

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

МОДЕЛЮВАННЯ ФІНАНСОВИХ ПРОЦЕСІВ

Методичні рекомендації
до лабораторних робіт
для студентів спеціальності
124 "Системний аналіз"
освітньої програми
"Управління складними системами"
першого (бакалаврського) рівня

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2023

УДК 336:004.94(072.034)

M74

Укладачі: О. В. Панасенко
С. В. Прокопович

Затверджено на засіданні кафедри економічної кібернетики і системного аналізу.

Протокол № 1 від 25.08.2022 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Моделювання фінансових процесів [Електронний ресурс] :
M74 методичні рекомендації до лабораторних робіт для студентів спеціальності 124 "Системний аналіз" освітньої програми "Управління складними системами" першого (бакалаврського) рівня / уклад. О. В. Панасенко, С. В. Прокопович. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2023. – 99 с.

Розглянуто основні питання розроблення, аналізу та реалізації моделей фінансових процесів. Подано завдання для лабораторних робіт із навчальної дисципліни та наведено методичні рекомендації до їх виконання в середовищі MS Excel.

Рекомендовано для студентів спеціальності 124 "Системний аналіз" освітньої програми "Управління складними системами" першого (бакалаврського) рівня.

УДК 336:004.94(072.034)

© Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця, 2023

Вступ

Лабораторні роботи призначені для закріплення теоретичного матеріалу, оволодіння практичними навичками аналізу та прийняття рішень з управління фінансовими процесами в умовах нестаціонарного зовнішнього середовища та обмеженості ресурсів за допомогою використання сучасних економіко-математичних методів і моделей та пакетів прикладних програм.

Лабораторні роботи рекомендовано виконувати послідовно, оскільки таке виконання дозволяють краще засвоїти і закріпити матеріал навчальної дисципліни.

Лабораторні роботи наведені стосовно всіх тем навчальної дисципліни і ґрунтуються на теоретичному матеріалі відповідної теми, а також попередніх тем. Кожна робота містить мету, завдання та методичні рекомендації до їх виконання у середовищі *MS Excel*.

Для захисту лабораторної роботи студенту необхідно оформити індивідуальний звіт, який повинен містити: постановку завдання, основні результати побудови фінансових моделей, аналіз розрахунків і висновки. На титульному аркуші вказують номер лабораторної роботи, її назву, ПІБ студента, що виконав роботу, і ПІБ викладача, що прийняв роботу.

Оцінку за виконання роботи ставлять за результатами виконання і захисту лабораторної роботи. Особливу увагу приділяють вивченню теоретичного матеріалу, правильності висновків і повноті економічної інтерпретації отриманих результатів.

Лабораторна робота 1

Фінансові розрахунки з використанням простих та складних відсотків

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок нарахування простих і складних відсотків.

Завдання 1. Початкові дані. Депозитний внесок величиною 1 тис. грн розміщений у банку на 10 років під 10 % річних.

Необхідно:

Розрахувати майбутню вартість внеску під час:

1. Нарахування простих відсотків.
 - 1.1. За постійною ставкою один раз на рік.
 - 1.2. Якщо передбачено зміну відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, а кожен подальший рік ставку підвищують на 0,5 %.
 - 1.3. З урахуванням щорічного рівня інфляції 7 і 15 %.
2. Нарахування складних відсотків.
 - 2.1. За постійною ставкою один раз на рік, щоквартально, щомісячно.
 - 2.2. Якщо передбачено зміну відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, а кожен подальший рік ставку підвищують на 0,5 %.
 - 2.3. З урахуванням щорічного рівня інфляції 7 і 15 %.
3. Побудувати графіки зростання вартості внеску.

Завдання 2. Початкові дані. Депозит на суму 20 000 грн був відкритий з 10 грудня поточного року до 20 березня наступного року включно під 15 % річних.

Необхідно:

1. Визначити нарощену величину депозиту під час нарахування простих відсотків.
 - 1.1. Трьома способами: 365/365, 365/360, 360/360 у цілому за період та в кожному календарному році окремо.
 - 1.2. Розрахувати суму нарахованих простих відсотків (365/365, 365/360), якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму.
2. Визначити нарощену величину депозиту під час нарахування складних відсотків способом 365/365 у цілому за період та в кожному календарному році окремо.

3. Провести дисконтування.

3.1. Розрахувати первинну суму, якщо в початкових даних вказано суму погашення і просту дисконтну ставку (365/365, 365/360).

3.2. Розрахувати первинну суму, якщо в початкових даних вказано суму погашення і складну дисконтну ставку.

4. Розрахувати ефективну відсоткову ставку для 360 і 365 днів.

Методичні рекомендації до виконання завдання 1

1. Прості відсотки

1.1. Постійні ставки. Під *нарощеною сумою* позики (депозиту, інших видів виданих у борг або інвестованих грошей) розуміють первинну її суму з нарахованими відсотками до кінця терміну нарахування. Нарощену суму визначають множенням первинної суми боргу на *множник нарощування*, який показує, у скільки разів нарощена сума більше первинної. Розрахункова формула залежить від виду відсоткової ставки й умов нарощування.

До нарощування за простими відсотками зазвичай вдаються під час видачі короткострокових позик (на строк до 1 року) або у випадках, коли відсотки не приєднуються до суми боргу, а періодично виплачуються.

Для запису формул нарощування простих та складних відсотків прийняти позначення:

S – нарощена сума, тобто сума в кінці терміну (майбутня вартість внеску);

P – первинна сума внеску;

I – відсотки за весь термін вкладу;

i – відсоткова ставка, ставка нарощування відсотків (десятковий дріб);

n – термін вкладу.

Якщо термін вимірюють у роках (як це зазвичай і буває), то i означає річну відсоткову ставку. Відповідно щороку приносить відсотки в сумі $P \times i$. Нараховані за весь термін відсотки складуть $I = Pni$.

Під час нарахування простих відсотків один раз на рік майбутня вартість внеску на кінець n -го року визначають за формулою:

$$S = P + I = P + P \times n \times i = P(1 + n \times i). \quad (1)$$

Вираз (1) називають – *формулою простих відсотків*, а множник $(1 + n \times i)$ – *множником нарощування простих відсотків*.

У цьому прикладі, якщо $P = 1\ 000$, $i = 0,1$, а $n = 10$, то майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1\ 000 (1 + 10 \times 0,1) = 2\ 000 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок простих відсотків можна здійснити поетапно. Процес поетапного розрахунку простих відсотків організують у *MS Excel* на новому листі, який можна назвати "Прості відсотки". Кінцевий робочий аркуш і використані формули наведені на рис. 1.1.

Для створення листа необхідно виконати такі етапи:

1. Задати початкові умови для розрахунків (суму внеску $P = 1\ 000$, ставку річних відсотків $0,1$ та термін вкладу 10 років) у комірках B3 : B5 так, як це показано на рис. 1.1.

2. Стан рахунку на початок першого року у комірці B10 дорівнює сумі вкладу P , тобто 1 000 грн.

3. У комірці C10 розрахувати відсотки, накопичені протягом першого року як добуток суми первісного вкладу на ставку річних відсотків. Варто звернути увагу, що під час розрахунку простих відсотків, нарахування відсотків у кожному році завжди здійснюють на суму первинного вкладу.

4. Розрахуйте стан рахунку на кінець першого року у комірці D10 як суму стану рахунку на початок першого року та відсотків, накопичених протягом року.

5. Оскільки стан рахунку на кінець першого року дорівнює стану рахунку на початок другого року, прирівняти комірку B11 до отриманого на попередньому етапі значення в комірці D10.

6. Здійсніть аналогічні розрахунки для наступних дев'яти років, повторюючи етапи 3 – 10.

7. Суму на рахунку на кінець періоду нарахування, тобто на кінець десятого року, порівняйте із розрахованою за формулою (1) майбутньою вартістю внеску.

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості під час нарахування простих відсотків поетапно (один етап – один рік) наведені на рис. 1.2.

	A	B	C	D
1	ПРОСТИЙ ВІДСОТОК			
2	1) нарахування відсотків 1 раз на рік			
3	P=	1000		
4	i=	0,1		
5	n=	10		
6				
7				
8	Рік	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку в кінці року, грн
9				
10	1	=B3	=B\$4*B\$10	=C10+B10
11	2	=D10	=B\$4*B\$10	=C11+B11
12	3	=D11	=B\$4*B\$10	=C12+B12
13	4	=D12	=B\$4*B\$10	=C13+B13
14	5	=D13	=B\$4*B\$10	=C14+B14
15	6	=D14	=B\$4*B\$10	=C15+B15
16	7	=D15	=B\$4*B\$10	=C16+B16
17	8	=D16	=B\$4*B\$10	=C17+B17
18	9	=D17	=B\$4*B\$10	=C18+B18
19	10	=D18	=B\$4*B\$10	=C19+B19
20				
21	Розрахунок простих відсотків за формулою (1)		=B3*(1+B5*B4)	

Рис. 1.1. Розрахунок майбутньої вартості внеску під час нарахування простих відсотків один раз на рік

	A	B	C	D
1	ПРОСТИЙ ВІДСОТОК			
2	1) нарахування відсотків 1 раз на рік			
3	P=	1000		
4	i=	0,1		
5	n=	10		
6				
7				
8	Рік	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку на кінець року, грн
9				
10	1	1 000,00	100,00	1 100,00
11	2	1 100,00	100,00	1 200,00
12	3	1 200,00	100,00	1 300,00
13	4	1 300,00	100,00	1 400,00
14	5	1 400,00	100,00	1 500,00
15	6	1 500,00	100,00	1 600,00
16	7	1 600,00	100,00	1 700,00
17	8	1 700,00	100,00	1 800,00
18	9	1 800,00	100,00	1 900,00
19	10	1 900,00	100,00	2 000,00
20				
21	Розрахунок простих відсотків за формулою (1)		2000,00	

Рис. 1.2. Результати розрахунків майбутньої вартості внеску під час нарахування простих відсотків один раз на рік

Як видно з рис. 1.2 нараховані майбутні суми у комірках D19 та C21 співпадають.

1.2. Змінні ставки. У кредитних угодах іноді передбачаються відсоткові ставки, що змінюються в часі. Якщо це прості ставки, то нарощену на кінець терміну сума визначають таким чином:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + \dots + n_m i_m) = P(1 + \sum_{t=1}^m n_t i_t) \quad (2)$$

де i_t – ставка простих відсотків у періоді t ;

n_t – тривалість періоду з постійною ставкою.

Якщо передбачено зміну відсоткової ставки: перші п'ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %, то майбутня вартість внеску через 10 років під час нарахування простих відсотків складе:

$$S = 1\,000 (1 + 5 \times 0,1 + 1 \times 0,105 + 1 \times 0,11 + 1 \times 0,115 + 1 \times 0,12 + 1 \times 0,125) = 2\,075 \text{ (грн).}$$

Поетапний розрахунок і результати розрахунку простих відсотків зі змінною ставкою, а також розрахунок нарощеної суми за формулою (2) наведено на рис. 1.3 і 1.4.

	A	B	C	D	E
24					
25	Змінна відсоткова став				
26	Щорічна зміна ставки, починаючи з 6-го року		0,005		
27	Рік	Ставка відсотків	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку на кінець року, грн
28					
29					
30	1	=B\$4	=B3	=B30*\$C\$30	=D30+C30
31	2	=B\$4	=E30	=B31*\$C\$30	=D31+C31
32	3	=B\$4	=E31	=B32*\$C\$30	=D32+C32
33	4	=B\$4	=E32	=B33*\$C\$30	=D33+C33
34	5	=B\$4	=E33	=B34*\$C\$30	=D34+C34
35	6	=B34+\$C\$26	=E34	=B35*\$C\$30	=D35+C35
36	7	=B35+\$C\$26	=E35	=B36*\$C\$30	=D36+C36
37	8	=B36+\$C\$26	=E36	=B37*\$C\$30	=D37+C37
38	9	=B37+\$C\$26	=E37	=B38*\$C\$30	=D38+C38
39	10	=B38+\$C\$26	=E38	=B39*\$C\$30	=D39+C39
40					
41	Розрахунок нарощеної суми при нарахуванні простих відсотків за формулою (2)			=B3*(1+B4*5+B35+B36+B37+B38+B39)	

Рис. 1.3. Розрахунки під час нарахування простих відсотків зі змінною ставкою

	A	B	C	D	E
24					
25	2) Змінна відсоткова ставка				
26	Щорічна зміна ставки, починаючи з 6-го року		0,50%		
27	Рік	Ставка відсотків	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку на кінець року, грн
28					
29					
30	1	10%	1 000,00	100,00	1 100,00
31	2	10%	1 100,00	100,00	1 200,00
32	3	10%	1 200,00	100,00	1 300,00
33	4	10%	1 300,00	100,00	1 400,00
34	5	10%	1 400,00	100,00	1 500,00
35	6	10,5%	1 500,00	105,00	1 605,00
36	7	11%	1 605,00	110,00	1 715,00
37	8	11,5%	1 715,00	115,00	1 830,00
38	9	12%	1 830,00	120,00	1 950,00
39	10	12,5%	1 950,00	125,00	2 075,00
40					
41	Розрахунок нарощеної суми при нарахуванні простих відсотків за формулою (2)			2075,00	

Рис. 1.4. Результати розрахунків під час нарахування простих відсотків зі змінною ставкою

1.3. Урахування інфляції. У розглянутих формулах нарощування всі грошові величини вимірювалися за номіналом. Тобто не бралось до уваги зниження реальної купівельної спроможності грошей за період, що охоплюється операцією. Проте в сучасних умовах інфляція у грошових відносинах відіграє помітну роль під час вимірювання реальної прибутковості фінансової операції.

Ввести позначення:

S – нарощена сума грошей номінальна;

C – нарощена сума з урахуванням її знецінення внаслідок інфляції;

J_p – індекс цін.

Очевидно, що $C = S/J_p$.

Індекс купівельної спроможності грошей, як відомо, рівний зворотній величині індексу цін – чим вищі ціни, тим нижча купівельна спроможність.

Неважко пов'язати індекс цін і темп інфляції. Під *темпом інфляції* h розуміють *відносний приріст цін за період*; зазвичай його вимірюють у відсотках і визначають як:

$$h = 100 \times (J_p - 1); J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right).$$

Інфляція є ланцюговим процесом. Отже, індекс цін за декілька періодів рівний *добутку* ланцюгових індексів цін:

$$J_p = \prod_{t=1}^n \left(1 + \frac{h}{100}\right),$$

де h_t – темп інфляції у періоді t .

Якщо h – постійний очікуваний (або прогнозований) темп інфляції за один період, то за n таких періодів буде отримано:

$$J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n.$$

Якщо нарощування проводять за простою ставкою, то нарощена сума з урахуванням інфляції дорівнює:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \times \frac{1 + ni}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 %, а номінальна нарощена сума за простими відсотками, яка відома з попередніх розрахунків, дорівнює 2 000 грн, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C = \frac{S}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n} = \frac{2\,000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^{10}} \approx 1\,016,70 \text{ (грн)}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 15 %, то:

$$C = \frac{2\,000}{\left(1 + \frac{15}{100}\right)^{10}} \approx 494,37 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок майбутньої вартості депозитного внеску під час нарахування простих відсотків з урахуванням рівня інфляції наведено на рис. 1.5.

	A	B	C	D
42				
43	3) Майбутня вартість внеску з урахуванням інфляції			
44	Постійний щорічний темп інфляції	Рівень інфляції за 10 років	Майбутня вартість вкладу із врахуванням рівня інфляції, грн	Майбутня вартість вкладу без врахування рівня інфляції, грн
45	0,07	$= (1+A45)^{10}$	$= D45/B45$	2000
46	0,15	$= (1+A46)^{10}$	$= D46/B46$	2000

Рис. 1.5. Розрахунок майбутньої вартості депозиту під час нарахування простих відсотків з урахуванням рівня інфляції

Результати розрахунків наведені на рис. 1.6.

	A	B	C	D
42				
43	3) Майбутня вартість внеску з урахуванням інфляції			
44	Постійний щорічний темп інфляції	Рівень інфляції за 10 років	Майбутня вартість вкладу із врахуванням рівня інфляції, грн	Майбутня вартість вкладу без врахування рівня інфляції, грн
45	7%	196,72%	1016,70	2000
46	15%	404,56%	494,37	2000

Рис. 1.6. Результати розрахунку майбутньої вартості депозиту під час нарахування простих відсотків з урахуванням рівня інфляції

2. Складні відсотки

2.1. Постійні ставки. У середньо- і довгострокових фінансово-кредитних операціях, якщо відсотки не виплачуються відразу після їх нарахування, а приєднуються до суми боргу, застосовують *складні відсотки*. База для нарахування складних відсотків на відміну від простих не залишається постійною – вона збільшується з кожним кроком у часі. Абсолютна сума відсотків, що нараховуються, зростає, і процес збільшення суми боргу відбувається з прискоренням. Нарощування за складними відсотками можна подати як послідовне реінвестування коштів, вкладених під прості відсотки на один період нарахування. Приєднання нарахованих відсотків до суми, яка послужила базою для їх нарахування, часто називають *капіталізацією відсотків*.

Під час нарахування складних відсотків один раз на рік майбутню вартість внеску на кінець n -го року визначають за формулою:

$$S = P(1 + i)^n. \quad (3)$$

Якщо $P = 1\,000$, $i = 0,1$, а $n = 10$, то майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1\,000(1 + 0,1)^{10} = 2\,539,74 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок складних відсотків також можна здійснити поетапно. Процес поетапного розрахунку простих відсотків організовують у *MS Excel* на новому листі, який можна назвати "Складні відсотки". Закінчений робочий аркуш і використані формули наведені на рис. 1.7.

	A	B	C	D
1	СКЛАДНИЙ ВІДСОТОК			
2	1) нарахування відсотків 1 раз на рік			
3	P=	1000		
4	i=	0,1		
5	n=	10		
6				
7	Рік	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку на кінець року, грн
8				
9				
10	1	=B3	=B10*\$B\$4	=C10+B10
11	2	=D10	=B11*\$B\$4	=C11+B11
12	3	=D11	=B12*\$B\$4	=C12+B12
13	4	=D12	=B13*\$B\$4	=C13+B13
14	5	=D13	=B14*\$B\$4	=C14+B14
15	6	=D14	=B15*\$B\$4	=C15+B15
16	7	=D15	=B16*\$B\$4	=C16+B16
17	8	=D16	=B17*\$B\$4	=C17+B17
18	9	=D17	=B18*\$B\$4	=C18+B18
19	10	=D18	=B19*\$B\$4	=C19+B19
20				
21	Розрахунок складних відсотків за формулою (3)		=B3*(1+B4)^B5	
22	Розрахунок складних відсотків функцією БС		=БС(B4;B5;;-B3)	

Рис. 1.7. Поетапний розрахунок під час нарахування складних відсотків зі змінною ставкою один раз на рік

Для створення листа необхідно виконати такі етапи:

1. Задайте початкові умови для розрахунків (суму внеску $P = 1\,000$, ставку річних відсотків $0,1$ та термін вкладу 10 років) у комірках B3:B5 так, як це показано на рис. 1.7.

2. Стан рахунку на початок першого року у комірці B10 дорівнює сумі вкладу P , тобто $1\,000$ грн.

3. У комірці C10 розрахувати відсотки, накопичені протягом першого року, як добуток стану рахунку на початок року на ставку річних відсотків. Варто звернути увагу, що під час розрахунку складних відсотків, нарахування відсотків у поточному році завжди здійснюють на суму вкладу на початок поточного року.

4. Розрахувати стан рахунку на кінець першого року у комірці D10 як суму стану рахунку на початок першого року та відсотків, накопичених протягом року.

5. Оскільки стан рахунку на кінець першого року дорівнює стану рахунку на початок другого року, треба прирівняти комірку B11 до отриманого на попередньому етапі значення в комірці D10.

6. Здійсніть аналогічні розрахунки для наступних дев'яти років, повторюючи етапи 3 – 10.

7. Суму на рахунку на кінець періоду нарахування, тобто на кінець 10 року, порівняйте із розрахованою за формулою (3) майбутньою вартістю внеску.

Примітка: У середовищі *MS Excel* є можливість розрахунку майбутньої вартості внеску під час нарахування складних відсотків за допомогою вбудованої функції БС, яка має такий синтаксис:

БС(ставка, кпер, плт, [пс], [тип]),

де *ставка* – обов'язковий аргумент. Відсоткова ставка за період;

кпер – обов'язковий аргумент. Період нарахування внеску;

плт – обов'язковий аргумент. Виплата, яку роблять кожний період; це значення не може мінятися протягом усього періоду виплат. Зазвичай аргумент "плт" складається з основного платежу та платежу за відсотками, але не містить інших податків і зборів. Якщо він опущений, аргумент "пс" є обов'язковим;

пс – обов'язковий аргумент, якщо аргумент "*плт*" опущений. Сума внеску наведена до теперішнього моменту (береться зі знаком "-");

тип – необов'язковий аргумент. Набуває значення 0, якщо виплата повинна здійснюватися у кінці періоду нарахування, або 1 – на початку періоду. За замовчуванням дорівнює 0.

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості поетапно (один етап – один рік) наведено на рис. 1.8.

	A	B	C	D
1	СКЛАДНИЙ ВІДСОТОК			
2	1) нарахування відсотків 1 раз на рік			
3	P=	1000		
4	i=	0,1		
5	n=	10		
6				
7				
8	Рік	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку на кінець року, грн
9				
10	1	1 000,00	100,00	1 100,00
11	2	1 100,00	110,00	1 210,00
12	3	1 210,00	121,00	1 331,00
13	4	1 331,00	133,10	1 464,10
14	5	1 464,10	146,41	1 610,51
15	6	1 610,51	161,05	1 771,56
16	7	1 771,56	177,16	1 948,72
17	8	1 948,72	194,87	2 143,59
18	9	2 143,59	214,36	2 357,95
19	10	2 357,95	235,79	2 593,74
20				
21	Розрахунок складних відсотків за формулою (3)		2 593,74	
22	Розрахунок складних відсотків функцією БС		2 593,74	

Рис. 1.8. Результати розрахунків під час нарахування складних відсотків зі змінною ставкою один раз на рік

Слід розглянути проблему *нарощування складних відсотків m раз на рік*. У сучасних умовах відсотки капіталізуються, як правило, не один, а кілька разів на рік – за півріччями, кварталами і т. д. Деякі зарубіжні комерційні банки практикують навіть щоденне нарахування відсотків. Під час нарахування відсотків кілька разів на рік можна скористатися формулою (2). Параметр n у цих умовах означатиме число періодів нарахування, а під ставкою i слід розуміти ставку за відповідний період.

Отже, нехай річна ставка рівна j , число періодів нарахування в році – m . Кожного разу відсотки нараховують за ставкою j/m . Ставку j/m називають *номінальною*. Формулу нарощування тепер можна подати таким чином:

$$S = P \left(1 + \frac{j}{m} \right)^{nm}. \quad (4)$$

Якщо відсотки нараховують щоквартально, то $j = 0,1$, $n = 10$, $m = 4$, а майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1\,000 \left(1 + \frac{0,1}{4} \right)^{10 \times 4} = 2\,685,06 \text{ (грн)}.$$

Якщо відсотки нараховують щомісячно, то $m = 12$, а майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1\,000 \left(1 + \frac{0,1}{12} \right)^{10 \times 12} = 2\,707,04 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок складних відсотків, які нараховуються кілька разів за рік, у середовищі *MS Excel* наведено на рис. 1.9.

