Все, что познается, имеет число,
ибо невозможно ни понять ничего,
ни познать без него.
Пифагор

Математичні методи, моделі та інформаційні технології в економіці

УДК 330.4 JEL Classification: C61

ПОСЛІДОВНІСНА МОДЕЛЬ БУЛЕВОЇ АЛГЕБРИ ТА ДЕЯКІ ЇЇ ЗАСТОСУВАННЯ

Сенчуков В. Ф.

Сенчуков В. Ф. Послідовнісна модель булевої алгебри та деякі її застосування / В. Ф. Сенчуков // Економіка розвитку. – 2018. – № 1 (85). – С. 93–99.

Запропоновано конструктивний підхід до вирішення проблеми впровадження формальної логіки в побудову математичних моделей, пов'язаних з описом дискретних множин. Метою є створення інструментарію, за допомогою якого можна було б на аналітичному рівні (у вигляді єдиної формули) описувати закономірності, яким підпорядковуються множини дискретних об'єктів.

Витоком усіх понять, на яких будується виклад, є поняття нумерації як функціонального відображення множини натуральних чисел на задану множину (не обов'язково числової природи). Зокрема, числові послідовності з відомим загальним членом є нумерацією множини значень їхніх елементів. Із часів Г. Кантора не було наукових робіт, у яких би розглядався систематичний конструктивний підхід до нумерації елементів дискретних множин.

Метод дослідження ґрунтується на алгебрі логіки Буля – булевій алгебрі, пропозиційними змінними (висловленнями) якої є послідовності, зокрема числові. Логічні операції над такими змінними, на відміну від відомих арифметичних операцій, здатні враховувати властивості самих операндів. Це, відповідно, дає можливість зберегти властивості чинників економічного процесу, для опису якого будується математична модель. Шляхи практичного застосування результатів дослідження обумовлено: проблемою управління підприємствами в разі моделювання нелінійних процесів в економіці, як і взагалі нелінійних динамічних процесів; задачами теорії алгоритмів, теорії чисел, дискретної математики, математичного програмування, оптимального розкрою матеріалів, кристалографії тощо.

На прикладі теоретико-числової задачі показано ефективність застосування запропонованого алгебро-логічного підходу для вирішення четвертої проблеми списку Едмунда Ландау та встановлення потужності множини простих чисел у многочлені Ейлера. Є припущення, що такий підхід застосовний до вивчення потужності простих чисел в інших формах.

Ключові слова: *булева алгебра, логічні операції, многочлен, модель, породна множина, послідовність, просте число.*

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТНАЯ МОДЕЛЬ БУЛЕВОЙ АЛГЕБРЫ И НЕКОТОРЫЕ ЕЕ ПРИМЕНЕНИЯ

Сенчуков В. Ф.

Предложен конструктивный подход к решению проблемы внедрения формальной логики в построение математических моделей, связанных с описанием дискретных множеств. Целью является создание инструментария, с помощью которого можно было бы на аналитическом уровне (в виде единой формулы) описывать закономерности, которым подчиняются множества дискретных объектов.

Истоком всех понятий, на которых строится изложение, является понятие нумерации как функционального отображения множества натуральных чисел на заданное множество (не обязательно числовой природы). В частности, числовые последовательности с известным общим членом являются нумерацией множества значений их элементов. Со времен Г. Кантора не было научных работ, в которых бы рассматривался систематический конструктивный подход к нумерации элементов дискретных множеств.

Метод исследования основывается на алгебре логики Буля – булевой алгебре, пропозициональными переменными (высказываниями) которой являются последовательности, в частности числовые. Логические операции над такими переменными, в отличие от известных арифметических операций, способны учитывать свойства самих операндов. Это, соответственно, дает возможность сохранить свойства факторов экономического процесса, для описания которого строится математическая модель. Пути практического применения результатов исследования обусловлены: проблемой управления предприятиями в случае моделирования нелинейных процессов в экономике, как и вообще нелинейных динамических процессов; задачами теории алгоритмов, теории чисел, дискретной математики, математического программирования, оптимального раскроя материалов, кристаллографии и т. д.

На примере теоретико-числовой задачи показана эффективность применения предложенного алгебро-логического подхода для решения четвертой проблемы списка Эдмунда Ландау и установления мощности множества простых чисел в многочлене Эйлера. Есть предположение, что такой подход применим к изучению мощности простых чисел в других формах.

Ключевые слова: *булева алгебра, логические операции, многочлен, модель, порождающее множество, последовательность, простое число.*

THE BOOLEAN ALGEBRA SEQUENTIAL MODEL AND SOME OF ITS APPLICATIONS

V. Senchukov

A constructive approach to solving the problem of introducing formal logic in the construction of mathematical models related to the description of discrete sets has been proposed. The aim is to create tools which could be used to describe, at the analytical level (in the form of a unified formula), the patterns that sets of discrete objects are subject to.

