозброєність, стабільність енергії ударів. Однак конструкції таких машин вимагають якісного виготовлення застосовуваних механізмів, герметизації високого тиску робочого середовища. Вони мають обмежену продуктивність і вимагають використання додаткових приводів (наприклад, гідростанцій, мультиплікаторів). Позитивними особливостями конструкцій пневмомеханічних імпульсних машин є те, що механічна система забезпечує їх швидкодію. Це особливо важливо для процесів високоякісного об'ємного деформування, оскільки підвищує якість штампування та стійкість штампувальної оснастки.

Пневматичні імпульсні машини (пристрої), також, як і пневмогідравлічні, зручні в екологічному відношенні завдяки використанню стиснутого повітря заводської пневмосистеми, прості у конструктивному відношенні завдяки високій продуктивності. Їх недоліками є обмеженість енергії удару та недостатня стабільність енергії ударів.

Імпульсна клепка, ручні імпульсні (однеударні) клепальні молотки можуть замінити багатоударні пневматичні, які традиційно застосовуються, оскільки мають ряд переваг: зниження вібраційних захворювань працівників-клепальників завдяки поліпшенню санітарно-гігієнічних і екологічних умов праці; підвищення продуктивності праці; підвищення якості та ресурсу з'єднань; гарантована стабільність якості та можливість прогнозування ресурсу з'єднань; виконання з'єднань працівником-клепальником низької кваліфікації, що не вимагає навичок і досвіду у роботі; простота і зручність у експлуатації та обслуговуванні.

Імпульсні клепальні пристрої (молотки) можуть бути порохової, пневмогідравлічної, магнітно-імпульсної або пневматичної дії.

Таким чином, різноманіття імпульсних процесів обробки, їх важливих переваги указують на доцільність як створення спеціалізованих виробництв (критерії – техніка безпеки, випуск конкурентоспроможної продукції, велика програма та ін.), так і більш інтенсивне інтегрування імпульсних процесів у діючі виробництва (критерії – мобільність, можливість локального деформування деталей для додання їм спеціальних властивостей і поліпшення якості).

Методи складання

Методи складання поділяють на методи повної взаємозамінності та неповної взаємозамінності. Метод *повної взаємозамінності* застосовують під час складання за умови, що будь-яка деталь, що включається як ланка у розмірний ланцюг, забезпечує задану точність замикаючої ланки без будь-якої підгонки або підбору. Цей метод застосовується у масовому і великосерійному виробництвах за умови високої технологічної культури із використанням новітнього обладнання та спеціального оснащення для забезпечення високої точності складання.

Метод *неповної взаємозамінності* застосовують під час складання за умови, що допуски на розміри деталей, що складають розмірний ланцюг, навмисно розширюють для здешевлення виробництва. Цей метод застосовують у серійному і масовому виробництвах для багато-

ланкових ланцюгів і включає наступні способи реалізації: складання методом групової взаємозамінності (селективне складання); складання методом регулювання; складання методом підгонки.

Складання методом *групової взаємозамінності* полягає у тому, що деталі виготовляють із розширеними полями допусків, а перед складанням деталі, що сполучаються, сортують на розмірні групи. Під час складання з'єднують деталі однієї розмірної групи, точність яких відповідає конструктивним допускам. Складання деталей кожної групи здійснюють за методом повної взаємозамінності.

Складання методом регулювання полягає у тому, що вузол, який сполучається, має регульовальний пристрій – компенсатор (гвинти, втулки, кільця та ін.), за допомогою якого забезпечується необхідна точність замикаючої ланки.

Складання методом *підгонки* полягає у забезпеченні необхідної точності сполучення шляхом зняття із однією із деталей необхідного шару матеріалу, наприклад, притиранням, шабрінням або іншим методом. Для цього заздалегідь залишають припуск на пригоночні роботи. Однак складання цим методом достатньо трудомістке і застосовується, в основному, в одиничному та дрібносерійному виробництві.

Загальні відомості щодо правил виконання конструкторської та технологічної документації, аналіз креслення деталі

1. Склад машин.

Продукція машинобудування – це вироби у вигляді машин, механізмів, установок та ін.

Вироби можуть бути простими, складними й комплексними. Прості вироби складаються із деталей або деталей і складальних одиниць.