	A	B	C	D
23				
24		Кількість періодів нарахування складних відсотків	За формулою (4)	За функцією БС
25		Щоквартальне нарахування складних відсотків, грн	=B3*(1+B4/4)^(4*B5)	=БС(B4/4;B5*4;;-B3)
26		Щомісячне нарахування складних відсотків, грн	=B3*(1+B4/12)^(12*B5)	=БС(B4/12;B5*12;;-B3)

Рис. 1.9. Розрахунки під час нарахування складних відсотків, кілька разів на рік (щоквартально, щомісячно)

Результати розрахунку складних відсотків за умови щоквартального та щомісячного нарахування наведено на рис. 1.10.

	A	B	C	D
23				
24		Кількість періодів нарахування складних відсотків	За формулою (4)	За функцією БС
25		Щоквартальне нарахування складних відсотків, грн	2685,06	2685,06
26		Щомісячне нарахування складних відсотків, грн	2707,04	2707,04

Рис. 1.10. Результати розрахунків під час нарахування складних відсотків кілька разів на рік (щоквартально, щомісячно)

2.2. Змінні ставки. Майбутню вартість внеску під час нарахування складних відсотків, якщо передбачено зміну ставки відсотків, визначають так:

$$S = P \times \prod_{t=1}^m (1 + i_t)^{nt}. \quad (5)$$

Якщо передбачено зміну відсоткової ставки, то майбутня вартість внеску через 10 років під час нарахування складних відсотків складе:

$$S = 1\,000 \times (1 + 0,1)^5 \times (1 + 0,105)^1 \times (1 + 0,11)^1 \times (1 + 0,115)^1 \times (1 + 0,12)^1 \times (1 + 0,125)^1 = 2\,775,2 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок поетапно нарощеної вартості депозиту під час нарахування складних відсотків зі змінною ставкою наведений на рис. 1.11.

	A	B	C	D	E
27					
28	2) Змінна відсоткова ставі				
29	Щорічна зміна ставки, починаючи з 6-го року		0,005		
30	Рік	Ставка відсотків	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку на кінець року, грн
31					
32					
33	1	=B\$4	=B3	=B3*B4	=C33+D33
34	2	=B\$4	=E33	=C34*0,1	=C34+D34
35	3	=B\$4	=E34	=C35*B\$4	=C35+D35
36	4	=B\$4	=E35	=C36*B\$4	=C36+D36
37	5	=B\$4	=E36	=C37*B\$4	=C37+D37
38	6	=B37+\$C\$29	=E37	=C38*0,105	=C38+D38
39	7	=B38+\$C\$29	=E38	=C39*0,11	=C39+D39
40	8	=B39+\$C\$29	=E39	=C40*0,115	=C40+D40
41	9	=B40+\$C\$29	=E40	=C41*0,12	=C41+D41
42	10	=B41+\$C\$29	=E41	=C42*0,125	=C42+D42
43					
44	Розрахунок нарощеної суми при нарахуванні простих відсотків за формулою (5), грн			=C33*((1+B4)^5)*(1+B38)*(1+B39)*(1+B40)*(1+B41)*(1+B42)	

Рис. 1.11. Розрахунки майбутньої вартості внеску під час нарахування складних відсотків зі змінною ставкою

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості поетапно наведені на рис. 1.12.

	A	B	C	D	E
27					
28	2) Змінна відсоткова ставка				
29	Щорічна зміна ставки, починаючи з 6-го року		0,5%		
30					
31	Рік	Ставка відсотків	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку на кінець року, грн
32					
33	1	10%	1 000,00	100,00	1 100,00
34	2	10%	1 100,00	110,00	1 210,00
35	3	10%	1 210,00	121,00	1 331,00
36	4	10%	1 331,00	133,10	1 464,10
37	5	10%	1 464,10	146,41	1 610,51
38	6	10,5%	1 610,51	169,10	1 779,61
39	7	11%	1 779,61	195,76	1 975,37
40	8	11,5%	1 975,37	227,17	2 202,54
41	9	12%	2 202,54	264,30	2 466,84
42	10	12,5%	2 466,84	308,36	2 775,20
43					
44	Розрахунок нарощеної суми при нарахуванні простих відсотків за формулою (5), грн			2775,20	

Рис. 1.12. Результати розрахунків під час нарахування складних відсотків зі змінною ставкою

2.3. Урахування інфляції. Нарощену суму з урахуванням інфляції за складними відсотками розраховують за формулою:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \times \frac{(1+i)^n}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n} = P \times \left(\frac{1+i}{1 + \frac{h}{100}}\right)^n.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 %, а номінальна нарощена сума за складними відсотками відома з попередніх розрахунків, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C = \frac{2\,593,74}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^{10}} \approx 1\,318,53 \text{ (грн)}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 15 %, то:

$$C = \frac{2\,593,74}{\left(1 + \frac{15}{100}\right)^{10}} \approx 641,13 \text{ (грн).}$$

Розрахунок майбутньої вартості депозитного внеску під час нарахування складних відсотків з урахуванням рівня інфляції наведено на рис. 1.13.

	A	B	C	D
45				
46	3) Майбутня вартість внеску з урахуванням інфляції			
47	Постійний щорічний темп інфляції	Рівень інфляції за 10 років	Майбутня вартість вкладу із врахуванням рівня інфляції, грн	Майбутня вартість вкладу без врахування рівня інфляції, грн
48	0,07	= $(1+A48)^{B5}$	=D48/B48	=C21
49	0,15	= $(1+A49)^{B5}$	=D49/B49	=C21

Рис. 1.13. Розрахунок майбутньої вартості депозиту під час нарахування складних відсотків з урахуванням рівня інфляції

Результати розрахунків наведені на рис. 1.14.

	A	B	C	D
45				
46	3) Майбутня вартість внеску з урахуванням інфляції			
47	Постійний щорічний темп	Рівень інфляції за 10 років	Майбутня вартість вкладу із врахуванням рівня інфляції, грн	Майбутня вартість вкладу без врахування рівня інфляції, грн
48	7%	196,72%	1318,53	2593,74
49	15%	404,56%	641,13	2593,74

Рис. 1.14. Результати розрахунку майбутньої вартості депозиту під час нарахування складних відсотків з урахуванням рівня інфляції

3. Графіки. Побудовані графіки щорічної зміни нарощеної суми за простими та складними відсотками наведені на рис. 1.15.

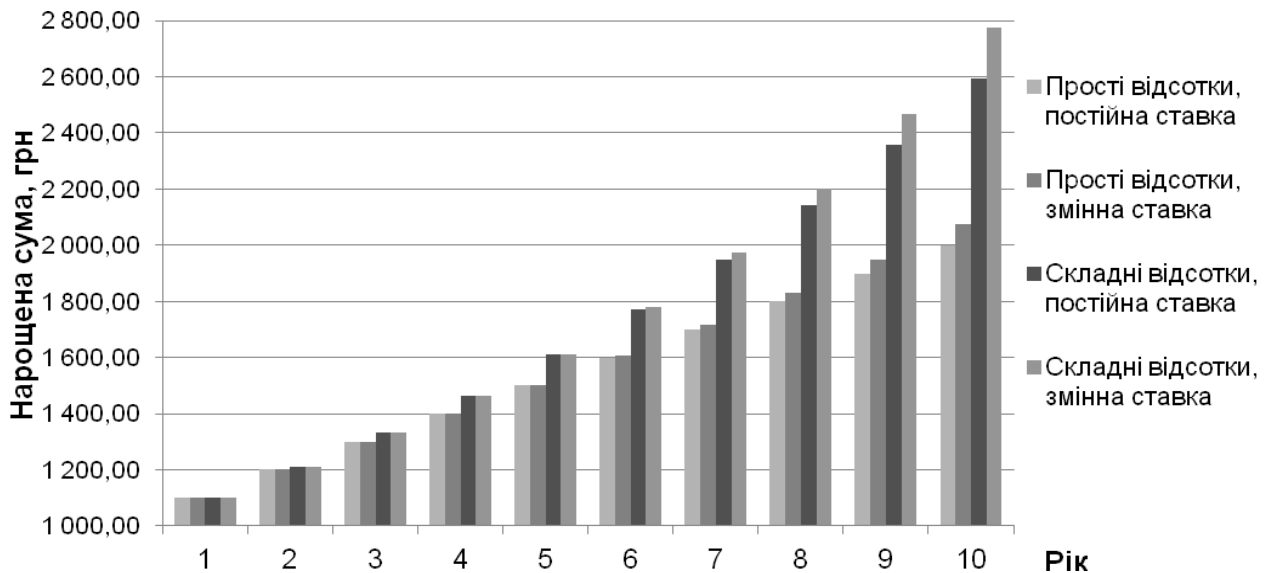


Рис. 1.15. Динаміка зміни нарощеної суми під час різних умов вкладу

Таким чином, нарощена сума за складними відсотками більша, ніж за простими, за змінними відсотками, що зростають, більша, ніж за постійними і чим довший термін, тим відчутніша різниця. В умовах інфляції зростання реальної нарощеної суми можливе тільки, якщо відсоткова ставка суттєво перевищує темп зростання цін.

Методичні рекомендації до виконання завдання 2

1. Нарахування простих відсотків за депозитом

1.1. Нарахування простих відсотків способами 365/365, 365/360, 360/360. Оскільки відсоткову ставку, як правило, встановлюють в розрахунку за рік, то під час терміну позики менше року необхідно визначити, яку частину річного відсотка сплачують кредиторіві. Аналогічна проблема виникає і у випадках, коли термін позики менше періоду нарахування.

Слід розглянути найбільш поширений у практиці випадок – з річними періодами нарахування. Очевидно, що термін позики необов'язково рівний цілому числу років. Варто виразити термін n у вигляді дробу:

$$n = \frac{t}{K},$$

де t – кількість днів позики;

K – кількість днів у році, або часова база нарахування відсотків.

У цьому випадку формула (1) набуде вигляду:

$$S = P \times \left(1 + \frac{t}{K} i\right).$$

Під час розрахунку відсотків застосовують дві часові бази: $K = 360$ днів (12 місяців по 30 днів) або $K = 365$ (366) днів. Якщо $K = 360$, то отримують *звичайні* або *комерційні* відсотки, а під час використання дійсної тривалості року (365, 366 днів) розраховують *точні* відсотки.

Кількість днів позики також можна виміряти під приблизно і точно. У першому випадку тривалість позики визначають з умови, згідно з якою будь-який місяць під приймають рівним 30 дням. У свою чергу, точне число днів позики визначають шляхом підрахунку числа днів між датою видачі позики і датою її погашення. День видачі і день погашення вважають за один день. Отже, можливі і застосовуються на практиці три варіанти розрахунку простих відсотків.

1. *Точні відсотки з точним числом днів позики.* Цей варіант, природно, дає найточніші результати. Даний спосіб застосовують центральні банки багатьох країн і крупні комерційні банки, наприклад, у Великобританії, США. У комерційних документах його позначають як 365/365 або АСТ/АСТ.

2. *Звичайні відсотки з точним числом днів позики.* Цей метод, іноді званий *банківським*, поширений у позикових операціях комерційних банків між країнами, у внутрішніх операціях – у Франції, Бельгії, Швейцарії. Його позначають як 365/360, або АСТ/360. Цей варіант дає дещо більший результат, чим застосування точних відсотків. Слід зазначити, що за умови числа днів позики, що перевищує 360, цей спосіб під приводить до того, що сума нарахованих відсотків буде більша, ніж передбачається річною ставкою.

3. *Звичайні відсотки з наближеною кількістю днів позики.* Такий метод застосовують тоді, коли не вимагається великої точності, наприклад, під час проміжних розрахунків. Він під прийнятий у практиці комерційних банків Німеччини, Швеції, Данії. Метод умовно позначають як 360/360.

Варто визначити спочатку термін позики, беручи до уваги, що день відкриття і день закриття депозиту рахують за один день. Таким чином, *точна кількість днів* позики з 10 грудня поточного року до 20 березня

наступного року складе $t = 22 + 31 + 29 + 20 - 1 = 101$ день. *Наближена кількість днів* складе $t = 21 + 30 + 30 + 20 - 1 = 100$ днів.

Відповідно початковим даним $P = 20\,000$, $i = 0,15$. Розрахунки майбутньої вартості внеску під час нарахування простих відсотків за різними варіантами наведені у табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Розрахунки нарощеної суми депозиту під час нарахування простих відсотків

Варіанти розрахунку	Формули розрахунку	Усього на рахунку в кінці строку, грн
365/365	$S = 20\,000 \left(1 + \frac{101}{365} \times 0,15 \right)$	20 830,14
365/360	$S = 20\,000 \left(1 + \frac{101}{360} \times 0,15 \right)$	20 841,67
360/360	$S = 20\,000 \left(1 + \frac{100}{360} \times 0,15 \right)$	20 833,33

Нарахування простих відсотків способами 365/365, 365/360, 360/360 можна здійснити у *MS Excel* на новому листі, який назвати "Похідні відсоткові розрахунки". Кінцевий робочий аркуш і використані формули наведені на рис. 1.16.

	A	B	C
1	1. Нарахування простих відсотків за депозитом		
2	1.1. Нарахування простих відсотків способами 365/365, 365/360, 360/360		
3	Вихідні дані		
4	P	20000	
5	i	0,15	
6			
7	Спосіб нарахування відсотків	Всього на рахунку в кінці строку, грн	
8	365/365	S=	=B4*(1+101/365*B5)
9	365/360	S=	=B4*(1+101/360*B5)
10	360/360	S=	=B4*(1+100/360*B5)

Рис. 1.16. Розрахунок майбутньої вартості внеску під час нарахування простих відсотків різними способами

Результати виконання у *MS Excel* розрахунку майбутньої вартості під час нарахування простих відсотків різними способами наведені на рис. 1.17.

	A	B	C	D	E
1	1. Нарухування простих відсотків за депозитом				
2	1.1. Нарухування простих відсотків способами 365/365, 365/360, 360/360				
3	Вихідні дані				
4	P	20000			
5	i	0,15			
6					
7	Спосіб нарахування відсотків	Всього на рахунку в кінці строку, грн			
8	365/365	S=	20830,14		
9	365/360	S=	20841,67		
10	360/360	S=	20833,33		

Рис. 1.17. Результати розрахунку майбутньої вартості внеску під час нарахування простих відсотків різними способами

Як видно з рис. 1.17, нарощена сума депозиту буде максимальною під час застосування способу 365/360, отже у ході відкриття банківського депозиту вкладнику доцільно обрати саме цей спосіб.

Якщо загальний термін позики охоплює два суміжні календарні роки і є необхідність в діленні суми відсотків між ними (наприклад, у процесі визначення річних сум доходу), то загальна сума нарахованих простих відсотків складе суму відсотків, отриманих у кожному році:

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1i + Pn_2i,$$

де n_1 і n_2 – частини терміну позики, що приходяться на кожен календарний рік.

За умови варіанта розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_1 = 20\,000 \times \frac{22 - 0,5}{365} \times 0,15 = 176,71 \text{ (грн)},$$

$$I_2 = 20\,000 \times \frac{80 - 0,5}{365} \times 0,15 = 653,42 \text{ (грн)},$$

$$I = I_1 + I_2 = 176,71 + 653,42 = 830,14 \text{ (грн)}.$$

За умови варіанта розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20\,000 \times \frac{22 - 0,5}{360} \times 0,15 = 179,17 \text{ (грн)},$$

$$I_2 = 20\,000 \times \frac{80 - 0,5}{360} \times 0,15 = 662,50 \text{ (грн)},$$

$$I = I_1 + I_2 = 179,17 + 662,50 = 841,67 \text{ (грн)}.$$

За умови варіанта розрахунку 360/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20\,000 \times \frac{21 - 0,5}{360} \times 0,15 = 170,83 \text{ (грн)},$$

$$I_2 = 20\,000 \times \frac{80 - 0,5}{360} \times 0,15 = 662,50 \text{ (грн)},$$

$$I = I_1 + I_2 = 170,83 + 662,50 = 833,33 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* суми відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо наведено на рис. 1.18.

	A	B
13	Відсотки в кожному календарному періоді, грн	
14	365/365	
15	I1	=\$B\$4*(22-0,5)/365*\$B\$5
16	I2	=\$B\$4*(80-0,5)/365*\$B\$5
17	I	=СУММ(B15:B16)
18		
19	365/360	
20	I1	=\$B\$4*(22-0,5)/360*\$B\$5
21	I2	=\$B\$4*(80-0,5)/360*\$B\$5
22	I	=СУММ(B20:B21)
23		
24	365/360	
25	I1	=\$B\$4*(21-0,5)/360*\$B\$5
26	I2	=\$B\$4*(80-0,5)/360*\$B\$5
27	I	=СУММ(B25:B26)

Рис. 1.18. Розрахунок суми відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо

Результати розрахунку суми відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо наведено на рис. 1.19.

	A	B	C
13	Відсотки в кожному календарному періоді, грн		
14	365/365		
15	I1	176,71	
16	I2	653,42	
17	I	830,14	
18			
19	365/360		
20	I1	179,17	
21	I2	662,50	
22	I	841,67	
23			
24	365/360		
25	I1	170,83	
26	I2	662,50	
27	I	833,33	

Рис. 1.19. **Результати розрахунку суми відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо**

1.2. Поповнення депозиту. Якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму, то зміни у сумі нарахованих відсотків відбудуться тільки у другому календарному році.

За умови варіанта розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_2 = 40\,000 \times \frac{80 - 0,5}{365} \times 0,15 = 1\,306,85 \text{ (грн)},$$

$$I = I_1 + I_2 = 176,71 + 1\,306,85 = 1\,483,56 \text{ (грн)}.$$

За умови варіанта розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_2 = 40\,000 \times \frac{80 - 0,5}{360} \times 0,15 = 1\,325,00 \text{ (грн)},$$

$$I = I_1 + I_2 = 179,17 + 1\,325,00 = 1\,504,17 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* суми відсотків за депозитом, якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму, наведено на рис. 1.20.

	A	B	C
28			
29	Спосіб нарахування відсотків	Сума відсотків, грн	
30	365/365	I = -\$B\$4*(22-0,5)/365*\$B\$5+40000*(80-0,5)/365*\$B\$5	
31	365/360	I = -\$B\$4*(22-0,5)/360*\$B\$5+40000*(80-0,5)/360*\$B\$5	

Рис. 1.20. **Розрахунок суми відсотків за депозитом під час його поповнення**

Результати розрахунку суми відсотків за депозитом, якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму, наведено на рис. 1.21.

	A	B	C
28			
29	Спосіб нарахування відсотків	Сума відсотків, грн	
30	365/365	=	1483,56
31	365/360	=	1504,17

Рис. 1.21. Результати розрахунку суми відсотків за депозитом під час його поповнення

2. Нарухування складних відсотків за депозитом

Складні відсотки. У випадку визначення нарощеної величини депозиту під час нарахування складних відсотків у цілому за період менший одного року формула (2) набуде вигляду:

$$S = P \left(1 + \frac{i}{K} \right)^t.$$

Відповідно початковим даним $P = 20\,000$, $i = 0,15$, варіант розрахунку прийнятий 365/365. Тоді майбутня вартість внеску складе:

$$S = 20\,000 \left(1 + \frac{0,15}{365} \right)^{101} = 20\,847,43 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* нарощеної величини депозиту під час нарахування складних відсотків у цілому за період наведено на рис. 1.22.

	A	B	
41			
42	2. Нарухування складних відсотків за депозитом		
43			
44	S=	=B4*(1+B5/365)^101	

42	2. Нарухування складних відсотків за депозитом		
43			
44	S=	20847,43 грн	

Рис. 1.22. Розрахунок і результат розрахунку нарощеної величини депозиту під час нарахування складних відсотків

Відсотки за кожним із періодів у випадку нарахування складних відсотків визначають за формулами:

$$I_1 = P \left(\left(1 + \frac{i}{K} \right)^{t_1} - 1 \right); \quad I_2 = P \left(\left(1 + \frac{i}{K} \right)^t - \left(1 + \frac{i}{K} \right)^{t_1} \right),$$

де t_1 – кількість днів вкладу в першому календарному році.

Відсотки за кожним з періодів для варіанта 365/365 і нарахована сума складуть:

$$I_1 = 20\,000 \left(\left(1 + \frac{0,15}{365} \right)^{22-0,5} - 1 \right) = 177,46 \text{ (грн)},$$

$$I_2 = 20\,000 \left(\left(1 + \frac{0,15}{365} \right)^{101} - \left(1 + \frac{0,15}{365} \right)^{22-0,5} \right) = 669,97 \text{ (грн)},$$

$$I = I_1 + I_2 = 847,43 \text{ (грн)},$$

$$S = P + I = 20\,000 + 847,43 = 20\,847,43 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у MS Excel суми складних відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо наведено на рис. 1.23 і 1.24.

	A	B	
155	Сума складних відсотків у кожному календарному періоді		
156		$I_1 = =B4*((1+B5/365)^(22-0,5))$	
157		$I_2 = =B4*((1+B5/365)^101-(1+0,$	
158		$I = =СУММ(B156:B157)$	

Рис. 1.23. Розрахунок суми складних відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо

	A	B	C	D	E
155	Сума складних відсотків у кожному календарному періоді, грн				
156	$I_1 =$	177,46			
157	$I_2 =$	669,97			
158	$I =$	847,43			

Рис. 1.24. Результати розрахунку суми складних відсотків за депозитом у кожному календарному році окремо

3. Дисконтування

3.1. Дисконтування за простою дисконтною ставкою. Сутність операції полягає у такому: відсотки нараховують на початку розрахункового періоду, під час цього за базу (100 %) беруть суму погашення боргу, тобто банк утримує авансові відсотки під час видачі кредиту (або відсотки за депозитом виплачують у момент відкриття депозитного рахунку). Під час цього застосовують облікову ставку d (це *банківський облік*).

Розмір дисконту або суми обліку очевидно рівний $S \times n \times d$; якщо d – річна облікова ставка, то n вимірюють в роках. Тоді:

$$P = S - Snd = S(1 - nd). \quad (6)$$

Дисконтний множник тут дорівнює $(1 - nd)$. З формули (6) наявний наслідок, що за умови $n > 1/d$ величина дисконтного множника a , отже, сума P стане від'ємною. Тобто за умови відносно великого терміну зобов'язання облік може під призвести до нульової або навіть від'ємної суми P . Наприклад, за умови $d = 20\%$ вже п'ятирічний термін достатній для того, щоб позичальник нічого не отримав під час обліку зобов'язання.

Облік за допомогою облікової ставки найчастіше здійснюють за умови часової бази $K = 360$ днів, число днів позики зазвичай беруть точним.

Якщо вважати, що в початкових даних вказано суму погашення і просту дисконтну ставку, то розрахувати первинну суму можна у такий спосіб.