The origin of all the concepts the statement is based on is the notion of numbering as a functional mapping of a set of natural numbers to a given set (not necessarily of the numerical nature). In particular, numerical sequences with a known common member are numbered by a plurality of values of their elements. Since G. Cantor's time there have not been scientific works in which a systematic constructive approach to the numbering of elements of discrete sets would be considered.

The method of research is based on the Boolean logic algebra – Boolean algebra, the propositional variables (statements) of which are sequences, in particular, numerical one. Logical operations on such variables, in contrast to the known arithmetic operations, can take into account the properties of the operands themselves. This, accordingly, makes it possible to preserve the properties of the factors of the economic process for the description of which the mathematical model is constructed. The ways of practical application of research results are conditioned by: the problem of enterprise management in the case of simulation of nonlinear processes in the economy, as well as nonlinear dynamic processes in general; tasks of the theory of algorithms, number theory, discrete mathematics, mathematical programming, optimal cutting of materials, crystallography, etc.

An example of a theoretical numerical problem has been used to illustrate the efficiency of the proposed algebra-logical approach applied for the solution of the fourth problem of the Edmund Landau list and the establishment of the power of the set of primes in Euler polynomials. There is an assumption that this approach is applicable to the study of the power of prime numbers in other forms.

Keywords: *Boolean algebra, logical operations, polynomial, model, generating set, sequence, prime number.*

Під впливом і у світлі ідей, які привели до створення теорії R-функцій [1], розроблено конструктивні засоби, які дозволяють побудувати формулу для функції, що описує дискретну множину, елементи якої мають певні властивості. (Засоби називають конструктивними, якщо в них відразу задано правило (конструкцію), за яким функцію, що визначають, можна обчислити).

Запропонований алгебро-логічний підхід до вивчення властивостей послідовностей є оригінальним, тому ні у вітчизняній, ні в зарубіжній науковій літературі немає робіт, які б висвітлювали порушені питання.

Побудову послідовнісної моделі алгебри Буля – алгебри логіки з алфавітом $B_2 = \{0, 1\}$ – слід почати з нестрогого, в описовому плані, ключового поняття.

Логічні операції над послідовностями. Під **логічними операціями над послідовностями** автор розуміє операції, у результаті виконання яких отримують послідовності, складені з тих чи інших елементів вихідних послідовностей.

Добре відомі арифметичні операції над послідовностями $(+, -, \times, :)$ зводять до їхнього виконання над елементами заданих послідовностей – операндів, у цьому разі вихідні послідовності немовби "губляться".

Якщо ж іде мова про логічні операції, то результівна послідовність ніби "вбирає" в себе певні властивості операндів. *Наприклад,* яка послідовність буде об'єднанням послідовностей непарних $(x = 2n - 1)$ і парних $(y = 2n)$ чисел? Ґрунтуючись на суто інтуїтивних міркуваннях, відповідаємо: послідовність натуральних чисел $(z = n)$.

Але як формальним шляхом отримати такий результат? У зв'язку із цим, виникає проблема створення конструктивних засобів, за допомогою яких можна було б за відомими аналітичними зображеннями заданих послідовностей визначити формулу результату логічної операції над ними.

Як відомо, за допомогою R-функцій, побудованих на межі математичної логіки, класичних методів прикладної математики та методів кібернетики, єдиним аналітичним виразом можливо описати різні континуальні множини. Звуження R-функцій на дискретні множини не дає такої можливості, оскільки якісні градації "додатність" і "від'ємність" розглядають на незліченних множинах і не торкаються кожного індивідуума-точки.

Вихідними множинами в цьому викладі є дискретні числові множини, зокрема множина натуральних чисел.

У математичних моделях задач економічного змісту здебільшого змінні набувають невід'ємних дійсних значень або невід'ємних цілих значень (наприклад, у задачах цілочислового математичного програмування).

Із відомих означень поняття числової послідовності беруть таке. **Числовою послідовністю** (**ч/п**) елементів цієї множини M називають визначену на множині натуральних чисел $\mathbf{N}$ функцію $x = f(n)$, область значень $\mathrm{rng}\, f$ якої належить досліджуваній множині: $\mathrm{rng}\, f \subseteq M$, тобто, мовою відображень, $f: \mathbf{N} \to M$. Упорядкована пара $x_n = (n, x)$ – **елемент**, або **член** ч/п $x = f(n)$: x_n Ε x, де Ε – символ належності; $f(n)$ – **загальний член** ч/п. Множину $\mathrm{rng}\, f$ – підмножину M – називають **породною множиною** (для) ч/п $x = f(n)$.

Якщо $x = f(n) - const \quad \forall n \in \mathbf{N}$, то ч/п називають **стаціонарною.**

Послідовність, породна множина якої – порожня множина, називають **порожньою** та позначають через $s_{\varnothing}$ (від лат. *sequence* – послідовність).

Нехай $\nu: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ – деяка зростальна ч/п: $\nu(n+1) - \nu(n) > 0$. Композицію $y = x(\nu(n))$, або $y = x \circ \nu$ – суперпозицію двох компонент, – називають **підпослідовністю** ч/п x : $y \sqsubset X$, де $\sqsubset$ – символ включення.