Деталь – це частина виробу, що не піддається складанню.

Складальна одиниця – це частина виробу, що піддається складанню. У свою чергу, складальна одиниця 1-го порядку, якщо вона складається тільки із деталей, а 2-го й вищого порядку, якщо до неї входять деталі, інші складальні одиниці та покупні вироби (тобто які не виготовляються на підприємстві, а придбані на стороні). Складні вироби складаються із деталей, складальних одиниць різного порядку та груп.

Група – це складальна одиниця, для випуску якої необхідне самостійно організоване виробництво. Група може складатися із деталей, складальних одиниць та інших груп.

2. Склад креслення деталі.

Склад креслення деталі визначається інформацією у графічній або текстовій його частинах.

2.1. Графічна частина. У цій частині на проекціях, розрізах, перетинах або видах показано елементи деталі, їх розміри, допуски, взаємне розташування, вимоги за шорсткістю поверхні, особливі вимоги за якістю або точністю. Для систематизації роботи зі збору та обробки інформації поверхні креслення деталі у цій частині, зазвичай, шифрують цифрами в певному порядку (за годинниковою або проти годинникової стрілки), наприклад, $\varnothing 50$ h7 = ⑤.

2.2. Текстова частина. У цій частині креслення у штампі або над ним (так звані технічні вимоги) надається інформація із шифру деталі, матеріалу, маси, вимогам до твердості, міцності, точності або відхилень від точності, із маркування, покриття та ін. Від повноти цієї інформації багато в чому залежать кінцеві показники якості деталі та її вартість.

Для проведення аналізу кожному студенту видається креслення деталі – типового представника якогось класу деталей, і студент повинен подумки уявити місце цієї деталі у складальній одиниці або машині в цілому й визначити функції, які виконуються цією деталлю у відповідній структурі (наприклад, валом, зубчастим колесом, фланцем, кришкою, втулкою, корпусом у стандартному редукторі). На прикладі цих деталей і буде побудована подальша робота у ході заняття.

Порядок виконання роботи

1. Кожен студент на основі отриманого від викладача креслення деталі проводить її аналіз у порядку, показаному на прикладі креслення шестерні (рис. 12.10).

1.1. У штампі креслення знаходить:

- шифр деталі КК. 002. 087. 007;
- найменування деталі – шестерня;
- завод-виготовлювач (проектант) СКБ СВ;
- маса деталі 0,9 кг;
- матеріал – сталь 40Х ДСТ 1669-89.

1.2. Над штампом знаходить:

- розміри на кресленні без вказівки допуску для охоплених поверхонь – h14, поверхонь, що охоплюють – H14, інших поверхонь – $\pm 1/2H14$;
- твердість HRCe 56;

- зовнішня поверхня проходить покриття – хімічне оксидування;
- номер деталі 007 слід нанести на бирці форми 003 та закріпити на деталі.