Під час варіанту розрахунку 365/365 первинна сума становить:

$$P = S \left(1 - \frac{t}{K} d \right) = 20\,000 \left(1 - \frac{101}{365} \times 0,15 \right) = 19\,169,86 \text{ (грн)}.$$

За умови варіанта розрахунку 365/360 первинна сума становить:

$$P = 20\,000 \left(1 - \frac{101}{360} \times 0,15 \right) = 19\,158,33 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* первинної суми депозиту за простою дисконтною ставкою наведено на рис. 1.25 і 1.26.

	A	B	
33	Дисконтування за простою дисконтною ставкою		
34	365/365		
35	P=	=\$B\$4*(1-101/365*\$B\$5)	грн
36	365/360		
37	P=	=\$B\$4*(1-101/360*\$B\$5)	грн
38			

Рис. 1.25. Розрахунок первинної суми депозиту за простою дисконтною ставкою

	A	B	C
33	Дисконтування за простою дисконтною ставкою		
34	365/365		
35	P=	19169,86	грн
36	365/360		
37	P=	19158,33	грн

Рис. 1.26. Результати розрахунку первинної суми депозиту за простою дисконтною ставкою

3.2. Дисконтування за складною дисконтною ставкою. У практиці облікових операцій іноді застосовують *складну облікову ставку*. У цих випадках процес дисконтування відбувається з уповільненням, оскільки кожного разу облікова ставка застосовується не до первинної суми (як під час простої облікової ставки), а до суми, дисконтованої на попередньому етапі в часі. Дисконтування за складною обліковою ставкою здійснюють за формулою:

$$P = S(1 - d)^n,$$

де d – складна річна облікова ставка.

Дисконтування може проводитися не один, а m раз на рік, тобто кожного разу облік проводиться за ставкою f/m . У цьому випадку:

$$P = S \left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm},$$

де f – номінальна річна облікова ставка.

Якщо вважати, що в початкових даних вказана сума погашення і складна дисконтна ставка, то розрахувати первинну суму за умови дисконтування один раз на рік ($K = 365$) можна так:

$$P = S(1 - d)^{\frac{t}{K}} = 20\,000(1 - 0,15)^{\frac{101}{365}} = 19\,120,50 \text{ (грн)}.$$

За умови щоденного дисконтування:

$$P = S \left(1 - \frac{f}{K}\right)^t = 20\,000 \left(1 - \frac{0,15}{365}\right)^{101} = 19\,186,69 \text{ (грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* первинної суми депозиту за складною дисконтною ставкою наведено на рис. 1.27.

	A	B	C	D
164	Дисконтування за складною дисконтною ставкою			
165	1 раз на рік		P= =B4*(1-B5)^(101/365)	грн
166	щоденно		P= =B4*(1-B5/365)^101	грн

	A	B	C	D	E	F
164	Дисконтування за складною дисконтною ставкою					
165	1 раз на рік	P=	19120,50	грн		
166	щоденно	P=	19186,69	грн		

Рис. 1.27. Розрахунок і результати розрахунку первинної суми депозиту за складною дисконтною ставкою

4. Ефективна відсоткова ставка.

Дійсна або ефективна ставка відсотка вимірює той реальний відносний дохід, який отримують у цілому за рік. Тобто, ефективна ставка – це річна ставка складних відсотків, яка дає той же результат, що і m -разове нарахування відсотків по ставці j/m .

Варто позначити ефективну ставку через i . За визначенням множники нарощування за двома ставками (ефективною і номінальною під час m -разового нарахування) повинні дорівнювати один одному:

$$(1 + i)^n = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm}.$$

З рівності множників нарощування виходить: $i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1$.

Ефективна ставка за умови $m > 1$ більше номінальної. Обидві ставки еквівалентні у фінансовому відношенні.

Примітка: У середовищі MS Excel є можливість розрахунку ефективної відсоткової ставки під час нарахування складних відсотків за допомогою вбудованої функції *EFFECT*, яка має наступний синтаксис:

$$EFFECT(\text{номін_ставка}; \text{кількість_пер}),$$

де *номін_ставка* – номінальна річна відсоткова ставка;

кількість_пер – кількість періодів у році, за які нараховують складні відсотки.

І навпаки, знаючи ефективну ставку, можна розрахувати номінальну відсоткову ставку за допомогою вбудованої функції *NOMINAL*, яка має такий синтаксис:

$$NOMINAL(\text{ефект_ставка}; \text{кількість_пер}),$$

де *ефект_ставка* – фактична відсоткова ставка;

кількість_пер – кількість періодів у році, за які нараховують складні відсотки.

За умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів ефективні ставки складуть:

$$i = \left(1 + \frac{0,15}{365}\right)^{365} - 1 = 0,1618; \quad i = \left(1 + \frac{0,15}{360}\right)^{360} - 1 = 0,1618.$$

Розрахунок у MS Excel ефективних ставок за умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів наведено на рис. 1.28 і 1.29.

	A	B	C	D	E
161	Ефективні ставки				
162	Кількість періодів в році, за які нараховуються складні відсотки	Ефективна ставка за формулою	Ефективна ставка за функцією ЭФФЕКТ	Номінальна ставка за функцією НОМИНАЛ	
163	365	$i = ((1 + \$B\$5/365)^{365}) - 1$	=ЭФФЕКТ(0,15;A163)	=НОМИНАЛ(C163;A163)	
164	360	$i = ((1 + \$B\$5/360)^{360}) - 1$	=ЭФФЕКТ(0,15;A164)	=НОМИНАЛ(C164;A164)	

Рис. 1.28. Розрахунок ефективних ставок за умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів

	A	B	C	D	E
161	Ефективні ставки				
	Кількість періодів в році, за які нараховують ся складні відсотки	Ефективна ставка за формулою	Ефективна ставка за функцією ЕФФЕКТ	Номінальна ставка за функцією НОМИНАЛ	
162					
163	365	i=	0,1618	0,1618	0,15
164	360	i=	0,1618	0,1618	0,15

Рис. 1.29. Результати розрахунку ефективних ставок за умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів

Можна бачити, ефективні ставки рівні для обох варіантів нарахування і перевищують номінальну ставку.

Лабораторна робота 2

Моделювання постійних та змінюваних фінансових потоків

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок розрахунку параметрів постійних та змінюваних фінансових рент (потоків платежів).

Завдання 1. Початкові дані. Депозитний договір поміщений на 5 років і передбачає щорічні внески в кінці року на депозитний рахунок у розмірі 10 тис. грн, відсоткова ставка складає 10 % складних річних.

Необхідно:

1. Визначити нарощену суму ренти:

1.1. Визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховують один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

1.2. Визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо рентні платежі вносять щокварталу, відсотки нараховують один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

1.3. Скласти загальну таблицю і порівняти результати нарощування річних і p -строкових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків $S(p, m)$, для $p = 1, 2, 4, 12$ і $m = 1, 2, 4, 12$. Зробити висновки.

2. Визначити сучасну величину ренти:

2.1. Визначити сучасну величину ренти, якщо відсотки нараховують один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

2.2. Визначити сучасну величину ренти, якщо рентні платежі вносять щокварталу, відсотки нараховують один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

2.3. Скласти загальну таблицю і порівняти результати під приведення річних і p -строкових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків $A(p, m)$, для $p = 1, 2, 4, 12$ і $m = 1, 2, 4, 12$. Зробити висновки.

3. Розрахувати тривалість ренти за умови параметрів $p = 1, 4$ і $m = 1, 4$, якщо відомо її нарощену величину, порівняти з початковими даними.

4. Розрахувати нарощену і сучасну величину річної ренти пренумерандо, якщо відсотки нараховують один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

Завдання 2. Початкові дані. Фірма пропонує покупцеві свою продукцію на суму 2 млн грн з умовою її оплати на виплат протягом 2 років під 15 % річних (складні відсотки). Платежі повинні вноситися щокварталу, відсотки нараховуються в кінці року.

Необхідно визначити умови конверсії цієї пропозиції. Зробити висновки.

Завдання 3. Початкові дані. Фірма з торгівлі нерухомістю пропонує об'єкт вартістю 1,5 млн грн. Під час цього пропонують різні варіанти оплати.

Необхідно:

3.1. Визначити фінансові наслідки одноразової оплати.

3.2. Визначити фінансові наслідки, якщо оплата відбудеться протягом 2 років рівними платежами, що вносять в кінці року під 9 % річних.

3.3. Визначити фінансові наслідки, якщо буде оплата з відстроченням платежу в один рік, а інші умови аналогічні попередньому варіанту.

3.4. Визначити фінансові наслідки, якщо буде оплата з відстроченням в один рік, але термін ренти зростає до трьох років, зробити висновки.

Завдання 4. Початкові дані. Є три річні ренти (негайні з нарахуванням % в кінці періодів) з такими параметрами: $R_1 = 0,2$ млн грн, $n_1 = 2$ роки, $i_1 = 9\%$; $R_2 = 0,25$ млн грн, $n_2 = 4$ роки, $i_2 = 8\%$; $R_3 = 0,37$ млн грн, $n_3 = 5$ років, $i_3 = 10\%$. Їх запропоновано замінити однією річною рентою з нарахуванням % у кінці періоду, термін погашення консолідованої ренти $n = 5$ років, $i = 10\%$.

Необхідно:

4.1. Визначити величину рентного платежу консолідованої ренти, якщо початок її терміну збігається з початком терміну всіх замінюваних рент.

4.2. Визначити величину рентного платежу консолідованої ренти, якщо оплата за новою рентою відкладається на 2 роки.

Завдання 5. Початкові дані. На модернізацію підприємства отриманий довгостроковий кредит строком на 10 років, погашення якого здійснюватиметься на таких умовах: у перших 5 років платежі у розмірі 3 млн грн вносять кожні півроку під 8 % річних, наступних 3 роки платежі у розмірі 5 млн грн вносять також за півріччями під 10 % річних, останні 2 роки платежі у розмірі 6 млн грн вносять щокварталу під 10 % річних. Протягом всього терміну ренти відсотки нараховують раз на рік.

Необхідно визначити нарощену величину ренти.

Завдання 6. Початкові дані. Кредит розміром 15 млн грн має бути погашений протягом 5 років постійно зростаючими платежами з абсолютним щорічним приростом, рівним 0,5 млн грн. Платежі і нарахування відсотків на них відбуваються в кінці року, відсоткова річна ставка – 9 %.

Необхідно визначити розмір першого платежу і загальну суму виплат.

Завдання 7. Початкові дані. Отриманий кредит строком на 7 років. Умови погашення такі: перший платіж 0,2 млн грн, кожен наступний зростає на 10 %, платежі вносяться двічі в році, відсоткова ставка 8 % річних.

Необхідно визначити розмір отриманого кредиту і суму, що підлягає виплаті.

Методичні рекомендації до виконання завдання 1

1. Нарощена сума ренти

1.1. Річна рента з нарахуванням відсотків m раз на рік. Ряд послідовних фіксованих платежів, здійснених через рівні проміжки часу, називають *фінансовою рентою*, або *ануїтетом*. Фінансова рента (далі – рента) може бути охарактеризована рядом параметрів:

член ренти (R) – величина кожного окремого платежу;

період ренти – часовий інтервал між двома платежами;

термін ренти (n) – час від початку реалізації ренти до моменту нарахування останнього платежу;

відсоткова ставка (i) – ставка, що використовують для розрахунку нарощування або дисконтування платежів, що складають ренту.

Окрім перерахованих параметрів рента характеризується: кількістю платежів протягом року; частотою нарахування відсотків (тобто кількістю періодів у році, коли нараховуються відсотки); моментом здійснення платежів (на початку, середині або в кінці року) та ін.

Ренти, за якими платежі проводять раз на рік, називають *річними*. Залежно від частоти нарахування відсотків розрізняють *ренти з нарахуванням відсотків один раз на рік, кілька разів на рік (m раз) і безперервним нарахуванням*.

Нарощена сума річної ренти з нарахуванням відсотків один раз розраховують за формулою:

$$S = R \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Якщо член ренти $R = 10$ тис. грн, термін ренти $n = 5$ років, а відсоткова ставка на рік $i = 0,1$, то нарощена сума річної ренти складе:

$$S = 10\,000 \frac{(1 + 0,1)^5 - 1}{0,1} = 61,051 \text{ (тис. грн)}.$$

Варто розглянути річну ренту з нарахуванням відсотків m раз на рік. У цьому випадку нарахування відсотків кожного разу проводитиметься за ставкою j/m , де j – номінальна (річна) ставка складних відсотків, кількість членів ренти рівне $n \times m$. Величина нарощеної суми визначатиметься за формулою:

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1},$$

де n – термін ренти в роках.

Визначити нарощену суму річної ренти до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховують щокварталу, щомісячно:

$$S = 10 \frac{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{5 \cdot 4} - 1}{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^4 - 1} = 61,5161 \text{ (тис. грн)},$$

$$S = 10 \frac{\left(1 + 0,1/12\right)^{5 \cdot 12} - 1}{\left(1 + 0,1/12\right)^{12} - 1} = 61,6264 \text{ (тис. грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* нарощеної суми річної ренти до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховують один раз на рік, щокварталу, щомісячно наведено на рис. 2.1 і 2.2.

	A	B	C
1	Вихідні дані		
2	n	5	років
3	R	10	тис. грн
4	i	0,1	процентна ставка в сотих долях
5			
6	Визначимо на		
7			
8	Нарахування відсотків m раз на рік	S, тис. грн	
9	1	=B3*((1+B4)^B2)-1)/B4	
10	4	=\$B\$3*((1+\$B\$4/4)^(B\$2*4)-1)/((1+\$B\$4/4)^4-1)	
11	12	=\$B\$3*((1+\$B\$4/12)^(B\$2*12)-1)/((1+\$B\$4/12)^12-1)	

Рис. 2.1. Розрахунок нарощеної суми річної ренти до кінця терміну депозиту

	A	B	C	D	E	F	G
1	Вихідні дані						
2	n	5	років				
3	R	10	тис. грн				
4	i	0,1	процентна ставка в сотих долях				
5							
6	Визначимо нарощену суму річної ренти до кінця терміну депозиту						
7							
8	Нарахування відсотків m раз на рік	S, тис. грн					
9	1	61,051					
10	4	61,516					
11	12	61,626					

Рис. 2.2. Результати розрахунку нарощеної суми річної ренти до кінця терміну депозиту

1.2. Рента p -строкова з нарахуванням відсотків m раз на рік.

Якщо рентні платежі вносять кілька разів на рік рівними сумами (p -строкова), а нарахування відсотків проводять раз на рік, у кінці року ($m = 1$), тоді річний платіж рівний R , перший член ренти – R/p , а загальна кількість членів ренти рівне $n \times p$. Нарощена сума, якщо платежі вносять щокварталу складе:

$$S = \frac{R}{p} \times \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{10}{4} \times \frac{(1+0,1)^5 - 1}{(1+0,1)^{1/4} - 1} \approx 63,295 \text{ (тис. грн).}$$

Нарощену суму для p -строкової ренти, для якої кількість періодів нарахування відсотків протягом року рівна кількості рентних платежів (тобто $p = m$), визначають за формулою:

$$S = R \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{j} = 10 \times \frac{\left(1 + \frac{0,1}{4}\right)^{5 \times 4} - 1}{0,1} \approx 63,862 \text{ (тис. грн).}$$

Нарощену суму для p -строкової ренти, для якої кількість рентних платежів протягом року не рівна кількості періодів нарахування відсотків, (тобто $p \neq m$), визначають за формулою:

$$S = \frac{R}{p} \times \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{m/p} - 1}.$$

Визначити нарощену суму p -срочної ренти до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховують щомісячно:

$$S = \frac{10}{12} \times \frac{\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{5 \times 12} - 1}{\left(1 + \frac{0,1}{12}\right)^{12/4} - 1} \approx 63,996 \text{ (тис. грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* нарощеної суми *p*-строкової ренти з нарахуванням відсотків *m* раз на рік наведено на рис. 2.3 і 2.4.

	A	B
13	Рента <i>p</i> – срочна з нарахуванням відсотків <i>m</i> раз на рік	
14		
15	R	=B3/4
16	<i>p</i>	4
	Нарахування відсотків <i>m</i> раз на рік	S, тис. грн
17		
18	1	=B3*((1+B4)^B2-1)/(B16*((1+B4)^(1/B16)-1))
19	4	=B3*((1+B4/4)^(5*4)-1)/B4
20	12	=F31

Рис. 2.3. Розрахунок нарощеної суми *p*-строкової ренти з нарахуванням відсотків *m* раз на рік

	A	B	C
13	Рента <i>p</i> – срочна з нарахуванням відсотків <i>m</i> раз на рік		
14			
15	R	2,5	
16	<i>p</i>	4	
	Нарахування відсотків <i>m</i> раз на рік	S, тис. грн	
17			
18	1	63,295	
19	4	63,862	
20	12	63,996	

Рис. 2.4. Результати розрахунку нарощеної суми *p*-строкової ренти з нарахуванням відсотків *m* раз на рік

1.3. Порівняння нарощених сум. Як видно з наведених формул, частота платежів і нарахування відсотків помітно впливають на розмір нарощеної суми. Результати розрахунків нарощених сум для різних умов здійснення платежів і нарахування відсотків наведені на рис. 2.5 і 2.6.

	A	B	C	D	E
1	n=	5			
2	R=	10			
3	i=	0,1			
4					
5	Число рентних платежів протягом року, p	Число періодів нарахування відсотків, m			
6		1	2	4	12
7	1	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$B\$6)^{\$B\$6*\$B\$1}-1)/(\$A\$7*((1+\$B\$3/\$B\$6)^{\$B\$6/\$A\$7}-1))$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$C\$6)^{\$B\$6/\$A\$7}-1)$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$D\$6)^{\$B\$6/\$A\$7}-1)$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$E\$6)^{\$B\$6/\$A\$7}-1)$
8	2	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$B\$6)^{\$B\$6*\$B\$1}-1)/(\$A\$8*((1+\$B\$3/\$B\$6)^{\$B\$6/\$A\$8}-1))$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$C\$6)^{\$B\$6/\$A\$8}-1)$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$D\$6)^{\$B\$6/\$A\$8}-1)$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$E\$6)^{\$B\$6/\$A\$8}-1)$
9	4	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$B\$6)^{\$B\$6*\$B\$1}-1)/(\$A\$9*((1+\$B\$3/\$B\$6)^{\$B\$6/\$A\$9}-1))$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$C\$6)^{\$B\$6/\$A\$9}-1)$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$D\$6)^{\$B\$6/\$A\$9}-1)$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$E\$6)^{\$B\$6/\$A\$9}-1)$
10	12	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$B\$6)^{\$B\$6*\$B\$1}-1)/(\$A\$10*((1+\$B\$3/\$B\$6)^{\$B\$6/\$A\$10}-1))$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$C\$6)^{\$B\$6/\$A\$10}-1)$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$D\$6)^{\$B\$6/\$A\$10}-1)$	$=\$B\$2*((1+\$B\$3/\$E\$6)^{\$B\$6/\$A\$10}-1)$

Рис. 2.5. Розрахунок нарощених сум рент постномерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків

	A	B	C	D	E
1	n=	5			
2	R=	10			
3	i=	0,1			
4					
5	Число рентних платежів протягом року, p	Число періодів нарахування відсотків, m			
6		1	2	4	12
7	1	61,051	61,356	61,516	61,626
8	2	62,541	62,889	63,073	63,200
9	4	63,295	63,666	63,862	63,996
10	12	63,801	64,187	64,391	64,531

Рис. 2.6. Порівняння нарощених сум рент постномерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків

Зіставити розглянуті варіанти нарощених сум.

Позначити порівнювані суми як $S(p, m)$. Для одних і тих самих сум річних виплат, тривалості рент і розмірів відсоткових ставок буде отримано такі співвідношення:

$$S(1,1) < S(1,m) < S(p,1) < S(p,m) < S(p,m) < S(p,m) \\ m > 1 \quad p > 1 \quad m > p > 1 \quad p = m > 1 \quad p > m > 1$$

Наведені нерівності можуть бути використані під час вибору умов контрактів, оскільки дозволяють заздалегідь (до розрахунку) отримати

уявлення про результати, пов'язані з конкретними умовами. Наприклад, можна заздалегідь сказати, що рента з умовами $p = 2$ і $m = 4$ дає меншу нарощену суму, ніж з $p = 4$ і $m = 2$ з огляду рівності всіх інших умов.

2. Сучасна величина ренти

2.1. Сучасна величина звичайної ренти (постнумерандо). Під сучасною (приведеною, або поточною) величиною потоку платежів розуміють суму дисконтованих членів цього потоку на деякий попередній момент часу. Сучасна вартість потоку платежів еквівалента у фінансовому сенсі всім платежам, які охоплює потік.

У випадку річної ренти оцінювання сучасної величини (A) проводять на момент початку реалізації ренти (рента негайна) і складає:

$$A = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 10 \times \frac{1-(1+0,1)^{-5}}{0,1} \approx 37,908 \text{ (тис. грн)}. \quad (7)$$

Математично взаємозв'язок між сучасною і нарощеною величиною ренти можна виразити таким чином:

$$A \times (1 + i)^n = S.$$

Це дає можливість переконатися, що наведена величина еквівалентна всім платежам, складовим потоку рентних платежів.

Під час нарахування відсотків m раз на рік сучасну величину ренти обчислюють за формулою (5), у якій замінили дисконтний множник $(1 + i)^{-n}$ на еквівалентну величину $(1 + j/m)^{-nm}$, а i на $(1 + j/m)^m - 1$. Тоді сучасна вартість річної ренти з нарахуванням відсотків m раз на рік може бути визначена так:

$$A = R \times \frac{1 - (1 + j/m)^{-nm}}{(1 + j/m)^m - 1} = R \times a_{nm, j/m}.$$

Визначити сучасну величину ренти, якщо відсотки нараховують щокварталу і щомісяця:

$$A = 10 \times \frac{1 - (1 + 0,1/4)^{-5 \cdot 4}}{(1 + 0,1/4)^4 - 1} \approx 37,541 \text{ (тис. грн)},$$

$$A = 10 \times \frac{1 - (1 + 0,1/12)^{-5 \cdot 12}}{(1 + 0,1/12)^{12} - 1} \approx 37,456 \text{ (тис. грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* сучасної величини ренти наведено на рис. 2.7 і 2.8.