Відносно послідовності y ч/п $\nu = \nu(n)$ слід назвати **нумератором** y в x і позначити через ν_y. Зрозуміло, що у граничних випадках: $\nu_y = n$ і $\nu_y = s_{\varnothing}$, отримують, відповідно, $y = x$ і $y = s_{\varnothing}$.

Разом із нумератором однією з характеристик підпослідовності y є **індикатор** μ_y – двозначний предикат, значення якого для кожного її члена визначено булевим алфавітом $B_2 = \{0, 1\}$:

$$(\mu_y)_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_n \, \mathrm{E} \, y \\ 0, & \text{якщо } x_n \, \overline{\mathrm{E}} \, y \end{cases}. \qquad (1)$$

де Ε ($\overline{\mathrm{E}}$) – знак належності (неналежності).

Індикатори підпослідовностей цієї ч/п x є нескінченними булевими векторами:

$$\mu_{s_{\varnothing}} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots), \ \mu_x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots).$$

Із наведених означень випливає, що між підпослідовностями та їхніми нумераторами й індикаторами існує взаємно однозначна відповідність (бієкція): $y \leftrightarrow \nu_y$, $y \leftrightarrow \mu_y$.

Приклад. Нехай універсум $s_{\circ}$ із породною множиною $\mathbf{N}$, такий:

$$s_{\circ} = (1, 1, 2, 2, 3, 3, \ldots, [(n+1)/2], \ldots),$$

де $[\cdot]$ – ціла частина числа (Антьє).

Слід описати підпослідовність універсуму $s_{\circ}(n)$: $x = f(n) = s_{\circ}(\nu_x(n))$, елементи якої визначаються нумератором $\nu_x = (1, 4, 7, 10, \ldots, 3n-2, \ldots)$.

Розв'язання. Необхідно скласти композицію $x = s_{\circ} \circ \nu$, для чого у вираз загального члена універсуму замість n підставити $\nu_x(n)$:

$$x = s_{\circ} \circ \nu = \left[\frac{\nu_x(n) + 1}{2} \right] = \left[\frac{(3n-2)+1}{2} \right].$$

Остаточно, з урахуванням, що цілий доданок можна виносити за символ цілої частини, отримують:

$$x = f(n) = \left[\frac{2n + (n-1)}{2} \right] = n + \left[\frac{n-1}{2} \right].$$

Індикатор μ_x послідовності x має такий вигляд:

$$\mu_x = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, \ldots).$$

У теоретико-числових дослідженнях часто універсумом $s_{\circ}$ є послідовність натуральних чисел: $s_{\circ} = s_{\circ}(n) = n$, і тоді універсум нумераторів $\nu_{\circ}(n) = n$ збігається з основною послідовністю.

Звичайно розглядають підпослідовності деякої фіксованої ч/п, яку називають **основною,** або **універсальною** (**універсумом**), і позначають через $s_{\circ}$. Універсум нумераторів – послідовність натуральних чисел $(\nu_{\circ}(n) = n)$, а індикаторів – стаціонарна ч/п $(\mu_{\circ}(n) = 1)$.

Далі слід перейти до формалізації наведеного раніше описового означення (дефініції) логічних операцій над ч/п [2; 3].

Щоб відрізняти такі операції від операцій алгебри множин та алгебри логіки, для них використовують інші символи.

Нехай x, y, z – ч/п, які належать множині підпослідовностей деякого універсуму $s_{\circ}$; $\nu_x = a(n)$, $\nu_y = b(n)$, $\nu_z = c(n)$ – відповідні нумератори; $rng\, a = A$, $rng\, b = B$, $rng\, c = C$ – породні множини нумераторів, елементами яких є натуральні числа.

Логічною сумою (s **-об'єднанням** $\sqcup$) двох послідовностей x, y називають ч/п z, породна множина нумератора якої є об'єднанням породних множин нумераторів вихідних послідовностей:

$$z = x \sqcup y \ \rightleftharpoons \ C = A \cup B. \qquad (2)$$

Логічним добутком (s**-перетином** $\sqcap$) двох послідовностей x, y називають ч/п z, породна множина нумератора якої є перетином (перерізом) породних множин нумераторів вихідних послідовностей:

$$z = x \sqcap y \rightleftharpoons C = A \cap B. \quad (3)$$

Логічною різницею (s**-різницею** $\llcorner$) двох послідовностей x, y називають ч/п z, породна множина нумератора якої є різницею породних множин нумераторів вихідних послідовностей:

$$z = x \llcorner y \rightleftharpoons C = A \setminus B. \quad (4)$$

Різницю $z = s_{\circ} \llcorner x$ називають s**-доповненням** послідовності x і позначають через $\neg x$:

$$z = \neg x \rightleftharpoons C = \mathbf{N} \setminus A = A'. \quad (5)$$

Формалізовані логічні операції об'єднують загальною назвою – s**-операції.**

Нехай $M(s)$ – множина ч/п, яка є замкненою щодо композицій, $M(\nu)$ – множина нумераторів ч/п, а $M(rng\nu)$ – відповідна сукупність породних множин нумераторів, $M(\mu)$ – множина індикаторів числових послідовностей із $M(s)$.