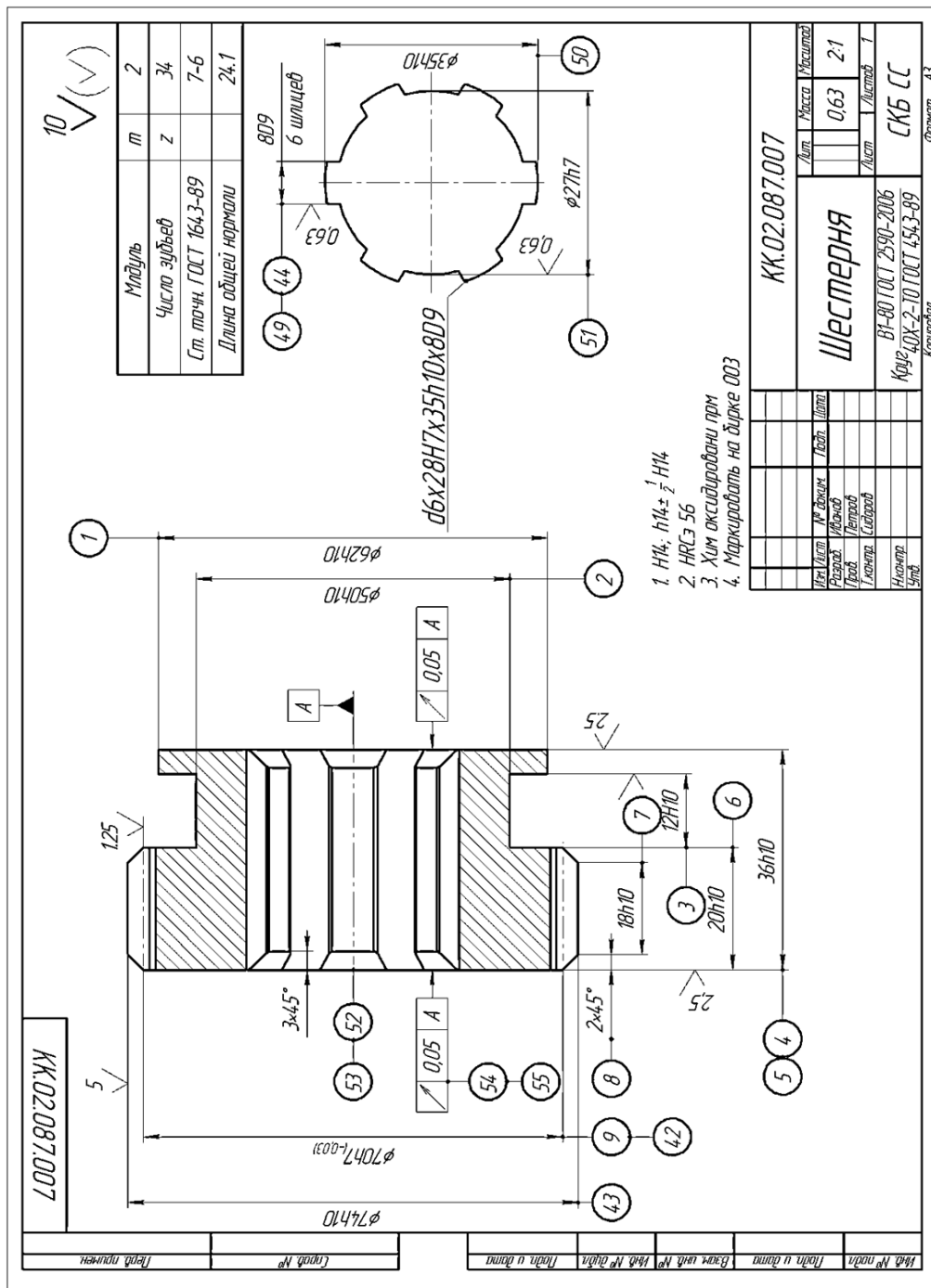


Рисунок 12.10 – Креслення шестірни

1.3. На самому графічному зображенні слід виконати розмітку цифрами всіх поверхонь № від 1 до 52 та знайти:

- габарити деталі: $\phi 74 \times L36$ (відзначимо, що $L/d = 36/74 < 1$, тобто деталь нестійка на циліндрі);

- найточнішу поверхню – $\varnothing 28 \text{ h7}$;
- поверхню із мінімальною шорсткістю – $\varnothing 28 \text{ h7 } R_a = 0,63 \text{ мкм}$;
- відхилення розташування $| \lambda | 0,05 | A |$;
- базові поверхні – $\varnothing 28 \text{ h7}$ має знак ▲.

1.4. У правому верхньому куту креслення наведено індекс $\sqrt{10}$. Це означає, що шорсткість поверхні, яка не зазначена на графічній частині, дорівнює $R_a = 10 \text{ мкм}$.

2. Отримавши весь набір інформації, зазначений у пп. 1.1 – 1.4, що названий конструкторським, слід провести її аналіз із точки зору технолога-виготовлювача цієї деталі.

2.1. Найменування деталі – шестерня, яка є представником класу деталей "зубчасті колеса" та має певну функцію. У нашому випадку – це передача моментів або сигналів управління в якомусь механізмі.

Завод-виробник (проектант) – СКБ спеціальних верстатів – указує на приналежність до галузі машинобудування й, навіть іноді, на обсяг виготовлених машин. У нашому випадку – це верстатобудування із випуском верстатів серіями, а деталей – партіями.

Маса – 0,9 кг указує на те, що деталь легка, робітник може маніпулювати нею руками (обмеження – до 12 кг для жінок, до 16 кг для чоловіків).