	A	B	C
37	Нарахування відсотків m раз на рік	Сучасна величина ренти A , тис. грн	Нарощена сума ренти S , тис. грн
38	1	=B3*(1-(1+B4)^(-B2))/B4	=B38*(1+B4)^B2
39	4	=10*(1-(1+0,1/4)^(-5*4))/((1+0,1/4)^4-1)	=B39*(1+0,1/4)^20
40	12	=10*(1-(1+0,1/12)^(-5*12))/((1+0,1/12)^12-1)	=B40*(1+0,1/12)^(5*12)

Рис. 2.7. Розрахунок сучасної величини ренти з нарахуванням відсотків m раз на рік

	A	B	C
37	Нарахування відсотків m раз на рік	Сучасна величина ренти A , тис. грн	Нарощена сума ренти S , тис. грн
38	1	37,908	61,051
39	4	37,541	61,516
40	12	37,456	61,626

Рис. 2.8. Результати розрахунку сучасної величини ренти з нарахуванням відсотків m раз на рік

2.2. Сучасна величина p -строкової ренти. Під час внесення рентних платежів кілька разів у році (p -строкова рента) і нарахуванні відсотків один раз в році ($m = 1$) коефіцієнти приведення знаходяться так само, як і для річної ренти, але за умови, що розмір платежу рівний, а число членів ренти складе $n \times p$. Сума дисконтованих платежів у разі їх щоквартального внесення буде рівна:

$$A = \frac{R}{p} \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{(1 + i)^{1/p} - 1} = \frac{10}{4} \times \frac{1 - (1 + 0,1)^{-5}}{(1 + 0,1)^{1/4} - 1} \approx 39,301 \text{ (тис. грн).}$$

Сучасну величину p -строкової ренти, для якої кількість періодів нарахування відсотків протягом року рівна числу рентних платежів (тобто $p = m$), визначають за формулою:

$$A = R \times \frac{1 - (1 + j/m)^{-nm}}{j} = 10 \times \frac{1 - (1 + 0,1/4)^{-5 \times 4}}{0,1} \approx \approx 38,973 \text{ (тис. грн).}$$

Сучасну величину p -строкової ренти, для якої кількість періодів нарахування відсотків протягом року не рівна кількості рентних платежів тобто $p \neq m$ (наприклад, якщо нарахування відбувається щомісяця), визначають за формулою:

$$A = \frac{R}{p} \times \frac{1 - (1 + j/m)^{-nm}}{(1 + j/m)^{m/p} - 1} = \frac{10}{4} \times \frac{1 - (1 + 0,1/12)^{-5 \times 12}}{(1 + 0,1/12)^{12/4} - 1} \approx \approx 38,896 \text{ (тис. грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* сучасної величини p -строкової ренти наведено на рис. 2.9 і 2.10.

	A	B	C
43			
44	p	4	
45	Нарахування відсотків m раз на рік	Сучасна величина ренти A , тис. грн	Нарощена сума ренти S , тис. грн
46	1	=C51*((1-(1+C52)^(-C50))/(B44*((1+C52)^(1/B44)-1)))	=B46*(1+0,1/A46)^(5*A46)
47	4	=C51*(1-(1+C52/A47)^(-C50*A47))/C52	=B47*(1+0,1/A47)^(5*A47)
48	12	=(C51/B44)*((1-(1+C52/A48)^(-C50*A48))/((1+C52/A48)^(A48/B44)-1))	=B48*(1+0,1/A48)^(5*A48)
49			
50			n= 5
51			R= 10
52			i= 0,1

Рис. 2.9. Розрахунок сучасної величини p -строкової ренти з нарахуванням відсотків m раз на рік

	A	B	C
43			
44	p		4
45	Нарахування відсотків m раз на рік	Сучасна величина ренти A , тис. грн	Нарощена сума ренти S , тис. грн
46	1	39,301	63,295
47	4	38,973	63,862
48	12	38,896	63,996

Рис. 2.10. Результат розрахунку сучасної величини p -строкової ренти з нарахуванням відсотків m раз на рік

2.3. Порівняння сучасних вартостей річних і p -строкових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків. Як видно з наведених формул, величина сучасної вартості помітно залежить від ставки дисконтування і частоти виплат у межах року. Результати розрахунків сучасних вартостей для різних умов виплат і нарахування відсотків наведені на рис. 2.11 і 2.12.

	A	B	C	D	E	F
49						
50		$n=5$				
51		$R=10$				
52		$i=0,1$				
53	Сучасна величина					
54	Число рентних платежів протягом року, p	Число періодів нарахування відсотків, m				
55		1	2	4	12	
56	1	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-m}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-2}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-4}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-12}}$	
57	2	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-m}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-2}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-4}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-12}}$	
58	4	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-m}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-2}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-4}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-12}}$	
59	12	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-m}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-2}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-4}}$	$=\frac{C}{i} \cdot \frac{1 - (1+i)^{-n}}{1 - (1+i)^{-12}}$	

Рис. 2.11. Розрахунок сучасних вартостей рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків

	A	B	C	D	E	F
49						
50		n=	5			
51		R=	10			
52		i=	0,1			
53	Сучасна величина ренти А, тис. грн					
54	Число рентних платежів		Число періодів нарахування відсотків, m			
55	протягом року, p		1	2	4	12
56	1		37,908	37,667	37,541	37,456
57	2		38,833	38,609	38,492	38,412
58	4		39,301	39,085	38,973	38,896
59	12		39,615	39,405	39,296	39,221

Рис. 2.12. Порівняння сучасних вартостей рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарахування відсотків

Слід зіставити розглянуті варіанти наведених сум.

Варто позначити порівнювані суми як $A(p, m)$, де p – число надходжень рентних платежів протягом року, m – число періодів нарахування відсотків протягом року. Для одних і тих же сум річних виплат, тривалості рент і розмірів відсоткових ставок отримано такі співвідношення:

$$A(1, \infty) < A(1, m) < A(1, 1) < A(p, \infty) < A(p, m) < A(p, m) < A(p, m) < A(p, 1)$$

$$p > m > 1 \quad p = m > 1 \quad m > p > 1.$$

Таким чином, можна заздалегідь сказати, що рента з умовами $p = 4$ і $m = 2$ має меншу сучасну вартість, ніж з $p = 2$ і $m = 4$ під час рівності всіх інших умов.

3. Тривалість ренти. Під час укладення комерційного контракту, що передбачає погашення зобов'язань рентними платежами, найважливішим параметром є термін ренти. У разі узгодження решти параметрів термін ренти може бути розрахований з використанням величини нарощеної суми. Розрахунки тривалості ренти за умови параметрів $p = 1, 4$ і $m = 1, 4$ наведені у табл. 2.1.

Розрахунок тривалості ренти

p	m	Формула розрахунку	Тривалість ренти, років
1	1	$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}i + 1\right)}{\ln(1+i)} = \frac{\ln\left(\frac{61,051}{10}0,1 + 1\right)}{\ln(1+0,1)}$	5
1	4	$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}[(1+j/m)^m - 1] + 1\right)}{m \ln(1+j/m)}$	5
4	1	$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}p[(1+i)^{1/p} - 1] + 1\right)}{\ln(1+i)}$	5
4	4	$n = \frac{\ln\left(\frac{S}{R}j + 1\right)}{m \ln(1+j/m)} = \frac{\ln\left(\frac{63,8616}{10}0,1 + 1\right)}{4 \ln(1+0,1/4)}$	5

Розрахунок у *MS Excel* тривалості ренти наведено на рис. 2.13 і 2.14.

	A	B	C
61	Тривалість ренти		
62	n=		5
63	R=		10
64	i=		0,1
65	p=	m=	Тривалість ренти, років
66	1	1	=LN(C29/C63*C64+1)/LN(1+C64)
67	1	4	=LN(E29/C63*((1+C64/B67)^B67-1)+1)/(B67*LN(1+C64/B67))
68	4	1	=LN(C31/C63*A68*((1+C64)^(1/A68)-1)+1)/(LN(1+C64))
69	4	4	=LN(E31/C63*C64+1)/(B69*LN(1+C64/B69))

Рис. 2.13. Розрахунок тривалості ренти з різними параметрами p, m

	A	B	C
61	Тривалість ренти		
62	n=		5
63	R=		10
64	i=		0,1
65	p=	m=	Тривалість ренти, років
66	1	1	5
67	1	4	5
68	4	1	5
69	4	4	5

Рис. 2.14. Результати розрахунку тривалості ренти з різними параметрами p, m

Таким чином, як видно з рис. 2.13 і 2.14, результати розрахунків співпадають.

Методичні рекомендації до виконання завдання 2

Під *конверсією* фінансових рент розуміють зміну умов виплати ренти через які-небудь причини, тобто йдеться про конвертації умов, що передбачаються під час виплати фінансової ренти. Простими випадками конверсії є: заміна ренти разовим платежем (викуп ренти), або навпаки, заміна разового платежу рентою (розстрочка платежу). До складнішого випадку належить об'єднання декількох рент з різними характеристиками в одну – консолідація рент. Під час цього передбачається, що конверсія не повинна приводити до зміни фінансових наслідків для кожної із сторін, що беруть участь, тобто конверсія ґрунтується на принципі фінансової еквівалентності.

Заміна разового платежу рентним. Для вирішення завдання порівняти сучасну вартість ренти, за допомогою якої проводять розстрочку, до суми боргу. Завдання полягає у визначенні одного з параметрів цієї ренти – члена ренти – за умови, що решту параметрів задано:

$$A = R \times \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{p \times ((1 + i)^{1/p} - 1)} \Rightarrow R = A \div \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{p \times ((1 + i)^{1/p} - 1)},$$

де A – сучасна величина потоків платежів, i – річна відсоткова ставка, n – термін ренти, p – терміновість ренти (кількість платежів на рік).

Якщо $A = 2$ млн грн, $n = 2$ роки, $p = 4$, $m = 1$, $i = 0,15$, тоді член ренти дорівнює:

$$R = 2 \div \frac{1 - (1 + 0,15)^{-2}}{4 \times ((1 + 0,15)^{1/4} - 1)} = 1,16652 \text{ (млн грн)}.$$

Далі знайти квартальний платіж:

$$R_{\text{кв}} = \frac{R}{4} = \frac{1,16652}{4} \approx 0,291631 \text{ (млн грн)}.$$

Для визначення доцільності здійснення покупки на пропонувані умови розрахувати нарощену величину ренти:

$$S = R \times \frac{(1 + i)^n - 1}{p \times \left((1 + i)^{1/p} - 1 \right)} = 1,166525 \times \frac{(1 + 0,15)^2 - 1}{4 \times \left((1 + 0,15)^{1/4} - 1 \right)} = 2,645 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* нарощеної суми *p*-строкової ренти з нарахуванням відсотків *m* раз на рік наведено на рис. 2.15 і 2.16.

	A	B	C
1	1. Заміна разового платежа рентним		
2	A=	2	млн грн
3	n=	2	роки
4	p=	4	
5	m=	1	
6	i=	0,15	
7			
8	R=	=B2/(((1-(1+B6)^(-B3))/(B4*((1+B6)^(1/B4)-1))))	млн грн
9	кварт. платіж	=B8/4	млн грн
10	S=	=B8*(1,15*1,15-1)/(4*(1,15^(1/4)-1))	млн грн

Рис. 2.15. Розрахунок члена ренти і нарощеної суми

	A	B	C
1	1. Заміна разового платежа рентним		
2	A=	2	млн грн
3	n=	2	роки
4	p=	4	
5	m=	1	
6	i=	0,15	
7			
8	R=	1,166525	млн грн
9	кварт. платіж	0,291631	млн грн
10	S=	2,645	млн грн

Рис. 2.16. Результати розрахунку нарощеної суми *p*-строкової ренти з нарахуванням відсотків *m* раз на рік

Таким чином, приймаючи умови фірми, покупцеві необхідно буде щокварталу виплачувати 291,631 тис. грн, під час цього переплата складе 645 тис. грн.

Методичні рекомендації до виконання завдання 3

Зміна умов ренти. Зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна первинних параметрів ренти, призводить до утворення нової ренти, що викликає зміну фінансових наслідків. Разом з тим за бажання сторін зберегти фінансову еквівалентність можна це зробити, змінивши ряд параметрів і зберігши рівність сучасних величин первинної і знов створеної ренти ($A_0 = A_1$), а також зберігши рівність відсоткових ставок.

Початкові дані: $A = 1,5$ млн грн, $n = 2$ роки, $i = 0,09$.

Рішення:

3.1. Одноразова оплата припускає, що виплата буде проведена відразу, тобто $S = A = 1,5$ (млн грн).

3.2. Оплата рівними платежами, що вносять в кінці кожного року. З формули розрахунку звичайної річної ренти $A = R \times \frac{(1+i)^{-n}}{i}$ знайти член ренти:

$$R = A \div \frac{(1+i)^{-n}}{i} = 1,5 \div \frac{(1+0,09)^{-2}}{0,09} = 0,852703 \text{ (млн грн)}.$$

Далі розрахувати нарощену величину ренти:

$$S = R \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0,852703 \times \frac{(1+0,09)^2 - 1}{0,09} = 1,782149 \text{ (млн грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* члена ренти і нарощеної суми наведено на рис. 2.17 і 2.18.

	A	B	C	D	E
12	2. Зміна умов ренти				
13	а) одноразова оплата				
14	S=	1,5	млн грн		
15					
16	б) оплата протягом 2 років рівними платежами, що вносяться в кінці кожного року під 9 % річних				
17					
18	A=	1,5	млн грн		
19	n=	2		R=	=B18/((1-(1+B20)^(-B19))/B20)
20	i=	0,09		S=	=E19*((1+B20)^B19-1)/B20

Рис. 2.17. Розрахунок члена ренти і нарощеної величини ренти за умови оплати рівними платежами, що вносяться в кінці кожного року

	A	B	C	D	E
12	2. Зміна умов ренти				
13	а) одноразова оплата				
14	S=	1,5	млн грн		
15					
16	б) оплата протягом 2 років рівними платежами, що вносяться в кінці кожного				
17					
18	A=	1,5	млн грн		
19	n=	2		R=	0,85270
20	i=	0,09		S=	1,78215

Рис. 2.18. Результати розрахунку члена ренти і нарощеної величини ренти

3.3. Оплата з відстроченням платежу (термін ренти не змінюється). Це завдання припускає розрахунок відстроченої ренти, тобто коли внесення першого внеску переносять на пізніший термін (t років, місяців). У цьому випадку загальна тривалість ренти залишається колишньою:

$$R_t = R_0 \times (1 + i)^t = 0,852703 \times (1 + 0,09)^1 = 0,929446 \text{ (млн грн),}$$

тоді:

$$S = R_t \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = 0,929446 \times \frac{(1 + 0,09)^2 - 1}{0,09} = 1,942543 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* члена ренти і нарощеної суми за умови оплати з відстроченням платежу з незмінним терміном ренти наведено на рис. 2.19 і 2.20.

	A	B	C	D	E
22	в) оплата з відстроченням платежу (термін ренти не змінюється)				
23	A=	1,5	млн грн		
24	n=	2			
25	i=	0,09		R=	=E19*(1+B25)^B26
26	t=	1		S=	=E25*((1+B25)^B26-1)/B25

Рис. 2.19. Розрахунок члена ренти і нарощеної величини ренти за умови оплати з відстроченням платежу з незмінним терміном

	A	B	C	D	E
22	в) оплата з відстроченням платежу				
	(термін ренти не змінюється)				
23	A=	1,5	млн грн		
24	n=	2			
25	i=	0,09		R=	0,929446
26	t=	1		S=	1,942542

Рис. 2.20. Результати розрахунку члена ренти і нарощеної величини ренти

3.4. Оплата з відстроченням із збільшенням терміну ренти.

Необхідно знайти відкладену ренту за умови, що загальна тривалість ренти зростає до трьох років.

Для розрахунку величини рентного платежу нової ренти, відстро- ченої на період $t = 1$ і з новим терміном, використовують формулу:

$$R_t = R_0 \times \left(\frac{(1 - (1 + i)^{-n_0} / i)}{(1 - (1 + i)^{-n_t} / i)} \right) \times (1 + i)^t,$$

$$R_3 = 0,852703 \times \left(\frac{(1 - (1 + 0,09)^{-2} / 0,09)}{(1 - (1 + 0,09)^{-3} / 0,09)} \right) \times (1 + 0,09)^1 =$$

$$= 0,645914 \text{ млн грн,}$$

$$S = R_t \times \frac{(1 + i)^n - 1}{i} = 0,645914 \times \frac{(1 + 0,09)^3 - 1}{0,09} = 2,11737 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у MS Excel наведено на рис. 2.21 і 2.22.

	A	B	C	D	E	F
28	г) оплата з відстроченням в один рік, але термін ренти збільшується до 3 років					
29	A=	1,5	млн грн			
30	n=	3				
31	i=	0,09		R=	=E19*((1-(1+B31)^(-B19))/(1-(1+B20)^(-B30)))*(1+B31)^B32	
32	t=	1		S=	=E31*((1+B31)^B30-1)/B31	

Рис. 2.21. Розрахунок члена ренти і нарощеної величини ренти

	A	B	C	D	E	F
28	<i>г) оплата з відстроченням в один рік, але термін ренти збільшується до 3 років</i>					
29	A=	1,5	млн грн			
30	n=	3				
31	i=	0,09		R=	0,645915	
32	t=	1		S=	2,117372	

Рис. 2.22. Результати розрахунку члена ренти і нарощеної величини ренти за умови оплати зі відстроченням платежу зі збільшенням терміну ренти

Таким чином, як було зазначено, зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна її первинних параметрів, призводить до зміни фінансових наслідків.

Методичні рекомендації до виконання завдання 4

Консолідація (об'єднання) рент полягає у заміні декількох рент однією, параметри якої необхідно визначити. В цьому випадку з принципу фінансової еквівалентності виходить рівність сучасних вартостей замінюючої і замінюваних рент. Процес консолідації рент може супроводжуватися як збереженням, так і зміною їх параметрів. Основні характеристики, які визначають під час консолідації рент, – величина члена ренти і її тривалість.

4.1. Консолідація за умови збігу початку терміну нової (консолідованої) ренти й об'єднаних рент. Тому член консолідованої ренти визначають за формулою:

$$R = \frac{\sum_{q=1}^K A_q}{(1 - (1 + i)^{-n})/i} = \frac{\sum_{q=1}^K R_q \times (1 - (1 + i_q)^{-n_q})/i_q}{(1 - (1 + i)^{-n})/i},$$

де R_q – член q -ї ренти;

n_q – тривалість q -ї ренти;

i_q – відсоткова ставка q -ї ренти;

i – параметри консолідованої ренти ($n = 5, i = 0,1 \%$).

На рис. 2.23 вказано основні характеристики об'єднаних рент та розрахунк у *MS Excel* сучасних величин об'єднаних рент і члену консолідованої ренти.

На рис. 2.24 подано результати розрахунку цих показників.

	A	B	C	D	E
	№ ренти, q	Член ренти, R_q	Термін ренти, n_q	Річна % ставка, i_q	Сучасн. величина, A_q
35					
36	1	0,2	2	0,09	=B36*((1-(1+D36)^(-C36))/D36)
37	2	0,25	4	0,08	=B37*((1-(1+D37)^(-C37))/D37)
38	3	0,37	5	0,07	=B38*((1-(1+D38)^(-C38))/D38)
39	Итого				=СУММ(E36:E38)

Рис. 2.23. Основні характеристики та розрахунк сучасних величин об'єднаних рент і члену консолідованої ренти

	A	B	C	D	E
34	3. Консолідація рент				
	№ ренти, q	Член ренти, R_q	Термін ренти, n_q	Річна % ставка, i_q	Сучасн. величина, A_q
35					
36	1	0,2	2	0,09	0,3518222
37	2	0,25	4	0,08	0,8280317
38	3	0,37	5	0,07	1,5170731
39	Итого				2,696927

Рис. 2.24. Результати розрахунку сучасних величин об'єднаних рент і члену консолідованої ренти

Підставивши отримані значення у формулу, буде отримано значення річного платежу нової консолідованої ренти:

$$R = \frac{2,696927}{(1 - (1 + 0,1)^{-5}) / 0,1} = 0,7114425 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* члена консолідованої ренти наведено на рис. 2.25.

	A	B
41	Член консолідованої ренти	
42	n= 5	
43	i= 0,1	
44	а) без відстрочення	
45	R= =E39/(1-(1+B43)^(-B42))*B43	

41	Член консолідованої ренти	
42	n= 5	
43	i= 0,1	
44	а) без відстрочення	
45	R= 0,711442	

Рис. 2.25. Розрахунок члена консолідованої ренти

4.2. Консолідація за умови, що оплата за новою рентою відкладається на 2 роки. Член консолідованої ренти визначають за формулою:

$$R_t = \frac{\sum_{q=1}^K R_q \times \frac{1 - (1 + i_q)^{-n_q}}{i_q}}{(1 - (1 + i)^{-n}) / i} \times (1 + i)^t,$$

де R_t – член відкладеної консолідованої ренти;

R_q – член q -ї ренти;

n_q – тривалість q -ї ренти;

i_q – відсоткова ставка q -ї ренти;

n_t, i – параметри консолідованої ренти ($n = 5, i = 0,1 \%, t = 2$).

Слід скоректувати платіж консолідованої ренти:

$$R_t = \frac{\sum_{q=1}^K R_q \times \frac{1 - (1 + i_q)^{-n_q}}{i_q}}{(1 - (1 + i)^{-n}) / i} \times (1 + i)^t = 0,7114425 \times (1 + 0,1)^2 = 0,8608455 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* члена консолідованої ренти з відстроченням на 2 роки наведено на рис. 2.26.

	D	E
44	б) з відстроченням 2 роки	
45	R= =B45*(1+B43)^2	

	D	E	F
44	б) з відстроченням 2 роки		
45	R=	0,86084	

Рис. 2.26. Розрахунок і результат розрахунку члена консолідованої ренти з відстроченням на 2 роки

Таким чином, ґрунтуючись на принципі еквівалентності, було розраховано величину річного платежу консолідованої ренти, під час цього зміна умов виплат призводить до збільшення рентного платежу.

Методичні завдання до виконання завдання 5

Рента з разовою зміною платежу. Потік послідовних платежів, члени якого не є постійними величинами, називають змінною рентою.

У разі, коли потік платежів є дискретним і кожен член ренти постійний тільки в межах свого часового відрізка, розраховується змінна рента з разовими змінами розміру члена ренти:

$$S = R_1 \times s_{n_1, i_1} \times (1 + i)^{n-n_1} + R_2 \times s_{n_2, i_2} \times (1 + i)^{n-(n_1+n_2)} + \dots + R_k \times s_{n_k, i_k}.$$

Коефіцієнти нарощування річної ренти $s_{n,i}$ визначають так:

$$s_{n,i} = \frac{(1 + i)^n - 1}{i}.$$

Оскільки схема погашення довгострокового кредиту ($m = 1$ і $n = 10$) є змінною рентою з p -строковими платежами, коефіцієнти нарощування визначають за формулою:

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{(1 + i)^n - 1}{p \times ((1 + i)^{1/p} - 1)}.$$

На рис. 2.27 наведений план погашення довгострокового кредиту і розрахунок у MS Excel коефіцієнтів нарощування.

Таким чином, нарощена величина ренти дорівнює:

$$S = 6 \times 5,981676 \times (1 + 0,08)^{10-5} + 10 \times 3,390779 \times (1 + 0,1)^{10-(5+3)} + 24 \times 2,177187 = 146,01516 \text{ (млн грн).}$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
49	4. Рента з разовою зміною плате							
50	n= 10			m= 1				
51	Номер ренти, k	Термін ренти, n_k	Річний платіж, R_k	Процентна ставка, i_k	Строковість ренти, p_k	Коефіцієнт нарощення, $S_{n,i}^{(p)}$		
52	1	5	6	0,08	2	=(((1+D52)^B52)-1)/(E52*((1+D52)^(1/E52)-1))		
53	2	3	10	0,1	2	=(((1+D53)^B53)-1)/(E53*((1+D53)^(1/E53)-1))		
54	3	2	24	0,1	4	=(((1+D54)^B54)-1)/(E54*((1+D54)^(1/E54)-1))		
56	S=	=C52*F52*(1+D52)^(B50-B52)+C53*F53*(1+D53)^(B50-(B52+B53))+C54*F54						

	A	B	C	D	E	F
49	4. Рента з разовою зміною платежу					
50	n= 10			m= 1		
51	Номер ренти, k	Термін ренти, n_k	Річний платіж, R_k	Процентна ставка, i_k	Строковість ренти, p_k	Коефіцієнт нарощення, $S_{n,i}^{(p)}$
52	1	5	6	0,08	2	5,981675759
53	2	3	10	0,1	2	3,390778644
54	3	2	24	0,1	4	2,177186569

Рис. 2.27. План погашення кредиту, розрахунок і результати розрахунку коефіцієнтів нарощення

Розрахунок у MS Excel нарощеної величини ренти наведений на рис. 2.28.

