

Научное издание

ВОРОНИН Анатолий Витальевич

**ЦИКЛЫ В ЗАДАЧАХ
НЕЛИНЕЙНОЙ МАКРОЭКОНОМИКИ**

Монография

Підписано до друку 30.09.2006 р. Формат 60 x 84/16. Папір офсетний.
Гарнітура WagnockPro. Друк ризографічний. Ум.-друк. арк. 7,9.
Обл.-вид. арк. 15,0. Наклад 300 прим. Зам. № 177.

Видавничий Дім «ІНЖЕК»
61001, Харків, пр. Гагаріна, 20. Тел. (057) 703-40-21, 703-40-01.
Свідоцтво про внесення до Державного реєстру України суб'єктів
видавничої діяльності ДК № 2265 від 18.08.2005 р.
Надруковано у ВД «ІНЖЕК», Харків, пр. Гагаріна, 20.

ИЗДАТЕЛЬСКИЙ ДОМ «ИНЖЭК»



National Academy of Sciences of Ukraine
Research Centre of Industrial Problems of Development

A. V. Voronin

CYCLES IN TASKS OF NONLINEAR MACROECONOMICS

Monograph

Kharkov
«INGEC» PH
2006

Литература

42. Guckenheimer I., Holmes P., 1986, Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields, Berlin, Springer-Verlag.
43. Hale O., 1977, Theory of Functional Differential Equations, Berlin and New York, Springer-Verlag.
44. Ichimura, S., 1995, Toward a General Nonlinear Macrodynamical Theory of Economic Fluctuations. In: Kurihara, K.K.(ed), Post-Keynesian Economics, London, Allen&Unwik.– P. 192 – 226.
45. Kydland F., Prescott E. Time to Build and Aggregate Fluctuations.– Econometrica, 1982, Vol. 50, № 11, P. 1345 – 1370.
46. Kuznetsov Yu., 1994, Elements of Applied Bifurcation Theory, Berlin and New York, Springer-Verlag.
47. Shumpeter Y. A. Business Cycles.Vol.1,2. NewYork,1939.
48. Zoladek H, Quadratic Systems with center and their perturbations // J. Diff. Equations.– 1994.– Vol. 109.– P. 223 – 273.

26. Кузык Б. Н., Яковец Ю. В. Россия-2050. Стратегия инновационного прорыва.– М.: Экономика, 2004.
27. Луссе А. В. Макроэкономика: ключевые вопросы: Учебное пособие.– СПб.: Питер, 1999.– 240 с.
28. Малинецкий Г. Г. Потапов А. Б. Современные проблемы нелинейной динамики.– М.: Эдиториал УРСС, 2000.– 336 с.
29. Маршалл А. Принципы политической экономии.– М.: Экономика, 1984.– Т. 2.– С. 31 – 32.
30. Псиола З. Г., Розендорн Э. Р., Трофимов В. В. Нелинейная экономическая динамика // Фундаментальная и прикладная математика.– 1997.– Т. 3.– № 2. – С. 319 – 349.
31. Пу Т. Нелинейная экономическая динамика.– Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика».– 2000.– С. 198.
32. Селищев А. С. Макроэкономика. 3-е изд.– СПб.: Питер, 2005.– 464 с.
33. Смит Дж. М. Модели в экологии.– М.: Мир, 1976.– 184 с.
34. Тренев Н. Н. Макроэкономика: современный взгляд.– М.: Изд-во «ПРИОР», 2001.– 352 с.
35. Трубецков Д. И. Введение в синергетику. Хаос и структуры.– М.: Эдиториал УРСС, 2004.– 240 с.
36. Федосеев В. В., Гармаш А. Н., Орлова И. В. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели.– М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2005.– 304 с.
37. Хэссард Б., Казаринов Н., Вэн И. Теория и приложения бифуркации рождения цикла.– М.: Мир, 1985.– 284 с.
38. Яковец Ю. В. Циклы. Кризисы. Прогнозы.– М.: Наука, 1999.
39. Яковец Ю. В. Прогнозирование циклов и кризисов.– МФК, 2000.
40. Chang, W.W. and Smyth D. J., 1971, The Existence and Persistence of Cycles in a Nonlinear Model: Kaldor's 1940 model Re-examined, Review of Economic Studies, V. 38, P. 37 – 44.
41. Gondolfo, G., 1996, Economic Dynamics, Berlin and New-York, Springer-Verlag.

Национальная академия науки Украины
Научно-исследовательский центр индустриальных проблем развития

А. В. Воронин

ЦИКЛЫ В ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ МАКРОЭКОНОМИКИ

Монография

Харьков
ИД «ИНЖЭК»
2006

УДК 330.33
ББК 65.290-2я73
В 75

*Рекомендовано к печати ученым советом Научно-исследовательского центра
индустриальных проблем развития НАН Украины
(протокол № 6 от 28.09.2006 г.)*

Рецензенты: **Бабич В. П.** – д-р экон. наук, профессор Национального фармацевтического университета (г. Харьков);

Иванов Ю. Б. – д-р экон. наук, профессор Харьковского национального экономического университета;

Михлин Ю. В. – д-р физ.-мат. наук, профессор Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»

Воронин А. В.

В 75 Циклы в задачах нелинейной макроэкономики: Монография. – Х.: ВД «ИНЖЭК», 2006. – 136 с. Русск. яз.

ISBN 966-392-103-X

В книге рассматриваются некоторые ключевые проблемы теории нелинейной экономической динамики. Концепция автора сводится к анализу проблемы структурной неустойчивости экономических систем на примерах классических моделей макроэкономики в русле синергетической парадигмы. В данной монографии представлены результаты изучения явления самоорганизации в открытых и неравновесных экономических системах, прослеживается возникновение предельных циклов и более сложных периодических структур с установлением характера их устойчивости.

У книзі розглядаються деякі ключові проблеми теорії нелінійної економічної динаміки. Концепція автора зводиться до аналізу проблеми структурної нестійкості економічних систем на прикладах класичних моделей макроекономіки в руслі синергетичної парадигми. У даній монографії представлені результати вивчення явища самоорганізації у відкритій і нерівноважній економічній системах, просліджується виникнення граничних циклів і більш складних періодичних структур із установленням характеру їхньої стійкості.

Some key problems of the theory of nonlinear economic dynamics are examined in the book. The author's conception is brought to the analysis of the problem of structural fluctuation of economic systems by the examples of classic models of macroeconomics within the framework of synergetic paradigm. This monograph represents the results of the research of the phenomenon of self-organization in open and nonequilibrium economic systems. The origination of limit cycles and more complex periodic structures with determination of the character of their stability can be observed as well.

ББК 65.290-2я73

© Воронин А. В., 2006

© ИД «ИНЖЭК», 2006

ISBN 966-392-103-X

Литература

12. Воронин А. В., Кизим Н. А. Цикличность нелинейного мультипликатора-акселератора // Бизнес Информ. – 2006. – № 5. – С. 69 – 72.
13. Воронин А. В., Кизим Н. А. Модель производственного цикла // Бизнес Информ. – 2006. – № 6. – С. 71 – 74.
14. Воронин А. В., Кизим Н. А. Нелинейная модель мультипликатора-акселератора с непрерывно-распределенным запаздыванием // Бизнес Информ. – 2006. – № 7. – С. 48 – 51.
15. Гайко В. А. Глобальные бифуркации циклов и шестнадцатая проблема Гильберта. – Мн.: Университетское, 2000. – 167 с.
16. Гальперин В. М., Игнатъев С. М., Моргунов В. И. Микроэкономика. В 2 т. – СПб.: Экономическая школа, 2000. – Т. 1. – 349 с.
17. Глазьев С. Ю. и др. Длинные волны: научно-технический прогресс и социально-экономическое развитие. – Новосибирск: Наука, 1991.
18. Замулин О. Концепция реальных экономических циклов и ее роль в эволюции макроэкономической теории // Вопросы экономики. – 2005. – № 1. – С. 144 – 153.
19. Занг В. Б. Синергетическая экономика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1999. – 336 с.
20. Кейнс Дж. М. Избранные произведения. – М.: Экономика, 1993.
21. Кизим Н. А., Воронин А. В. Цикличность инновационных процессов // Бизнес Информ. – 2005. – № 9-10. – С. 36 – 40.
22. Кизим Н. А., Воронин А. В. Бифуркации в модели экономического роста // Бизнес Информ. – 2006. – № 1-2. – С. 55 – 58.
23. Кизим Н. А., Воронин А. В. Циклическая динамика экономической конкуренции // Бизнес Информ. – 2006. – № 4. – С. 34 – 37.
24. Кондратьев Н. Д. Большие циклы конъюнктуры и теория предвидения. – М.: Экономика, 2002.
25. Кондратьев Н. Д. Проблемы экономической динамики. – М.: экономика, 1989. – 526 с.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аллен Р. Математическая экономия.– М.: Изд-во иностранной литературы, 1963.– 667 с.
2. Бабинцева Н. С. Некоторые новые подходы в экономической теории: очерки.– Спб.: Изд-во С.-Петербур. ун-та, 2003.– 200 с.
3. Базыкин А. Д. Математическая биофизика взаимодействующих популяций.– М.: Наука, 1985.– 184 с.
4. Базыкин А. Д., Кузнецов Ю. А., Хибник А. И. Бифуркационные диаграммы динамических систем на плоскости // Информационный материал.– Пушкино, ОНТИ НЦБИ СССР, 1985.– 55 с.
5. Балацкий Е. В. Рыночное ценообразование и производственные циклы // Экономика и математические методы.– 2005.– Т. 41.– № 1.– С. 37 – 44.
6. Баутин Н. Н., Леонтович Е. А. Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости.– М.: Наука, 1990.– 488 с.
7. Богданов Р. И. Версальная деформация особой точки векторного поля на плоскости в случае двух нулевых собственных чисел // В кн.: Труды семинара им. Г. И. Петровского, вып. 2.– М.: Изд-во МГУ, 1976.– С. 37 – 65.
8. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний.– М.: Наука, 1987.– 384 с.
9. Великий Ю. М., Воронин А. В. Неустойчивость динамики цены в макроэкономическом уравнении Фишера // Бизнес Информ.– 2005.– № 7-8.– С. 61 – 65.
10. Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование.– М.: Наука, 1976.– 286 с.
11. Воронин А. В., Евтушенко С.А., Чернышов С. И. Бифуркации в нелинейной модели Кальдора // Бизнес Информ.– 2002.– № 7-8.– С. 29 – 31.

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие	7
Раздел 1. Неустойчивость и циклы	
в модели Вальраса – Маршалла.....	15
1.1. Нелинейность в модели Вальраса	16
1.2. Модифицированная модель Вальраса – Маршалла.....	27
Раздел 2. Периодические режимы в нелинейной модели	
мультипликатора-акселератора.....	41
2.1. Модель мультипликатора-акселератора	
с конечной продолжительностью инвестиционного лага	41
2.2. Модель мультипликатора-акселератора	
с непрерывно распределенным запаздыванием.....	49
2.3. Циклические режимы в нелинейной модели	
мультипликатора-акселератора с двумя степенями	
свободы.....	59
Раздел 3. Самоорганизация в кейнсианских моделях.....	69
3.1. Динамика роста ВВП.....	69
3.2. IS – LM модель Кейнса	77
3.3. Бифуркации в нелинейной модели Кальдора.....	90
Раздел 4. Динамика экономических процессов	
с запаздыванием.....	100
4.1. Неустойчивость динамики цены	
в макроэкономическом уравнении Фишера.....	100
4.2. Цикличность инновационных процессов.....	112
Вместо заключения	124
Литература.....	132

CONTENTS

Preface	7
Chapter 1. Fluctuation and cycles in the model of Valras – Marshall.....	15
1.1. Nonlinearity in Valras model	16
1.2. Modified model of Valras – Marshall.....	27
Chapter 2. Periodic regimes in nonlinear model of multiplier-accelerator	41
2.1. Model of multiplier-accelerator with final duration of investment lag	41
2.2. Model of multiplier-accelerator with continuously distributed lag	49
2.3. Cyclic regimes in nonlinear model of multiplier-accelerator with two degrees of freedom	59
Chapter 3. Self-organization in Keynesian models	69
3.1. Dynamics of GDP growth.....	69
3.2. IS – LM Keynes model.....	77
3.3. Bifurcations in nonlinear model of Kaldor.....	90
Chapter 4. Dynamics of economic processes with the lag	100
4.1. Fluctuation of price dynamics in macroeconomic equation of Fisher	100
4.2. Cyclic character of innovation processes.....	112
Instead of conclusion.....	124
Literature	132

образом. На фазовой плоскости это иллюстрируют *сепаратрисы* – линии, отделяющие друг от друга разные области притяжения (аттракторы). Иначе говоря, если малое возмущение «перебрасывает» систему через сепаратрису, она попадает в зону влияния другого аттрактора с кардинальной перестройкой фазового портрета.

Мы уже достаточно предметно исследовали качественные особенности динамики рынка для двух участников конкурентной борьбы. Разумеется, это всего лишь частный случай сложной организационной экономической системы. Совершенствование рыночных отношений, по всей видимости, должно быть направлено на увеличение количества участников рынка.

Хорошо известно, что появление на рынке третьего участника конкурентной борьбы способно инициировать в системе хаотический режим с появлением новой разновидности аттрактора. Этот «странный» аттрактор коренным образом видоизменяет динамику системы конкурентных отношений, существенно сужая горизонт экономического прогнозирования. Поэтому, важнейшей вытекающей из синергетики идеей является то, что для устойчивого развития, для динамично развивающегося процесса эволюции рынка необходимы определенная доля хаоса, спонтанности развития и самоуправления и определенная доля внешнего управления со стороны государственных институтов, которые должны быть согласованы друг с другом. Обе крайности – как чистый хаос, стихийные рыночные механизмы отбора и «выживания сильнейших», так и тотальное внешнее управление, полный контроль и политика протекционизма по отношению к избранным структурам, государственным монополиям и т. п. – не приемлемы.

Известны три бифуркации предельных циклов:

- 1) бифуркация рождения (гибели) предельного цикла из сложного фокуса;
- 2) бифуркация сепаратрисного цикла: из гомоклинической или гетероклинической замкнутой траектории;
- 3) бифуркация кратного предельного цикла.

Первая бифуркация изучена полностью только для случая квадратичных систем: число предельных циклов, появляющихся из особой точки, равно трем. *Для системы с кубическими нелинейностями цикличность особой точки не меньше одиннадцати!*

По поводу *второй бифуркации* можно сказать, что в настоящее время уже существует полная классификация сепаратрисных циклов и известна цикличность большинства из них.

Третья бифуркация самая сложная и мало изученная.

К сожалению, все эти бифуркации носят локальный характер: при их изучении рассматривается только некоторая достаточно малая окрестность особой точки, сепаратрисного или кратного предельного цикла и соответствующая достаточно малая окрестность параметров системы.

Для окончательного решения шестнадцатой проблемы Гильберта требуется полное качественное исследование системы в целом (как на всей фазовой плоскости, так и во всем пространстве параметров), т. е. нужна глобальная теория бифуркаций. Кроме того, необходимо связать между собой все локальные бифуркации предельных циклов.