Матеріал – сталь 40X указує на те, що деталь із високолегованої сталі підвищеної міцності, тому її оброблюваність може бути утруднена.

2.2. Твердість HRCe 56 указує на необхідність виконання термообробки: загартування, загартування із відпусткою та ін., тобто у технологічному процесі необхідно передбачити додаткову термічну операцію, яку, зазвичай, виконують у спеціалізованих умовах термічного цеху або ділянки.

Покриття – хімічне оксидування – указує на необхідність виконання додаткової операції – гальванічної, хіміко-термічної або іншої – після виконання всіх інших операцій обробки.

Номер 007 на бирці – указує на необхідність додаткової операції таврування, маркування або слюсарної після всіх операцій, щоб деталь можна було легко знайти на складі.

2.3. Габарити деталі, крім стійкості, указують на потенційні розміри робочої зони верстата або пристосування. У нашому випадку –

$\varnothing 74 \times 36$ мм менше 500 мм за довжиною і менше 100 мм за діаметром – допускають використання нормальних, а не подовжених, розмірів верстатів. Точність $\varnothing 28$ h7 і шорсткість $R_a = 0,63$ мкм потенційно указують на складнощі їх забезпечення. У нашому прикладі – слід виконати кілька етапів обробки, щоб отримати h7 і $R_a = 0,63$ мкм, тобто технологічний процес буде багатоопераційним. Зазвичай вважають, що після попередньої обробки (чорнової) точність буде h12, після чистової обробки – h9 – h10, після фінішної обробки – h7 – h8.

Відхилення $| \nearrow | 0,05 | A |$ указує на биття поверхні, до якої спрямована стрілка, відносно до базової поверхні, та навіть, якщо допуск цієї поверхні буде набагато більше 0,05 мм, то доведеться його посилити до малої величини, що ускладнює процес виготовлення.

Знак ▲ на думку конструктора – це поверхня, через яку деталь приєднується до машини, тобто основна конструкторська база. Часто наявність таких знаків баз підказує технологу вибір поверхні або декількох поверхонь для встановлення деталі на верстат або у пристосування (так звані технологічні бази).

2.4. Наявність знаку $R_a = 10$ мкм на більшій частині поверхонь указує на відносно прості й доступні методи обробки для забезпечення заданої шорсткості поверхні R_a .

Таким чином, технологічний аналіз креслення дає повне уявлення щодо складнощів, які очікуються під час проектування технологічного процесу, та можливі контрзаходи для їх усунення або зниження впливу.

Звіт по роботі

Звіт складається із аналізу основних параметрів якості деталей машин та методів їх оцінювання, технологічного забезпечення виготовлення деталей машин і загальних відомостей щодо правил виконання конструкторської та технологічної документації; із опису отриманого від викладача креслення деталі та її аналізу у порядку, передбаченому наведеним прикладом креслення шестерні.

Література [3, 7, 8, 12, 15].

Питання для самоконтролю

1. Під якістю обробки розуміється:
 - а) забезпечення параметрів точності обробки;

б) виключення дефектів обробки;
в) забезпечення шорсткості, хвилястості, стану поверхневого шару;
г) забезпечення точності розміру, форми, взаємного розташування поверхонь і стану поверхневого шару.

2. Точність виготовлення деталей оцінюється:

- а) квалітетами;
- б) групами;
- в) висотою мікронерівностей;
- г) кроком між мікронерівностями.

3. Як називається точність обробки, яка досягається певним методом, висококваліфікованим робітником на високоточному обладнанні, високоякісним інструментом без обмеження часу обробки:

- а) досяжна точність;
- б) економічна точність;
- в) гранична точність;
- г) технічно-обґрунтована точність.

4. Шорсткість поверхні є параметром:

- а) якості оброблюваної поверхні;
- б) точності оброблюваної поверхні;
- в) якості і точності оброблюваної поверхні;
- г) хвилястості оброблюваної поверхні.

5. Відношення кроку регулярно повторюваних виступів і западин обробленої поверхні до їх висоті дорівнює 20. Яким параметром слід оцінювати якість обробленої поверхні деталі?

- а) хвилястістю;
- б) шорсткістю;
- в) точністю форми поверхні;
- г) точністю розміру поверхні.