	A	B	C	D	E	F	G
56	S=	=C52*F52*(1+D52)^(B50-B52)+C53*F53*(1+D53)^(B50-(B52+B53))+C54*F54					
56	S=						146,0151641

Рис. 2.28. Розрахунок і результат розрахунку нарощеної суми

Таким чином, загальна сума виплат за довгостроковим кредитом складе 146,01516 млн грн.

Методичні рекомендації до виконання завдання 6

Рента з постійною абсолютною зміною членів. Ренту, члени якої змінюються за законом арифметичної прогресії, називають *змінною рентою з постійною абсолютною зміною її членів* (на величину d).

Початкові дані: $A = 15$ млн грн, $n = 5$ років, $i = 9\%$, $d = 0,5$ млн грн, нарахування відсотків і виплати здійснюють в кінці року.

Рішення:

Знаючи поточну суму боргу, тобто величину A , можна визначити розмір першого платежу:

$$R = \frac{A \times (1 + i)^n - \frac{d}{i} \times (s_{n,i} - n)}{s_{n,i}}$$

де $s_{n,i}$ – коефіцієнт нарощування.

$$R = \frac{15 \times (1 + 0,09)^5 - \frac{0,5}{0,09} \times (5,98471 - 5)}{5,98471} = 2,942288 \text{ (млн грн).}$$

Нарощену суму цієї ренти визначають за формулою:

$$S = R \times s_{n,i} + \frac{d}{i} \times (s_{n,i} - n),$$

$$S = 2,942288 \times 5,98471 + \frac{0,5}{0,09} \times (5,98471 - 5) = 23,079359 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у *MS Excel* члена ренти, нарощеної суми та сучасної вартості ренти наведені на рис. 2.29 і 2.30.

	A	B	C	D	E
58	5.Рента з постійною абсолютною зміною членів				
59	A=	15		$s_{n,i}$	$=(((1+B62)^{B60})-1)/B62$
60	n=	5			
61	d=	0,5			
62	i=	0,09			
63					
64	R=	$= (B59 * ((1 + B62)^{B60}) - B61 / B62 * (E59 - B60)) / E59$			
65	S=	$= B64 * E59 + B61 / B62 * (E59 - B60)$			
66	A=	$= B65 / ((1 + B62)^{B60})$			

Рис. 2.29. Розрахунок члена ренти та нарощеної суми

	A	B	C
64	R=	2,942288436	
65	S=	23,07935932	
66	A=	15	

Рис. 2.30. Результати розрахунку члена ренти та нарощеної суми ренти з постійною абсолютною зміною членів

Так, щоб виплатити кредит у розмірі 15 млн грн за запропонованою схемою, необхідно внести перший платіж у розмірі 2,942288 млн грн, під час цього переплата складе 8,079359 млн грн.

Методичні рекомендації до виконання завдання 7

Рента з постійною відносною зміною членів. Ренту, члени якої змінюються за законом зростаючої геометричної прогресії, називають *рентою з постійною відносною зміною платежів*.

У табл. 2.2 наведені початкові дані для погашення кредиту.

Сучасну величину p -строкової ренти визначають за формулою:

$$A = R \times \frac{q^{n \times p} \times (1 + i)^{-n} - 1}{q - (1 + i)^{\frac{1}{p}}} = 0,2 \times \frac{1,1^{7 \times 2} \times (1 + 0,08)^{-7} - 1}{1,1 - (1 + 0,08)^{\frac{1}{2}}} = 4,00136 \text{ (млн грн)}.$$

Таблиця 2.2

Початкові дані схеми погашення кредиту

Параметри	Позначення	Значення
Перший член ренти, млн грн	R	0,2
Коефіцієнт зміни членів ренти	q	1,1
Терміновість ренти (кількість виплат на рік)	p	2
Термін ренти	n	7
Відсоткова ставка	i	0,08

Підсумкову величину виплат за наданим кредитом розраховують за формулою знаходження нарощеної величини p -строкової ренти з постійною відносною зміною платежів:

$$S = R \times \frac{q^{n \times p} - (1 + i)^n}{q - (1 + i)^{\frac{1}{p}}} = 0,2 \times \frac{1,1^{7 \times 2} - (1 + 0,08)^7}{1,1 - (1 + 0,08)^{\frac{1}{2}}} = 6,857629 \text{ (млн грн)}.$$

Розрахунок у *MS Excel* нарощеної суми та сучасної вартості ренти з постійною відносною зміною членів наведено на рис. 2.31.

	A	B	C	D	E	F
68	6. Рента з постійною відносною зміною членів					
69	R=	0,2				
70	q=	1,1		A=	=B69*(B70^(B72*B71))*(1+B73)^(-B72)-1)/(B70-(1+B73)^(1/B71))	
71	p=	2		S=	=B69*(B70^(B72*B71)-(1+B73)^B72)/(B70-(1+B73)^(1/B71))	
72	n=	7				
73	i=	0,08				

A=	4
S=	6,85762

Рис. 2.31. Розрахунок і результати розрахунку нарощеної суми та сучасної вартості ренти з постійною відносною зміною членів

Таким чином, розмір отриманого кредиту складає 4,00136 млн грн, підсумкова сума виплат за запропонованою схемою рівна 6,85769 млн грн, тобто за 7 років переплата за кредитом складе 2,856268 млн грн.

Лабораторна робота 3

Моделювання погашення середньострокових і довгострокових кредитів

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок складання плану погашення середньострокових і довгострокових кредитів різними методами.

Завдання. Початкові дані. Банк видав довгостроковий кредит у сумі 40,0 тис. дол. США на 5 років під 6 % річних. Погашення кредиту повинне проводитися рівними щорічними виплатами в кінці кожного року, що включають погашення основного боргу і відсоткові платежі. Нарахування відсотків проводять раз на рік.

Необхідно:

1. Скласти план погашення позики.

Розрахувати величину першого платежу для погашення основного боргу, величину відсоткового платежу на кінець останнього року погашення позики, залишок основного неоплаченого боргу на початок третього року погашення. Порівняти розраховані значення з планом погашення позики.

2. Скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо передбачається зміна відсоткової ставки: перші два роки – 6 %, останні три роки – 8 %.

3. Скласти план погашення кредиту, якщо за умовами контракту погашення основного боргу повинне проводитися рівними щорічними платежами, нарахування відсотків – у кінці року. Розрахувати величину відсоткового платежу і термінової сплати для четвертого року, порівняти розраховане значення з планом погашення боргу.

4. Скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати щорічно на 1 тис. дол. США, нарахування відсотків проводять в кінці року.

5. Скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати на 5 % щорічно, нарахування відсотків проводять в кінці року.

6. Скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо після виплати третього платежу між кредитором і позичальником досягнута домовленість про продовження терміну погашення позики на 2 роки і збільшення відсоткової ставки з моменту конверсії до 10 %.

7. Скласти план погашення кредиту, якщо виданий кредит є іпотекою зі щомісячним погашенням основного боргу і відсотків за ним рівними терміновими сплатами. Розрахувати залишок боргу на початок четвертого місяця (кожний місяць приймають рівним 30 дням).

8. Скласти план погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу (кожний місяць приймають рівним 30 дням). Зробити висновки.

Методичні рекомендації до виконання завдання

1. Погашення боргу рівними терміновими сплатами. Умовами кредитного контракту передбачено погашення боргу рівними виплатами в кінці кожного розрахункового періоду:

Параметри позики: $D = 40,0$ тис. дол. США; $n = 5$ років; $i = 0,06$; $m = 1$. Щорічна виплата рівна:

$$Y = D \times \frac{i \times (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} = 40 \times \frac{0,06 \times (1 + 0,06)^5}{(1 + 0,06)^5 - 1} \approx 9,49586 \text{ (тис. дол.)}.$$

Розрахувати:

$$I = D \times i = 40 \times 0,06 = 2,4 \text{ (тис. дол. США),}$$

$$R = Y - I = 9,49586 - 2,4 = 7,09586 \text{ (тис. дол. США).}$$

На рис. 3.1 наведено розрахунки поетапного плану погашення боргу у MS Excel.

	A	B	C	D	E
1	Вихідні дані				
2	D	40	тис. дол.		
3	n	5	років		
4	i	0,06			
5	1. Погашення боргу рівними терміновими платежами				
6	Річна термінова сплата Y=		=B2*(B4*(1+B4)^B3)/((1+B4)^B3-1)		
7	Рік	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата (ануїтет), Y
8	1	=B2	=B8*\$B\$4	=E8-C8	=\$D\$6
9	2	=B8-D8	=B9*\$B\$4	=E9-C9	=\$D\$6
10	3	=B9-D9	=B10*\$B\$4	=E10-C10	=\$D\$6
11	4	=B10-D10	=B11*\$B\$4	=E11-C11	=\$D\$6
12	5	=B11-D11	=B12*\$B\$4	=E12-C12	=\$D\$6
13	Всього		=СУММ(C8:C12)	=СУММ(D8:D12)	=СУММ(E8:E12)

	Рік	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата (ануїтет), Y
7					
8	1	40,00	2,4000	7,0959	9,4959
9	2	32,9041	1,9742	7,5216	9,4959
10	3	25,3825	1,5230	7,9729	9,4959
11	4	17,4096	1,0446	8,4513	9,4959
12	5	8,9584	0,5375	8,9584	9,4959
13	Всього		7,4793	40,0000	47,4793

Рис. 3.1. Розрахунок та результати розрахунку поетапного плану погашення боргу рівними терміновими платежами

Знаючи розмір кредиту, відсоткову ставку i і термін погашення кредиту n розрахувати величину першої виплати погашення основного боргу:

$$R_1 = D \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 40 \times \frac{0,06}{(1+0,06)^5 - 1} = 7,09586 \text{ (тис. дол. США).}$$

Розмір платежу основного боргу в будь-якому періоді (R_k) можна визначити за формулою:

$$R_k = R_1 \times (1+i)^{k-1}.$$

$$R_3 = R_1 \times (1+i)^{k-1} = 7,09586 \times (1+0,06)^{3-1} = 7,9729 \text{ (тис. дол. США).}$$

Використовуючи наведені формули, можна розрахувати величину відсоткового платежу I для будь-якого періоду k .

$$I_k = Y - R_k = Y - Y \times (1 + i)^{-n+k-1} = Y \times [1 - (1 + i)^{-n+k-1}].$$

За умовою завдання необхідно розрахувати величину відсоткового платежу на кінець останнього року погашення позики:

$$\begin{aligned} I_5 &= Y - R_k = Y - Y \times (1 + i)^{-n+k-1} = \\ &= 9,49586 \times [1 - (1 + 0,06)^{-5+5-1}] = 0,537501 \text{ (тис. дол. США)}. \end{aligned}$$

Для розрахунку залишку неоплаченого основного боргу на будь-який k -й період використовують формулу:

$$D_k = \frac{Y - R_k}{i}.$$

За умовою завдання необхідно визначити залишок основного неоплаченого боргу на початок третього року погашення:

$$D_3 = \frac{Y - R_3}{i} = \frac{9,49586 - 7,9729}{0,06} = 25,382536 \text{ (тис. дол. США)}.$$

Розрахунки окремих параметрів погашення боргу рівними терміновими сплатами у *MS Excel* наведені на рис. 3.2.

	A	B	C		A	B
14	$R_1 =$	$= (B2 * B4) / ((1 + B4)^{B3} - 1)$			14	$R_1 =$ 7,09586
15	$I_5 =$	$= D6 * (1 - (1 + B4)^{-(B3 + 5 - 1)})$			15	$I_5 =$ 0,53750
16	$D_3 =$	$= B2 * ((1 + B4)^{B3} - (1 + B4)^{(3 - 1)}) / ((1 + B4)^{B3} - 1)$			16	$D_3 =$ 25,3825

Рис. 3.2. Розрахунки і результати розрахунків окремих параметрів погашення боргу рівними терміновими сплатами

Таким чином, під час погашення позики рівними платежами залишок боргу з кожною виплатою зменшується; отже, зменшуються і відсоткові виплати. В результаті від періоду до періоду зростає розмір платежів, що йдуть на погашення основного боргу. Порівнюючи розрахунки

з планом погашення позики, можна спостерігати, що отримані результати не відрізняються. Під час цього сумарна переплата складає 47,4793 тис. дол. США.

2. Погашення боргу рівними терміновими сплатами під час зміни відсоткових ставок

Параметри позики: $D = 40,0$ тис. дол. США; $n_1 = 2$ року; $i_1 = 0,06$; $n_2 = 3$ року; $i_2 = 0,08$; $m = 1$ $n = n_1 + n_2 = 5$.

Для складання плану погашення позики визначити величину щорічної виплати, враховуючи, що загальний термін погашення складе 5 років:

$$Y_1 = D \times \frac{i \times (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} = 40 \times \frac{0,06 \times (1 + 0,06)^5}{(1 + 0,06)^5 - 1} \approx 9,49586 \text{ (тис. дол. США).}$$

Поетапний розрахунок здійснюють виходячи із співвідношень:

$$Y = D \times \frac{i \times (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1}, \quad I = D \times i, \quad R = Y - I, \quad D_i = D_{i-1} - R_{i-1}.$$

На рис. 3.3 і 3.4 подано поетапний план погашення боргу за умови зміни відсоткових ставок у MS Excel.

	A	B	C	D	E	F	G
18	2. Погашення боргу рівними терміновими сплатами при зміні процентних ставок						
19	n1= 2		i1= 0,06				
20	n2= 3		i2= 0,08				
21	Рік	Процентна ставка, i	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y	
22	1	0,06	=B2	=B22*C22	=F22-D22	=C22*(B22*(1+B22)^\$B\$3)/((1+B22)^\$B\$3-1)	
23	2	0,06	=C22-E22	=B23*C23	=F23-D23	=C23*(B23*(1+B23)^4)/((1+B23)^4-1)	
24	3	0,08	=C23-E23	=B24*C24	=F24-D24	=C24*(B24*(1+B24)^3)/((1+B24)^3-1)	
25	4	0,08	=C24-E24	=B25*C25	=F25-D25	=C25*(B25*(1+B25)^2)/((1+B25)^2-1)	
26	5	0,08	=C25-E25	=B26*C26	=F26-D26	=C26*(B26*(1+B26)^1)/((1+B26)^1-1)	
27	Всього		=СУММ(D22:D26)	=СУММ(E22:E26)	=СУММ(F22:F26)		

Рис. 3.3. Розрахунок поетапного плану погашення боргу рівними терміновими сплатами

	Рік	Процентна ставка, i	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
21						
22	1	0,06	40,0000	2,4000	7,0959	9,4959
23	2	0,06	32,9041	1,9742	7,5216	9,4959
24	3	0,08	25,3825	2,0306	7,8187	9,8493
25	4	0,08	17,5639	1,4051	8,4442	9,8493
26	5	0,08	9,1197	0,7296	9,1197	9,8493
27	Всього			8,5395	40,0000	48,5395

Рис. 3.4. Результати розрахунку поетапного плану погашення боргу рівними терміновими сплатами під час зміни відсоткових ставок

Таким чином, збільшення відсоткової ставки призводить до збільшення щорічних виплат. Як можна бачити з прикладу, за 3 роки зміна ставки на 2 % призвела до збільшення сумарної переплати на 1,0603 тис. дол. США і складає 48,5395 тис. дол. США.

3. Погашення позики рівними виплатами основного боргу.

За умовою завдання погашення основного боргу повинне проводитися рівними щорічними платежами. В цьому випадку розміри платежів за основним боргом будуть рівні:

$$\frac{D}{n} = R_1 = R_2 = \dots = R_k = R_k, \quad R = \frac{40}{5} = 8 \text{ (тис. дол. США).}$$

Залишок основного боргу на початку кожного розрахункового періоду (D_k) визначають як:

$$D_k = D - R \times (k - 1),$$

де D – сума всього боргу;

k – номер розрахункового періоду.

Величина термінової сплати в кожному розрахунковому періоді рівна $Y_k = D_k \times i + R$.

$$\begin{aligned} \text{Наприклад, } Y_4 &= D_4 \times i + R = (D - R \times (k - 1)) \times i + R = \\ &= (40 - 8 \times (4 - 1)) \times 0,06 + 8 = 8,96 \text{ (тис. дол. США)}. \end{aligned}$$

Величину відсоткового платежу для k -го розрахункового періоду визначають за формулою:

$$I_k = D_k \times i.$$

Наприклад, $I_4 = D_4 \times i = (D - R \times (k - 1)) \times i = (40 - 8 \times (4 - 1)) \times 0,06 = 0,96$ (тис. дол. США).

На рис. 3.5 і 3.6 наведено розрахунок поетапного плану погашення позики рівними виплатами основного боргу, а також розрахунок окремих параметрів позики.

	A	B	C	D	E
29	3. Погашення позики рівними виплатами основного боргу				
	Рік	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
30					
31	1	=B2	=B31*\$B\$4	=\$B\$31/\$B\$3	=C31+D31
32	2	=B31-D31	=B32*\$B\$4	=\$B\$31/\$B\$3	=C32+D32
33	3	=B32-D32	=B33*\$B\$4	=\$B\$31/\$B\$3	=C33+D33
34	4	=B33-D33	=B34*\$B\$4	=\$B\$31/\$B\$3	=C34+D34
35	5	=B34-D34	=B35*\$B\$4	=\$B\$31/\$B\$3	=C35+D35
36	Всього		=СУММ(C31:C35)	=СУММ(D31:D35)	=СУММ(E31:E35)
37	$I_4 = (B2 - D31 * 3) * B4$				
38	$Y_4 = (B31 - D31 * 3) * B4 + D31$				

Рис. 3.5. Розрахунок поетапного плану погашення позики рівними виплатами основного боргу

	A	B	C	D	E
29	3. Погашення позики рівними виплатами основного боргу				
	Рік	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
30					
31	1	40	2,4	8,00	10,40
32	2	32,00	1,92	8,00	9,92
33	3	24,00	1,44	8,00	9,44
34	4	16,00	0,96	8,00	8,96
35	5	8,00	0,48	8,00	8,48
36	Всього		7,2	40,00	47,20
37	$I_4 =$	0,96			
38	$Y_4 =$	8,96			

Рис. 3.6. Результат розрахунку поетапного плану погашення позики рівними виплатами основного боргу

Таким чином, під час погашення позики рівними виплатами основного боргу з часом річна термінова сплата зменшується. Це відбувається за рахунок того, що залишок боргу і відсотковий платіж з кожною виплатою зменшується. Сумарна переплата складає 7,2 тис. дол. США.

4. Погашення позики змінними виплатами основного боргу (зміна виплат в арифметичній прогресії). За умовами контракту передбачено погашення основного боргу платежами, що зростають в арифметичній прогресії з різницею $d = 1$ тис. дол. США.

У цьому випадку величина виплати основного боргу в періоді k рівна:

$$R_k = R_1 \pm (n - k) \times d.$$

Величина основного боргу рівна сумі всіх виплат, тобто сумі членів арифметичної прогресії:

$$D = \frac{(R_1 + R_1 + (n - 1) \times d) \times n}{2} = \frac{n}{2} \times (2 \times R_1 + (n - 1) \times d).$$

Величину першої виплати основного для прогресії розраховують за формулою:

$$R_1 = \frac{D}{n} \mp \frac{(n - 1)}{2} \times d.$$

На рис. 3.7 наведено розрахунок поетапного плану погашення боргу зі зміною виплат в арифметичній прогресії.

	A	B	C	D	E
39	4. Зміна виплат основного боргу в арифметичній прогресії				
40	$d = 1$				
41	Рік	Залишок боргу на початок	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
42	1	=B2	=B42*\$B\$4	=(B2/B3)-(((B3-1)/2)*B40)	=C42+D42
43	2	=B42-D42	=B43*\$B\$4	=D42+\$B\$40	=C43+D43
44	3	=B43-D43	=B44*\$B\$4	=D43+\$B\$40	=C44+D44
45	4	=B44-D44	=B45*\$B\$4	=D44+\$B\$40	=C45+D45
46	5	=B45-D45	=B46*\$B\$4	=D45+\$B\$40	=C46+D46
47	Всього		=СУММ(C42:C46)	=СУММ(D42:D46)	=СУММ(E42:E46)

Рис. 3.7. Розрахунок і результати розрахунку поетапного плану погашення боргу зі зміною виплат в арифметичній прогресії

41	Рік	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
42	1	40,00	2,40	6,00	8,40
43	2	34,00	2,04	7,00	9,04
44	3	27,00	1,62	8,00	9,62
45	4	19,00	1,14	9,00	10,14
46	5	10,00	0,60	10,00	10,60
47	Всього		7,80	40,00	47,80

Закінчення рис. 3.7

Таким чином, сумарні виплати за кредитом складуть 47,8 тис. дол. США, переплата під час цього буде рівна 7,8 тис. дол. США відповідно.

5. Зміна виплат у геометричній прогресії. Одним з варіантів погашення кредитної заборгованості є погашення основного боргу платежами, кожен з яких більше або менше попереднього в q разів.

Величину основного боргу визначають за формулою геометричної прогресії, де R_1 – перший член прогресії і одночасно перший платіж основного боргу, q – знаменник прогресії. Тоді основний борг D рівний:

$$D = R_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad \text{де } q > 1, \quad \text{або} \quad D = R_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}, \quad \text{де } q < 1.$$

Звідси, величину першої виплати основного боргу розраховують за формулою:

$$R_1 = D \times \frac{q - 1}{q^n - 1}, \quad \text{де } q > 1, \quad \text{або} \quad R_1 = D \times \frac{1 - q}{1 - q^n}, \quad \text{де } q < 1.$$

На рис. 3.8 і 3.9 подано поетапний план погашення боргу, враховуючи, що виплати основного боргу повинні зростати на 5 % щорічно.

	A	B	C	D	E
49	5. Зміна виплат основного боргу в геометричній прогресії				
50	q = 1,05				
51	Рік	Залишок боргу на початок	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
52	1	=B2	=B52*\$B\$4	=B2*(B50-1)/(B50^B3-1)	=C52+D52
53	2	=B52-D52	=B53*\$B\$4	=D52*\$B\$50	=C53+D53
54	3	=B53-D53	=B54*\$B\$4	=D53*\$B\$50	=C54+D54
55	4	=B54-D54	=B55*\$B\$4	=D54*\$B\$50	=C55+D55
56	5	=B55-D55	=B56*\$B\$4	=D55*\$B\$50	=C56+D56
57	Всього		=СУММ(C52:C56)	=СУММ(D52:D56)	=СУММ(E52:E56)

Рис. 3.8. Розрахунок поетапного плану погашення боргу зі зміною виплат в арифметичній прогресії

	Рік	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
51					
52	1	40,00	2,4	7,2390	9,6390
53	2	32,7610	1,9657	7,6009	9,5666
54	3	25,1601	1,5096	7,9810	9,4906
55	4	17,1791	1,0307	8,3800	9,4108
56	5	8,7990	0,5279	8,7990	9,3270
57	Всього		7,4340	40,0000	47,4340

Рис. 3.9. Результат розрахунку поетапного плану погашення боргу зі зміною виплат в арифметичній прогресії

Таким чином, сумарні виплати за кредитом складуть 47,434 тис. дол. США, переплата при цьому буде рівна 7,434 тис. дол. США відповідно.