Теорема. Множина послідовностей $M(s)$ із визначеними на ній s-операціями є булевою алгеброю:

$$A_S = (M(s); \sqcup, \sqcap, \neg). \quad (6)$$

Доведення. Кожній послідовності із множини $M(s)$, замкненій щодо композицій, відповідає породна множина нумератора. Згідно з означеннями (2) – (5) логічних операцій над ч/п, алгебра A_S та алгебра породних множин нумераторів:

$$A_{rng\nu} = (M(rng\nu); \cup, \cap, '), \quad (7)$$

ізоморфні; це й означає, що алгебра A_S – булева алгебра.

Алгебру A_S називають **булевою алгеброю послідовностей**, або коротко s**-алгеброю.**

Завдяки бієкції між множинами $M(s)$, $M(\nu)$, $M(rng\nu)$, $M(\mu)$ та однотипності операцій, можна зробити висновок про ізоморфність усіх відповідних алгебр.

У плані прикладних досліджень можливості пропонованої моделі досить великі, оскільки з точки зору алгебри природа елементів, із яких складено послідовності, цілковито "байдужа". Це можуть бути підприємства, показники ефективності їхньої роботи та інші чинники.

Теоретико-числові дослідження на засадах s**-алгебри** торкаються питання потужності множини простих чисел у многочленах, що є важливим із точки зору криптографії – науки про математичні методи забезпечення конфіденційності, цілісності й автентичності інформації.

Щодо простих чисел досі існує багато відкритих питань, найбільш відомі з яких були перелічені Едмундом Ландау на П'ятому міжнародному математичному конгресі, який відбувся 1912 року в Кембриджському університеті. У своєму виступі він запропонував список проблем теорії чисел, аналогічний до списку Гільберта. Жодну з чотирьох задач списку Ландау досі повністю не розв'язано.

Одна із проблем, четверта, така: чи є нескінченною множина простих чисел вигляду x^2+1, де x – натуральне число?

Більш загальну постановку задачі знаходять у роботах Вацлава Серпінського [4; 5]: чи існують многочлени, які для натуральних значень змінної дають нескінченну множину простих чисел? Існують многочлени першого степеня, наприклад, двочлен $2x+1$, що містить серед своїх значень усі прості числа, але невідомо жодного многочлена степеня, більшого від одиниці, який містив би зліченну множину простих чисел. Узагальненням четвертої проблеми Едмунда Ландау є припущення: для кожного натурального k існує нескінченно багато простих чисел вигляду x^2+k, де x – натуральне число.

Ще в першій половині XIX століття досліджували питання: які з арифметичних прогресій включають нескінченну множину простих чисел.

Якщо є арифметична прогресія з першим членом a і різницею r, тобто прогресія:

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \ldots,$$

$$\text{або } a+kr, \text{ де } k = 0, 1, 2, \ldots,$$

і якщо натуральні числа a і r мають спільний дільник $d = (a, r) > 1$, то всі члени прогресії ділять на d. Отже, усі її члени, крім, можливо, першого, складені числа. Виникає природне питання, а який стан справ у разі, коли $d = 1$?

Знаний німецький математик Й. П. Г. Лежен-Діріхле довів [6], що кожна арифметична прогресія $a+kr$ $(k = 0, 1, 2, \ldots)$, де k і r – взаємно прості числа, містить нескінченну множину простих чисел, але її доведення не є елементарним. Елементарне доведення теореми можна знайти у книзі Е. Троста [7].

У роботі В. Серпінського [4] зазначено, що не було б легше довести, що в кожній арифметичній прогресії, перший член і різниця якої суть взаємно прості числа, є, принаймні, одне просте число. Із цього твердження легко було б вивести теорему Лежена-Діріхле. Слід навести відповідний фрагмент із книги В. Серпінського, названий автором **теоремою Серпінського** (*про арифметичні прогресії*):

Довести, що з теореми (А):

у кожній арифметичній прогресії, перший член і різниця якої – взаємно прості числа, існує (щонайменше) одне просте число,

випливає теорема Лежен-Діріхле:

у кожній арифметичній прогресії, перший член і різниця якої – взаємно прості числа, існує нескінченна множина простих чисел.

Нехай

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \ldots \quad (1)$$

буде арифметичною прогресією, яка задовольняє умови кожної з названих теорем.

Кожна із прогресій

$$a+kr,\ (a+kr)+r,\ (a+kr)+2r, \ldots \text{ або } (a+kr)+mr, \quad (2)$$

де $m = 0, 1, 2, ...$ і k – фіксоване натуральне число, яке задовольняє умову кожної із цих теорем.

У кожній із арифметичних прогресій (2) на підставі теореми (А) є просте число, більше за k, оскільки перший член кожної із цих прогресій більший від k.

Прогресію (2) отримають із прогресії (1), пропускаючи k перших її членів.