6. Чим відрізняється номінальний розмір деталі від дійсного розміру?

- а) тим, що він вимірюється;
- б) тим, що він задається;
- в) тим, що він більше;
- г) тим, що він менше.

7. Якими інструментами можна виміряти номінальний розмір деталі?

- а) штангенциркулем;
- б) мікрометром;
- в) із застосуванням мікроскопа;

- г) не можна виміряти.
8. До параметрів шорсткості поверхні деталі слід віднести:
- а) HV;
 - б) Ra;
 - в) HB;
 - г) HRC.
9. Найбільш розповсюджені методи виготовлення деталей – це:
- а) обробка тиском;
 - б) обробка різанням;
 - в) обробка холодом;
 - г) обробка електрохімією.
10. Лезовий інструмент – це:
- а) шліфувальний круг;
 - б) шліфувальне полотно;
 - в) свердло;
 - г) хон.
11. До інструментальних матеріалів не відноситься:
- а) швидкорізальна сталь;
 - б) чавун;
 - в) твердий сплав;
 - г) ельбор.
12. Абразивний інструмент – це:
- а) розвертка;
 - б) фреза;
 - в) хон;
 - г) молоток.
13. Токарні верстати застосовуються для обробки:
- а) внутрішніх;
 - б) конічних поверхонь;
 - в) плоских поверхонь;
 - г) зубчастих коліс.
14. Кількість матеріалу, витраченого на одиницю продукції, – це:
- а) трудомісткість;
 - б) матеріаломісткість;
 - в) енергомісткість;
 - г) фондомісткість.

Список використаних джерел

1. Гайдамака А. В. Деталі машин. Основи теорії та розрахунків : навчальний посібник для студентів машинобудівних спеціальностей усіх форм навчання / А. В. Гайдамака. – Харків: НТУ "ХПІ", 2020. – 275 с.
2. Деталі машин : підручник / А. В. Міняйло, Л. М. Тіщенко, Д. І. Мазоренко та ін. – Київ: Агроосвіта, 2013. – 448 с.
3. Жовтобрюх В. А. Проектирование и автоматизированное программирование современных технологий для станков с ЧПУ : монография / В. А. Жовтобрюх, Ф. В. Новиков. – Днепр: ЛИРА, 2019. – 480 с.
4. Іванчук А. В. Деталі машин: навч. посібник [для студ. вищ. пед. навч. закл.] / Анатолій Васильович Іванчук. – Вінниця: ТОВ фірма "Планер", 2010. – 336 с.
5. Крюк А. Г. Конспект лекцій з модуля "Опір матеріалів" навчальної дисципліни "Технічна механіка" / А. Г. Крюк, О. Г. Прасок. – Харків: Вид. ХНЕУ, 2010. – 236 с.
6. Куклин Н. Г. Детали машин : учеб. для машиностроит. спец. техникумов / Н. Г. Куклин, Г. С. Куклина. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1987. – 383 с.
7. Нежебовський В. В. Технологічне забезпечення якості обробки зубчастих коліс приводів шахтних конвеєрів на операціях зубошліфування: автореф. дис. ... канд. техн. наук: спеціальність: 05.02.08 "Технологія машинобудування". – Одеса: ОНПУ, 2011. – 21 с.
8. Новіков Ф. В. Математичне моделювання і оптимізація процесів металообробки : монографія / Ф. В. Новіков. – Харків: Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 385 с.
9. Новіков Ф. В. Технічна механіка : методичні рекомендації до самостійної роботи студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня [Електронне видання] / уклад. Ф. В. Новіков. – Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 76 с.
<http://repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/21389>
10. Павловский М. А. Теоретична механіка / М. А. Павловский. – Київ: Техніка, 2002. – 512 с.
11. Пирогов В. В. Технічна механіка. Теоретична механіка: навч. посібник [електронний ресурс]. – Кропивницький: ЦНТУ, 2018. – 68 с.
https://btpm.nmu.org.ua/ua/download/navch-posib/Pyrohov_Teor%20mex_Navch_posib.pdf

12. Прасок О. Г. Інженерна графіка. Конспект лекцій для студентів напрямів підготовки 0804 "Комп'ютерні науки", 0501 "Економіка і підприємництво", 0502 "Менеджмент" усіх форм навчання / О. Г. Прасок, В. П. Свідерський. – Харків: Вид. ХНЕУ, 2008. – 192 с.

