

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ И АНАЛИЗ НДС ПОЛОЙ СФЕРЫ, ВЫПОЛНЕННОЙ ИЗ МАТЕРИАЛА ДЖОНА

Проведена оценка достоверности результатов численных исследований решения физически и геометрически нелинейных задач деформирования гиперупругих тел вращения, основанного на методе конечных элементов, которая подтверждена совпадением результатов численных и аналитических решений линейной и нелинейной задач деформирования полой сферы под действием внутреннего давления.

Ключевые слова: физическая и геометрическая нелинейность, гиперупругие тела вращения, метод конечных элементов, полулинейный материал Джона.

Проведено оцінку вірогідності результатів чисельних досліджень розв'язання фізично та геометрично нелінійних задач деформування гіперпружних тіл обертання, яке базується на методі скінчених елементів, яка підтверджена збігом результатів чисельних та аналітичних розв'язків лінійної та нелінійної задач деформування порожнистої сфери під дією внутрішнього тиску.

Ключові слова: фізична і геометрична нелінійність, гіперпружні тіла обертання, метод скінчених елементів, полуплінійний матеріал Джона.

The reliability estimation of the numerical solution of the physically and geometrically nonlinear problems of deformation of hyperelastic bodies of the rotation, based on the finite element method, was carried out and confirmed by coincidence of the numerical and analytic solutions of the linear and nonlinear problems of deformation of the hollow sphere loaded by the internal pressure.

Keywords: physically and geometrically nonlinearity, hyperelastic bodies of the rotation, finite element method, John's semilinear material.

Постановка проблемы. В работе [1] построен вариационный принцип возможных перемещений в приращениях, используемый в шаговом алгоритме метода конечных элементов (МКЭ) при решении осесимметричных (с кручением) физически и геометрически нелинейных задач для почти несжимаемых кусочно-однородных трансверсально-изотропных гиперупругих тел вращения. Получена матричная форма основных соотношений, формулы для вычисления матрицы жесткости, вектора правой части системы линейных алгебраических уравнений.

Методика решения поставленной задачи. Для проверки достоверности результатов, получаемых предложенным выше методом, были решены линейная и нелинейная задачи деформирования полой сферы под действием внутреннего давления. Результаты решения линейных задач сравнивались с точными решениями задач Ламе [2], а нелинейной – с точными решениями А.И. Лурье [3] для сжимаемой сферы, выполненной из полуплинейного материала Джона.

Приведем формулы точного решения линейной задачи Ламе

$$u_r = \frac{qa^3}{2G(b^3 - a^3)} \left(\frac{1}{2} \frac{b^3}{r^2} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} r \right),$$

$$\varepsilon_r = \frac{qa^3}{2G(b^3 - a^3)} \left(-\frac{b^3}{r^3} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \right), \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{qa^3}{2G(b^3 - a^3)} \left(\frac{1}{2} \frac{b^3}{r^3} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \right),$$

$$\sigma_r = \frac{qa^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right), \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{qa^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right),$$

где a , b – внутренний и внешний радиусы полой сферы; E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно; q – давление, приложенное к внутренней поверхности сферы.

Точное решение А.И. Лурье физически и геометрически нелинейной задачи имеет вид:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} - r,$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(C_1 - 2 \frac{C_2}{r^3} + 1 \right) \left(C_1 - 2 \frac{C_2}{r^3} - 1 \right),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_r}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} - 1 \right) \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} + 1 \right),$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right)^2} \left((3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1) - 4\mu \frac{C_2}{r^3} \right),$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{1}{\left(C_1 - 2\frac{C_2}{r^3}\right)\left(C_1 + \frac{C_2}{r^3}\right)} \left((3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1) + 2\mu\frac{C_2}{r^3} \right),$$

где σ_r , σ_φ , σ_θ – физические компоненты тензора напряжений; $u_\varphi = 0$, $u_r = u_r(r)$, $u_\theta = 0$; параметры C_1 , C_2 находятся из граничных условий $\sigma_r(a) = -q$

$$(3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1) - 4\mu\frac{C_2}{a^3} = -q\left(C_1 + \frac{C_2}{a^3}\right)^2; \quad (1)$$

и $\sigma_r(b) = 0$

$$(3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1) - 4\mu\frac{C_2}{b^3} = 0. \quad (2)$$

Найдем параметры C_1 и C_2 из нелинейной системы уравнений (1) – (2). В (2) выразим C_2 через C_1

$$C_2 = \frac{(3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1)b^3}{4\mu}. \quad (3)$$

Подставляя в (1) выражение для C_2 из (3), получим

$$b_1 C_1^2 + b_2 C_1 + b_3 = 0, \quad (4)$$

где $b_1 = q\left(4a^3\mu + b^3(3\lambda + 2\mu)\right)^2$,

$$b_2 = (3\lambda + 2\mu) \left[16a^6\mu^2 \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right) - 2qb^3 \left(4a^3\mu + b^3(3\lambda + 2\mu)\right) \right],$$

$$b_3 = (3\lambda + 2\mu) \left[qb^6(3\lambda + 2\mu) - 16a^6\mu^2 \left(1 - \frac{b^3}{a^3}\right) \right].$$

Решив уравнение (4), получим две пары параметров $C_{1(1)}$, $C_{2(1)}$ и $C_{1(2)}$, $C_{2(2)}$. Выбираем пару, которая удовлетворяет условию убывания функция u_r на отрезке $[a, b]$.