Мы не случайно так подробно охарактеризовали бифуркационные свойства циклической динамики конкурентного взаимодействия. Именно здесь наиболее ярко проявляются свойства неустойчивости систем по отношению к малым отклонениям параметров. Только в нелинейных системах вблизи бифуркационных границ на исследуемом объекте наблюдается качественно различный характер поведения. Примером такой перестройки топологии является смена устойчивого аperiodического режима на неустойчивый автоколебательный катастрофическим

*Все линейные системы счастливы одинаково,
а каждая нелинейная система несчастлива по-своему.*

Ю. Болотин, А. Тур, В. Яновский

«Конструктивный хаос»

ПРЕДИСЛОВИЕ

Нелинейная динамика представляет собой одно из наиболее значимых и перспективных направлений развития экономической науки. Мощный современный аппарат качественной теории дифференциальных уравнений и смежных разделов математической топологии предоставляет широкие возможности для получения содержательных результатов прежде всего качественного характера при решении задач экономического прогнозирования. Для математической экономики характерны два принципиально различные способа моделирования: статический и динамический. Следуя Н. Д. Кондратьеву [25], займемся более подробной и предметной характеристикой этих двух видов сугубо теоретического подхода к познанию экономической действительности.

Статическая теория рассматривает экономические процессы в мгновенном проявлении, вне инерционных изменений во времени. Статический подход к моделированию экономической реальности базируется на концепции равновесия взаимосвязанных элементов экономической системы. Сама по себе концепция равновесия была достаточно хорошо известна ученым-механикам до выхода в свет в 1776 г. знаменитого произведения Адама Смита «Благосостояние нации» и, по всей видимости, автору удалось найти аналогии между хозяйственным балансом и равнодействующей силой в механике. А. Смит предьявил наиболее существенный постулат общей теории равновесия – способность системы конкуренции достигать такого распределения ресурсов, которое в некотором определенном смысле оказывается эффективным.

На сходных позициях с А. Смитом находятся и построения Д. Рикардо, выдвинувшего тезис о свободе конкуренции и свободе

передвижения труда и капитала из одной области хозяйственных отношений в другую. Д. Рикардо было известно, что реальная цена, действительный уровень заработной платы и прибыли являются переменными во времени, при этом он полагал существование тенденции к достижению некоего естественного уровня равновесия для указанных выше характеристик.

Исчерпывающая формулировка общей концепции равновесия по праву принадлежит представителю школы маржинализма (предельной полезности) – Л. Вальрасу. Работы Л. Вальраса, У. Джеванса, В. Парето унифицировали теорию равновесия в приложении к областям обмена, производства, капитала, денег и были углублены впоследствии Дж. Хиксом и П. Самуэльсоном. В целом эти работы носят очень широкий, всеобъемлющий характер: экономика рассматривается в виде множества отдельных потребителей и производителей, и число включаемых переменных совершенно не ограничивается. Система общего равновесия замкнута в том смысле, что вся совокупность переменных определяется заданными условиями. Чтобы убедиться в совместности системы с состоянием равновесия, нужно лишь сопоставить количество уравнений с количеством неизвестных. Однако существует проблема существования положения равновесия и его единственности.

Динамический анализ в экономике формировался параллельно с самой экономической теорией. Противостояние динамического и статического подходов легко прослеживается через всю историю экономической мысли. Вероятно главная причина кроется в принципиальных отличиях между пониманием баланса равновесия сил и причинной динамикой.

По теории экономической динамики имеется широкий набор литературных источников. Наиболее значимыми среди большого количества разнообразных задач эволюционирующей экономики являются проблемы экономического роста и деловых циклов. В трактовке Н. Д. Кондратьева данные разграничения динамических процессов интерпретируются на эволюционные (неповторимые, необратимые) и волнообразные (повторимые, обратимые). Под эволюционными, или обратимыми, процессами понимаются те измене-

колебательных режимов (предельных циклов) является интересной и очень сложной задачей качественной теории дифференциальных уравнений. До настоящего времени еще не решена сформулированная в 1900 г. шестнадцатая проблема Гильберта: найти максимальное число и определить взаимное расположение предельных циклов в системе двух дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями. Среди основных результатов для данной системы можно выделить следующие [15]:

- 1) дана полная классификация их особых точек (узел, фокус, седло, центр);
- 2) проведено полное качественное исследование систем, имеющих особую точку типа центр. Дана топологическая классификация фазовых портретов и сделано соответствующее разбиение пространства параметров таких систем;
- 3) доказано, что предельные циклы квадратичных систем – выпуклы;
- 4) предельные циклы не могут окружать особую точку типа узел;
- 5) система, имеющая алгебраический предельный цикл в виде эллипса, не имеет других предельных циклов;
- 6) квадратичная система, имеющая негрубый фокус и фазовую прямую или две особые точки, в которых дивергенция равна нулю, не имеет предельных циклов;
- 7) система с четырьмя особыми точками, две из которых фокусы, причем один – негрубый, может иметь предельные циклы только вокруг одного из фокусов;
- 8) максимальное число предельных циклов, порождаемых фокусом или центром, равно трем;
- 9) квадратичная система может иметь, по крайней мере, четыре предельных цикла в расположении 3 : 1, т. е. три вокруг одного фокуса и один вокруг другого;
- 10) общее число предельных циклов квадратичной системы конечно.

реализованной возможности роста для этого вида, подобно тому, как это имело место у каждого участника рынка по отдельности без влияния конкуренции. Но неиспользованная возможность количественного роста для данного вида товара при смешении товарных потоков будет более сложной величиной. Она продемонстрирует, сколько места на рынке еще свободно для этого вида товара при наличии товарной экспансии другого участника рынка.

Для двух участников рыночной конкуренции мы получили систему двух автономных нелинейных дифференциальных уравнений, по внешнему виду напоминающие модели математической биофизики (популяционной динамики) типа Вольтерра [10] и их разнообразные модификации с различными функциями отклика [33].

Теоретический анализ (в т. ч. и бифуркационный) подобных моделей достаточно полно представлен в книге А. Д. Базыкина [3].

Особый интерес для практики экономического прогнозирования представляет выработка критериев близости параметров системы к опасным границам, при переходе через которые система двух экономических конкурентов катастрофическим образом переходит в качественно иное состояние. При этом характер динамики объемов товаров на рынке резко меняется, например, происходит скачкообразный переход от монотонного экономического роста к релаксационным колебаниям. Такие границы областей изменения параметров исследуемой динамической системы называются *бифуркационными*.

Особое место в исследовании моделей конкурентной экономики занимают процессы, характеризующиеся циклическим поведением. Выявление скрытых периодичностей, поиск так называемых «экономических часов» различной природы всегда является актуальным при изучении проблем экономической динамики

Далее мы будем говорить о математической модели экономической конкуренции, описываемой системой двух обыкновенных дифференциальных уравнений с квадратичными нелинейностями. Такие системы в конкурентной динамике возникают при тейлоровском приближении второго порядка функций отклика в обобщенных моделях Вольтерра. Исследование проблемы возникновения авто-

ния, которые при отсутствии внешних возмущающих воздействий протекают в определенном – одном и том же – направлении. Примерами таких процессов являются тенденции роста населения, увеличение общего объема производства и др. Волнообразными, или обратимыми, Н. Д. Кондратьев называет те процессы изменений, которые в каждый момент времени имеют свою направленность и, следовательно, постоянно меняют его, при которых явление, находясь в данный момент в данном состоянии и затем меняя его, рано или поздно может вновь вернуться к исходному состоянию. Примерами могут служить процессы изменения цен на различные товары, банковские проценты, уровень безработицы и т. д.

На наш взгляд, следует уделить более пристальное внимание проблематике медленных (низкочастотных) колебаний в экономике, так называемых длинных циклов (волн). Сам Н. Д. Кондратьев, выделяя длинные волны экономической конъюнктуры, увязывал их с промышленным переворотом конца XVIII – начала XIX вв., строительством сети железных дорог, расширением новых видов средств связи (телефон, телеграф) и электроэнергии, быстрым становлением автомобилестроительной отрасли промышленности [2]. Сейчас наиболее устоявшимся является представление о пяти длинных циклах, длительность которых равняется примерно 50 годам:

- конец XVIII в. – первая треть XIX в.;
- вторая треть XIX в. – начало 90-х годов XIX в.;
- конец XIX в. – 30-е годы XX в.;
- 40-е годы XX в. – 70-е годы XX в.;
- с 80-х годов XX в. – по настоящее время.

Попытаемся уяснить саму природу механизма длинного цикла. Для инициации повышательной фазы цикла требуется аккумуляция не только изобретений, но и капитала, склонность бизнеса наращивать инвестиции. Для предпринимателя крайне важным фактором является динамика прибыльности. На самом деле повышательная волна длинного цикла развивается как система взаимосвязанных и взаимостимулирующих явлений: нововведение дает возможность улучшить условия производства, снизить производственные издерж-

ки и увеличить прибыль, что стимулирует бизнес к внедрению инновации при наличии необходимых для этого ресурсов. Инновации дают рост прибыли, что генерирует дополнительные инвестиции, увеличение объема спроса, общее позитивное движение темпов роста экономических показателей.

Но в какой-то момент в динамике данного процесса наблюдается точка поворота. Технологической основой этому служит существенное ослабление эффектов, положивших начало повышательной фазе цикла. Прекращение их действия замедляет рост прибыльности и, далее, снижает ее, что уменьшает заинтересованность структур бизнеса в дальнейших нововведениях и новых инвестициях. Производство замедляет свой рост, наблюдаются негативные явления экономической жизни, характерные для длинноволнового спада. В процессе его происходит увеличение количества новых изобретений, что предопределяет важный посыл для завершения спада и начала новой повышательной волны.

Несомненной заслугой Н. Д. Кондратьева является обоснование своих выводов на основе анализа длинных временных рядов цен на товарную продукцию, банковских процентов, зарплаты и т. д. Описанная динамика представляет лишь упрощенную схему, так как реальные изменения в экономике значительно сложнее и разнообразнее.

Современное состояние макроэкономической науки невозможно понять, не оценив вклад Дж. М. Кейнса. Он по сути создал макроэкономику как науку в тридцатые годы прошлого столетия, чтобы прояснить причины Великой депрессии – самой масштабной рецессии в индустриальном капиталистическом мире XX в., а потому и самого значимого события в современной истории экономических циклов [18]. Существовавшая тогда теория не могла объяснить, почему с 1929 по 1933 гг. ВВП США сократился на одну треть, а уровень безработицы составил четвертую часть от всего трудоспособного населения. Классические теории основывались на предположении, что экономика находится в конкурентном равновесии, в котором рынок все урегулирует – в частности, высокая безработица должна привести к снижению зарплат до уровня, при котором работодатели согласятся нанять всех желающих трудиться за эти деньги, и безра-

сложное социально-экономическое образование. По всей видимости, существует ограниченный набор объединения, методов построения сложного эволюционирующего целого. Избирательность, квантованность способов объединения частей в целое связана с предъявляемым требованием существования в общем темпом мире. Это природная, естественная основа квантования при интеграции сложных диссипативных экономических систем. В случае, когда объединяемые в единую конкурентную среду экономические субъекты имеют различный момент обострения, вблизи данной особенности они будут развиваться несравнимо по интенсивности, что, в свою очередь, провоцирует нежелательный рыночный дисбаланс. Это означает, например, что в мировой экономике уровень развития, качество жизни, информационное обеспечение и т. д. в различных странах имеют существенную дифференциацию и порождают опасную разность потенциалов.

Для воссоздания эффективной рыночной конкуренции необходимо соблюдение определенной топологии «архитектуры» перекрестных связей. Другими словами, если область перекрытия мала, то экономические субъекты будут развиваться, «не чувствуя» друг друга, жить в разных темпомирах. Наоборот, если перекрытие слишком велико, то структуры быстро сольются в стратегические альянсы на данном рынке, и, возможно, даже в одну динамично растущую структуру с пределом роста, равному емкости рынка, что ведет к вырождению конкуренции.

Теперь уже представляется возможным перейти к характеристике математической сущности экономической конкуренции для нескольких участников рынка. В настоящей работе мы ограничились случаем конкуренции двух экономических субъектов на одном рынке. Для составления кинетических уравнений конкурентных взаимодействий необходимо ввести ряд предпосылок, характеризующих изучаемое явление на качественном уровне. По-видимому, наиболее значимым является анализ баланса скоростей роста процессов и факторов, препятствующих позитивному развитию. Допустим, что скорость роста каждого из конкурентов зависит от потенциального прироста количества товаров данного вида и не-

становку задачи исследования структурной устойчивости рассматриваемых объектов и систем. В уравнениях локальных конкурентных взаимодействий обратные связи описываются нелинейными функциями, характер которых позволяет инициировать появление сложных динамических режимов с возникновением аттракторов соответствующего вида. Факт наличия существенно нелинейных связей и рождающихся неустойчивостей предполагает использование синергетической парадигмы как способа описания конкурентных взаимодействий в экономической среде. Необходимо констатировать, что классический линейный принцип суперпозиции теряет свою силу в сложном и нелинейном мире, каковым является рынок. В подобной ситуации нельзя целое приравнивать к простой сумме составляющих его частей. Следует полагать, что эволюция экономических систем означает некую специфическую трансформацию всех участников рыночного взаимодействия посредством установления когерентной связи и взаимного согласования параметров их эволюции. Нелинейный синтез в данном случае – это объединение не жестко установленных, фиксированных объектов, а структур развивающихся, обладающих различными экономическими «возрастом» и «памятью», находящихся на разных стадиях эволюции.

Итак, сложность экономической системы связана с когерентностью. Под *когерентностью* будем понимать согласование темпов деловой активности участников рынка посредством диффузионных (перемешивающих) диссипативных процессов, являющихся макроскопическим проявлением кажущегося экономического хаоса.

Для построения сложной рыночной конкурентной организации необходимо когерентное соединение подструктур внутри нее, синхронизация временных постоянных их эволюции. В результате такого сугубо нелинейного синтеза разные структуры попадают в единый темпомир, то есть, приобретая один и тот же момент обострения, начинают функционировать в одном экономическом темпе.

При развитии концепции построения системы совершенной рыночной конкуренции приходит осознание факта, что не какие угодно структуры и не как угодно, не при любой степени связи и не на произвольных стадиях развития могут быть вовлечены в единое

ботица должна исчезнуть сама собой. Однако на практике все вышло иначе, поэтому Кейнс предложил радикально новые идеи, суть которых сводилась к двум основным постулатам.

Во-первых, экономика не находится в конкурентном равновесии в каждый момент времени, то есть «невидимая рука» рынка не выполняет своих функций. Базовая причина данного неравновесия – сохранение фиксированных цен и зарплат в течение длительного времени и отсутствие адаптации под текущую рыночную конъюнктуру. *Во-вторых*, уровень развития экономики определяется совокупным спросом, последний, в свою очередь, зависит от необъяснимых факторов, которые Кейнс обозначил туманным термином «животные инстинкты инвесторов». На базе этих двух допущений и было построено здание макроэкономической теории. Согласно ее постулату, на величину ВВП государства влияют масштабы расходов потребителей, инвесторов и правительства на приобретение товаров и услуг. Поэтому экономические циклы обусловлены именно колебаниями спроса, а не ресурсными возможностями страны. Первую и основную формальную кейнсианскую модель IS – LM, сформулировал на базе кейнсианской теории Дж. Хикс в 1937 г.