6. Конверсія позик. Зміну умов погашення кредитів називають *конверсією позики*. Під час будь-якого методу конверсії спочатку визначають суму виплаченого основного боргу і величину непогашеної його частини. непогашену частину боргу розглядають як новий борг, що підлягає сплаті на нових умовах.

Варто розглянути один із варіантів конверсії, коли змінюються термін погашення позики і відсоткова ставка, а термінові сплати як за старими, так і за новими умовами проводять рівними платежами; відсотки нараховують один раз в кінці кожного розрахункового періоду.

Позначити параметри позик:

n – первинний термін погашення позик до конверсії;

n_1 – термін, на який продовжений період погашення у результаті конверсії;

k – кількість сплачених розрахункових періодів до конверсії;

i – відсоткова ставка до конверсії;

i_1 – відсоткова ставка після конверсії;

Y – величина термінової сплати до конверсії;

Y_1 – величина термінової сплати після конверсії;

D – величина основного боргу;

D_{n-k} – залишок боргу на момент конверсії.

Для складання плану погашення конверсійної позики визначають:

1) величину термінової сплати за старими умовами:

$$Y = D \times \frac{i \times (1 + i)^n}{(1 + i)^n - 1} = 40 \times \frac{0,06 \times (1 + 0,06)^5}{(1 + 0,06)^5 - 1} \approx \\ \approx 9,49586 \text{ (тис. дол. США);}$$

2) залишок боргу на момент конверсії:

$$D_{n-k} = Y \times \frac{(1 + i)^{n-k} - 1}{(1 + i)^{n-k} \times i} = D_4 = 9,49586 \times \frac{(1 + 0,06)^{5-k} - 1}{(1 + 0,06)^{5-3} \times 0,06} = \\ = 17,4097 \text{ (тис. дол. США);}$$

3) величину термінової сплати за новими умовами:

$$Y_1 = D_{n-k} \times \frac{i_1 \times (1 + i_1)^{n-k+n_1}}{(1 + i_1)^{n-k+n_1} - 1} = 17,4097 \times \frac{0,1 \times (1 + 0,1)^{5-3+2}}{(1 + 0,1)^{5-3+2} - 1} \approx \\ \approx 5,4923 \text{ (тис. дол. США).}$$

Розрахунок у *MS Excel* плану погашення конверсованого кредиту наведено на рис. 3.10 і 3.11.

	A	B	C	D	E	F
59	6. Конверсія позик					
60	Вихідні дані кредиту					
61	D = 40		$i_1 = 0,06$			
62	n = 5		$i_1 = 0,1$			
63	$n_1 = 2$					
64	Після виплати третього платежу досягнута домовленість про продовження терміну погашення позики на 2 роки і збільшення процентної ставки з моменту конверсії до 10 %					
65	Рік	Залишок боргу на початок	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу,	Річна термінова сплата, Y	
66	1	=B61	=B66*\$D\$61	=E66-C66	=\$F\$22	- до конверсії
67	2	=B66-D66	=B67*\$D\$61	=E67-C67	=\$F\$22	
68	3	=B67-D67	=B68*\$D\$61	=E68-C68	=\$F\$22	
69	4	=B68-D68	=B69*0,1	=E69-C69	=B69*(0,1*(1+0,1)^(5-3+2))/((1+0,1)^(5-3+2)-1)	- після конверсії
70	5	=B69-D69	=B70*0,1	=E70-C70	=\$E\$69	
71	6	=B70-D70	=B71*0,1	=E71-C71	=\$E\$69	
72	7	=B71-D71	=B72*0,1	=E72-C72	=\$E\$69	
73	Всього		=СУММ(C66:C72)	=СУММ(D66:D72)	=СУММ(E66:E72)	
74	$D_4 =$		=E66*((1+D61)^(5-3)-1)/((1+D61)^(5-3)*D61)			

Рис. 3.10. Розрахунок плану погашення конверсованого кредиту

	Рік	Залишок боргу на початок року, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна термінова сплата, Y
65					
66	1	40	2,4	7,0959	9,4959
67	2	32,9041	1,97424864	7,5216	9,4959
68	3	25,3825	1,5229522	7,9729	9,4959
69	4	17,4096	1,74096328	3,7513	5,4922
70	5	13,6584	1,36583652	4,1264	5,4922
71	6	9,5320	0,95319709	4,5390	5,4922
72	7	4,9929	0,49929371	4,9929	5,4922
73	Всього		10,4564914	40,0000	50,4565
74	$D_4 =$	17,4096			

Рис. 3.11. Результат розрахунку плану погашення конверсованого кредиту

Таким чином, після зміни умов виплати боргу сумарна сума виплат склала 50,4565 тис. дол. США, що на 2,9772 тис. дол. США більш ніж величина виплат за первісним планом погашення.

7. Іпотечний кредит з щомісячним погашенням основного боргу і відсотків за ними рівними терміновими сплатами.

Розрахунок у MS Excel плану погашення іпотечного кредиту із щомісячним погашенням основного боргу і відсотків за ним рівними терміновими сплатами наведений на рис. 3.12 і 3.13.

	A	B	C	D	E
76	7. Щомісячне погашення іпотечного кредиту з рівними терміновими сплатами				
77	Вихідні дані кредиту				
78	D	40000			
79	n	5	років	місяців	=B79*12
80	i	0,06		щоміс. %	=B80/12
81	Міс	Залишок боргу на початок місяця, D	Процентний платіж, I	Ежемесячный расход по погашению основного долга, R	Щомісячна термінова сплата, Y
82	1	=B78	=B82*\$E\$80	=E82-C82	=B78*E80*(1+E80)^(5*12)/((1+E80)^(5*12)-1)
83	2	=B82-D82	=B83*\$E\$80	=E83-C83	=\$E\$82
84	3	=B83-D83	=B84*\$E\$80	=E84-C84	=\$E\$82
137	56	=B136-D136	=B137*\$E\$80	=E137-C137	=\$E\$82
138	57	=B137-D137	=B138*\$E\$80	=E138-C138	=\$E\$82
139	58	=B138-D138	=B139*\$E\$80	=E139-C139	=\$E\$82
140	59	=B139-D139	=B140*\$E\$80	=E140-C140	=\$E\$82
141	60	=B140-D140	=B141*\$E\$80	=E141-C141	=\$E\$82
142	Всього		=СУММ(C82:C141)	=СУММ(D82:D141)	=СУММ(E82:E141)

Рис. 3.12. Розрахунок плану погашення іпотечного кредиту з рівними терміновими сплатами (фрагмент)

	Мес яц	Залишок боргу на початок місяця, D	Процентний платіж, I	Ежемесячный расход по погашению основного долга, R	Щомісячна термінова сплата, Y
81					
82	1	40000	200	573,312	773,312
83	2	39426,688	197,133	576,179	773,312
84	3	38850,509	194,253	579,059	773,312
137	56	3809,236	19,046	754,266	773,312
138	57	3054,97	15,275	758,037	773,312
139	58	2296,933	11,485	761,827	773,312
140	59	1535,106	7,676	765,636	773,312
141	60	769,47	3,847	769,465	773,312
142	Всього		6398,725	40000,00	46398,72

Рис. 3.13. Результат розрахунку плану погашення іпотечного кредиту з рівними терміновими сплатами (фрагмент)

Так, переплата за цими умовами позики складає 6 398,725 дол. США.

8. Погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу.

Розрахунок у MS Excel плану погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу наведений на рис. 3.14 і 3.15.

	A	B	C	D	E
144	8. Погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу				
145	Міс	Залишок боргу на початок місяця, D	Процентний платіж, I	Щомісячна витрата по погашенню основного боргу, R	Щомісячна термінова сплата, Y
146	1	=B78	=B146*\$E\$80	=B146/60	=C146+D146
147	2	=B146-D146	=B147*\$E\$80	=\$D\$146	=C147+D147
148	3	=B147-D147	=B148*\$E\$80	=\$D\$146	=C148+D148
203	58	=B202-D202	=B203*\$E\$80	=\$D\$146	=C203+D203
204	59	=B203-D203	=B204*\$E\$80	=\$D\$146	=C204+D204
205	60	=B204-D204	=B205*\$E\$80	=\$D\$146	=C205+D205
206	Всього		=СУММ(C146:C205)	=СУММ(D146:D205)	=СУММ(E146:E205)

Рис. 3.14. Розрахунок плану погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу

	Мес яц	Залишок боргу на початок місяця, D	Процентний платіж, I	Годовий расход по погашенню основного долга, R	Щомісячна термінова сплата, Y
145					
146	1	40 000,00	200	666,67	866,67
147	2	39 333,33	196,67	666,67	863,34
148	3	38 666,66	193,33	666,67	860
203	58	1 999,81	10	666,67	676,67
204	59	1 333,14	6,67	666,67	673,34
205	60	666,47	3,33	666,67	670
206	Всього		6100	40000,2	46100,2

Рис. 3.15. Результат розрахунку плану погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу

За такими умовами позики переплата менша і складає лише 6 100 дол. США.

Лабораторна робота 4

Аналіз ефективності реальних інвестицій

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навичок розрахунку показників ефективності інвестиційних фінансових операцій.

Завдання 1. Початкові дані. Фірмі надали кредит на 250 днів під 12 % річних. Комісійні склали 0,5 % від суми кредиту.

Необхідно:

1. Визначити прибутковість операції для кредитора у вигляді річної ставки складних відсотків:

1.1. Якщо кредит був виданий під прості відсотки (365/360).

1.2. Якщо кредит був виданий під складні відсотки (365/365).

2. Визначити прибутковість облікової операції, якщо в початкових даних вказано суму векселя і ставку дисконту.

Завдання 2. Початкові дані. Розглядають пропозиції двох фірм з будівництва промислового об'єкта. У табл. 4.1 вказано початкові умови для кожної фірми.

Таблиця 4.1

Початкові умови фірм з будівництва промислового об'єкта

Параметри	Умови фірми А	Умови фірми Б
Ціна нового об'єкта, млн грн	50,0	55,0
Термін будівництва, років	1	1
Авансові платежі (вносяться під час підписання контракту), млн грн	20,0	10,0
Термін кредиту, років	8	7
Пільговий період, років	2	3
Ставка відсотків, %	10,0	11,0

Кредит погашають рівними річними виплатами, ставка порівняння $q = 12\%$.

Необхідно вибрати оптимальні умови контракту.

Завдання 3. Початкові дані. Умови двох контрактів такі: $P_1 = 10,0$ млн грн, $P_2 = 12,0$ млн грн, $i_1 = 8\%$, $i_2 = 7\%$, $n_1 = 5$ років, $n_2 = 4$ роки.

Необхідно:

3.1. Визначити граничні параметри другого контракту, прийнявши ставку порівняння $q = 10\%$.

3.2. Визначити граничні параметри другого контракту, якщо $n_1 = n_2 = 5$ років.

Методичні рекомендації до виконання завдань

Загальним принципом визначення фінансової ефективності різних операцій є прибутковість, еквівалентна прибутковості від проведення позикової операції, тобто проблема зводиться до визначення розрахункової відсоткової ставки, що відображає загальну прибутковість на вкладений капітал.

Розрахункову відсоткову ставку в позикових операціях зазвичай називають ефективною ставкою. У розрахунках за оцінкою облігацій її називають прибутковістю на момент погашення. Проте у вітчизняній економічній літературі найчастіше розрахункову відсоткову ставку позначають терміном "повна прибутковість".

Для запису формул розрахунку ставок повної прибутковості прийняти такі позначення:

i_3 – ставка повної прибутковості;

i – відсоткова ставка;

g – відсоток комісійних утримань від суми кредиту;

n – термін погашення заборгованості ($n = t/K$);

n' – часовий інтервал від моменту обліку векселя до моменту сплати за ним;

d – облікова ставка.

1. Розрахунок ставки повної прибутковості з урахуванням комісійних.

Початкові дані: $t = 250$, $i = 0,12$, $g = 0,005$, $K = 360$ (365).

1.1. Під час видачі позики під прості відсотки (365/360):

$$i_3 = \left(\frac{1 + n \times i}{1 - g} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1 + \frac{250}{360} \times 0,12}{1 - 0,005} \right)^{\frac{360}{250}} - 1 = 0,130296.$$

1.2. Під час видачі позики під складні відсотки (365/365):

$$i_3 = \frac{1 + i}{(1 - g)^{\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1 + 0,12}{(1 - 0,005)^{\frac{365}{250}}} - 1 = 0,128227.$$

1.3. Під час реалізації облікової операції:

$$i_3 = \left(\frac{1}{1 - n' \times d - g} \right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - \frac{250}{360} \times 0,12 - 0,005} \right)^{\frac{365}{250}} - 1 = 0,144562.$$

Розрахунок у *MS Excel* ефективної ставки (ставки повної прибутковості) з урахуванням комісійних під час видачі позики під різні умови наведений на рис. 4.1.

Таким чином, найвища ефективна ставка – під час реалізації облікової операції.

	A	B	C	D	E	F	G
1	1. Розрахунок ставки повної прибутковості з урахуванням комісійних						
2	t= 250		днів				
3	i= 0,12			K= 360		365	
4	g= 0,005						
5	1.1. Ефективна ставка складних % при видачі позики під прості відсотки (365/360)						
6	$i_3 = ((1+B2/E3*B3)/(1-B4))^(E3/B2)-1$						
7	1.2. Ефективна ставка складних % при видачі позики під складні відсотки (365/365)						
8	$i_3 = ((1+B3)/((1-B4)^(F3/B2)))-1$						
9	1.3. Ефективна ставка складних % при реалізації облікової операції						
10	$i_3 = ((1/(1-(B2/E3)*B3-B4))^(F3/B2))-1$						
5	1.1. Ефективна ставка складних % при видачі позики під прості відсотки (365/360)						
6	$i_3 = 0,130296$						
7	1.2. Ефективна ставка складних % при видачі позики під складні відсотки (365/365)						
8	$i_3 = 0,128227$						
9	1.3. Ефективна ставка складних % при реалізації облікової операції						
10	$i_3 = 0,144562$						

Рис. 4.1. Розрахунок і результати розрахунку ефективної ставки (ставки повної прибутковості) з урахуванням комісійних під час видачі позики під різні умови

2. Вибір оптимальних умов в комерційних контрактах. Аналіз фінансових наслідків реалізації комерційних контрактів може проводитися на основі використання методу порівняння сучасних величин всіх платежів, передбачених цими контрактами, коли всі платежі приводяться до моменту початку їх дії. Сучасна величина всіх витрат характеризуватиме грошову суму, яка з нарахованими на неї відсотками забезпечить виконання всіх платежів, передбачених контрактом. Для покупця найбільш вигідною є найменша сучасна величина.

У процесі обчислення сучасних величин дисконтування всіх платежів, передбачених контрактами, проводять за єдиною відсотковою ставкою, тобто так званою *ставкою порівняння*.

У процесі аналізу умов різних контрактів необхідно враховувати, що збільшення терміну постачання скорочує сучасну величину витрат покупця. Тому зіставні результати можуть бути отримані у тому випадку, коли терміни постачань однакові.

За умови одноразового постачання товару заборгованість, як правило, визначається на момент постачання:

$$A = Q + I \times V^{t+L} + Y \times a_{n,q} \times V^{t+L},$$

де Q – сума авансового платежу;

I – відсотки в пільговому періоді (прості або складні);

$$V = (1 + q)^{-1};$$

t – час від моменту укладення оборудки до моменту постачання товару;

L – час пільгового періоду;

$a_{n,q}$ – коефіцієнт приведення;

n – термін погашення заборгованості;

Y – величина щорічних термінових сплат.

Під час постачання товару партіями із заздалегідь обумовленими термінами постачання для кожної партії встановлюють відповідні моменти часу, що визначають заборгованість:

$$A = Q_1 + Q_2 \times V^t + I \times a_{L,q} \times V^t + Y \times a_{L,q} \times V^{t+L},$$

де t – термін виплати останнього авансового платежу;

Q_1 і Q_2 – суми авансових платежів;

L – пільговий період (відсотки виплачуються щорічно);

n – термін погашення заборгованості (погашення проводиться рівними річними платежами);

$Y = D \times \frac{i \cdot (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ – величина щорічних термінових сплат;

i – договірна відсоткова ставка;

I – нараховані за пільговий період відсотки;

q – ставка порівняння;

D – накопичена заборгованість на кінець терміну постачання за умови, що на авансові платежі нараховуються відсотки:

$$D = \sum_j M_j \times (1+i)^{T_j} - \sum_k Q_k \times (1+i)^{T_k},$$

де M_j – вартість кожної партії товару, що поставляється ($M = \sum M_j$ – загальна вартість товару);

T_j – терміни постачань кожній партії товару ($T = \sum T_j$ – загальний термін);

T_k – час від моменту виплати останнього авансового платежу до кінця терміну постачань ($T_k = T - k$).

Зважаючи на початкові дані завдання, в табл. 4.2 наведені умовні значення основних параметрів комерційних контрактів.

Розрахунок у *MS Excel* основних параметрів контрактів наведений на рис. 4.2 і 4.3.

Таблиця 4.2

Умовні позначення основних параметрів контрактів

Параметри контрактів	Умовне позначення	Параметри контрактів	Умовне позначення
1	2	3	4
Сума авансового платежу, млн грн	Q	Залишок заборгованості після сплати авансу, млн грн	D
Час від моменту укладення контракту до моменту постачання товару, років	t	Термін погашення заборгованості (термін кредиту – пільговий період), років	n
Ставка відсотків за кредитом	i	Пільговий період, років	L

1	2	3	4
Множник дисконтування з параметром (t)	V^t	Множник дисконтування з параметром ($t + L$)	V^{t+L}
Коефіцієнт приведення з параметрами (n, q)	$a_{n,q}$	Коефіцієнт під час ведення з параметрами (L, q)	$a_{L,q}$
Сучасна вартість заборгованості, млн грн	A	–	–

	E	F	G
22	Ум. позн.	A	Б
23	Q	20	10
24	D	=D14-D16	=E14-E16
25	t	1	1
26	n	6	4
27	i	0,1	0,11
28	L	2	3
29	V^t	=(1+\$B\$20)^(-F25)	=(1+\$B\$20)^(-G25)
30	$V^{(t+L)}$	=(1+\$B\$20)^(-F25+F28))	=(1+\$B\$20)^(-G25+G28))
31	$a_{n,q}$	=(1-(1+\$B\$20)^(-F\$26))/\$B\$20	=(1-(1+\$B\$20)^(-G\$26))/\$B\$20
32	$a_{L,q}$	=(1-(1+\$B\$20)^(-F\$28))/\$B\$20	=(1-(1+\$B\$20)^(-G\$28))/\$B\$20
33		=(F27*(1+F27)^F26)/(((1+F27)^F26)-1)	=(G27*(1+G27)^G26)/(((1+G27)^G26)-1)
34		=F33*F31*F30	=G33*G31*G30
35		=F27*F32*F29	=G27*G32*G29
36	A	=F23+F24*(F34+F35)	=G23+G24*(G34+G35)

Рис. 4.2. Розрахунок основних параметрів комерційних контрактів

	E	F	G
29	V^t	0,892857143	0,892857143
30	$V^{(t+L)}$	0,711780248	0,635518078
31	$a_{n,q}$	4,111407324	3,037349347
32	$a_{L,q}$	1,69005102	2,401831268
33		0,22960738	0,322326352
34		0,671927291	0,622183469
35		0,150897413	0,235894142
36	A	44,68474111	48,61349249

Рис. 4.3. Результати розрахунку основних параметрів комерційних контрактів

Таким чином, умови фірми А є переважнішими, оскільки сучасна величина кредиту за даною фірмою менша, ніж за фірмою Б.

3. Граничні значення параметрів комерційних контрактів. Для порівняння конкурентоспроможності двох альтернативних контрактів використовується метод визначення граничних значень параметрів, за яких зіставляються ціни або відсоткові ставки.

Граничним значенням параметра контракту є величина, конкурентоспроможність, що забезпечує його, щодо іншого, базового, тобто порівнюваного з ним, контракту під час незмінності решти умов.

У табл. 4.3 наведені умови двох контрактів.

Таблиця 4.3

Умови двох контрактів

Параметри	Умовне позначення	Умови контракту А	Умови контракту Б
Вартість товару за умовами контракту, млн грн	P_i	10	12
Термін платежів, років	n_i	5	4
Ставка порівняння, %	q	10	
Ставка відсотків, %	i	8	7

Облік всіх умов контрактів під час використання граничних значень їх параметрів повинен забезпечити рівність сучасних величин платежів покупця за обома контрактами.

$$P_1 \times \left(\frac{1 + i_1}{1 + q} \right)^{-n_1} = P_2 \times \left(\frac{1 + i_2}{1 + q} \right)^{-n_2},$$

де P_1 і P_2 – вартість товару за умовами першого і другого контрактів;

i_1 і i_2 – відсоткові ставки;

n_1 і n_2 – терміни платежів;

q – ставка порівняння.

А. З приведенного виразу знайти i_2^* і P_2^* :

$$i_2^* = (1 + q) \times \left[\frac{P_2}{P_1} \times \left(\frac{1 + i_1}{1 + q} \right)^{n_1} \right]^{\frac{1}{n_2}} - 1 =$$

$$= (1 + 0,1) \times \left[\frac{12}{10} \times \left(\frac{1 + 0,08}{1 + 0,1} \right)^5 \right]^{\frac{1}{4}} - 1 = 0,125193,$$

$$P_2^* = P_1 \times \frac{(1 + i_2)^{n_2}}{(1 + i_1)^{n_1}} \times (1 + q)^{n_1 - n_2} = 10 \times \frac{(1 + 0,07)^4}{(1 + 0,08)^5} \times (1 + 0,1)^{5-4} = 9,813163 \text{ (млн грн).}$$

Б. Значення i_2^* і P_2^* істотно залежать від прийнятої ставки порівняння і терміну кредитування. У випадку якщо $n_1 = n_2 = n$, то для розрахунків граничних значень параметрів операції можна обійтися без ставки порівняння, а саме:

$$i_2^* = (1 + i_1) \times \left[\frac{P_1}{P_2} \right]^{\frac{1}{n}} - 1 = (1 + 0,08) \times \left[\frac{10}{12} \right]^{\frac{1}{5}} - 1 = 0,0413279,$$

$$P_2^* = P_1 \times \left(\frac{1 + i_1}{1 + i_2} \right)^n = 10 \times \left(\frac{1 + 0,08}{1 + 0,07} \right)^5 = 10,476106 \text{ (млн грн).}$$

Розрахунок у MS Excel граничних значень параметрів комерційних контрактів наведений на рис. 4.4 і 4.5.