13. Романенко Л. Г. Теоретична механіка : навч. посіб. для технічних ВУЗів / Л. Г. Романенко, В. Г. Солодов. – Харків: ХДАДТУ, 2000. – 268 с.

14. Свідерський В. П. Теоретична механіка : конспект лекцій / В. П. Свідерський, О. Г. Прасок. – Харків: Вид. ХНЕУ, 2008. – 112 с.

15. Системи технологій: навчальний посібник / В. С. Пономаренко, М. А. Сіроштан, М. І. Белявцев, А. Д. Дудко, О. М. Тимонін; Під ред. П. Д. Дудко. – Харків: Око, 2000. – 376 с.

16. Теоретична механіка. Статика і кінематика: навч. посіб. з методичними вказівками і контрольними завданнями для студентів заочної форми навчання / Ю. О. Єрфорт, С. В. Подлесний – Краматорськ: ДДМА, 2007. – 164 с.

17. Ткачук А. І. Технічна механіка. Статика абсолютно твердого тіла. Опір матеріалів: Курс лекцій. Навчальний посібник для студентів вищих педагогічних навчальних закладів напряму підготовки 6.010103 "Технологічна освіта" за освітньокваліфікаційним рівнем "бакалавр" / А. І. Ткачук. – Кіровоград: ПП "Центр оперативної поліграфії "Авангард". – 2015. – 260 с.

18. Чихладзе Е. Д. Опір матеріалів / Е. Д. Чихладзе. – Харків: Укр-ДАЗТ, 2002. – 362 с.

19. Шпачук В. П. Технічна механіка: навчальний посібник (для студентів денної і заочної форм навчання бакалаврів за напрямом 6.050701 – "Електротехніка та електротехнології") / В. П. Шпачук, М. С. Золотов, В. О. Склярів; Харків. нац. ун-т міськ. госп-ва імені О. М. Бекетова. – Харків : ХНУМГ, 2015. – 277 с.

20. Эрдеди А. А. Техническая механика : теоретическая механика. Сопротивление материалов : учебник для машиностр. спец. техникумов / А. А. Эрдеди, Ю. А. Медведев, Н. А. Эрдеди. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1991. – 304 с.

Зміст

Вступ	3
Робота 1. Основні поняття статички. Основні аксіоми статички	5
Робота 2. Зв'язки та їх реакції. Системи сил і умови їх рівноваги ..	15
Робота 3. Балкові опори та їхні реакції	37
Робота 4. Центри тяжіння	51
Робота 5. Основні поняття кінематики. Кінематика точки. Найпростіші рухи твердого тіла та складний рух точки. Плоскопарелельний рух твердого тіла	63
Робота 6. Основні аксіоми динаміки. Робота та механічна потужність під час поступального й обертального рухів. Теореми динаміки	99
Робота 7. Основні поняття опору матеріалів. Розтягання і стиск ...	127
Робота 8. Зріз (зсув) і зминання. Крутіння	151
Робота 9. Вигин. Вигин і крутіння. Стійкість стиснутих стержнів	181
Робота 10. Основні поняття у деталях машин. Передачі	209
Робота 11. Деталі обертання. З'єднання	267
Робота 12. Параметри якості деталей машин та методи їх оцінювання, технологічне забезпечення виготовлення деталей машин. Загальні відомості щодо правил виконання конструкторської та технологічної документації	297
Список використаних джерел	325

Навчальне видання

**Федір Васильович Новіков
Дмитро Федорович Новіков
Валерій Олексійович Жовтобрюх**

ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА

Навчальний посібник

Відповідальний за випуск **Новіков Ф. В.**

В авторській редакції

Підп. до друку 10.08.2023 р.
Формат 60x84/16. Друк офсетний. Ум.-друк. арк. 19,07.
Наклад 300 пр. Заказ № 130.

Видавництво та друкарня ПП "Ліра ЛТД"
49107, м. Дніпро, вул. Наукова, 5
Свідоцтво суб'єкта видавничої справи
ДК № 6042 від 26.02.2018.