В течение последующих нескольких десятилетий вплоть до середины семидесятых годов дискуссии велись в основном в русле кейнсианской теории. Предмет споров состоял в том, должно ли правительство вообще, и если да, то какими методами пытаться оживить экономику в периоды спадов. В соответствии с вышеизложенной позицией правительство должно было реагировать на спад увеличением госрасходов. По мнению других ученых и специалистов, стабилизация должна была достигаться за счет контроля над денежной массой – эта точка зрения дала толчок развитию доктрины монетаризма, согласно которой главная цель государства заключается в том, чтобы не допускать сильных колебаний денежной массы. Но позиции обоих антагонистических научных направлений были едины в том, что основная движущая сила цикла – колебания в величине спроса, и поэтому основные различия между «кейнсианцами» и «монетаристами» почти полностью стерлись.

Однако в середине семидесятых годов прошлого века мировая экономика столкнулась с новым явлением – стагфляцией, которое

не могло быть удовлетворительно объяснено в рамках концепции кейнсианства. В это время появились критические работы Р. Лукаса, впоследствии нобелевского лауреата 1995 г., который раскритиковал не только экономическую политику властей, но и всю кейнсианскую теорию экономических циклов за игнорирование оптимального поведения экономических агентов, включающее формирование рациональных ожиданий. Он предположил, что в отличие от инвесторов и потребителей в моделях Кейнса, которые следуют неким формальным правилам поведения, экономические агенты делают в среднем верные прогнозы будущего состояния экономики и придерживаются стратегии максимизации собственной прибыли. Все это породило спрос на некую альтернативную теорию экономических циклов.

Данную нишу заполнили американские экономисты Ф. Кидланд и Э. Прескотт, лауреаты Нобелевской премии по экономике 2004 года. В своей базовой работе [45] они предложили новое описание реального экономического цикла, основанное на том, что фирмы максимизируют всю прибыль и принимают решения об инвестициях с учетом ожидания будущего спроса на их товар и развития технологий.

Кидланд и Прескотт предъявили ряд динамических моделей и показали, какое поведение базовых экономических переменных (ВВП, инвестиции, сбережения) следует ожидать в зависимости от воздействия технологических шоков на производительность труда и изменений внешней конъюнктуры. Авторы продемонстрировали, что результаты моделирования удовлетворительно отвечают наблюдаемым закономерностям. Кроме того, они сделали важный вывод о том, что значительная часть колебаний ВВП во многих странах соответствует предсказанным в равновесных моделях. Иначе говоря, нет необходимости вводить в них отклонения от рыночного равновесия в кейнсианском духе и реализовывать государственную стабилизационную политику.

Справедливости ради необходимо отметить, что теория циклов Ф. Кидланда и Э. Прескотта объясняет далеко не все явления реальной экономической действительности и постоянно подвергается

условия продажи товара. При этом основным методом конкурентной борьбы он считал изменение цен. Далее поведенческие свойства конкуренции совершенствовались в направлении более точного указания ее цели и способов ведения.

Структурная составляющая конкуренции есть анализ сегментов или всего рынка для определения степени свободы продавца и покупателя. Функциональное наполнение конкуренции содержит инновационность, то есть соперничество старого с новым и т. д.

Перед тем как перейти к непосредственному анализу особенностей моделей экономической конкуренции, необходимо отметить, что экономические системы, как правило, являются далекими от своего равновесия, открытыми для товарно-денежных потоков, имеют сложную неоднородную структуру и иерархическую систему регуляции эндогенной среды под воздействием экзогенных факторов. Поэтому математическая формализация представлений о процессах экономической конкуренции представляет сама по себе значительные трудности, в отличие от физики, химии, биологии, для которых математика уже является естественным языком описания наблюдаемых процессов. В связи со специфическими особенностями экономических явлений говорят именно о математических моделях в экономике. Модель здесь следует понимать как достаточно грубую абстракцию и идеализацию, математическую формализацию не самой развивающейся системы экономического пространства (рынка), а только лишь некоторых качественных и количественных характеристик протекающих в ней процессов. Общей чертой многих феноменологических моделей рыночной экономики является наличие автокаталитических (по аналогии с биофизикой и популяционной динамикой) членов, определяющих возможность роста, фактов появления неустойчивых стационарных состояний, способствующих возникновению автоколебательных и квазистохастических режимов.

Сложные процессы в системах саморегуляции рынков обусловлены наличием в структурных схемах контуров (петель) обратной связи (например, «невидимая рука» Адама Смита), как положительных, так и отрицательных, что, в свою очередь, предопределяет по-

ВМЕСТО ЗАКЛЮЧЕНИЯ

На сегодняшний день теория экономических циклов является, пожалуй, самым спорным разделом макроэкономики. Какого рода экономические или внеэкономические факторы порождают колебательные движения? Каков механизм их распространения в экономике? Выступают ли циклические колебания составной частью экономического роста или их надо рассматривать как отклонения от долгосрочного тренда? Как строить антициклическую политику правительства и, вообще говоря, всегда ли она необходима? С какими математическими проблемами соприкасаются исследователи при формализованном описании колебательных процессов в экономике? На эти и многие другие важные вопросы исчерпывающих ответов пока не найдено.

С позиций синергетической экономики, эволюционной экономической системы, которая всегда была бы устойчива, не существует. Эволюционная система всегда подвержена трансформирующим воздействиям внешних и внутренних сил, способных реализовать внезапные структурные изменения, в т. ч. циклы. Поясним эти утверждения на примере анализа поведенческих свойств феномена конкурентного взаимодействия различных экономических субъектов [23].

Понятие экономической конкуренции представляет собой сложную и комплексную категорию, построенную на основе множества разнообразных подходов. Подавляющее большинство исследователей выделяют ценовую и структурную конкуренцию. При первом подходе механизм конкуренции реализуется за счет ценовых изменений, при втором – конкурируют условия производства товаров. Определяя сущность конкуренции, следует учитывать необходимые составляющие процесса, условно поделенные на три основные группы: поведенческие, структурные и функциональные.

Поведенческое понимание конкуренции трактуется еще со времен А. Смита как парное (без сговора) соперничество, которое происходит между продавцами (или покупателями) за наиболее выгодные

конструктивной критике со стороны «новых кейнсианцев». В частности, наиболее ярким примером расхождений взглядов представителей этих двух школ служит попытка объяснения технологического бума девятых годов прошлого века. Остается лишь надеяться, что в обозримом будущем возникнет консенсус по существу подлинных источников экономических циклов.

На наш взгляд, достижение данной цели невозможно без признания того, что экономика по своей сути есть развивающаяся система и должна строиться в рамках теории развивающихся систем, конструктивность которой убедительно доказана на примере химической кинетики, биологии и других естественных наук. В этой теории показано, что при движении к цели при наличии существенно нелинейных обратных связей возникает целая иерархия неустойчивостей, ведущая к появлению предельных циклов, гомоклинических структур и спонтанному образованию хаоса. В результате подобных преобразований (бифуркаций) могут появиться несколько различных конечных состояний экономического равновесия (так называемый *эффект бистабильности*). Методами нелинейной динамики возможно предсказать момент наступления хаотического режима в исследуемой системе, количество возможных положений равновесия и определить характер их устойчивости. Все это, в свою очередь, порождает принципиальную общую задачу построения альтернативных сценариев развития сложных, необратимо развивающихся систем. Здесь уместно напомнить высказывание Г. Малинецкого [28]: «В самом деле, социально-технологические объекты представляют собой сложные иерархические системы, различные процессы в которых разворачиваются на разных характерных временах. Степень их неустойчивости, их пределы предсказуемости тоже различны. В экономической системе горизонт прогноза резко уменьшился: если еще 15 лет назад нормой в мире было 5-летнее директивное или индикативное планирование, то сейчас об этом говорить не приходится. В мире становится все больше предложение «быстрых денег» и все меньше предложение «медленных». Но, с другой стороны, устойчивое развитие общества требует медленно меняющихся стратегических целей, шкалы общественных ценностей и норм,

культуры и идеологии. Нужна техника, теории, формализм, который позволит бы анализировать возможную динамику таких «разновременных систем» и на этой основе направлять развитие».

Вряд ли вызывает сомнение тот факт, что именно математический аппарат нелинейной динамики является тем самым инструментарием, который позволит вплотную приблизиться к решению проблем «проектирования будущего», к поиску устойчивых и безопасных путей социально-экономической эволюции. Опыт применения методов и моделей нелинейной динамики показал, что многие сложные развивающиеся системы могут быть удовлетворительным образом описаны с помощью небольшого количества переменных – *параметров порядка*. Определение параметров порядка реализуется с помощью редукции многомерной системы на подпространство небольшой размерности благодаря методам теории бифуркаций и теории центральных многообразий. Однако это и предопределяет локальность произведенного анализа динамического поведения исследуемой модели. Его применимость допустима лишь в малой окрестности точки бифуркации и, соответственно, к решениям малой амплитуды. В последующем изложении мы предьявим явные периодические решения малой амплитуды рождающихся в результате бифуркации Андронова – Хопфа предельных циклов и определим характер их устойчивости.

В этой книге выбор обсуждаемых нелинейных моделей сделан более или менее произвольно. Автором рассмотрены модели, которые уходят корнями в основополагающие принципы традиционной экономики – неоклассический синтез и кейнсианство.

жений в экономической жизни, которые могут быть применены для объяснения циклов без всякой ссылки на принцип претворения в жизнь новых комбинаций... Эти новые инструменты анализа значительно расширяют наши возможности объяснить формы проявления действительности...».

Результаты, полученные в данном исследовании, согласуются с закономерностями циклической динамики, демонстрируя неравномерность эволюции экономической системы, периодическую смену фаз циклов и самих циклов развития сложных систем [21].

Это, в свою очередь, делает актуальным в методологии социально-экономического прогнозирования предсказание циклов и кризисных явлений, своевременное выявление и идентификацию негативных тенденций развития. При этом всегда следует помнить, что цикличность является общей формой поведения огромного количества динамических систем различной природы и, экстраполируя на будущее сформировавшиеся в прошлом тенденции, необходимо уметь применять мощный современный аппарат теории нелинейных колебаний. Данный подход позволит более качественно диагностировать кризисные состояния исследуемых объектов и систем, а также способствовать поиску оптимально эффективных путей выхода из них для целей создания антикризисных программ экономического и социального развития общества.

$$\frac{\dot{y}_0(t)}{y_0(0)} = -x_2(t) = \frac{y_2(t)}{\omega} - y_3(t). \quad (4.43)$$

Описанный выше механизм возникновения экономического цикла обладает рядом характерных особенностей, которые не могут быть объяснены в рамках классической линейной теории.

Во-первых, экономические колебательные процессы в форме (4.41) – (4.43) не обладают симметрией в отличие от линейной модели. Это означает, что внутри цикла его фазы могут отличаться как по форме, так и по содержанию. В частности, подъем и спад имеют различную длительность. *Во-вторых*, амплитуда колебаний согласно (4.38) зависит от внутренних параметров модели, а не является сугубо внешней характеристикой.

В-третьих, период цикла является функцией амплитуды, что в определенной степени объясняет неравномерность циклической динамики.

Далее. Кривая эволюции совокупного общественного продукта представляет собой суперпозицию колебаний с различными частотами относительно некоторого тренда. Таким трендом может быть, например, логистическая кривая (в нашем случае логистичность легко проявляется при отключении запаздывания $Q(t)$).

В качестве иллюстрации правомерности применения математических моделей экономического развития, использованных в данном исследовании, напомним высказывания Й. Шумпетера, цитируемого в [17]: «Политэкономы издавна обладают привычкой упоминать о «трендах» и «лагах», и они, вероятно, всегда осознавали тот факт, что деловые люди реагируют не только на данные количества, но и на темпы их изменений, не только на существующие количества, но и на те, которые ожидаются в будущем. Как бы то ни было, в последние годы были разработаны точные теории влияния запаздывающей адаптации, ожидаемых действий и т. д. Разработаны или заимствованы из других областей технические средства. Что касается последних, то наиболее значительным событием стало введение в экономическую теорию функционала, которую разработал Вито Вольтера... Новые методы, как представляется, указывают на возможности колоссального многообразия волнообразных дви-

РАЗДЕЛ I НЕУСТОЙЧИВОСТЬ И ЦИКЛЫ В МОДЕЛИ ВАЛЬРАСА – МАРШАЛЛА

Экономическая наука оперирует такими понятиями, как количество товаров (факторов производства) и их цена. На каждом рынке существуют группы продавцов и покупателей. В этом разделе будет рассмотрена модель рынка для одного вида товаров. В модели одного рынка переменными, т. е. зависящими от времени, являются объемы покупаемых и продаваемых товаров, а также их цены. Базовым принципом моделирования рыночного взаимодействия служит формирование балансовых отношений между объемами спроса и предложения товаров и, соответственно, ценами спроса и предложения.

Проблема совместного действия спроса и предложения как индикаторов, определяющих количественные взаимосвязи между объемом товара и ценой на данном рынке, очень точно охарактеризована А. Маршаллом [29]: «Мы могли бы с равным основанием спорить о том, что регулируется ли стоимость полезностью или издержками производства, как и о том, разрезает ли кусок бумаги верхнее или нижнее лезвие ножниц. Действительно, когда одно лезвие удерживается в неподвижном состоянии, а резание осуществляется движением другого лезвия, мы можем, как следует не подумав, утверждать, что резание производит второе, однако такое утверждение не является совершенно точным и оправдать его можно лишь претензией на простую популярность, а не строго научным описанием совершаемого процесса».

Для более предметного понимания современных феноменологических основ спроса и предложения следует дать определения этих понятий, воспользовавшись формулировками, изложенными, например, в [16].

Объемом товарного спроса называют количество этого товара, которое согласны купить отдельное лицо, группа индивидов или население в целом в единицу времени при определенных условиях.

В перечень данных условий входят вкусы и предпочтения покупателей, цены на этот товар, уровень денежных доходов и т. д. **Ценой спроса** именуют *максимально возможную цену, которую покупатель согласен заплатить за фиксированное количество данного товара*. При этом *зависимость объема спроса от определяющих его факторов* называют **функцией спроса**.

Аналогичным образом **предложение** служит *характеристикой готовности продавца продать некоторое количества товара в определенный период времени*.

Объемом предложения называют *количество какого-либо товара, которое желает продать на рынке один продавец или группа продавцов в единицу времени при определенных условиях*.

К числу этих условий относятся, как правило, свойства применяемой производственной технологии, цена данного товара, стоимостные показатели используемых ресурсов, ставки налогообложения, государственные дотации и т. д. **Цена предложения** – это *минимальная цена, по которой продавец согласен продать определенное количество данного товара*. *Зависимость объема предложения от структуры определяющих его показателей* называется **функцией предложения**. Отметим, что функция предложения, так же как и функция спроса, могут быть заданы тремя способами: таблично-цифровым, графическим и аналитическим. Далее мы будем использовать только аналитическую форму выражений функций спроса и предложения.