	A	B	C	D	E
38	3. Граничні значення параметрів комерційних контрактів				
39	$P_1 = 10$		$P_2 = 12$		$q = 0,1$
40	$i_1 = 0,08$		$i_2 = 0,07$		
41	$n_1 = 5$		$n_2 = 4$		
42	$i2^* = (((1+F39)*((D39/B39*(((1+B40)/(1+F39))^B41))^(1/D41))))-1$				
43	$A1 = =B39*(((1+B40)/(1+F39))^(-B41))$				
44	$A2^* = =D39*(((1+B42)/(1+F39))^(-D41))$				
45					
46	$i2^* = =(1+B40)*((B39/D39)^(1/B41))-1$				
47	$S1 = =B39*(1+B40)^5$				
48	$S2^* = =D39*(1+B46)^5$				

Рис. 4.4. Розрахунок граничних значень параметрів комерційних контрактів

42	$i_2^* =$	0,1252
43	$A_1 =$	10,961
44	$A_2^* =$	10,961
45		
46	$i_2^* =$	0,0413
47	$S_1 =$	14,693
48	$S_2^* =$	14,693

Рис. 4.5. Результати розрахунку граничних значень параметрів комерційних контрактів

Таким чином, за умови, що терміни контрактів однакові, переважно будуть умови першого, оскільки $i_2^* < i_2$ і $P_2^* < P_2$.

Лабораторна робота 5

Моделювання оптимального портфеля цінних паперів

Мета – закріплення теоретичного й практичного матеріалу, набуття навичок побудови моделей оптимізації інвестиційного портфеля в середовищі *MS Excel*.

Завдання 1. Початкові дані. Котирування цінних паперів задані в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Котирування цінних паперів

Дата	Компанія "А"	Компанія "Б"	Компанія "В"	Компанія "Г"	Компанія "Д"
16 січня	146,29	15,833	48,80	0,0575	2001,00
15 січня	147,73	15,950	49,45	0,0574	2006,00
14 січня	149,60	15,725	49,53	0,0578	2020,00
11 січня	147,97	15,670	48,00	0,0575	2006,10
10 січня	147,60	15,850	47,16	0,0552	2008,50
09 січня	148,91	16,040	47,19	0,0548	2026,70
08 січня	147,90	16,163	46,22	0,0549	2024,60
28 грудня	143,70	15,932	44,99	0,0536	2000,20
27 грудня	144,95	16,050	43,70	0,0542	2011,00
26 грудня	145,06	16,058	43,25	0,0542	2015,60

Необхідно: з використанням програми *MS Excel* та надбудови "Пошук рішення" визначити частки капіталу, що потрібно витратити на купівлю кожного виду цінних паперів за умови:

- 1) мінімальному ризику й заданій ефективності на рівні не нижче ніж 75 % від максимальної ефективності серед усіх цінних паперів на основі моделі Марковіца і Тобіна;
- 2) максимальній ефективності й заданому ризику на рівні не вище ніж 125 % від мінімального рівня ризику на основі моделі Марковіца;
- 3) ризиковано-ефективній моделі;
- 4) мінімальному ризику й максимальній ефективності на основі моделі Тобіна.

Методичні рекомендації до виконання завдання

1. Основні поняття. Мета інвестора – вкласти гроші так, щоб зберегти свій капітал, а у разі можливості і збільшити його.

Набір цінних паперів, що знаходяться в учасника ринку, називають його портфелем. Вартість портфеля – це сумарна вартість усіх складових його паперів. Якщо сьогодні його вартість є P , а через рік вона виявиться рівною P' , то $(P' - P)/P$ природно назвати прибутковістю портфеля у відсотках річних. Тобто прибутковість портфеля – це дохідність на одиницю його вартості.

Нехай x_i – частка капіталу, витрачена на купівлю цінних паперів i -го виду. Весь виокремлений капітал приймають за одиницю. Нехай d_i – дохідність у частках річних паперів i -го виду в розрахунку на одну грошову одиницю.

Знайти прибутковість усього портфеля d_p . З одного боку, через рік капітал портфеля буде дорівнювати $1 + d_p$, з іншого – вартість паперів i -го виду збільшиться з x_i до $x_i + d_i x_i$, так що сумарна вартість портфеля буде $\sum x_i + \sum x_i d_i = 1 + \sum x_i d_i$. Прирівнюючи обидва вирази для вартості портфеля, буде отримано $1 + d_p = 1 + \sum x_i d_i$.

Звідси:

$$d_p = \sum x_i d_i.$$

Отже, завдання збільшення капіталу портфеля еквівалентне аналогічному завданню про дохідність портфеля, вираженому через дохідності паперів і їх частки формулою $d_p = \sum x_i d_i$.

Як правило, дохідність коливається в часі, так що слід вважати її випадковою величиною. Нехай m_i – середня очікувана прибутковість, тобто $m_i = M[d_i]$ – математичне очікування дохідності і $D_i = \sigma^2$ – дисперсія i -ї дохідності. Позначити $\sigma^2 = D_i = r_i$ і називати m_i і r_i відповідно, ефективністю та ризиком i -го цінного паперу. Через v_{ij} позначити коваріації дохідностей цінних паперів i -го і j -го видів.

Оскільки дохідність складових портфеля цінних паперів випадкова, то і дохідність портфеля є також випадковою величиною.

Математичне очікування дохідності портфеля позначити через m_p і назвати ефективністю портфеля:

$$m_p = M[d_p] = x_1 \times M[d_1] + \dots + x_n \times M[d_n] = \sum_i x_i m_i.$$

Дисперсію дохідності портфеля позначити через r_p і назвати ризиком портфеля.

$$r_p = D[d_p] = \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij}.$$

Вихідні дані на листі *MS Excel* наведені на рис. 5.1.

	A	B	C	D	E	F
1						
2	Дата	Компанія «А»	Компанія «Б»	Компанія «В»	Компанія «Г»	Компанія «Д»
3	16 січня	146,29	15,833	48,8	0,0575	2001
4	15 січня	147,73	15,95	49,45	0,0574	2006
5	14 січня	149,6	15,725	49,53	0,0578	2020
6	11 січня	147,97	15,67	48	0,0575	2006,1
7	10 січня.	147,6	15,85	47,16	0,0552	2008,5
8	09 січня	148,91	16,04	47,19	0,0548	2026,7
9	08 січня	147,9	16,163	46,22	0,0549	2024,6
10	28 грудня	143,7	15,932	44,99	0,0536	2000,2
11	27 грудня	144,95	16,05	43,7	0,0542	2011
12	26 грудня	145,06	16,058	43,25	0,0542	2015,6
13						

Рис. 5.1. Вихідні дані котирування цінних паперів

Перш ніж будувати модель, необхідно визначити дохідності кожного виду цінного паперу $d_i = (\dot{P}_i - P_i)/P_i$ для кожного моменту часу, тобто побудувати матрицю D .

Формули розрахунку наведені на рис. 5.2.

Необхідно визначити частки капіталу, витрачені на купівлю кожного виду цінних паперів, тобто елементи матриці $X = \{x_1, x_2, \dots, x_5\}$.

У цьому випадку задамося початковим наближенням $X = \{0,1; 0,1; 0,1; 0,1; 0,1\}$.

	A	B	C	D	E	F
13						
14						
15	Дата	Компанія «А»	Компанія «Б»	Компанія «В»	Компанія «Г»	Компанія «Д»
16	=A3	=(B3-B4)/B4	=(C3-C4)/C4	=(D3-D4)/D4	=(E3-E4)/E4	=(F3-F4)/F4
17	=A4	=(B4-B5)/B5	=(C4-C5)/C5	=(D4-D5)/D5	=(E4-E5)/E5	=(F4-F5)/F5
18	=A5	=(B5-B6)/B6	=(C5-C6)/C6	=(D5-D6)/D6	=(E5-E6)/E6	=(F5-F6)/F6
19	=A6	=(B6-B7)/B7	=(C6-C7)/C7	=(D6-D7)/D7	=(E6-E7)/E7	=(F6-F7)/F7
20	=A7	=(B7-B8)/B8	=(C7-C8)/C8	=(D7-D8)/D8	=(E7-E8)/E8	=(F7-F8)/F8
21	=A8	=(B8-B9)/B9	=(C8-C9)/C9	=(D8-D9)/D9	=(E8-E9)/E9	=(F8-F9)/F9
22	=A9	=(B9-B10)/B10	=(C9-C10)/C10	=(D9-D10)/D10	=(E9-E10)/E10	=(F9-F10)/F10
23	=A10	=(B10-B11)/B11	=(C10-C11)/C11	=(D10-D11)/D11	=(E10-E11)/E11	=(F10-F11)/F11
24	=A11	=(B11-B12)/B12	=(C11-C12)/C12	=(D11-D12)/D12	=(E11-E12)/E12	=(F11-F12)/F12
25						

Рис. 5.2. Формули розрахунку дохідностей цінних паперів

2. Модель оптимального портфеля Марковіца, яка забезпечує мінімальний ризик і задану ефективність, має вигляд:

$$\begin{cases} r_p = D[d_p] = \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} \rightarrow \min \\ \sum_i x_i d_i = m_p \\ \sum_i x_i = 1, x_i \geq 0 \end{cases}$$

У даній моделі обмеження – лінійна функція. Обмеження в матричному вигляді можна записати як $X\bar{D} = m_p$, де \bar{D} – матриця-рядок середніх значень дохідностей i -х цінних паперів, які визначають за формулою середнього арифметичного:

$$d_i \approx \frac{1}{N} \sum_{k=1}^N d_{ik}$$

Для матриці \bar{D} використати функцію СРЗНАЧ(число1; число2; ...), наприклад СРЗНАЧ(B16:B24).

Результати розрахунків дохідностей кожного з цінних паперів, середніх значень дохідностей та максимального значення (функція МАКС(число1; число2; ...)) дохідності з усіх середніх наведені на рис. 5.3.

	A	B	C	D	E	F	G
13							
14							
15	Дата	Компанія «А»	Компанія «Б»	Компанія «В»	Компанія «Г»	Компанія «Д»	
16	16 січня	-0,975%	-0,734%	-1,314%	0,174%	-0,249%	
17	15 січня	-1,250%	1,431%	-0,162%	-0,692%	-0,693%	
18	14 січня	1,102%	0,351%	3,188%	0,522%	0,693%	
19	11 січня	0,251%	-1,136%	1,781%	4,167%	-0,119%	
20	10 січня	-0,880%	-1,185%	-0,064%	0,730%	-0,898%	
21	09 січня	0,683%	-0,761%	2,099%	-0,182%	0,104%	
22	08 січня	2,923%	1,450%	2,734%	2,425%	1,220%	
23	28 грудня	-0,862%	-0,735%	2,952%	-1,107%	-0,537%	
24	27 грудня	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%	Максимум дохідності
25	Середня дохідність	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%	1,362%
26							
--							

Рис. 5.3. Результати розрахунку

Цільова функція у моделі Марковіца (2) r_p – нелінійна, і є не що інше як квадратична форма, яку в матричній формі запишуть як $r = X^T V_{ij} X$, де X – матриця-стовпець змінних, а X^T – матриця-рядок змінних, яку буде отримано за допомогою транспонування.

Коваріацію або кореляційний момент дохідностей цінних паперів розраховують як:

$$V_{ij} = M \left\{ \overbrace{(d_{ik} - d_i)}^{\Delta_{ik}} \times \overbrace{(d_{jk} - d_j)}^{\Delta_{jk}} \right\} \approx \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \Delta_{ik} \times \Delta_{jk},$$

де Δ_{ik} і Δ_{jk} – відхилення дохідностей i -го і j -го паперів від середньої арифметичної дохідності.

Матрицю коваріацій дохідностей цінних паперів V_{ij} знайти за допомогою функції КОВАР(*массив1*; *массив2*), а саме КОВАР(\$B\$16: \$B\$24;B16:B24). Результати всіх проміжних розрахунків, а також компоненти початкового плану наведені на рис. 5.4.

	A	B	C	D	E	F	G	H
13								
14								
15	Дата	Компанія «А»	Компанія «Б»	Компанія «В»	Компанія «Г»	Компанія «Д»		
16	16 січня	-0,975%	-0,734%	-1,314%	0,174%	-0,249%		
17	15 січня	-1,250%	1,431%	-0,162%	-0,692%	-0,693%		
18	14 січня	1,102%	0,351%	3,188%	0,522%	0,693%		
19	11 січня	0,251%	-1,136%	1,781%	4,167%	-0,119%		
20	10 січня	-0,880%	-1,185%	-0,064%	0,730%	-0,898%		
21	09 січня	0,683%	-0,761%	2,099%	-0,182%	0,104%		
22	08 січня	2,923%	1,450%	2,734%	2,425%	1,220%		
23	28 грудня	-0,862%	-0,735%	2,952%	-1,107%	-0,537%	Максимум дохідності	План
24	27 грудня	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%		
25	Середня дохідність	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%	1,362%	X
26	Матриця коваріацій	0,00016	0,00005	0,00012	0,00010	0,00008		20,00%
27		0,00005	0,00009	0,00002	-0,00001	0,00003		20,00%
28		0,00012	0,00002	0,00022	0,00004	0,00006		20,00%
29		0,00010	-0,00001	0,00004	0,00024	0,00004		20,00%
30		0,00008	0,00003	0,00006	0,00004	0,00004		20,00%
31							Сума	
32	Xт=	20,00%	20,00%	20,00%	20,00%	20,00%	100,00%	75% від
33	XтV=	0,0001014	3,638E-05	9,31E-05	8,21E-05	4,8692E-05	Ефективність	макс доходу
34	xidi=	0,0002034	-0,000304	0,002723	0,001341	-0,0001575	0,00380655	0,01021177
35								
36							Ціль	
37					XтVX=		0,0000723	Ризик
38								

Рис. 5.4. Результати розрахунків і початковий план

Розглянута модель Марковіца належить до моделей нелінійного програмування. Для її вирішення використовують надбудову "Пошук рішення", робота з якою була детально вивчена під час засвоєння навчальної дисципліни "Оптимізаційні методи та моделі". Результат заповнення вікна надбудови "Пошук рішення" наведено на рис. 5.5.

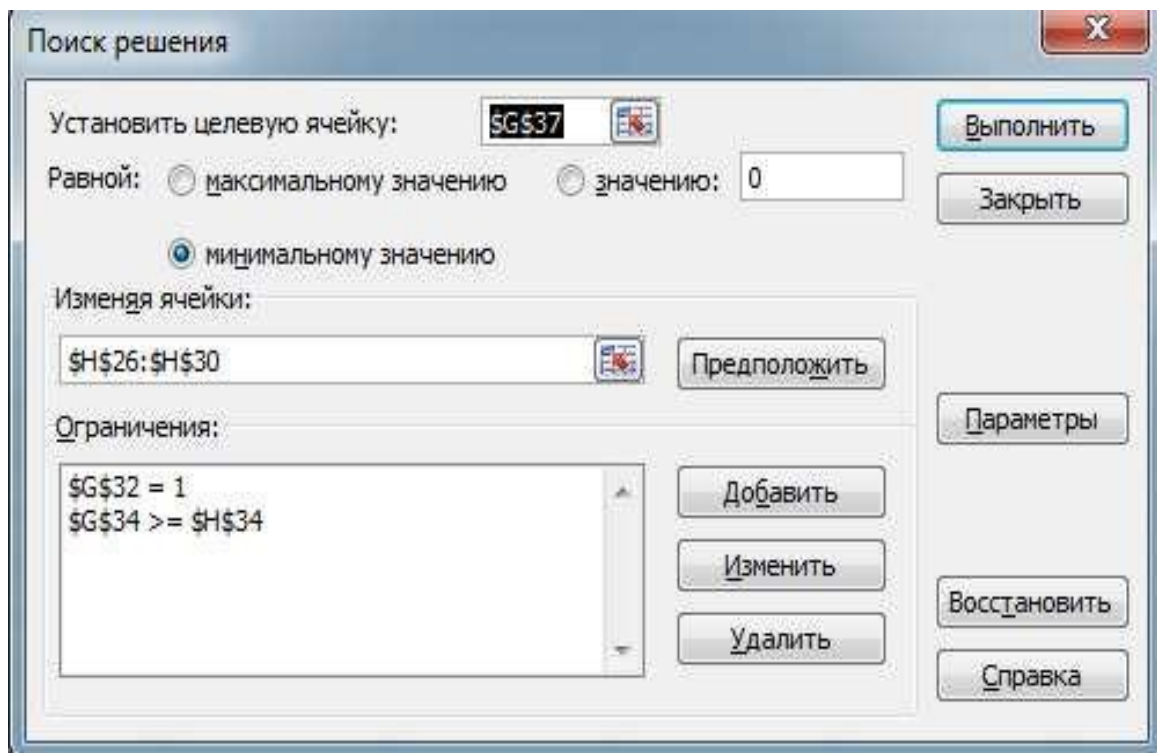


Рис. 5.5. Результат заповнення вікна надбудови "Пошук рішення"

Отриманий оптимальний план наведений на рис. 5.6.

	A	B	C	D	E	F	G	H
22	08 січня	2,923%	1,450%	2,734%	2,425%	1,220%		
23	28 грудня	-0,862%	-0,735%	2,952%	-1,107%	-0,537%	Максимум дохідності	
24	27 грудня	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%		План
25	Середня дохідність	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%	1,362%	X
26	Матриця коваріацій	0,00016	0,00005	0,00012	0,00010	0,00008	Компанія «А»	0,000%
27		0,00005	0,00009	0,00002	-0,00001	0,00003	Компанія «Б»	9,787%
28		0,00012	0,00002	0,00022	0,00004	0,00006	Компанія «В»	62,382%
29		0,00010	-0,00001	0,00004	0,00024	0,00004	Компанія «Г»	27,831%
30		0,00008	0,00003	0,00006	0,00004	0,00004	Компанія «Д»	0,000%
31							Сума	
32	X^T	0,000%	9,787%	62,382%	27,831%	0,000%	100,000%	75% від макс доходу
33	$X^T V =$	0,0001093	1,8865E-05	0,00015266	9,1591E-05	5,0105E-05	Ефективність	
34	$x_d =$	0	-0,0001488	0,00849376	0,00186677	0	0,010211773	0,010211773
35								
36							Ціль	
37						$X^T V X =$	0,0001226	Ризик
38								

Рис. 5.6. Оптимальний план

Звіти за результатами та стійкістю подані на рис. 5.7 і 5.8.

Целевая ячейка (Минимум)					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
\$G\$37	XT V X = Цель	0,0000723	0,0001226		
Изменяемые ячейки					
Ячейка	Имя	Исходное значение	Результат		
\$H\$26	Матрица ковариаций X	20,000%	0,000%		
\$H\$27	X	20,000%	9,787%		
\$H\$28	X	20,000%	62,382%		
\$H\$29	X	20,000%	27,831%		
\$H\$30	X	20,000%	0,000%		
Ограничения					
Ячейка	Имя	Значение	Формула	Статус	Разница
\$G\$32	XT Сумма	100,000%	\$G\$32=1	не связан.	0
\$G\$34	xidi= Эффективность	0,010211773	\$G\$34>=\$H\$34	связанное	0

Рис. 5.7. Звіт за результатами

Изменяемые ячейки					
Ячейка	Имя	Результ. значение	Нормир. градиент		
\$H\$26	Матрица ковариаций X	0,000%	0,014%		
\$H\$27	X	9,787%	0,000%		
\$H\$28	X	62,382%	0,000%		
\$H\$29	X	27,831%	0,000%		
\$H\$30	X	0,000%	0,005%		
Ограничения					
Ячейка	Имя	Результ. значение	Лагранжа Множитель		
\$G\$32	XT Сумма	100,000%	0,006%		
\$G\$34	xidi= Эффективность	0,010211773	0,017678732		

Рис. 5.8. Звіт зі стійкості отриманого плану

Таким чином, для мінімізації ризику капітал необхідно розподілити між цінними паперами так: найбільшу частку – 62,38 % – вкласти в акції Компанії "В", 27,83 % капіталу вкласти в акції Компанії "Г", решту капіталу – 9,79 % вкласти в акції Компанії "Б". В акції Компанії "А" та Компанії "Д" в цьому випадку вкладати капітал не потрібно взагалі. Множник Лагранжа найбільший для двоїстої змінної ефективності, тобто її зміна найбільше впливає на значення цільової функції.

3. Оптимальний портфель Марковіца максимальної ефективності й заданого (прийняттого) ризику можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} m_p = \sum_i x_i d_i \rightarrow \max \\ \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} = r_p \\ \sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \end{cases} .$$

Для вирішення цього завдання нелінійного програмування також використовують надбудову "Пошук рішення". Прийнятний ризик задано на рівні 125 % від мінімального рівня ризику, знайденого на попередньому етапі. Результат заповнення вікна надбудови "Пошук рішення" для моделі Марковіца з максимізацією ефективності наведено на рис. 5.9.

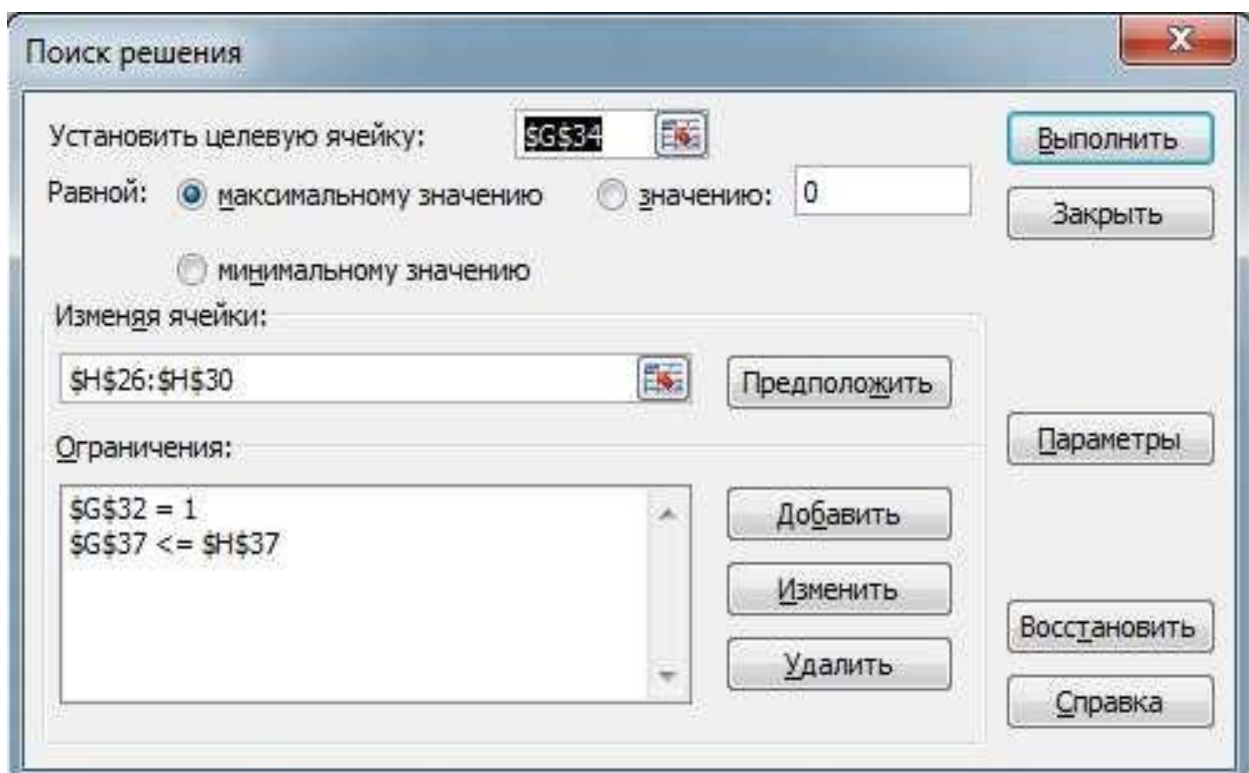


Рис. 5.9. Результат заповнення вікна надбудови "Пошук рішення"

Отриманий оптимальний план наведений на рис. 5.10.