Отже, у прогресії (1) є просте число, більше від k, де k – довільне натуральне число; отже, простих чисел у ній нескінченна множина.

Вирішення четвертої проблеми списку Ландау потребує розв'язання невизначених (діофантових) рівнянь другого степеня із двома змінними x, y параболічного типу [8]:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \tag{8}$$

де A, B, C, D, E, F – сталі (коефіцієнти при невідомих), $B^2 - 4AC = 0$.

Для розв'язання рівняння (8) слід скористатися вирішувачем, створеним відомим в Аргентині та за її межами інженером-електронником Даріо Алехандро Альперном (1969 р. н.) [9]. Згідно з алгоритмом, за яким невідомі x і y можуть бути тільки цілими числами, позначено: $g = \gcd(A, C)$ – найбільший спільний дільник A і C, $a = A/g$, $b = B/g$, $c = C/g \geq 0$ (знак $\sqrt{c}$ визначають за знаком дробу B/A); тоді $b^2/4 = ac$.

Відповідні розв'язки описують співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{c}g(\sqrt{a}\,E - \sqrt{c}\,D)t^2 - (E + 2\sqrt{c}\,gu_i)t - \\ &\quad - \frac{\sqrt{c}gu_i^2 + Eu_i + \sqrt{c}\,F}{\sqrt{c}D - \sqrt{a}E}, \\ y &= \sqrt{a}g(\sqrt{c}\,D - \sqrt{a}\,E)t^2 + (D + 2\sqrt{a}\,gu_i)t + \\ &\quad + \frac{\sqrt{a}gu_i^2 + Du_i + \sqrt{a}\,F}{\sqrt{c}D - \sqrt{a}E}, \end{aligned} \tag{9}$$

де t – будь-яке ціле додатне число (параметр);

u_i – скінченний кортеж сталих, які визначають серії розв'язків, за умови, що чисельники в останніх доданках (9) кратні знаменнику $\sqrt{c}D - \sqrt{a}E$; значення u_i належать діапазону $0 \leq u < |\sqrt{c}D - \sqrt{a}E|$.

Наприклад, для рівняння $8x^2 - 24xy + 18y^2 + 5x + 7y + 16 = 0$ буде:

$$\sqrt{c}\ D - \sqrt{a}\ E = -3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = -29$$

$$\text{і } \sqrt{a}gu^2 + Du + \sqrt{a}F = 4u^2 + 5u + 32.$$

Значення u знаходять у діапазоні $[0, 29)$, для яких $4u^2 + 5u + 32$ кратне числу 29: $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, і записують дві серії розв'язків:

для $u_0 = 2$: $\left[\begin{array}{l} x = -174t^2 - 17t - 2, \\ y = -116t^2 - 21t - 2; \end{array}\right.$

для $u_1 = 4$: $\left[\begin{array}{l} x = -174t^2 - 41t - 4, \\ y = -116t^2 - 37t - 4. \end{array}\right.$

Дослідження потужності множини простих чисел у формі $x^2 + 1$. Якщо $x = 1$, мають єдине парне просте число – двійку. Непарні прості числа, якщо такі є, отримують за парних $x \in \mathbf{N}$, тому переходять до вивчення форми $f(x) = 4x^2 + 1$. Вісім перших членів відповідної послідовності такі (вони підкреслені):

$$f = 4x^2 + 1 =$$

$$= (\underline{5}\ {}_{12}\ \underline{17}\ {}_{20}\ \underline{37}\ {}_{28}\ 65\ {}_{36}\ \underline{101}\ {}_{44}\ 145\ {}_{52}\ \underline{197}\ {}_{60}\ \underline{257}\ {}_{68} ...), \tag{10}$$

де між елементами ч/п зазначено перші скінченні різниці – різниці між наступними й попередніми членами, а прості числа підкреслено.

Можна помітити, що $5, 17, 101, 197$ є елементами арифметичної прогресії $6n - 1$ із першим членом, який дорівнює п'яти, і різницею, яка дорівнює шести. Оскільки перший член і різниця взаємно прості числа: $(5, 6) = 1$, то за теоремою Лежена-Діріхле прогресія містить нескінченно багато простих чисел. Слід навести перші вісім із них (вони підкреслені):

$$\begin{aligned} \beta(n) &= 6n - 1 = \\ &= (\underline{5}, \underline{11}, \underline{17}, 23, \underline{29}, 35, \underline{41}, 47, 53, \underline{59}, \\ &\quad 65, \underline{71}, 77, 83, 89, 95, \underline{101}, ...) \end{aligned} \tag{11}$$

Далі знайти s-перетин прогресії $\beta(n)$ і $f(x)$, для чого розв'язати діофантове рівняння другого степеня (параболічного типу):

$$\begin{aligned} f \sqcap \beta:\ 4x^2 + 1 = 6n - 1 \Rightarrow 3n = 2x^2 + 1 \Rightarrow \\ \Rightarrow 2x^2 - 3n + 1 = 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Згідно з (9), рівняння (12) має дві серії розв'язків (тимчасово n слід замінити на y):

а) $\left[\begin{array}{l} x = 3t - 2 \\ y = 6t^2 - 8t + 3 \end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l} x = 3t - 1 \\ y = 6t^2 - 4t + 1 \end{array}\right.$, t – натуральне.