1.1. Нелинейность в модели Вальраса

В классической экономической теории используются два равноправные, но принципиально различные варианта описания механизма взаимодействия спроса и предложения. Первый подход, принадлежащий Л. Вальрасу, постулирует, что движущей силой в изменении цены является объем избыточного спроса при известном мгновенном значении цены. При рассмотрении в динамике процесс поиска равновесия по Вальрасу может быть представлен в виде дифференциального уравнения

$$\frac{dP}{dt} = m(Y^D(P) - Y^S(P)), \quad (1.1)$$

$$а) \text{ амплитуда } - \varepsilon = \left(-\frac{\operatorname{Re} \lambda'(0)}{\operatorname{Re} C_1(0)} \mu \right)^2 + O(\mu^2); \quad (4.38)$$

$$б) \text{ период } - T = \frac{2\pi}{\omega} (1 + \tau_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^4));$$

$$\tau_2 = \frac{1}{\omega} \left(\frac{\operatorname{Im} \lambda'(0)}{\operatorname{Re} \lambda'(0)} \operatorname{Re} C_1(0) - \operatorname{Im} C_1(0) \right). \quad (4.39)$$

Само периодическое решение с точностью до выбора начальной фазы записывается в виде

$$y_1 = \operatorname{Re} z, \quad y_2 = \operatorname{Im} z, \quad y_3 = \operatorname{Re}(w_{20} z^2),$$

$$Z = \varepsilon e^{\frac{2\pi i t}{T}} + \frac{i G_{02} \varepsilon^2}{6\omega} \left(e^{-\frac{4\pi i t}{T}} - 3e^{\frac{4\pi i t}{T}} \right) + O(\varepsilon^3) \quad (4.40)$$

Из (4.40) следует, что

$$y_1(t) = \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{A_1 a_1 \varepsilon^2}{3\omega^2} \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + \frac{A_2 a_1 \varepsilon^2}{6\omega^2} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right),$$

$$y_2(t) = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) - \frac{A_2 a_1 \varepsilon^2}{3\omega^2} \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) - \frac{A_1 a_1 \varepsilon^2}{6\omega^2} \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right), \quad (4.41)$$

$$y_3(t) = \frac{A_3 a_1}{\omega^2 + a_1^2} \left(-y_1^2(t) + \frac{a_1}{\omega} y_1(t) y_2(t) + y_2^2(t) \right).$$

Возвращаясь к исходным переменным, получаем приближенную форму решения для совокупного объема производства нового продукта

$$y_0(t) = r + \frac{a_1}{b_0} y_1(t) + \frac{\omega^2}{b_0} y_3(t) \quad (4.42)$$

и для его относительной скорости роста (темпа)

Теперь мы располагаем всеми необходимыми данными для вычисления первой ляпуновской величины

$$C_1(0) = \frac{G_{21}}{2} + \frac{i}{6\omega} |G_{02}|^2. \quad (4.36)$$

Из (4.35) и (4.36) следует, что

$$\operatorname{Re} C_1(0) = \frac{-a_1(b_0 - a_1 b_1)(2b_0 - a_1 b_1)}{8b_0^2(\omega^2 + a_1^2)(4\omega^2 + a_1^2)} < 0, \quad (4.37)$$

т. к. $b_0 > a_1 b_1$ и, соответственно, $2b_0 > a_1 b_1$.

Рассмотрим особенности рождающегося из сложного фокуса предельного цикла при переходе пары корней характеристического уравнения через мнимую ось. Устойчивый фокус имеет место при $\mu < 0$. На переходе μ через нуль фокус в начале координат теряет устойчивость. При $\mu = 0$ в начале координат также устойчивый фокус, но негрубый: фазовые кривые приближаются к нулю не экспоненциально.

При $\mu > 0$ фазовые кривые, отойдя от фокуса на расстояние, пропорциональное $\mu^{\frac{1}{2}}$, наматываются на устойчивый предельный цикл. То есть, потеря устойчивости при перемене знака μ происходит с рождением устойчивого предельного цикла, радиус которого растет как $\mu^{\frac{1}{2}}$.

Таким образом, стационарное состояние теряет устойчивость и возникает устойчивый периодический режим в направлении $\mu > 0$, амплитуда которого пропорциональна квадратному корню из отклонения параметра от критического значения. Соответствующее возбуждение автоколебаний называется мягким.

Для найденного предельного цикла нетрудно получить явные выражения его основных характеристик согласно методике [37]:

где $P = P(t)$ – цена товара;

$Y^D = Y^D(P)$ – объем спроса;

$Y^S = Y^S(P)$ – объем предложения;

$m > 0$ – постоянная времени переходного процесса;

t – время.

Знак величины $\Delta Y = Y^D - Y^S$, именуемой объемом избыточного спроса, задает направление изменения цены. Очевидно, что при $\Delta Y > 0$ происходит рост рыночной цены, а при $\Delta Y < 0$ – падение. Условием существования равновесной цены P_E является существование решения уравнения

$$Y^D(P_E) - Y^S(P_E) = 0. \quad (1.2)$$

Существует также и другой подход к исследуемой проблеме, связанный с именем А. Маршалла. Суть его состоит в том, что изменение объема товарной массы на данном рынке определяется влиянием различия между ценой спроса и ценой предложения, на что продавцы (или производители продукции) реагируют увеличением или уменьшением объема предложения товара. Данное утверждение в математической форме выражается с помощью следующего дифференциального уравнения

$$\frac{dY}{dt} = n(P^D(Y) - P^S(Y)), \quad (1.3)$$

где $Y = Y(t)$ – величина объема товара;

$P^D(Y)$ – цена спроса;

$P^S(Y)$ – цена предложения;

$n > 0$ – временная постоянная.

В уравнении (1.3) превышение цены спроса над ценой предложения стимулирует увеличение Y , а если цена предложения больше цены спроса, то происходит снижение величины Y . Равновесное значение объема товара Y_E определяется из уравнения

$$P^D(Y) - P^S(Y) = 0. \quad (1.4)$$

Алгебраические уравнения (1.2) и (1.4) могут иметь одно или несколько решений. Это означает, что возможны как единственное положение равновесия, так и их множество. Очевидно, что неединственность равновесных значений объема и цены товара объясняется наличием нелинейных зависимостей в базовых уравнениях.

Важной задачей является анализ устойчивости имеющихся положений равновесия. Необходимо уяснить причины, по которым равновесный объем рынка остается постоянным при некоторых, не выходящих за определенные значения, флуктуациях цены или, с другой стороны, почему при заданном уровне равновесной цены имеют место также изменения объема товара. В дальнейшем под устойчивостью равновесия будем понимать способность рынка, выведенного из положения равновесия, вновь возвратиться в исходное состояние благодаря действию эндогенных факторов. Кроме того, задача устойчивости рыночного равновесия напрямую связана с проблемой необходимости применения дополнительных мер для регулирования рыночных отношений.

Прежде всего, рассмотрим задачу устойчивости экономической модели (1.1), описываемую теорией Л. Вальраса. Положим в уравнении (1.1) коэффициент $m = 1$. В окрестности точки равновесия $P = P_E$, найденной решением уравнения (1.2), можно приближенно представить функции спроса $Y^D(P)$ и предложения $Y^S(P)$ в форме полиномов, полученных в результате усечения соответствующих рядов Тейлора

$$Y^D(P) \approx \sum_{i=0}^k \frac{d_i}{i!} (P - P_E)^i, \quad Y^S(P) \approx \sum_{i=0}^k \frac{S_i}{i!} (P - P_E)^i, \quad (1.5)$$

$$d_i = \frac{d^i Y^D(P_E)}{dP^i}, \quad S_i = \frac{d^i Y^S(P_E)}{dP^i}, \quad i = \overline{0, k}.$$

Если ввести новую переменную $x = P - P_E$, являющуюся отклонением цены от равновесного значения, то уравнение (1.1) примет вид

$$\dot{x} = F_k(x), \quad (1.6)$$

Понижим порядок системы дифференциальных уравнений посредством введения новых координат

$$z = y_1 + iy_2, \quad \bar{z} = y_1 - iy_2, \quad v = y_3.$$

Тогда (4.32) получит иное представление

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega z + G(z, \bar{z}, v), \\ \dot{v} &= -a_1 v + H(z, \bar{z}, v), \\ G(z, \bar{z}, v) &= F_1(z, \bar{z}, v) + iF_2(z, \bar{z}, v), \quad H(z, \bar{z}, v) = F_3(z, \bar{z}, v). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Для детального анализа основных характеристик предельного цикла воспользуемся методом центрального многообразия, получая зависимость

$$v = W(z, \bar{z}) = w_{20} \frac{z^2}{2} + w_{11} z \bar{z} + w_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + O(|z|^3), \quad (4.34)$$

где

$$\begin{aligned} w_{20} &= (a_1 + 2i\omega)^{-1} h_{20}, \quad w_{11} = a_1^{-1} h_{11}, \quad w_{02} = (a_1 - 2i\omega)^{-1} h_{02}, \\ h_{ij} &= \frac{\partial^{i+j}}{\partial z^i \partial \bar{z}^j} H(z, \bar{z}, 0), \quad i + j = 2. \end{aligned}$$

В результате подстановки в (4.33) формул (4.34) и выполнения необходимых преобразований получим

$$\dot{z} = i\omega z + G_{20} \frac{z^2}{2} + G_{11} z \bar{z} + G_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + G_{12} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \dots, \quad (4.35)$$

где

$$\begin{aligned} G_{20} &= -G_{02} = \frac{(A_2 - iA_1)a_1}{2\omega}, \quad G_{11} = 0, \\ G_{21} &= \frac{-a_1(b_0 - a_1 b_1)(\omega(2b_0 - a_1 b_1) + i(a_1 b_0 + 2b_1 \omega^2))}{8\omega b_0^2(\omega^2 + a_1^2)(4\omega^2 + a_1^2)}. \end{aligned}$$

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + (\omega^2 + b_1\mu)\lambda + b_0\mu + a_1\omega^2 = 0. \quad (4.30)$$

Если $\mu = 0$, то (4.2.9) имеет вышеупомянутое решение

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad \lambda_3 = -a_1 (\operatorname{Re}\lambda_{1,2} > \operatorname{Re}\lambda_3).$$

Продифференцируем по параметру μ уравнение (4.30). При $\mu = 0$ получим

$$\lambda'(0) = \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{(b_0 - a_1b_1)\omega + i(a_1b_0 + b_1\omega^2)}{2\omega(\omega^2 + a_1^2)},$$

или

$$\operatorname{Re}\lambda'(0) = \frac{b_0 - a_1b_1}{2\omega(\omega^2 + a_1^2)}, \quad \operatorname{Im}\lambda'(0) = \frac{a_1b_0 + b_1\omega^2}{2\omega(\omega^2 + a_1^2)}. \quad (4.31)$$

Таким образом, все условия теоремы Хопфа выполнены и можно утверждать, что имеет место бифуркация рождения цикла из сложного фокуса.

С помощью замены переменных

$$x_1 = \frac{a_1}{b_0}y_1 + \frac{\omega^2}{b_0}y_3, \quad x_2 = \frac{y_2}{\omega} + y_3, \quad x_3 = y_1 - a_1y_3$$

преобразуем систему нелинейных дифференциальных уравнений (4.28) к виду, удобному для построения нормальной формы Пуанкаре. В результате трансформации будем иметь ($\mu = 0$)

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= -\omega y_2 + F_1(y_1, y_2, y_3), \\ \dot{y}_2 &= \omega y_1 + F_2(y_1, y_2, y_3), \\ \dot{y}_3 &= -a_1 y_3 + F_3(y_1, y_2, y_3), \end{aligned} \quad (4.32)$$

где

$$F_i(y_1, y_2, y_3) = A_i \varphi(y_1, y_2, y_3), \quad i = \overline{1, 3};$$

$$\varphi(y_1, y_2, y_3) = \frac{a_1}{b_0\omega}y_1y_2 + \frac{a_1}{b_0}y_1y_3 + \frac{\omega}{b_0}y_2y_3 + \frac{\omega^2}{b_0}y_3^2;$$

$$A_1 = -2\omega \operatorname{Im}\lambda'(0), \quad A_2 = 2\omega \operatorname{Re}\lambda'(0), \quad A_3 = -2\operatorname{Re}\lambda'(0).$$

где $\dot{x} = \frac{dx}{dt}$, $F_k(x) = \sum_{i=0}^k \frac{a_i}{i!} x^i$, $a_i = d_i - S_i$. Отметим, что из (1.2) следует $a_0 = 0$, т. к. $d_0 = S_0 = Y_E$ – равновесному значению объема рынка. При этом $x = 0$ есть стационарная точка (положение равновесия) для уравнения (1.6).

Дифференциальное уравнение (1.6) называется динамической системой первого порядка. Фазовое пространство рассматриваемой системы одномерно, поэтому исследуемый процесс изменения цены можно представить движением изображающей точки на фазовой прямой [8].

В самом общем случае основными элементами, которые полностью определяют разбиение фазовой прямой на траектории, служат состояния равновесия системы. Значения $x = x_j$, обращающие функцию $F_k(x)$ в нуль, представляют собой самостоятельные фазовые траектории. Остальные траектории состоят из отрезков прямой, заключенных между корнями уравнения $F_k(x) = 0$, или из полупрямых, образующих интервалы между одним из корней и бесконечностью. Направление движения изображающей точки по этим траекториям определяет знак функции $F_k(x)$: при $F_k(x) > 0$ изображающая точка движется вправо, а при $F_k(x) < 0$ – влево. Если известен вид кривой $z = F_k(x)$, нетрудно установить конкретное разбиение фазовой прямой на траектории.

Пример такого разбиения приведен на рис. 1.1, где стрелками указано направление движения изображающей точки. Из структуры разбиения фазовой прямой на траектории непосредственно следует, что состояния равновесия системы в точках x_1, x_4 являются устойчивыми, а в точках x_2, x_3, x_5 – неустойчивым. Из рис. 1.1 непосредственно видно, что в устойчивых состояниях равновесия производная $F'_k(x_j) < 0$, а в неустойчивых состояниях $F'_k(x_j) > 0$. Значение $F'(x_k) = 0$ может быть как в точках устойчивого, так и неустойчивого состояния равновесия. (Данная ситуация заслуживает самостоятельного изучения, т. к. требует некоторых дополнительных условий для определения типа устойчивости стационарной точки.)

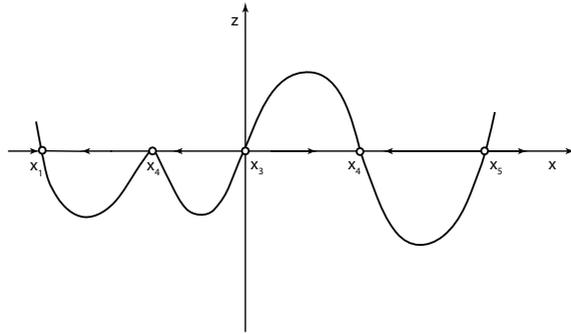


Рис. 1.1. Зависимость функции избыточного спроса от отклонения цены

Поскольку характер изменения переменной в системе первого порядка (1.6) полностью определяется явным видом функции $F_k(x)$, представляет интерес рассмотреть случаи для различных значений порядка полинома k .

Пусть $k = 1$, тогда $F_1(x) = a_1x$, – линейная функция и имеется единственное положение равновесия $x_E = 0$. Условие устойчивости в таком случае $F_1'(0) = a_1 < 0$. Данное неравенство сводится к соотношению $d_1 < S_1$, которое и является классическим условием устойчивости Л. Вальраса.

Предпримем попытку интерпретировать линейную устойчивость по Л. Вальрасу, воспользовавшись понятиями эластичности функции спроса и предложения по цене.