	A	B	C	D	E	F	G	H
23	28 грудня	-0,862%	-0,735%	2,952%	-1,107%	-0,537%		
24	27 грудня	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%		План
25	Середня дохідність	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%		X
26	Матриця коваріацій	0,00016	0,00005	0,00012	0,00010	0,00008	Компанія «А»	0,000%
27		0,00005	0,00009	0,00002	-0,00001	0,00003	Компанія «Б»	0,000%
28		0,00012	0,00002	0,00022	0,00004	0,00006	Компанія «В»	73,297%
29		0,00010	-0,00001	0,00004	0,00024	0,00004	Компанія «Г»	26,703%
30		0,00008	0,00003	0,00006	0,00004	0,00004	Компанія «Д»	0,000%
31							Сума	
32	X ^T	0,000%	0,000%	73,297%	26,703%	0,000%	100,000%	
33	X ^T V =	0,00011663	1,2174E-05	0,00017447	9,4573E-05	5,3086E-05	Ефективність	
34	x _i d _i	0	0	0,0099799	0,0017911	0	0,011770992	Ціль
35								125%
36							Ризик	від мін ризику
37						X ^T VX =	0,0001531	0,0001532
38								

Рис. 5.10. Оптимальний план

Таким чином, для максимізації ефективності капітал необхідно розподілити між цінними паперами так: найбільшу частку – 73,3 % – вкласти в акції компанії "В", решту капіталу – 26,7 % – вкласти в акції компанії "Г". В акції компанії "А", компанії "Б" та компанії "Д" у цьому випадку вкладати капітал не потрібно.

4. Ризиковано-ефективна модель. Наведені моделі Марковіца в обмеженнях використовують заздалегідь визначені рівні ризику та дохідності. Ці моделі залежать від знань і думок експертів ринку цінних паперів і не дають гравцю ринку відповідь на найголовніше запитання, в яку ж гру грати – ризиковану (прибуткову) або неризиковану (мало-дохідну). Для подолання цього протиріччя була запропонована ризиковано-прибуткова модель, яка дозволяє не розмірковувати над проблемою визначення допустимого рівня ризику для кожного портфеля і має такий вигляд:

$$f(x_i) = \frac{\sqrt{\sum_i x_i^2 v_i^2} + \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij}}{\sum_i x_i d_i} \rightarrow \min,$$

$$\sum_i x_i = 1; \quad \forall x_i \geq 0,$$

де v_i – варіація дохідності цінних паперів i -го виду;

v_{ij} – коваріація дохідності цінних паперів i -го і j -го видів.

Цільову функцію в матричній формі записати як:

$$f = \frac{\sqrt{X^T V_i^2} + X^T V_{ij} X}{X \bar{D}},$$

де V_i^2 – матриця варіацій дохідностей цінних паперів, яку знайдемо за допомогою функції ДИСП.

Інші позначення та функції ті ж, що і в попередніх моделях.

Отриманий оптимальний план наведений на рис. 5.11.

	A	B	C	D	E	F	G	H
22	08 січня	2,923%	1,450%	2,734%	2,425%	1,220%		
23	28 грудня	-0,862%	-0,735%	2,952%	-1,107%	-0,537%		
24	27 грудня	-0,076%	-0,050%	1,040%	0,000%	-0,228%		
								План
25	Середня дохідність	0,102%	-0,152%	1,362%	0,671%	-0,079%		X
26		0,00016	0,00005	0,00012	0,00010	0,00008	Компанія «А»	3,94%
27		0,00005	0,00009	0,00002	-0,00001	0,00003	Компанія «Б»	0,00%
28		0,00012	0,00002	0,00022	0,00004	0,00006	Компанія «В»	80,27%
29		0,00010	-0,00001	0,00004	0,00024	0,00004	Компанія «Г»	15,79%
30	Матриця коваріацій	0,00008	0,00003	0,00006	0,00004	0,00004	Компанія «Д»	0,00%
31							Сума	
32	X^T	3,940%	0,000%	80,270%	15,790%	0,000%	100,000%	
33	$X^T V =$	0,000120533	1,70417E-05	0,000190399	7,49615E-05	5,5661E-05		
34	$V_i^2 =$	0,000201583	0,000107217	0,000141834	0,000362937	6,105E-05	Сума	
35	$X^2 V^2 =$	3,12929E-07	0	9,13875E-05	9,04889E-06	0	0,000100745	
36							Ефективність	
37	$x_d =$	4,00666E-05	0	0,01092932	0,001059109	0	0,012028226	
38							Ризик	
39	Ціль	0,848553532				$X^T V X =$	0,0001694	
40								
41								

Рис. 5.11. Оптимальний план

Таким чином, застосування ризиковано-прибуткової моделі дозволило визначити склад оптимального портфеля Марковіца. Так, найбільшу частку капіталу – 80,27 % – потрібно вкласти в акції компанії "В", 15,79 % капіталу – в акції компанії "В", решту капіталу – 3,94 % – вкласти в акції компанії "В". В акції компанії "В" та компанії "В" у цьому випадку також вкладати капітал не потрібно.

5. Оптимальний портфель за моделлю Тобіна. Вплив "портфельної теорії" Марковіца значно посилюється після появи робіт Дж. Тобіна. Дж. Тобін зауважив, що ринковий портфель, тобто сукупність усіх наявних у даний момент у інвесторів цінних паперів, є ефективним. Більш того, будь-яка комбінація ринкового портфеля з безризиковим активом дає знову ефективний портфель, який має менший ризик, хоча і з меншим очікуваним доходом. Тобін запропонував включити в аналіз безризикові активи, наприклад державні облігації. Тому моделі оптимального портфеля Тобіна відрізняються від моделей оптимального портфеля Марковіца лише наявністю безризикових паперів.

Модель оптимального портфеля Тобіна, яка забезпечує мінімальний ризик і задану ефективність, має такий вигляд:

$$\begin{cases} \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} \rightarrow \min \\ x_0 m_0 + \sum_i x_i d_i = m_p \\ x_0 + \sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \end{cases},$$

де m_0 – ефективність безризикових паперів;

x_0 – частка капіталу, вкладена в безризикові папери;

x_i, x_j – частка капіталу, вкладена в цінні папери i -го і j -го видів;

d_i – математичне сподівання (середнє арифметичне) дохідності i -го цінного паперу;

v_{ij} – кореляційний момент між ефективністю паперів i -го і j -го видів.

Оптимальний портфель Тобіна максимальної ефективності й заданого (прийняттого) ризику можна подати у вигляді:

$$\begin{cases} x_0 m_0 + \sum_i x_i d_i \rightarrow \max \\ \sum_i \sum_j x_i x_j v_{ij} = r_p \\ x_0 + \sum_i x_i = 1, \quad x_i \geq 0 \end{cases},$$

де r_p – заданий ризик портфеля.

Розрахункові формули та методи вирішення аналогічні формулам завдання формування оптимального портфеля цінних паперів Марковіца, що наведені.

Лабораторна робота 6

Моделювання оцінювання схильності підприємства до банкрутства

Мета – закріплення теоретичного й практичного матеріалу за темою "Моделі антикризового управління підприємством", набуття навичок побудови моделей оцінювання довгострокових активів CAPM у середовищі *MS Excel*.

Завдання. Початкові дані. Котирування цінних паперів Ощадбанку України та значення індексу ПФТС за період з 23.01 до 10.02 задані в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Вихідні дані

Дата	ПФТС	Ощадбанк	Дата	ПФТС	Ощадбанк
10.02	1 603,25	93,63	20.01	1 496,41	85,13
09.02	1 638,09	95,28	19.01	1 503,89	85,70
08.02	1 643,53	95,17	18.01	1 488,37	84,70
07.02	1 632,35	93,46	17.01	1 476,31	84,66
06.02	1 626,46	93,80	16.01	1 455,32	83,95
03.02	1 625,60	94,52	13.01	1 446,46	83,60
02.02	1 602,99	92,62	12.01	1 458,24	84,30
01.02	1 599,56	92,75	11.01	1 452,69	84,85
31.01	1 577,29	90,17	10.01	1 469,76	86,81
30.01	1 546,59	88,92	09.01	1 430,13	83,88
27.01	1 565,82	90,80	06.01	1 423,70	83,20
26.01	1 573,04	90,40	05.01	1 415,48	82,55
25.01	1 534,14	87,05	04.01	1 434,45	83,52
24.01	1 514,93	85,04	03.01	1 434,23	82,42
23.01	1 522,57	85,02	30.12	1 381,87	78,00

Безризикова дохідність, заснована на ставках трирічних державних облігацій, дорівнює 8 %.

Дохідність індексу ПФТС за рік склала 9,81 %.

Необхідно: з використанням програми *MS Excel*:

- 1) обчислити норму прибутковості для Ощадбанку України;
- 2) розрахувати справедливу норму прибутковості для Ощадбанку України, зробити висновки.

Методичні рекомендації до виконання завдання

1. Основні поняття. CAPM (з англ. *модель ціноутворення активів*) – модель оцінювання фінансових активів. Модель використовують для того, щоб визначити необхідний рівень прибутковості активу, який передбачається додати до вже існуючого добре диверсифікованого портфеля з урахуванням ринкового ризику цього активу. Модель оцінювання капітальних активів допомагає визначити справедливую прибутковість цінного паперу ґрунтуючись на її ризику.

Чим більше ризик, тим більше прибутковість. За допомогою моделі CAPM, якщо відомий потенційний ризик цінного паперу, можна прогнозувати норму прибутковості. І навпаки, якщо відома прибутковість, то можна обчислити ризик.

Оскільки будь-яка акція має свій ступінь ризику, цей ризик необхідно покрити прибутковістю, щоб інструмент залишився привабливим. Згідно з моделлю оцінювання довгострокових активів, норма прибутковості будь-якого фінансового інструмента (наприклад акції) складається з двох частин: безризикового та преміального доходів.

Іншими словами, будь-який прибуток від акції містить безризиковий прибуток (часто розраховують за ставками державних облігацій) і ризиковий прибуток, який відповідає ступеню ризику даного паперу. Якщо показники дохідності перевищують показники ризику, то інструмент приносить більше прибутку, ніж належить за умови ступеня ризику. І навпаки, якщо показники ризику опинилися вище дохідності, то інвестору такий інструмент не потрібний.

Модель оцінювання капітальних активів має такий вигляд:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_m) - r_f),$$

де $E(r_i)$ – очікувана ставка дохідності на довгостроковий актив;

r_f – безризикова ставка дохідності;

$E(r_m)$ – очікувана ринкова ставка дохідності;

$E(r_m) - r_f$ – премія за ризик вкладення в акції, дорівнює різниці ставок ринкової та безризикової дохідностей;

β_i – коефіцієнт чутливості активу до змін ринкової прибутковості r_m .

Слід розглянути кожен складову формули моделі оцінювання довгострокових активів.

Очікувана норма дохідності – це той прибуток, який інвестор чекає від фінансового інструмента.

Безризиковий дохід – це та частина доходу, яка закладена в усі інвестиційні інструменти. Безризиковий дохід вимірюють, як правило, за ставками державних облігацій, тому що ті практично без ризику. На заході безризиковий дохід дорівнює приблизно 4 – 5 %, в Україні – 7 – 10 %.

Загальна прибутковість ринку – це норма прибутковості індексу даного ринку. У США таким би виступив індекс S & P 500, в Україні – індекс ПФТС.

Бета (β) – спеціальний коефіцієнт, який вимірює ризикованість інструмента. β -коефіцієнт визначають як коваріацію дохідності активу (r_i) з прибутковістю всього ринку (r_m) відносно дисперсії дохідності всього ринку $\sigma^2(r_m)$:

$$\beta_i = \frac{\text{cov}(r_i, r_m)}{\sigma^2(r_m)}.$$

Бета-коефіцієнт для ринку в цілому завжди дорівнює одиниці. Бета-коефіцієнт акції є мірою ринкового ризику акції, показуючи мінливість дохідності акції до прибутковості на ринку в середньому (застосовують для оцінювання ризику вкладень у цінні папери).

У той час, як попередні елементи моделі CAPM прості, зрозумілі, і знайти їх досить просто, то β знайти не так просто; безкоштовні фінансові сервіси не надають β компаній.

Отже, якщо відомо хоча б 3 із 4 елементів формули моделі оцінювання довгострокових активів, можна обчислити бракуючий за допомогою простих алгебраїчних маніпуляцій.

2. Побудова моделі оцінювання довгострокових активів CAPM.

Обчислити дохідність для ПФТС і Ощадбанку так, як це було зроблено у попередній лабораторній роботі. Фрагмент таблиці з вихідними даними та результати обчислень дохідності наведені на рис. 6.1.

	A	B	C	D	E
1	Дата	ПФТС	Ощадбанк	ПФТС-Д	Ощадбанк-Д
2	10.02	1 603,25	93,63		
3	09.02	1 638,09	95,28	2,17%	1,76%
4	08.02	1 643,53	95,17	0,33%	-0,12%
5	07.02	1 632,35	93,46	-0,68%	-1,80%
6	06.02	1 626,46	93,8	-0,36%	0,36%
7	03.02	1 625,60	94,52	-0,05%	0,77%

Рис. 6.1. Фрагмент таблиці з вихідними даними

Обчислити норму прибутковості для Ощадбанку України.

Бета-коефіцієнт – це кут нахилу прямої з лінійного рівняння типу $y = a_0 + a_1x$, тобто $\beta = a_1$. ця пряма лінія – є прямою лінією регресії двох масивів даних: доходності індексу та акції. Побудувати її за допомогою функції `LINEST(E3:E31;D3:D31;ІСТИНА;ІСТИНА)`. Результати побудови наведено на рис. 6.2.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Дата	ПФТС	Ощадбанк	ПФТС-Д	Ощадбанк-Д	Бета			
2	10.02	1 603,25	93,63			1,183979	-0,00017	a1 (бета)	a0
3	09.02	1 638,09	95,28	2,17%	1,76%	0,124752	0,001722	σa1	σa0
4	08.02	1 643,53	95,17	0,33%	-0,12%	0,769375	0,008637	R^2	
5	07.02	1 632,35	93,46	-0,68%	-1,80%	90,07309	27	F	dF
6	06.02	1 626,46	93,8	-0,36%	0,36%	0,00672	0,002014	Σвідхил	Σвідхил

Рис. 6.2. Результат побудови лінійної функції

Для Ощадбанку β дорівнює 1,18.

Значення коефіцієнта детермінації R^2 показує наскільки зміна індексу рухає ціну акції. У цьому випадку акція Ощадбанку сильно залежить від індексу ПФТС, оскільки коефіцієнт кореляції дорівнює 0,77, що підтверджує і графічне зображення, наведене на рис. 6.3.

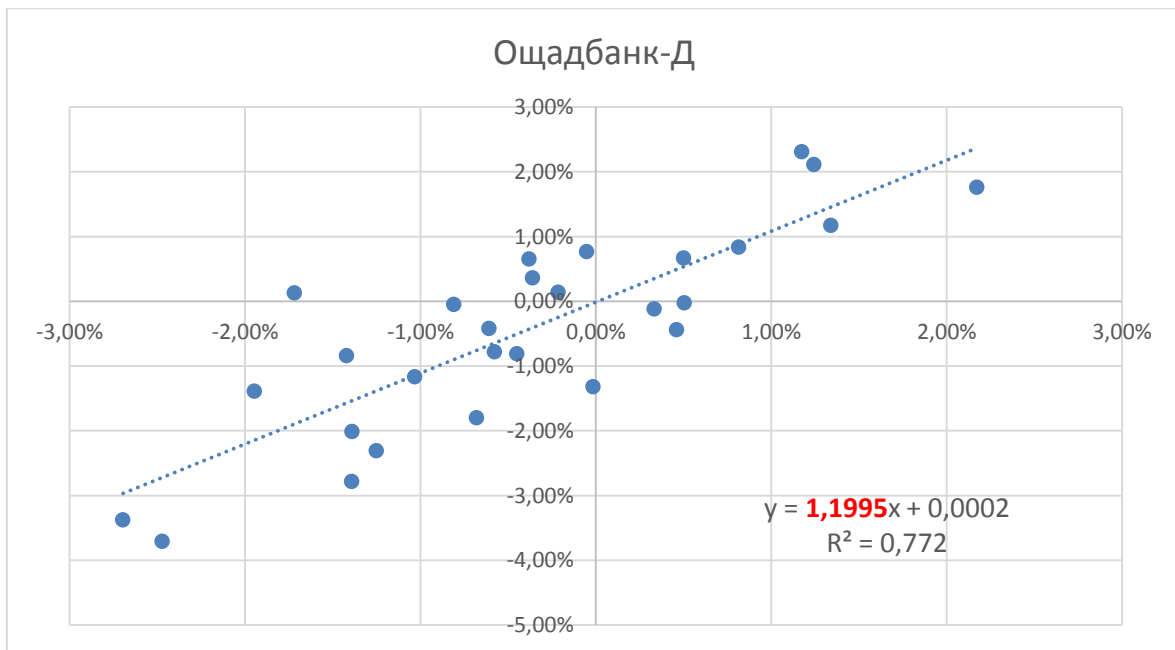


Рис. 6.3. Графік лінійної функції

Модель оцінювання довгострокових активів допоможе розрахувати справедливу норму прибутковості акції Ощадбанку України за допомогою таких вихідних даних:

r_f – безризиковий дохід = 8 %;

$E(r_m)$ – дохідність, індекс ПФТС = 9,81 %;

β – спеціальний коефіцієнт бета для СБ = 1,18.

$$E(r_i) = r_f + \beta_i(E(r_m) - r_f) = 8 + 1,18(9,81 - 8) = 8 + 2,14 = 10,14 (\%).$$

Виходить, що справедлива норма дохідності акції Ощадбанку повинна скласти 10,14 %, з яких 8 % – це безризиковий дохід, і 2,14 % – компенсація ризику. А насправді, акція Ощадбанку принесла своїм акціонерам 8,21 %, що говорить про те, що акція Ощадбанку не дуже приваблива, з точки зору відношення прибутку до ризику.

У даних висновках є велика ймовірність похибки, оскільки для порівняння даних дохідності СБ й індексу ПФТС взята маленька вибірка: всього місяць.

Рекомендована література

Основна

1. Зайцев О. В. Фінансова математика : підручник / О. В. Зайцев. – Суми : Сумський державний університет, 2022. – 610 с. – Режим доступу : <http://surl.li/glqqm>.

2. Панасенко О. В. Фінансова математика [Електронний ресурс] : навч. посіб. / О. В. Панасенко, С. В. Прокопович ; Харківський національний економічний університет ім. С. Кузнеця. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 263 с. : іл. – Бібліогр.: С. 261–263. – Режим доступу : <http://surl.li/argnt>.

3. Хадарцев О. В. Портфельні теорії управління фінансовими інвестиціями: навчальний посібник для студентів спеціальності 076 "Підприємництво, торгівля та біржова діяльність" / О. В. Хадарцев. – Полтава : ПолтНТУ, 2018. – 94 с. – Режим доступу : https://dut.edu.ua/uploads/l_2086_70883814.pdf.

4. Фінансова математика та елементи актуарної математики: Навчальний посібник [Електронний ресурс] : навч. посіб. для студ. спеціальності 111 "Математика", спеціалізації "Страхова та фінансова математика" / І. І. Голіченко, О. І. Клесов, О. А. Тимошенко ; КПІ ім. Ігоря Сікорського. – Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2019. – 104 с. – Режим доступу : https://fpk.in.ua/images/biblioteka/3bac_finan/golichenko2019timoshenko.pdf.

Додаткова

5. Лойко В. В. Забезпечення фінансової спроможності об'єднаних територіальних громад / В. В. Лойко, В. О. Величко, А. В. Маринів, Т. В. Стещенко // Збірник наукових праць "Фінансово-кредитна діяльність: проблеми теорії та практики". – Т. 2. – № 33. – 2020. – С. 194–204.

6. Клебанова Т. С. Побудова інтегральних показників соціально-економічного розвитку країни (регіону) / Т. С. Клебанова, О. О. Рудаченко, О. В. Панасенко // Приазовський економічний вісник. Електронний науковий журнал. Вип. 2(25). 2021. – С. 19–23. – Режим доступу : http://rev.kpu.zp.ua/journals/2021/2_25_ukr/6.pdf.

7. Чаговець Л. О. Нейронечітке моделювання оцінки загрози фінансової кризи підприємства / Л. О. Чаговець, О. В. Панасенко // Вісник Хмельницького національного університету. Економічні науки. – 2017. – № 1. –

С. 182–185. – Режим доступу : <http://www.repository.hneu.edu.ua/handle/123456789/17610>.

Інформаційні ресурси

8. Державна служба фінансового моніторингу України. Офіційний сайт. – Режим доступу : <https://fiu.gov.ua/>.

9. Національний банк України. Офіційний сайт. – Режим доступу : <https://bank.gov.ua/>.

10. Персональна навчальна система "Моделювання фінансових процесів" [Електронний ресурс] / О. В. Панасенко, С. В. Прокопович. – Режим доступу : <https://pns.hneu.edu.ua/course/view.php?id=8110>.

11. Про інвестиційну діяльність: Закон України [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/1560-12#Text>.

12. Про інноваційну діяльність: Закон України № 4-IV від 04.07.2002 р. [Електронний ресурс]. – Режим доступу : <https://zakon.rada.gov.ua/laws/show/40-15#Text>.

Зміст

Вступ	3
Лабораторна робота 1. Фінансові розрахунки з використанням простих та складних відсотків	4
Лабораторна робота 2. Моделювання постійних та змінюваних фінансових потоків	31
Лабораторна робота 3. Моделювання погашення середньострокових і довгострокових кредитів	57
Лабораторна робота 4. Аналіз ефективності реальних інвестицій	71
Лабораторна робота 5. Моделювання оптимального портфеля цінних паперів	79
Лабораторна робота 6. Моделювання оцінювання схильності підприємства до банкрутства	91
Рекомендована література	96
Основна	96
Додаткова	96
Інформаційні ресурси	97

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МОДЕЛЮВАННЯ ФІНАНСОВИХ ПРОЦЕСІВ

**Методичні рекомендації
до лабораторних робіт
для студентів спеціальності
124 "Системний аналіз"
освітньої програми
"Управління складними системами"
першого (бакалаврського) рівня**

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Панасенко** Оксана Володимирівна
Прокопович Світлана Валеріївна

Відповідальний за видання *Л. С. Гур'янова*

Редактор *В. О. Дмитрієва*

Коректор *В. Ю. Труш*

План 2023 р. Поз. № 98 ЕВ. Обсяг 99 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.*