Легко переконатися, що $x = 3t$ не задовольняє рівняння $2x^2 - 3n + 1 = 0$.

Розв'язки рівняння (12) визначають послідовності однакових елементів в обох формах. Можна припустити, що після деякого $n = n_0$ прості числа у формі f вичерпалися (скінчилися). Це, водночас, буде означати, що для $n > n_0$ не знайдеться жодного простого числа вигляду $6n - 1$, що неможливо, з огляду на зліченність множини простих у формі $\beta(n)$.

Висновок. Форма f містить нескінченну множину простих чисел.

Якщо позначити через P_∞ властивість $<$ множина містить безліч простих чисел $>$, тоді буде:

$$rng\ \beta \,|\, P_\infty \Rightarrow rng\ f \,|\, P_\infty, \tag{13}$$

тобто зі зліченності простих у формі $\beta(n) = 6n - 1$ випливає зліченність множини простих чисел у формі $f = x^2 + 1$.

Автор уважає, що на розглянутому шляху лежать рішення для інших теоретико-числових проблем щодо потужності множини простих чисел у многочленах. Зокрема, "чи існує для кожного натурального k нескінченно багато простих чисел вигляду $f = x^2 + k$, де x – натуральне число" (узагальнення четвертої проблеми Едмунда Ландау).

Для застосування розглянутої методики таку форму слід розбити на дві:

1) x парне, k непарне: $f = 4x^2 + 2k - 1$;

2) x непарне, k парне: $f = (2x-1)^2 + 2k = 4x(x-1) + {}$ $+2k+1$.

Є переконання, що як форма $f = x^2 + 1$, так і форма $f = x^2 + k$ містить зліченну множину простих чисел. Технічний бік цього питання ще не розглядався.

Потужність множини простих чисел у многочлені Ейлера. Многочленом Ейлера називають тричлен $f = x^2 - x + 41$. Відомо, що за $x = 1, 2, ..., 40$ він дає різні прості числа [10]:

$$f = (41\,{}_2\,43\,{}_4\,47\,{}_6\,53\,{}_8\,61\,{}_{10}\,71\,{}_{12}\,83\,{}_{14}\,97\,{}_{16}\,113\,{}_{18}\,131\,{}_{20}\,...\,{}_{78}\,1601). \quad (14)$$

Висловлено припущення [11], що існує безліч натуральних x, для яких f є простим числом. Слід показати, що це дійсно так.

За аналогією з (12) скласти рівняння $f = \beta$:

$$x^2 - x + 41 = 6n - 1 \Rightarrow |\text{ замінимо } n \text{ на } y\,| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 - x - 6y + 42 = 0. \quad (15)$$

Це рівняння типу (8) із коефіцієнтами:

$$A = 1,\ B = C = 0,\ D = -1,\ E = -6,\ F = 42.$$

Далі обчислити сталі складові розв’язку:

$$g = \gcd(A, C) = \gcd(1, 0) = 1,\ a = A/g = 1,\ b = B/g = 0,$$
$$c = C/g = 0.$$

Співвідношення (9) набувають вигляду:

$$x = 6t + u_j,\quad y = 6t^2 + (2u_j - 1)t + (u_j^2 - u_j)/6 + 7, \quad (16)$$

де, згідно з (9), u_j – скінченний кортеж сталих, які визначають серії розв'язків, за умови, що чисельник дробу у виразі для y кратний знаменнику 6; значення u_j належать діапазону $0 \le u < 6$.

Потім знаходять $u_j = 0, 1, 3, 4$.

Отже, рівняння (15) для має чотири серії розв'язків, у першій із яких, тобто для $u_0 = 0$, параметр t беруть додатним, оскільки x має бути натуральним, а в інших $t \ge 0$:

для $u_0 = 0$:
$$\begin{cases} x = 6t \\ y = 6t^2 - t + 7 \end{cases};$$

для $u_1 = 1$:
$$\begin{cases} x = 6t + 1 \\ y = 6t^2 + t + 7 \end{cases};$$

для $u_2 = 3$:
$$\begin{cases} x = 6t + 3 \\ y = 6t^2 + 5t + 8 \end{cases};$$

для $u_3 = 4$:
$$\begin{cases} x = 6t + 4 \\ y = 6t^2 + 7t + 9 \end{cases}.$$

Наведені серії розв'язків, знайдених уручну, погоджують із результатами вирішувача:

x = 6�u y = 6�u² - �u + 7	x = 6�u + 1 y = 6�u² + �u + 7
x = 6�u + 3 y = 6�u² + 5�u + 8	x = 6�u + 4 y = 6�u² + 7�u + 9

Розв'язки рівняння (15) визначають послідовності однакових елементів у формі $f = x^2 - x + 41$ та арифметичній прогресії $\beta(n) = 6n - 1$. Слід припустити, що після деякого $n = n_0$ прості числа у формі f вичерпалися (скінчилися). Це, водночас, буде означати, що для $n > n_0$ не знайдено жодного простого числа вигляду $6n - 1$, що неможливо, з огляду на зліченність множини простих у формі $\beta(n)$.