По определению эластичности в наших обозначениях будем иметь

$$\eta_D = \frac{d_1 P_E}{d_0}, \quad \eta_S = \frac{S_1 P_E}{S_0}$$

или с учетом $d_0 = S_0 = Y_E$ получаем

$$\eta_D = \frac{d_1 P_E}{Y_E}, \quad \eta_S = \frac{S_1 P_E}{Y_E}, \quad (1.7)$$

где η_D, η_S – коэффициенты эластичности спроса и предложения по цене, являющиеся безразмерными, т. е. относительными величинами.

Наличие пары чисто мнимых собственных значений в спектре линейной части интегро-дифференциального уравнения (4.24) свидетельствует о возможности возникновения режима автоколебаний, т. е. наличия предельного цикла в результате бифуркации Андронова – Хопфа.

С целью преобразования интегро-дифференциального уравнения (4.24) к виду системы нелинейных дифференциальных уравнений сделаем замену переменных $x_1 = y, x_2 = u_0 - r, x_3 = \dot{u}_0$. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений третьего порядка

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -rx_2 - x_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_3, \\ \dot{x}_3 &= b_0x_1 - (a_0 + b_1r)x_2 - a_1x_3 - b_1x_1x_2. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Далее продемонстрируем приложение бифуркационной теоремы Хопфа к системе автономных дифференциальных уравнений (4.28).

Прежде всего следует определиться с выбором бифуркационного параметра в системе (4.28), при критическом значении которого могут существовать чисто мнимые собственные значения, т. е. вещественная часть которых равна нулю ($\text{Re}\lambda_{1,2} = 0$), а мнимая часть отлична от нуля ($\text{Im}\lambda_{1,2} = \pm\omega$). Удобно в качестве бифуркационного взять параметр r и исследовать свойства (4.28) в малой окрестности критического значения $r_0 = \frac{a_1a_0}{b_0 - a_1b_1}$. Иначе говоря, рассматривается значение $r = r_0 + \mu$, где μ – малая величина. При этом частота собственных колебаний системы (4.28) в линейном приближении определяется при помощи выражения

$$\omega^2 = \frac{a_0b_0}{b_0 - a_1b_1} = \frac{b_0r_0}{a_1} \quad (\mu = 0). \quad (4.29)$$

В новых обозначениях характеристическое уравнение (4.26) примет вид

Характеристическое уравнение линейной части (4.24) имеет вид

$$\lambda + rQ_n(\lambda) = 0, \quad (4.25)$$

где $Q_n(\lambda)$ – определяется формулой (4.23).

Рассмотрим самый простой случай – $n=1$, $Q_1(\lambda) = \frac{b_0}{\lambda + a_0}$. Для выполнения условий нормировки необходимо $b_0, a_0 > 0$. Тогда (4.25) представим в форме квадратного уравнения

$$\lambda^2 + a_0\lambda + rb_0 = 0.$$

Очевидно, что при $a_0^2 \geq 4rb_0$ положение равновесия $y^* = 0$ является устойчивым узлом. Если же справедливо $a_0^2 < 4rb_0$, то вблизи точки равновесия наблюдаются устойчивые колебания со скоростью затухания a_0 . Такой тип равновесия называется *устойчивым фокусом*. В данной системе переход от узла к фокусу не является бифуркационным, т. к. система устойчива.

Более интересная ситуация в смысле разнообразия динамического поведения имеет место при $n=2$. Тогда $Q_2(\lambda) = \frac{b_1\lambda + b_0}{\lambda^2 + a_1\lambda + a_0}$ и спектральное уравнение (4.25) преобразуется к форме кубического уравнения

$$\lambda^3 + a_1\lambda^2 + (a_0 + rb_1)\lambda + rb_0 = 0 \quad (4.26)$$

При выполнении соотношения между коэффициентами данного уравнения (4.26)

$$a_1(a_0 + rb_1) = rb_0 \quad (4.27)$$

получим решение $\lambda_{1,2} = \pm i\omega$, $\lambda_3 = -a_1$, где $\omega^2 = \frac{a_0b_0}{b_0 - a_1b_1}$, $r = \frac{a_1a_0}{b_0 - a_1b_1}$, $i^2 = -1$. Так как параметры ω и r – положительные числа, то коэффициенты $a_1, a_0, b_0 > 0$ и при этом $b_0 > a_1b_1$.

Поэтому неравенство $a_1 = d_1 - S_1 < 0$ легко преобразуется к виду

$$a_1 = \frac{Y_E}{P_E}(\eta_D - \eta_S) < 0, \quad (1.8)$$

Так как Y_E, P_E всегда положительны, то условие Л. Вальраса формулируется следующим образом: для устойчивости линейной системы (1.6) при $k=1$ требуется, чтобы эластичность объема предложения товара по цене превышала соответствующую эластичность спроса, т. е. $\eta_S > \eta_D$. Иначе говоря, если ввести величину $\eta = \eta_D - \eta_S$, условно названную эластичностью избыточного спроса по цене, то устойчивость (1.6) определяется знаком η : при $\eta < 0$ имеет место устойчивость, и наоборот, при $\eta > 0$ – неустойчивость.

Рассмотрим особенности поведения системы (1.6) в случае $k=2$. Здесь $F_2(x) = a_1x + \frac{a_2}{2}x^2$ является квадратичной функцией исходной переменной.

Уравнение $F_2(x) = 0$, или $a_1x + \frac{a_2}{2}x^2 = 0$, имеет два корня $x_E^1 = 0$ и $x_E^2 = -\frac{2a_1}{a_2}$. Для определения характера устойчивости каждой из

особых точек необходимо вычислить $F_2'(x_E)$.

В результате дифференцирования имеем

$$F_2'(x_E) = a_1 + a_2x_E. \quad (1.9)$$

Подстановка значений x_E^1 и x_E^2 в формулу (1.9) дает

$$F_2'(0) = a_1, \quad F_2'\left(-\frac{2a_1}{a_2}\right) = -a_1.$$

Отсюда очевидно, что устойчивость обоих положений равновесия полностью характеризуется знаком величины a_1 (или η).

В таком случае, если $a_1 > 0$, т. е. спрос более эластичен, чем предложение, положение равновесия $x_E^1 = 0$ неустойчиво, а $x_E^2 = -\frac{2a_1}{a_2}$ устойчиво.

Обратно, при $a_1 < 0$ (спрос менее эластичен, чем предложение) x_E^1 является устойчивым положением равновесия, x_E^2 соответственно, неустойчивым.

В негрубой ситуации, когда a_1 – малая величина, меняющая свой знак в окрестности нуля, наблюдается так называемая *транскритическая бифуркация*, иллюстрирующая смену устойчивости положений равновесия, представленная рис. 1.2, при $a_2 < 0$.

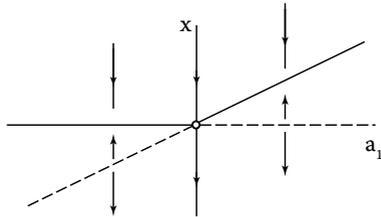


Рис. 1.2. Диаграмма транскритической бифуркации

В результате данной бифуркации особые точки x_E^1 и x_E^2 сливаются при $a_1 = 0$, т. е. при равенстве эластичностей спроса и предложения, в одно двукратное положение равновесия $x_E = 0$. При этом важным условием является $a_2 \neq 0$.

Здесь мы наблюдаем существенные отличия поведенческих свойств нелинейной системы по сравнению с линейной моделью, выразившееся в наличии двух равновесных значений и трансформации их в одну точку равновесия вследствие транскритической бифуркации.

Представляется целесообразным придать содержательный экономический смысл коэффициенту при квадратичном члене a_2 в терминах эластичностей функций спроса и предложения. Для этого нам понадобятся дополнительно значения производных соответствующих эластичностей по цене в точке P_E . Опуская промежуточные выкладки, предъявим следующие выражения для величин d_2 и S_2 как функции от $\eta'_D, \eta'_S, \eta_D, \eta_S$

$Q(t)$ есть импульсная переходная функция линейной системы регулирования, на вход которой поступает сигнал $y_0(t)$. Выходом такой системы служит величина $u_0(t) = \int_{-\infty}^0 y_0(t+s)Q(-s)ds$, т. е. свертка функций $y_0(t)$ и $Q(t)$. Далее мы будем пользоваться операторным представлением $Q(t)$ в виде дробно-рациональной функции произвольного порядка

$$Q_n(\lambda) = \frac{b_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + b_1\lambda + b_0}{\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0} \quad (4.23)$$

и при этом соблюдать условие нормировки

$$\int_{-\infty}^0 Q_n(-s)ds = 1.$$

Нелинейное интегро-дифференциальное уравнение (4.22) имеет два положения равновесия

- 1) $y_0^* = 0$;
- 2) $y_0^* = r$.

Положение равновесия $y_0^* = 0$ не представляет практического интереса для нашего анализа, т. к. определяет полное отсутствие ВВП. Вторая особая точка $y_0^* = r$, характеризующая предел роста ВВП, является важнейшим экономическим показателем, и нашей задачей будет исследование динамических свойств процесса, описываемого интегро-дифференциальным уравнением (4.22), в окрестности данного положения равновесия.

Перепишем уравнение (4.22) для новой переменной $y = y_0 - r$, имеющий смысл отклонения величины объема производства от своего равновесного значения

$$\dot{y} = -r \int_{-\infty}^0 y(t+s)Q_n(-s)ds - y \int_{-\infty}^0 y(t+s)Q_n(-s)ds. \quad (4.24)$$

предъявляющих спрос на инновации. Темп экономического роста ускоряется, увеличивается занятость и наблюдается рост уровня жизни населения. К окончанию фазы оживления эти процессы достигают своего максимума, но в фазе стабильности при значительной массе дохода темпы роста падают, пока кризис не приведет к резкому падению темпов роста и сокращению валового внутреннего продукта (ВВП), существенному снижению инвестирования.

В монографии С. Ю. Глазьева [17] отмечается, что одновременно с ускорением экономического развития усиливается влияние противодействующих факторов (этот вывод сделан в результате многократных статистических измерений динамики ВВП для различных государств). В результате экономический рост либо стабилизируется, либо принимает циклический характер. Эти соображения иллюстрируются математической моделью, отражающей обратную связь между темпом экономического роста и величиной совокупного национального продукта на душу населения. При этом предполагается, что влияние противодействующих факторов усиливается с кумулятивным ростом ВВП. Другими словами, мы считаем, что скорость роста совокупного объема производства нового продукта зависит от средневзвешенного совокупного объема производства в прошлом, а не только от его объема в данный момент времени. В результате динамика объема производства может быть описана при помощи интегро-дифференциального уравнения

$$\dot{y}_0 = y_0 \left(r - \int_{-\infty}^0 y_0(t+s) Q(-s) ds \right), \quad (4.22)$$

где $y_0(t)$ – совокупный объем производства нового продукта;

$Q(t)$ – функция, характеризующая кумулятивный рост производства продукции;

$r > 0$ – параметр, имеющий смысл технологического предела роста производства.

Как правило, в качестве $Q(t)$ используется функция с соответствующим набором характерных времен запаздывания. Если пользоваться терминологией теории автоматического управления, то

$$\begin{aligned} d_2 &= \frac{Y_E}{P_E^2} (\eta'_D P_E - \eta_D + \eta_D^2), \\ S_2 &= \frac{Y_E}{P_E^2} (\eta'_S P_E - \eta_S + \eta_S^2). \end{aligned} \quad (1.10)$$

Вычитая из первого уравнения (1.10) второе получаем

$$a_2 = \frac{Y_E}{P_E^2} ((\eta'_D - \eta'_S) P_E + (\eta_D + \eta_S - 1)(\eta_D - \eta_S)),$$

или

$$a_2 = \frac{Y_E}{P_E^2} (\eta' P_E + (\eta_D + \eta_S - 1)\eta). \quad (1.11)$$

Примечательно, что зависимость коэффициента a_2 от эластичности избыточного спроса η и ее производной по цене η' является линейной функцией!

Исследуем случай, когда функция избыточного спроса в системе (1.6) является кубической. Это имеет место при $k = 3$ и, соответственно,

$$F_3(x) = a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_3}{6} x^3 \quad (a_3 \neq 0).$$

Кубическое уравнение $F_3(x)$ может иметь в зависимости от коэффициентов один или три действительные корня, а система (1.6) – одно или три положения равновесия.

По аналогии с предыдущим случаем устойчивость каждого положения равновесия определяется знаком $F'_3(x_E)$.

Пусть система (1.6) имеет представление

$$\dot{x} = a_1 x + \frac{a_2}{2} x^2 + \frac{a_3}{6} x^3. \quad (1.12)$$

Полагая малыми знакопеременными величинами параметры a_1 , a_2 , рассмотрим деформацию седло-узловой бифуркации с дополнительным вырождением в квадратичном слагаемом [4]. В случае седло-узел укороченная система при $a_1 = 0$, $a_2 = 0$ принимает вид

$$\dot{x} = \frac{a_3}{6} x^3. \quad (1.13)$$

Поразмыслив, можно прийти к выводу о существовании малых возмущений функции $\frac{a_3 x^3}{6}$, при которых система будет иметь одну или три гиперболические неподвижные точки (положения равновесия) вблизи $x_E = 0$, а также определенные «необычные» возмущения, при которых она будет иметь две неподвижные точки, одна из которых негиперболическа. Все перечисленные возможности можно учесть путем добавления членов более низких порядков. Данную деформацию принято представлять в виде уравнения

$$\dot{u} = \theta_1 + \theta_2 u + \frac{a_3}{6} u^3, \quad (1.14)$$

где $u = x + \frac{a_2}{a_3}$, $\theta_1 = \frac{a_2}{a_3} \left(\frac{a_2^2}{3a_3} - a_1 \right)$, $\theta_2 = a_1 - \frac{a_2^2}{2a_3}$.

Здесь θ_1, θ_2 также являются малыми величинами. Динамика данного одномерного векторного поля формируется, с точностью до топологической эквивалентности, его неподвижными точками и типами их устойчивости. Вообще говоря, математическая теория особенностей предоставляет средства для систематического изучения нулей семейств отображений, примером которого служит правая часть уравнения (1.14).

Найдем бифуркационное множество параметров на плоскости параметров θ_1, θ_2 путем приравнивания нулю правой части (1.14) и ее производной по переменной u :

$$\psi(u) = \theta_1 + \theta_2 u + \frac{a_3}{6} u^3 = 0, \quad (1.15)$$

$$\psi'(u) = \theta_2 + \frac{a_3}{2} u^2 = 0.$$

Исключая переменную u из обоих уравнений системы (1.15), получим такое бифуркационное множество

$$8\theta_2^3 + 9a_3\theta_1^2 = 0. \quad (1.16)$$

блюдаемых циклов разной длительности) и социогенетики (закономерностей наследственности, изменчивости и отбора в динамике технологических и социально-экономических систем);

- 2) существенно различаются по величине периода и интенсивности воздействия на экономику эволюционные циклы – среднесрочные, долгосрочные и сверхдолгосрочные. Инновационные колебания способствуют технологическим кризисам, сопровождающимся изменениями структуры инноваций. В начале сверхдолгосрочного цикла закладываются наиболее значимые эпохальные нововведения, кардинально меняющие раз в несколько столетий структуру экономики при формировании нового технологического способа производства. Полувековые циклы Кондратьева характеризуются базисными инновациями, определяющими конкурентоспособность продукции в рамках данного технологического уклада экономики. Среднесрочные циклы (длительностью 10 – 12 лет) вызываются изменениями преобладающих поколений техники, реализующихся в кластере базисных и в волне улучшающих нововведений. Таким образом, можно считать, что инновационно-технологические циклы различных периодов служат основой экономических циклов соответствующей длительности – среднесрочных (длительностью 10 – 12 лет), долгосрочных (Н. Д. Кондратьева) и сверхдолгосрочных (цивилизационных) [39].