Как говорилось ранее, нелинейная задача решена для сферы, выполненной из материала, механические свойства которого описаны полулинейным законом Джона. Потенциал, определяющий этот закон, имеет вид

$$W = \frac{1}{2} \left(\lambda (\lambda_r + \lambda_z + \lambda_\varphi - 3)^2 + 2\mu (\lambda_r^2 + \lambda_z^2 + \lambda_\varphi^2 - 2(\lambda_r + \lambda_z + \lambda_\varphi) + 3) \right).$$

Здесь $\lambda_k = \sqrt{1 - 2\varepsilon_k}$ – удлинения, $k = r, z, \varphi$. Тогда контравариантные компоненты тензора напряжений будут

$$\sigma^{kk} = \frac{1}{\lambda_r \lambda_z \lambda_\varphi} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kk}} = \frac{1}{\lambda_r \lambda_z \lambda_\varphi} \left(\lambda \frac{\lambda_r + \lambda_z + \lambda_\varphi - 3}{\lambda_k} + \frac{2\mu(\lambda_k - 1)}{\lambda_k} \right), \quad k = r, z, \varphi,$$

где ε_{kk} – компоненты тензора деформаций, а физические компоненты тензора напряжений такие: $\sigma_{kk} = \lambda_k^2 \sigma^{kk}$.

Для получения МКЭ численного решения полярно симметричной задачи о поллой сфере, выполненной из материала с потенциалом полулинейного закона Джона, целесообразно использовать сферические координаты. Дело в том, что этот потенциал выражен через удлинения и не может описывать связь между касательными напряжениями и деформациями сдвига, а эти компоненты тензоров в сферических координатах равны нулю. Исходная физически и геометрически нелинейная задача решается в цилиндрической системе координат, поэтому в данном случае ее нельзя применить непосредственно для расчета полной сферы, так как касательные компоненты в этой системе отличны от нуля.

Для того, чтобы преодолеть это затруднение, будем решать задачу определения НДС части сферы с осью z и весьма малым углом раствора θ . В качестве кинематических граничных условий примем $u_z = 0$ при $z = 0$ и $u_n = u_r \cos \theta + u_z \sin \theta = 0$, где u_n – перемещение по нормали к боковой поверхности конуса. Касательные напряжения и деформации сдвига в цилиндрической системе координат в рассматриваемой задаче на оси вращения равны нулю точно, а в ее окрестности – весьма малы и тем меньше, чем меньше угол θ .

Граничное условие $u_n = 0$ налагаем с помощью метода штрафа, прибавляя к матрице жесткости [1] сумму матриц, порождаемых слагаемыми $\frac{1}{2} C_b \delta(u_r \cos\theta + u_z \sin\theta)^2$ в каждом узле боковой поверхности конуса. При этом к диагональному элементу матрицы жесткости, отвечающему узловому перемещению u_r , прибавляется $C_b \cdot \cos^2\theta$, к элементу той же строки, соответствующей неизвестному u_z , прибавляется $C_b \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$, а к диагональному элементу, отвечающему $u_z - C_b \cdot \sin^2\theta$.

Обсуждение результатов. Для проверки точности и характера сходимости описанного метода и алгоритма [1] выполнено численное исследование влияния количества конечных элементов (КЭ) по толщине сферы nh , степени сгущения сетки mh (отношение радиальных размеров внешнего и внутреннего КЭ) к внутренней поверхности и числа шагов по нагрузке nq .

На рис. 1 – 6 представлены результаты численного решения линейной (пунктирные линии) и нелинейной (сплошные линии) задач для определения НДС сферы при следующих исходных данных: $\theta = 1^\circ$, $a = 2,5$ см, $b = 3,5$ см, $q = 1$ кПа, $E = 5$ кПа, $\nu = 0,3$, $nh = 5$, $mh = 1$, $C_b = 100$ кПа. Все расчеты производились на ПК с помощью разработанной авторами программы.