Висновок. Форма f містить нескінченну множину простих чисел.

Перші, для $t \in [0, 7]$, елементи кожної із серій наведено в таблиці.

Таблиця

Фрагмент послідовності спільних елементів форм $f(x)$ і $\beta(n)$

[A fragment of the sequence of common elements of forms $f(x)$ and $\beta(n)$]

u \ t		0	1	2	3	4	5	6	7…
$u_0 = 0$	$f = \beta$		71	173	347	593	911	1 301	1 763…
$u_1 = 1$		41	83	197	383	641	971	1 373	1 847…
$u_2 = 3$		47	113	251	461	743	1 097	1 523	2 021…
$u_3 = 4$		53	131	281	503	797	1 163	1 601	2 111…

За стовпцями та рядками числа розташовують в порядку зростання. Складені числа підкреслено.

Автор уважає, що численні нові результати щодо потужності множини простих чисел у многочленах буде отримано, якщо залучити до розгляду степеневі лишки [12].

Насамкінець слід зазначити, що алгебро-логічний підхід до аналітичного опису множини точок цілочислового евклідового простору є основою методу накладання цілочислових сіток (НЦС) у задачах цілочислового математичного програмування [13; 14]. Сутність методу полягає в такому: здійснюють логічний перетин нумерації цілочислового простору з областю допустимих розв'язків, які визначають сукупністю обмежень, що накладають на змінні; потім серед елементів отриманого числового масиву визначають оптимальне значення цільової функції та знаходять відповідний оптимальний план (або плани), тобто за відомим оптимумом установлюють координати точок екстремуму.

Як точний метод "грубої сили" він застосовний до задач із: довільною обмеженою областю (опуклою, неопуклою; однозв'язною, багатозв'язною); будь-якою цільовою функцією (лінійною, нелінійною; неперервною, розривною; диференційовною, недиференційованою).

Завдяки вказаним перевагам, метод НЦС має досить широку сферу можливих практичних застосувань. Це, перш за все, моделювання нелінійних процесів в економіці [15], а саме: збільшення планування виробництва, планування асортименту виробів, маршрутизація виробництва виробу, управління технологічним процесом і т. ін.

Звичайно, метод НЦС застосовний до розв'язання інших задач математичного програмування та взагалі до задач дискретної математики, які потребують аналітичного опису дискретних множин: у теорії кодування, у задачах оптимального розкрою матеріалів.

Упровадження методу НЦС у кристалографію дає можливість здійснити нумерацію вершин кристалічної решітки й описувати її підпослідовності, які мають ті чи інші властивості. Якщо торкатися криптографії (до речі, саме у криптографії метод повного перебору називають методом "грубої сили" (від англ. brute force)), то, спираючись на структуру послідовності простих чисел, стає можливим розв'язання криптографічної задачі шляхом перебору всіх можливих варіантів ключа.

Справа обчислювачів з'ясувати, до якого класу складності слід зарахувати задачі, що розв'язують методом НЦС. Автор сподівається, зважаючи на бурхливий розвиток електронної та, разом із тим, обчислювальної техніки, що в методу НЦС як точного методу "грубої сили" є майбутнє.

Література: 1. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Київ : Наукова думка, 1982. – 552 с. 2. Сенчуков В. Ф. Послідовнісна модель булевої алгебри / В. Ф. Сенчуков // Доп. АН УРСР. Сер. А. – 1988. – № 2. – С. 19–20. 3. Сенчуков В. Ф. Логические операции над последовательностями и закон простых чисел / В. Ф. Сенчуков // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 6. – С. 20–23. 4. Серпинский В. Сто простых, но одновременно трудных вопросов арифметики / В. Серпинский ; пер. с пол. В. А. Голубева. – Москва : Учпедгиз, 1961. – 76 с. 5. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах / В. Серпинский ; пер. с пол. И. Г. Мельникова. – Москва ; Ленинград : ГИФМЛ, 1963. – 92 с. 6. Гельфонд А. О. Элементарные методы в аналитической теории чисел / А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник. – Москва : Физматгиз, 1962. – 272 с. 7. Трост Э. Простые числа / Э. Трост ; пер. с нем. Н. И. Фельдмана под ред. А. О. Гельфонда. – Москва : ГИФМЛ, 1959. – 136 с. 8. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности / А. И. Маркушевич. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1975. – 48 с. 9. Alpern D. Quadratic Diophantine Equation Solver [Electronic resource] / D. Alpern. – Access mode : www.alpertron.com.ar/quad.htm. 10. Starк H. M. A complete determination of the complex quadratic fields of class-number one / H. M. Stark // Michigan Mathematical Journal. – 1967. – No. 14. – P. 1–27. 11. Голубев В. А. Число групп простых чисел и простых чисел степенных форм / В. А. Голубев // Известия вузов. – 1962. – № 6 (31). – С. 28–33. 12. Виноградов И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. – Москва : Наука, 1981. – 176 с. 13. Сенчуков В. Ф. Цілочислові сітки на площині в задачах дискретної оптимізації / В. Ф. Сенчуков // Економіка розвитку. – 2014. – № 3 (71). – С. 107–112. 14. Сенчуков В. Ф. Просторові цілочислові сітки в задачах дискретної оптимізації / В. Ф. Сенчуков // Управління розвитком. – 2015. – № 2 (180). – С. 116–123. 15. Экономическая энциклопедия / под ред. А. И. Абалкина. – Москва : Экономика, 1999. – 1056 с.