Достаточно подробное описание фаз инновационного цикла и их использование для анализа динамической структуры экономики содержится в монографии [26]. Условно началом цикла будем считать снижение эффективности преобладающих поколений техники (технологий), ведущее к уменьшению темпов экономического роста, сокращению инвестиций, падению жизненного уровня значительной части населения. Это активизирует научную и инженерную деятельность в направлении получения новых технических решений.

Однако условия для их инновационного освоения генерируются лишь в конце фазы депрессии и в фазе оживления, когда происходит обновление основного капитала, увеличивается объем инвестиций,

претацией. В этом смысле функция качественной теории дифференциально-разностных уравнений несколько иная: она акцентирует внимание на поиске характерных черт явления в целом, на качественном прогнозировании его поведения. Автор ставил перед собой задачу определения неприводимых топологических структур, из которых состоит фазовый портрет системы. Прикладная часть состоит в сопоставлении этих структур фазового пространства изучаемым экономическим процессам совместно с проведением бифуркационного анализа. При этом пришлось бы учитывать свойства реального объекта, устанавливающие ограничения как на фазовые переменные, так и на параметры исходных уравнений [9].

4.2. Цикличность инновационных процессов

В настоящее время человечество занято поиском инновационных путей устойчивого развития цивилизации. Новая парадигма XXI века – концепция устойчивого развития – носит ярко выраженный системный синергетический характер. Под устойчивым развитием следует понимать синтез императивов экономической, экологической и социальной стабильных эволюций, реализующийся согласованно на глобальном, государственном и региональном уровнях, а, как известно, совместные согласованные действия и составляют сущность синергетического эффекта.

В данной работе под экономическим развитием будем полагать существенно нелинейный процесс, представляющий собой скачкообразные переходы из одного стационарного состояния в другое. В качестве фундаментальной основы экономического (инновационного) прогнозирования служат теория предвидения Н. Д. Кондратьева [24] и теория инноватики Й. Шумпетера [47], развитые современным российским экономистом Ю. Яковцом [38].

Основными теоретическими предпосылками для обоснования качественного прогнозирования являются следующие утверждения:

- 1) предсказание инновационной эволюции базируется на основе учета взаимодействия закономерностей статики (определяющей множественный равновесный баланс функционирования экономической системы), цикличной динамики (сочетание на-

Бифуркационная диаграмма системы (1.14) изображена на рис. 1.3 для случая $a_3 < 0$. В системе (1.14) смогут существовать одно или три грубых положения равновесия. Эти равновесия попарно сливаются на бифуркационных линиях G_1 и G_2 (формула (1.16)), образующих полукубическую параболу Нейля с началом в точке $A=(0, 0)$. Точка A соответствует слиянию всех трех положений равновесия в одно. Для значений параметров на плоскости θ_1, θ_2 , лежащих внутри параболы (область 2) в системе (1.14), имеются три положения равновесия (два устойчивых и одно неустойчивое между ними), а для лежащих «вне» (область 1) – одно (устойчивое) положение равновесия.

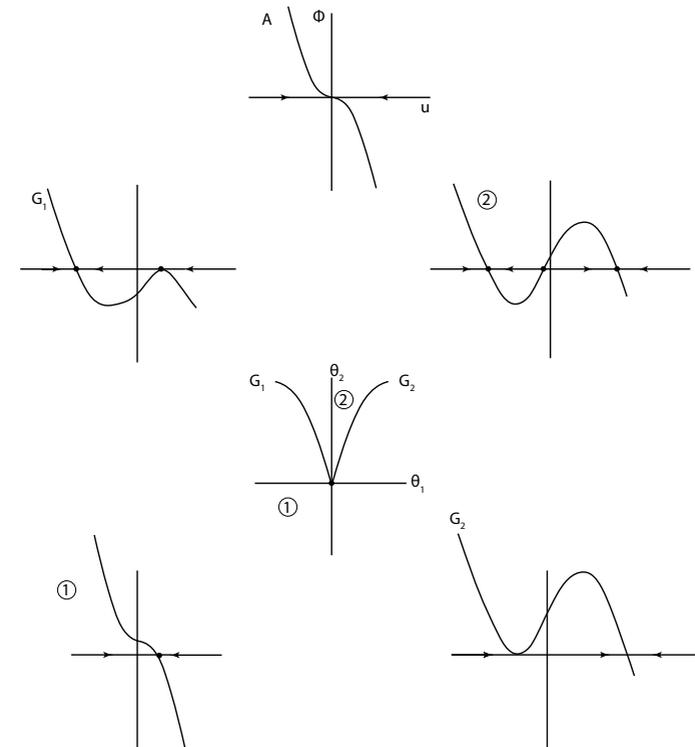


Рис. 1.3. Бифуркационная диаграмма для бифуркации «трехкратное равновесие»

Необходимо отметить, что при бифуркационных значениях параметров отображение проектирования многообразия $\psi(u, \theta_1, \theta_2) = 0$ на пространство параметров имеет особенность типа сборка. Динамическая система в окрестности данной бифуркации демонстрирует гистерезис. Будем менять параметры так, чтобы пересечь полукубическую параболу, следя за устойчивым равновесным режимом (рис. 1.3). Тогда при движении слева направо «срыв равновесия» произойдет на правой ветви G_2 , а при обратном движении – на левой G_1 . Это явление называют «петлей гистерезиса».

Из формулы (1.16) нетрудно получить явный вид бифуркационного множества в исходных параметрах a_1, a_2 . С помощью (1.14) и (1.16) выводим соотношение

$$8a_1a_3 = 3a_2^2. \quad (1.17)$$

А если учесть выражения для a_1 и a_2 в терминах эластичностей спроса и предложения по цене, используя (1.8) и (1.11), то имеем следующее выражение для бифуркационной линии

$$8P_E^3 a_3 \eta = 3Y_E (\eta' P_E + (\eta_D + \eta_S - 1)\eta)^2. \quad (1.18)$$

В равенстве (1.18) величина эластичности избыточного спроса η и ее производная по цене η' являются малыми величинами. Поэтому можно утверждать, что вышеуказанная бифуркация может быть наблюдаема в исходной динамической системе при очень близких значениях эластичностей спроса и предложения, а также их производных, т. е.

$$\eta_D \approx \eta_S, \quad \eta'_D \approx \eta'_S. \quad (1.19)$$

Такой тип поведения невозможно объяснить с помощью методов сравнительной статики, традиционно применяемых в экономическом анализе. Именно анализ динамики системы в окрестности положения равновесия показал, что поведение системы перестает характеризоваться однозначной и гладкой реакцией на малые сдвиги параметров. При этом возникают множественные состояния равновесия, в т. ч. кратные, и внезапные скачки, обусловленные неустойчивостью протекаемых процессов.

потери устойчивости положением равновесия вместе с неустойчивым колебательным режимом, садящимся на положение равновесия в момент потери устойчивости;

3) $C_2 > 0, \quad \varepsilon_2 < 0$. Потеря устойчивости мягкая, но рождающийся предельный цикл быстро умирает, слившись с пришедшим издали неустойчивым, после чего в системе жестко возбуждается новый режим;

4) $C_2 > 0, \quad \varepsilon_2 > 0$. Классическое жесткое возбуждение.

Следовательно, каким бы ни был знак $C_2(0)$, при соответствующем знаке ε_2 наш анализ описывает качественно иное по сравнению с однопараметрическим анализом явление: при $C_2(0) < 0$ существует установившийся при жестком возбуждении режим, а при $C_2(0) > 0$ обнаруживается недолговечность мягко возбужденного режима. Чтобы установить, какой из двух случаев ($C_2 < 0$ или $C_2 > 0$) на самом деле имеет место, необходимо провести кропотливые вычисления второй ляпуновской величины, что само по себе является хорошим упражнением на символные преобразования.

Таким образом, в результате проведенного исследования динамических свойств дифференциально-разностного уравнения (4.4) в малой окрестности границ области локальной устойчивости можно сделать вывод о наличии бифуркаций коразмерности два (что само по себе является фактом, далеким от тривиальности):

1) на левой границе ($\eta_X + \eta_M = 1$) существует бифуркация «острие клюва»;

2) на правой границе $\left(\eta_X + \eta_M = 1 + \frac{Y\pi}{2X_0V\tau} \right)$ имеет место бифуркация предельного цикла Баутина.

В заключение отметим, что с применением математических методов к анализу конкретных объектов связывают получение численного результата с соответствующей содержательной интер-

ющий режим возникновения автоколебаний называется мягким. Если же оказывается справедливым условие $\gamma < \gamma_0$, то имеет место неустойчивый предельный цикл. Потеря устойчивости с возникновением автоколебаний происходит жестко, т. е. возможен резкий срыв (скачок) в новый стационарный режим. В реальной системе при таком способе потери устойчивости происходит катастрофа.

Наиболее сложным поведением исходной системы (4.17) характеризуется ситуация, когда параметр γ близок к своему критическому значению γ_0 , т. е. величина $\xi = \gamma - \gamma_0$ является малой. В данном случае возможно наблюдать в исследуемой системе так называемую бифуркацию Баутина [37], при которой могут сосуществовать устойчивый и неустойчивый предельные циклы.

Для анализа качественных свойств вышеназванной бифуркации необходимо иметь разложение правой части (4.19) в ряд Тейлора до пятого порядка включительно и далее при помощи метода центрального многообразия выполнить сведение функционального уравнения к комплексному дифференциальному уравнению, содержащему нелинейные слагаемые до пятой степени, необходимые для вычисления второй ляпуновской величины $C_2(0) \neq 0$.

В таком случае комплексное дифференциальное уравнение представим в форме

$$\dot{Z} = Z(i\omega + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 Z \bar{Z} + C_2 Z^2 \bar{Z}^2),$$

где $\varepsilon_1 = \varepsilon_1(\mu)$, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\xi)$.

В зависимости от знаков $\varepsilon_1, \varepsilon_2, C_2$ возможны следующие сценарии:

- 1) $C_2 < 0$, $\varepsilon_2 < 0$. При переходе ε_1 от отрицательных значений к положительным система мягко выходит на устойчивый автоколебательный режим;
- 2) $C_2 < 0$, $\varepsilon_2 > 0$. При переходе ε_1 от отрицательных значений к положительным система жестко выходит на устойчивый периодический автоколебательный режим, родившийся еще до

Аналогичным образом может быть выполнено исследование динамики процесса установления равновесного объема производства согласно концепции А. Маршалла, описываемого дифференциальным уравнением (1.3). Однако в данном случае, в отличие от модели Л. Вальраса, содержательными экономическими характеристиками при анализе устойчивости изучаемой динамической системы будут являться величины эластичностей цен спроса и предложения по объему производства.

Необходимо подчеркнуть, что приведенные выше результаты требуют более глубокого осмысления принципа соответствия П. Самуэльсона, справедливость которого зависела от предположения заведомой устойчивости экономической системы, где изменчивость носила плавный характер.

1.2. Модифицированная модель Вальраса – Маршалла

До сих пор мы рассматривали процессы изменений рыночной цены и объема производства товара как независимые, а математические модели (1.1) и (1.3) исследовались отдельно друг от друга. Поэтому далее, для изучения динамики модели некоторого производственного объекта, будет предпринята попытка сведения уравнений Вальраса и Маршалла в единую экономическую систему, в которой процессы выпуска продукции и формирования цены взаимозависимы [13].

Проблема ценообразования в производственно-экономических системах всегда была и остается актуальной как в теоретическом экономическом анализе, так и при решении конкретных практических задач предприятия. Важным, на наш взгляд, является синтез двух наиболее значимых факторов ценообразования. Так, с одной стороны, классическая теория рыночного ценообразования утверждает, что равновесная цена соответствует равенству спроса и предложения на товарном рынке. С другой стороны, из теории фирмы известно, что в случае производственного равновесия цена изготавливаемой предприятием продукции соответствует предельным издержкам производственного процесса. Таким образом, один подход трактует ценообразование с точки зрения потребителя, а второй – с позиций производителя. Однако реалии экономической жизни

свидетельствуют о том, что процессы изменения цен и объемов производства протекают одновременно и являются взаимозависимыми. Поэтому представляется целесообразным рассматривать совместно в рамках единой динамической системы рыночный механизм балансирования спроса и предложения и производственный процесс учета прибыли и затрат, согласно методологии, изложенной в работе [5].

В качестве базовой рассматривается математическая модель, описывающая динамику взаимодействия цен и объема производства (выпуска продукции)

$$\begin{aligned} \alpha \dot{P} &= D(P) - Y, \\ \beta \dot{Y} &= P - P_S(Y). \end{aligned} \quad (1.20)$$

где P – цена производимого и продаваемого продукта;

Y – объем продукта в натуральном выражении (рыночное предложение товара);

$D(P)$ – рыночный спрос на производимый продукт в натуральном выражении;

$P_S(Y)$ – цена предложения, равная предельным затратам производства, т. е. $P_S(Y) = C'(Y)$;

$C(Y)$ – производственные затраты (издержки);

α, β – постоянные положительные параметры, характеризующие характерные времена переходных процессов.

Первое уравнение системы двух обыкновенных дифференциальных уравнений (1.20) представляет собой классическую модель рыночного ценообразования в форме Л. Вальраса (или П. Самуэльсона). Оно базируется на схеме формирования цены, ищущей точку равновесия между спросом и предложением: при $D(P) > Y$ – цена увеличивается, а при противоположном знаке неравенства – уменьшается. Второе уравнение (1.20) описывает процесс установления равновесия между ценой спроса и предельными издержками по выпуску (ценой предложения). Здесь предполагается, что равновесие нарушено и необходимо регулировать объем производства: если

$$D = \frac{1 + i\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi^2}{4}}, \quad \bar{D} = \frac{1 - i\frac{\pi}{2}}{1 + \frac{\pi^2}{4}}.$$

Наличие конкретных значений коэффициентов нелинейной части уравнения (4.18) делает возможным использование формул [37] для определения устойчивости, направления рождения, периода и асимптотической формы периодических решений малой амплитуды предельного цикла, совершающего бифуркацию Андронова – Хопфа из стационарного состояния. С помощью (4.19), получим явное выражение первой ляпуновской величины

$$C_1(0) = \frac{\pi}{1 + \frac{\pi^2}{4}} \left\{ \frac{2}{5} - \frac{\pi}{2} \left(\frac{11}{5} + \frac{3\gamma\pi}{4} \right) - i \left(\frac{\pi}{5} + \frac{11}{5} + \frac{3\gamma\pi}{4} \right) \right\}. \quad (4.20)$$

Вещественная часть (4.20) отрицательна при

$$\gamma > \gamma_0 = \frac{16 - 44\pi}{15\pi^2} \approx -0,826... \quad (4.21)$$

Это означает, что предельный цикл будет устойчив, если $\gamma > \gamma_0$, и неустойчив при невыполнении условия (4.21). Для устойчивого предельного цикла получены выражения его основных характеристик:

$$1) \text{ амплитуда } - \varepsilon = \left(\frac{20\mu}{15\gamma\pi^2 + 44\pi - 16} \right)^{\frac{1}{2}};$$

$$2) \text{ период } - T_\varepsilon = 4 \left(1 + \frac{2}{5\pi} \varepsilon^2 \right);$$

3) асимптотическая форма периодического решения

$$u_\varepsilon(\bar{t}) = 2\varepsilon \cos\left(\frac{\pi \bar{t}}{2}\right) + 2\varepsilon^2 \left(\frac{2}{5} \sin(\pi \bar{t}) - \frac{1}{5} \cos(\pi \bar{t}) - 1 \right).$$

При этом цикл рождается в направлении $\mu > 0$, а появляющиеся периодические решения асимптотически устойчивы. Соответству-

Исходя из вышеизложенного, покажем, что уравнение (4.15) обладает семейством периодических решений $\bar{P}_\varepsilon(\bar{t})$ ($\varepsilon > 0$), где ε является мерой амплитуды $\max_{\bar{t}} |\bar{P}_\varepsilon(\bar{t})|$ и при этом ε достаточно мало.