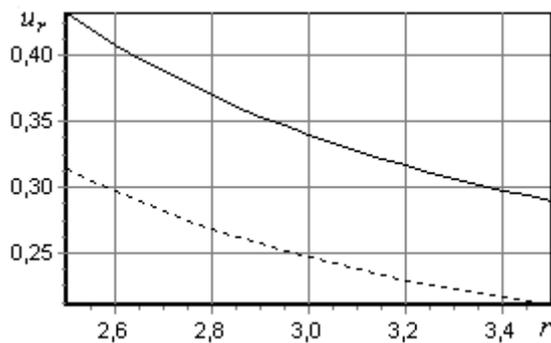


Рис. 1 – Перемещение u_r

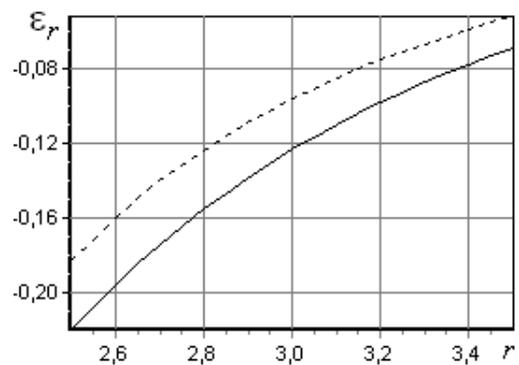


Рис. 2 – Деформация ϵ_r

Численные решения линейной и нелинейной задач совпали с аналитическими с относительной погрешностью 10^{-4} за пять итераций при $nq = 1$.

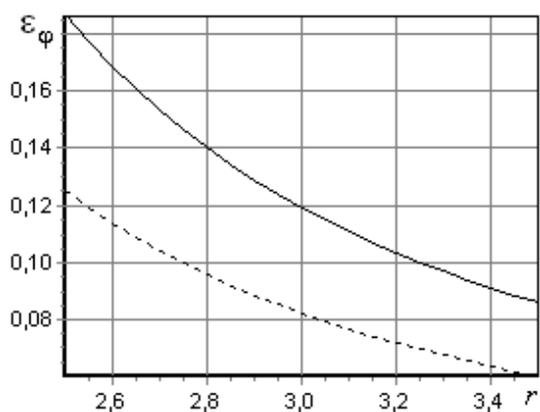


Рис. 3 – Деформация ε_φ

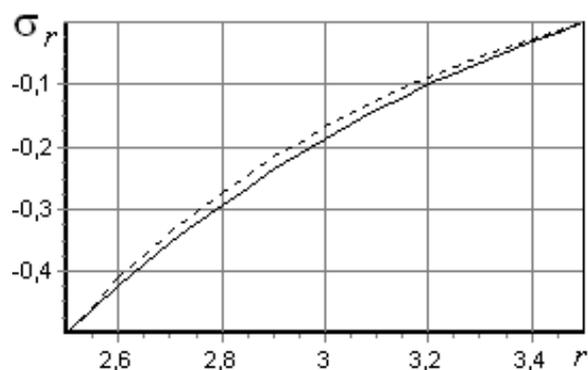


Рис. 4 – Напряжение σ_r

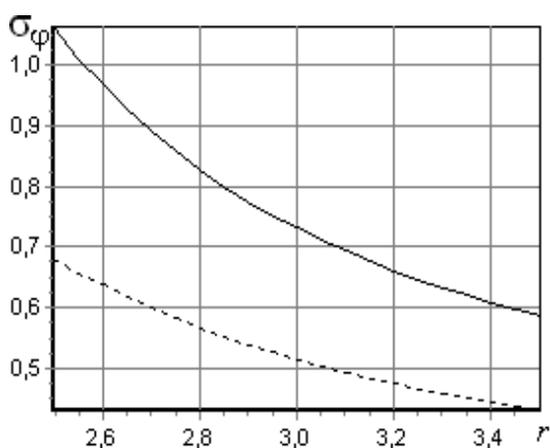


Рис. 5 – Напряжение σ_φ

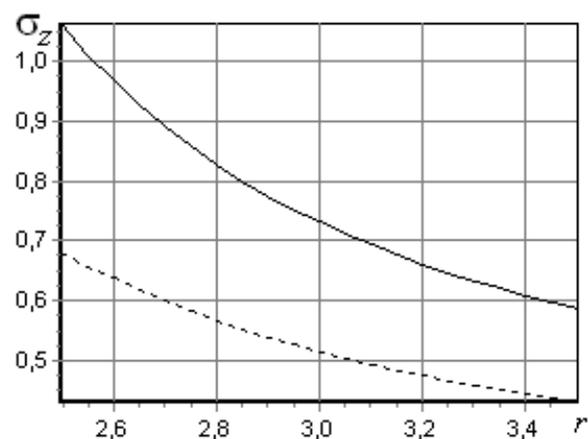


Рис. 6 – Напряжение σ_z

Выводы. Проведена оценка достоверности результатов численных исследований, которая подтверждена совпадением результатов численных и точных решений линейной и нелинейной задач деформирования полой сферы под действием внутреннего давления.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кантор Б.Я., Мисюра Е.Ю. Методика решения осесимметричных нелинейных задач для почти несжимаемых некоднородно трансверсально-изотропных гиперупругих тел вращения // Вестник НТУ “ХПИ”: Динамика и прочность машин. – 2006. – № 21. – С. 106 – 113.
2. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. – М.: Наука, 1980. – 512 с.