References: 1. Rvachev V. L. Teoriya R-funktsiy i nekotorye ee prilozheniya / V. L. Rvachev. – Kyiv : Naukova dumka, 1982. – 552 p. 2. Senchukov V. F. *Poslidovnisna model bulevoi alhebry* [A sequential model of the Boolean algebra] / V. F. Senchukov // Dop. AN USSR. Ser. A. – 1988. – No. 2. – P. 19–20. 3. Senchukov V. F. *Logicheskie operatsii nad posledovatelnostyami i zakon prostykh chisel* [Logical operations on sequences and the prime number theorem] / V. F. Senchukov // Dokl. AN USSR. Ser. A. – 1988. – No. 6. – P. 20–23. 4. Serpinskiy V. Sto prostykh i odnovremenno trudnykh voprosov arifmetiki / V. Serpinskiy ; per. s pol. V. A. Golubeva. – Moskva : Uchpedgiz, 1961. – 76 p. 5. Serpinskiy V. Chto my znaem i chego ne znaem o prostykh chislakh / V. Serpinskiy ; per. s pol. I. G. Melnikova. – Moskva ; Leningrad : GIFML, 1963. – 92 p. 6. Gelfond A. O. Elementarnye metody v analiticheskoy teorii chisel / A. O. Gelfond, Yu. V. Linnik. – Moskva : Fizmatgiz, 1962. – 272 p. 7. Trost E. Prostye chisla / E. Trost ; per. s nem. N. I. Feldmana pod red. A. O. Gelfonda. – Moskva : GIFML, 1959. – 136 p. 8. Markushevich A. I. Vozvratnye posledovatelnosti / A. I. Markushevich. – 2-e izd. – Moskva : Nauka, 1975. – 48 p. 9. Alpern D. Quadratic Diophantine Equation Solver [Electronic resource] / D. Alpern. – Access mode : www.alpertron.com.ar/quad.htm. 10. Stark H. M. A complete determination of the complex quadratic fields of class-number one / H. M. Stark // Michigan Mathematical Journal. – 1967. – No. 14. – P. 1–27. 11. Golubev V. A. *Chislo grupp prostykh chisel i prostykh chisel stepennykh form* [The number of groups of prime numbers and primes of power forms] / V. A. Golubev // Izvestiya vuzov. – 1962. – No. 6 (31). – P. 28–33. 12. Vinogradov I. M. Osnovy teorii chisel / I. M. Vinogradov. – Moskva : Nauka, 1981. – 176 p. 13. Senchukov V. F. *Tsilochislovi sitky na ploshchini v zadachakh dyskretnoi optymizatsii* [Integer nets on the plane in the tasks of discrete optimization] / V. F. Senchukov // Ekonomika rozvytku. – 2014. – No. 3 (71). – P. 107–112. 14. Senchukov V. F. *Prostorovi tsilochislovi sitky v zadachakh dyskretnoi optymizatsii* [Spatial integer meshes in discrete optimization problems] / V. F. Senchukov // Upravlinnia rozvytkom. – 2015. – No. 2 (180). – P. 116–123. 15. Ekonomicheskaya entsiklopediya / pod red. A. I. Abalkina. – Moskva : Ekonomika, 1999. – 1056 p.

Інформація про автора

Сенчуков Віктор Федорович – канд. фіз.-мат. наук, доцент кафедри вищої математики й економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця (просп. Науки, 9-А, м. Харків, Україна, 61166, e-mail: Viktor. Senchukov@m.hneu.edu.ua).

Информация об авторе

Сенчуков Виктор Федорович – канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры высшей математики и экономико-математических методов Харьковского национального экономического университета имени Семена Кузнеца (просп. Науки, 9-А, г. Харьков, Украина, 61166, e-mail: Viktor.Senchukov@m.hneu.edu.ua).

Information about the author

V. Senchukov – PhD in Physics and Mathematics, Associate Professor of the Department of Higher Mathematics and Economic-and-Mathematical Methods of Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics (9-A Nauky Ave., Kharkiv, Ukraine, 61166, e-mail: Viktor.Senchukov@m. hneu.edu.ua).

Стаття надійшла до ред. 01.03.2018 р.