Задача сводится к изучению бифуркации рождения (гибели) цикла в дифференциально-разностном уравнении (4.15). Для сведения данного функционального уравнения к комплексному дифференциальному уравнению воспользуемся методом центрального многообразия [37].

Уравнение (4.15) содержит большое число параметров, в связи с чем для упрощения дальнейшего исследования выполним замену переменной $\bar{P}_\varepsilon(\bar{t}) = -\frac{A_1}{A_2}u(\bar{t})$.

При $\mu = 0$ уравнение (4.15) примет вид

$$\frac{du(\bar{t})}{d\bar{t}} = -\frac{\pi}{2}(u(\bar{t}-1) + u^2(\bar{t}-1) + \gamma u^3(\bar{t}-1)), \quad (4.17)$$

где $\gamma = \frac{X_0 G_3}{G_2^2}$.

С помощью теоремы о центральном многообразии уравнение (4.17) приводится к дифференциальному уравнению для комплекснозначной переменной

$$\dot{Z} = \frac{i\pi}{2}Z + g_{20}\frac{Z^2}{2} + g_{11}Z\bar{Z} + g_{02}\frac{\bar{Z}^2}{2} + g_{21}\frac{Z^2\bar{Z}}{2} + \dots, \quad (4.18)$$

где $g_{20} = -g_{11} = g_{02} = \pi\bar{D}$,

$$g_{21} = 2\pi \left[\left(\frac{2-11i}{5} - i\frac{3\gamma\pi}{4} \right) \bar{D} + \frac{7}{3}D\bar{D} + i\bar{D}^2 \right], \quad (4.19)$$

$P > P_S(Y)$, то прибыль производителя $P \cdot Y - C(Y)$ возрастает при увеличении объема производства, в противном случае следует снижать производственную активность.

В основу построения модели заложены существенные упрощения. *Во-первых*, производство считается монопродуктовым. *Во-вторых*, рассматривается локальный рынок сбыта без конкуренции, когда все предложение продукта формируется одним производителем. Но, несмотря на вышеуказанные допущения, модель (1.20) допускает сложные типы поведения, и их анализу будет посвящено дальнейшее изложение.

Формальный анализ качественных свойств системы (1.20) следует начать с рассмотрения особых решений, характеризующих положения равновесия в экономической модели.

Полагая равными нулю левые части в (1.20), получим два уравнения связи между равновесными значениями цены P^* и объема Y^* :

$$\begin{aligned} D(P^*) &= Y^*, \\ P^* &= P_S(Y^*). \end{aligned} \quad (1.21)$$

Допустим, что система алгебраических уравнений (1.21) имеет, как минимум, одно положительное решение (P^*, Y^*) . Относительно величины спроса $D(P)$ отметим, что зависимость от цены является сугубо нелинейной функцией и существует тейлоровское разложение до третьей степени включительно в окрестности точки P^* :

$$D(P) = d_0 + d_1(P - P^*) + d_2 \frac{(P - P^*)^2}{2} + d_3 \frac{(P - P^*)^3}{6} + O(|P - P^*|^4),$$

где $d_i = \frac{d^i D(P^*)}{dP^i}$, $i = 0, 3$.

Функцию затрат (издержек) представим в виде квадратичной функции от объема выпуска

$$C(Y) = S_1 \frac{Y^2}{2} + S_0 Y + C_0,$$

где S_1, S_0, C_0 – постоянные параметры.

Соответственно, предельные издержки (цена предложения) описываются формулой

$$C'(Y) = P_S(Y) = S_1 Y + S_0.$$

Тогда система уравнений (1.21) может быть представлена следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1 D(P^*) + S_0 - P^* &= 0, \\ Y^* &= \frac{P^* - S_0}{S_1}. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Представляется удобным исследовать систему (1.20) в новых переменных, являющихся отклонениями от равновесных значений $\tilde{P} = P - P^*$, $\tilde{Y} = Y - Y^*$, предварительно изменив масштаб времени. В таком случае система (1.20) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{P}} &= d_1 \tilde{P} + d_2 \frac{\tilde{P}^2}{2} + d_3 \frac{\tilde{P}^3}{6} - \tilde{Y}, \\ \dot{\tilde{Y}} &= \gamma(\tilde{P} - S_1 \tilde{Y}), \end{aligned} \quad (1.23)$$

где $\gamma = \frac{\alpha}{\beta}$.

Очевидно, что в (1.23) имеется тривиальное положение равновесия $\tilde{P} = 0$, $\tilde{Y} = 0$.

Для устойчивости тривиального равновесного значения выпишем явное выражение для характеристического уравнения линейной части системы (1.23)

$$\lambda^2 + (\gamma S_1 - d_1)\lambda + \gamma(1 - d_1 S_1) = 0 \quad (1.24)$$

Квадратное уравнение (1.24) имеет отрицательные вещественные части в случае выполнения условий

$$\begin{aligned} \gamma S_1 &< d_1, \\ S_1 d_1 &< 1. \end{aligned} \quad (1.25)$$

Далее проясним ситуацию, когда сумма эластичностей $\eta_X + \eta_M$ близка к значению на правой границе неравенства (4.10). Введем в рассмотрение малый параметр $\mu = -\left(A_1 + \frac{\pi}{2}\right)$. Тогда дифференциально-разностное уравнение (4.6) допускает трансформацию

$$\frac{d\bar{P}(t)}{d\bar{t}} = -\left(\mu + \frac{\pi}{2}\right)\bar{P}(\bar{t}-1) + A_2 \bar{P}^2(\bar{t}-1) + A_3 \bar{P}^3(\bar{t}-1). \quad (4.15)$$

Характеристическое уравнение для линейной части (4.1.15) запишется так

$$\lambda + \left(\mu + \frac{\pi}{2}\right)e^{-\lambda} = 0. \quad (4.16)$$

Определим, когда это уравнение имеет пару чисто мнимых корней $\lambda = \pm i\omega$, $i^2 = -1$, $\omega > 0$.

Если $\lambda = \pm i\omega$, то справедливы условия

$$\left(\mu + \frac{\pi}{2}\right)\cos\omega = 0, \quad \omega - \left(\mu + \frac{\pi}{2}\right)\sin\omega = 0.$$

Отсюда следует, что при $\mu = 0$ уравнение (4.16) имеет пару чисто мнимых корней при $\omega = \frac{\pi}{2}$. Нетрудно показать, что (4.16) не имеет корней с положительными вещественными частями.

Так как λ аналитично по μ , то дифференцирование (4.16) дает при $\mu = 0$

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mu} = \frac{\frac{\pi}{2} + i}{\frac{\pi^2}{4} + 1}.$$

Таким образом, все условия теоремы Хопфа о существовании периодических решений выполнены, так как вещественная часть производной собственного числа по параметру не равна нулю.

Кривая R называется полукубической параболой и имеет две ветви R_1, R_2 , которые встречаются касательно в точке «острие клюва» (каспоидная бифуркация) при $\beta_1 = \beta_2 = 0$. На рис. 4.1 представлена соответствующая бифуркационная диаграмма

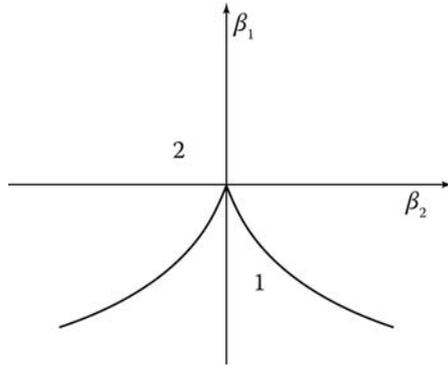


Рис. 4.1. Диаграмма бифуркации «острие клюва»

В регионе 1, перед граничной линией, имеется три положения равновесия: два устойчивые и одно неустойчивое. В регионе 2, за разделительной линией, существует единственное положение равновесия, которое является устойчивым. Невырожденная бифуркация «складка» имеет место при пересечении R_1 или R_2 в любой точке плоскости параметров β_1, β_2 , отличной от начала координат. Если кривая пересечена из региона 1 в регион 2, правое устойчивое положение равновесия сливается с неустойчивым и оба исчезают. Аналогично, левое устойчивое положение равновесия соединяется с неустойчивым на линии R_2 .

При подходе к точке «острие клюва» перед регионом 1 все три равновесных состояния сливаются вместе как тройной корень правой части исходного уравнения (4.14). Существенным также является факт, что при переходе от устойчивого режима к неустойчивому в (4.14) наблюдается явление гистерезиса и имеет место катастрофа [46]. Случай $S = 1$ может быть рассмотрен аналогично.

Неравенства (1.25) определяют ограничения на параметры исходной системы для устойчивости в линейном приближении.

Рассмотрим более детально ситуацию вблизи границы области устойчивости, исходя из выполнения равенства

$$\gamma C_1 = d_1 - \mu, \quad (1.26)$$

где μ – малая знакпеременная величина. Очевидно, что в таком случае дивергенция векторного поля системы (1.23) равна малому параметру μ . Поэтому тип особой точки (положения равновесия) при $\mu < 0$ является устойчивым фокусом, а при $\mu > 0$, соответственно, неустойчивым фокусом. Другими словами, при $\mu = 0$ в окрестности положения равновесия происходит смена устойчивости фокуса и возможно рождение (гибель) предельного цикла в результате бифуркации Хопфа.

Проверим справедливость условий теоремы Хопфа применительно к системе (1.23). Собственные значения определяются равенством (при $\mu = 0$)

$$\lambda_{1,2} = \pm i\omega, \quad (1.27)$$

где $i^2 = -1, \omega^2 = \gamma - d_1^2$, т. е. являются чисто мнимыми. Если подставить (1.26) в квадратное уравнение (1.24) и продифференцировать по параметру μ , то получим при $\mu = 0$

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \lambda'(0) = \frac{1}{2} - i \frac{d_1}{2\omega}. \quad (1.28)$$

Из (1.28) следует, что вещественная часть производной собственного числа по параметру не равна нулю, т. е. собственные числа на комплексной плоскости пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью. В итоге, все условия бифуркационной теоремы Хопфа выполнены.

Возвратимся еще раз к равенству (1.26), чтобы дать ему содержательную интерпретацию.

Вышеназванное условие может быть выполнено, если параметры d_1 и S_1 имеют одинаковые знаки. Так как в качестве бифуркационного параметра далее будет фигурировать значение $S_1 = C''(Y)$,

то его положительность характеризует вогнутость функции издержек $C(Y)$, а отрицательность, соответственно, выпуклость. С экономической точки зрения $S_1 < 0$ определяет позитивный эффект масштаба производства ($C''(Y) < 0$), а $S_1 > 0$ означает, что рост издержек опережает выпуск продукции ($C''(Y) > 0$), т. е. имеет место ресурсоемкое производство.

С целью определения необходимых параметров предельного цикла, характеризующих его устойчивость и структуру периодических решений, трансформируем систему дифференциальных уравнений (1.23) к виду нормальной формы Пуанкаре путем соответствующей замены переменных $\tilde{P} = x_1, \tilde{Y} = d_1 x_1 + \omega x_2$. В результате преобразований получим при $\mu = 0$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega x_2 + \frac{d_2 x_1^2}{2} + \frac{d_3 x_1^3}{6}, \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 - \frac{d_1 d_2 x_1^2}{\omega} - \frac{d_1 d_3 x_1^3}{\omega} - \frac{d_1^2 x_1^2}{6}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Располагая явным видом коэффициентов при нелинейных слагаемых системы (1.29), получим выражение для первой ляпуновской величины

$$l_1(0) = \frac{d_3(\gamma - d_1^2) + d_2^2 d_1}{16(\gamma - d_1^2)}. \quad (1.30)$$

При $l_1(0) < 0$ имеет место устойчивый предельный цикл, а соответствующий режим автоколебаний называется «мягким». Наоборот, если же $l_1(0) > 0$, то предельный цикл является неустойчивым, автоколебания срываются «жестко» с проявлением необратимости (гистерезис). Случай $l_1(0) = 0$ является самым сложным в смысле разнообразия структур фазовой плоскости системы (1.29), т. к. возможно одновременное сосуществование двух предельных циклов (один из которых устойчивый, а другой неустойчивый) с последующим их слиянием в один кратный предельный цикл. Данная бифуркация обладает коразмерностью два и в данном разделе не будет подробно исследована.

$$\frac{d\bar{P}}{d\bar{t}} = A_1 \bar{P}(\bar{t}) + A_2 \bar{P}^2(\bar{t}) + A_3 \bar{P}^3(\bar{t}) \quad (4.12)$$

в окрестности $\bar{P} = 0$.

Посредством линейной замены переменной $\tilde{P} = \bar{P} + \frac{A_2}{3A_3}$ уравнение (4.12) получает следующее представление

$$\frac{d\tilde{P}}{d\bar{t}} = \alpha_1 + \alpha_2 \tilde{P} + A_3 \tilde{P}^3, \quad (4.13)$$

$$\text{где } \alpha_1 = \frac{2A_2^3}{27A_3^2} - \frac{A_1 A_2}{3A_3}, \quad \alpha_2 = A_1 - \frac{A_2^2}{3A_3}.$$

Преобразование $\tilde{P}(\bar{t}) = |\beta| W(\bar{t})$ дает явный вид нормальной формы Пуанкаре для дифференциального уравнения (4.13)

$$\frac{dW}{d\bar{t}} = \beta_1 + \beta_2 W + S W^3, \quad (4.14)$$

$$\text{где } \beta = \frac{1}{\sqrt{A_3}}, \quad \beta_1 = \frac{\alpha_1}{|\beta|}, \quad \beta_2 = \alpha_2, \quad S = \text{sign} \beta = \pm 1.$$

Положим для определенности $S = -1$.

Уравнение (4.14) может иметь три положения равновесия. Бифуркация «складка» определяется кривой R на плоскости β_1, β_2 данной проекции линии

$$\bar{A}: \begin{cases} \beta_1 + \beta_2 V - V^3 = 0, \\ \beta_2 - 3V^2 = 0 \end{cases}$$

на плоскость параметров. Исключая V из этих уравнений, имеем проекцию

$$R = \{(\beta_1, \beta_2) : 4\beta_2^3 + 27\beta_1^2 = 0\}.$$

Таким образом, экономическая интерпретация условий локальной устойчивости состоит в том, что сумма эластичностей должна быть не только больше единицы, но и меньше, чем еще одно критическое значение. Другими словами, неустойчивость в исследуемой экономической модели может возникнуть не только, когда сумма эластичностей достаточно мала, но и в случае существенно большого значения данной суммы.

Исследуем поведенческие свойства исходной динамической системы (4.6) в малой окрестности граничных значений неравенства (4.10). В начале рассмотрим ситуацию потери устойчивости на нижней границе. Введем малый параметр $v_1 = 1 - \eta_X - \eta_M$.

В этом случае с изменением знака v_1 собственное значение линеаризованной задачи проходит через нуль, и стационарное значение P^* может не существовать либо расщепляться на несколько стационарных состояний. То есть имеет место бифуркация стационарных решений.

Дифференциально-разностное уравнение (4.6) может быть представлено следующим образом

$$\frac{d\bar{P}}{d\bar{t}} = A_1 \bar{P}(\bar{t}-1) + A_2 \bar{P}^2(\bar{t}-1) + A_3 \bar{P}^3(\bar{t}-1), \quad (4.11)$$

где $A_i = \frac{\tau V}{Y} G_i$, $i = 1, 3$.

Следует помнить, что величина A_1 является малой, т. е. $G_1 = X_0 v_1$. Дополнительно предположим, что и A_2 также будет малой, если ввести малую величину $v_2 = \frac{G_2}{X_0}$. Используя технику метода центрального многообразия [46], можно доказать, что дифференциально-разностное уравнение (4.11) при условии малости A_1 , A_2 и конечном времени запаздывания топологически эквивалентно дифференциальному уравнению

Само же периодическое решение малой амплитуды ε (с точностью до выбора начальной фазы) записывается в форме [37]

$$P(t) = P^* + x_1(t), \quad Y(t) = Y^* + d_1 x_1(t) + \omega x_2(t),$$

$$x_1(t) = \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{\varepsilon^2 d_2}{12\omega^2} \left[3d_1 - d_1 \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) + 2\omega \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right] + O(\varepsilon^3),$$

$$x_2(t) = \varepsilon \sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right) + \frac{\varepsilon^2 d_2}{12\omega^2} \left[3d_1 - \omega \cos\left(\frac{4\pi t}{T}\right) - 2d_1 \omega \sin\left(\frac{4\pi t}{T}\right) \right] + O(\varepsilon^3). \quad (1.31)$$

Здесь амплитуда $\varepsilon^2 = \frac{2(\gamma S_1 - d_1)}{l_1(0)}$; период цикла, зависящий, вообще говоря, от амплитуды $T(\varepsilon) = \frac{2\pi}{\omega} (1 + \tau_2 \varepsilon^2 + O(\varepsilon^3))$, $\tau_2 = \frac{d_2^2}{48\omega^2} \left(8 + 53 \frac{d_1^2}{\omega^2} \right)$.

Таким образом, на примере системы двух нелинейных дифференциальных уравнений (1.29) легко убедиться, что в отличие от линейной системы периодические решения не являются гармоническими, а период и амплитуда колебаний взаимосвязаны.

В качестве иллюстрации полученных результатов рассмотрим примеры производственно-экономических циклов для различных групп товаров по типам функций спроса от дохода, согласно классификации шведского экономиста Л. Торнквиста [36].

Пример 1. Функция спроса для товаров первой необходимости имеет представление

$$E = \frac{q_1 D}{D + C_1}$$

и отражает тот факт, что рост спроса на эти первоочередные товары с ростом дохода постепенно замедляется и имеет предел $q_1 > 0$. Параметр C_1 называется *константой полунасыщения дохода*.

Полагая равновесный доход функцией цены

$$E = PD(P),$$

выразим спрос в виде $D = D(P)$. После соответствующих преобразований получаем

$$D(P) = \frac{q_1 - C_1 P}{P}. \quad (1.32)$$

С помощью (1.22) и (1.32) выпишем уравнение для равновесной цены

$$(P^*)^2 - (S_0 - S_1 C_1) P^* - S_1 q_1 = 0. \quad (1.33)$$

Дифференцируя (1.32) по цене, получим коэффициенты функции спроса

$$d_1 = -\frac{q_1}{(P^*)^2}, \quad d_2 = \frac{2q_1}{(P^*)^3}, \quad d_3 = -\frac{6q_1}{(P^*)^4}. \quad (1.34)$$

Из (1.34) следует, что величины d_1, d_3 являются отрицательными числами и поэтому из (1.30) вытекает, что рождающийся предельный цикл устойчив. При этом причиной возникновения цикла служит факт позитивного влияния эффекта масштаба производства данной группы товаров, т. е. $S_1 < 0$.

Пример 2. Функция спроса для предметов роскоши представляется в форме

$$E = \frac{q_2 D(D - b_2)}{D + C_2}.$$

Аналогично примеру 1 выразим спрос в виде функции от цены

$$D(P) = \frac{C_2 P + q_2 b_2}{q_2 - P}, \quad (1.35)$$

где q_2, b_2, C_2 – положительные параметры.

Уравнение для цены равновесия имеет вид

$$(P^*)^2 - (q_2 + S_0 - S_1 C_2) P^* - q_2 (S_1 d + S_0) = 0. \quad (1.36)$$

Полагая, что (1.36) имеет по крайней мере один положительный корень P^* , вычислим коэффициенты при степенях P :

Анализ динамики процесса, описываемого (4.6), целесообразно начать с исследования условий локальной устойчивости, ограничившись только линейной частью, т. е.

$$\frac{d\bar{P}}{d\bar{t}} = \frac{\tau V}{Y} G_1 \bar{P}(\bar{t} - 1). \quad (4.7)$$

Характеристическое уравнение для (4.7) есть

$$\lambda - \frac{\tau V G_1}{Y} e^{-\lambda} = 0. \quad (4.8)$$

Воспользовавшись известными результатами из теории устойчивости дифференциально-разностных уравнений [43] применительно к уравнению (4.7), получим необходимые и достаточные условия линейной устойчивости

$$0 < -\frac{\tau V G_1}{Y} < \frac{\pi}{2}. \quad (4.9)$$

Из вида левой части двойного неравенства (4.9) следует, что величина G_1 является отрицательной, а в правой части формализовано значение верхней границы для модуля G_1 .

Условие (4.9) имеет достаточно прозрачную содержательную интерпретацию, для демонстрации которой выполним преобразование исходных параметров исследуемой модели (4.6).

Пусть $G_1 = X_0 [1 - \eta_X - \eta_M]$,

где $\eta_X = \frac{P^* X_1}{X_0}$, $\eta_M = \frac{P^* M_1}{M_0}$ при условии $P^* X_0 = P_M M_0$.

Величины η_X и η_M – эластичности функций экспорта и импорта по цене P . Так как $X_0 > 0$, условие $G_1 < 0$ равносильно $\eta_X + \eta_M > 1$, что соответствует так называемым условиям Маршалла – Лернера [41]. При этом условие (4.9) преобразуется к виду

$$1 < \eta_X + \eta_M < 1 + \frac{Y\pi}{2X_0 V\tau}. \quad (4.10)$$

$$\frac{dQ}{dt} = PX(P) - P_M M(P). \quad (4.2)$$

Из формулы (4.1) следует, что изменение предложения денег приводит к изменению внутренней цены $P = P(t)$. Будем полагать, что такое изменение происходит не мгновенно, то есть, имеет место запаздывание во времени, определяемое постоянной положительной величиной τ . В этом случае уравнение (4.1.1) запишется так

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{V}{Y} \frac{dQ(t-\tau)}{dt}. \quad (4.3)$$

Из (4.2) и (4.3) получается дифференциально-разностное уравнение, описывающее динамику внутренней цены

$$\frac{dP(t)}{dt} = \frac{V}{Y} \{P(t-\tau)X[P(t-\tau)] - P_M M[P(t-\tau)]\}. \quad (4.4)$$

Предположим, что функциям экспорта $X(P)$ и импорта $M(P)$ при- суща нелинейная зависимость от внутренней цены P и при этом до- пустимо их разложение в ряд Тейлора до третьей степени включи- тельно в окрестности положения равновесия P^* , т. е.

$$\begin{aligned} X(P) &= X_0 + X_1(P - P^*) + X_2(P - P^*)^2 + X_3(P - P^*)^3 + O(P^4), \\ M(P) &= M_0 + M_1(P - P^*) + M_2(P - P^*)^2 + M_3(P - P^*)^3 + O(P^4), \end{aligned} \quad (4.5)$$

где $X_i = \frac{\partial^i X(P^*)}{i! \partial P^i}$, $M_i = \frac{\partial^i M(P^*)}{i! \partial P^i}$, $i = \overline{0,3}$ соответствующие произ-

водные функций $X(P)$ и импорта $M(P)$ в точке равновесия P^* . Введем новую переменную величину $\bar{P}(t) = P(t) - P^*$, имеющую смысл откло- нения внутренней цены от равновесного значения. В этом случае уравнение (4.4) с учетом (4.5) преобразуется к виду

$$\frac{d\bar{P}}{d\bar{t}} = \frac{\tau V}{Y} \left[G_1 \bar{P}(\bar{t} - 1) + G_2 \bar{P}^2(\bar{t} - 1) + G_3 \bar{P}^3(\bar{t} - 1) + O(\bar{P}^4) \right], \quad (4.6)$$

где $\bar{t} = \tau t$, $G_i = X_{i-1} + P^* X_i - P_M M_i$, $i = \overline{1,3}$.

$$d_1 = \frac{q_2(b_2 + C_2)}{(q_2 - P^*)^2}, \quad d_2 = \frac{2q_2(b_2 + C_2)}{(q_2 - P^*)^3}, \quad d_3 = \frac{6q_2(b_2 + C_2)}{(q_2 - P^*)^4}. \quad (1.37)$$

В данном случае коэффициенты d_1 и d_3 положительные числа и подстановка их значений в (1.30) обеспечивает условие $l_1(0) > 0$, что свидетельствует о катастрофической потере устойчивости предель- ного цикла. Так как $d_1 > 0$, то для появления предельного цикла не- обходимо обеспечить $S_1 > 0$, что возможно лишь при ресурсоемком способе производства с опережающим ростом затрат.

Рассмотрим еще одну версию модели (1.20), предварительно полагая, что цена предложения P_S является нелинейной функцией объема производства. Для простоты будем считать, что величины P и Y есть отклонения от некоторых равновесных значений P^* и Y^* .

По поводу функции спроса $D(P)$ и цены предложения выдвинем предположение о квадратичной зависимости их от своих аргумен- тов, т. е.

$$\begin{aligned} D(P) &= d_2 \frac{P^2}{2} - d_1 P, \\ P_S(Y) &= S_2 \frac{Y^2}{2} - S_1 Y. \end{aligned}$$

Тогда система (1.20) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \dot{P} &= d_2 \frac{P^2}{2} - d_1 P - Y, \\ \dot{Y} &= b^2 (p + S_1 Y - S_2 \frac{Y^2}{2}). \end{aligned} \quad (1.38)$$

где $b^2 = \gamma$.

Можно утверждать, что линейный анализ устойчивости (1.38) полностью соответствует полученным ранее результатам для си- стемы (1.23), включая проверку условий справедливости теоремы Хопфа с точностью до замены параметра γ на b^2 . Поэтому, допус- кая близость бифуркационного параметра S_1 к величине $\frac{d_1}{b^2}$, пре-

образуем (1.38) к виду нормальной формы данной бифуркации с помощью замены переменных $x_1 = P$, $x_2 = \frac{Y - d_1 P}{\omega}$ ($\omega^2 = b^2 - d_1^2$). После преобразований и введения нового временного масштаба $\tau = \omega t$ получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + \frac{d_2}{\omega} \frac{x_1^2}{2}, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + \frac{d_1(d_2 - b^2 d_1 S_2)}{\omega^2} \frac{x_1^2}{2} + \frac{b^2 d_1 S_2}{\omega^2} x_1 x_2 - b^2 S_2 \frac{x_2^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Представим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (1.39) в форме дифференциального уравнения для комплексной переменной $Z = x_1 + ix_2$, $\bar{Z} = x_1 - ix_2$

$$\dot{Z} = iZ + g_{20} \frac{Z^2}{2} + g_{11} Z\bar{Z} + g_{02} \frac{\bar{Z}^2}{2}, \quad (1.40)$$

где $g_{11} = \frac{1}{4\omega} \left(d_2 + \frac{i}{\omega} (d_1 d_2 - b^4 S_2) \right);$

$$g_{20} = \frac{1}{4\omega} \left(d_2 + 2b^2 d_1 S_2 + \frac{i}{\omega} (d_1 d_2 + b^2 S_2 (b^2 - 2d_1^2)) \right);$$

$$g_{02} = \frac{1}{4\omega} \left(d_2 - 2b^2 d_1 S_2 + \frac{i}{\omega} (d_1 d_2 + b^2 S_2 (b^2 - 2d_1^2)) \right).$$

Теперь мы располагаем всей необходимой информацией для вычисления первой ляпуновской величины

$$l_1 = -\frac{1}{2} \text{Im } g_{20} g_{11}.$$

С учетом вида коэффициентов уравнения (1.40) имеем

$$l_1 = \frac{d_1}{16\omega^3} (b^6 S_2^2 - d_2^2). \quad (1.41)$$

- 2) уровень национального дохода считается заданным и ценовой показатель определяется на основе количественной теории денежного обращения;
- 3) в течение рассматриваемого периода изменения в предложении денежной массы обусловлены только избытком (или дефицитом) торгового баланса;
- 4) так как обменные валютные курсы предполагаются фиксированными, то можно считать их единичными, что эквивалентно полной унификации международных расчетов;
- 5) транспортные расходы, страховки и прочие издержки не учитываются ни для товарных, ни для финансовых потоков.

В дальнейшем изложении будут использованы следующие обозначения: Q – предложение денег; V – скорость денежного обращения (постоянная величина); Y – уровень национального дохода (постоянная величина); P – показатель внутренней цены; P_M – показатель внешней цены (постоянная величина); M – количество импорта; X – количество экспорта.

Основное уравнение модели Фишера имеет вид

$$QV = PY. \quad (4.1)$$

Объем экспорта является убывающей функцией внутренней цены

$$X = X(P), \quad \frac{\partial X}{\partial P} < 0,$$

а объем импорта, наоборот, служит возрастающей функцией внутренней цены

$$M = M(P), \quad \frac{\partial M}{\partial P} > 0.$$

Соотношение вида $P^* X(P^*) - P_M M(P^*) = 0$ характеризует условие равновесия торгового баланса и предполагается, что существуют положительные решения данного алгебраического уравнения, определяющие равновесные значения для внутренней цены P^* .

Нарушение равновесия сопровождается изменением предложения денежной массы и выражается при помощи уравнения

РАЗДЕЛ 4

ДИНАМИКА ЭКОНОМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Во многих моделях экономики необходимо учитывать запаздывания при составлении балансовых соотношений, учитывающих взаимодействия различного характера. В разделе 2 нам уже встречалась модель Гудвина, содержащая запаздывания двух типов: на стороне спроса на капиталовложения – отставание с фиксированной продолжительностью действия акселератора, а на стороне предложения имеет место непрерывно распределенное запаздывание. В настоящем разделе будет показано, как применять методы теории нелинейных колебаний на классе дифференциальных уравнений с запаздыванием и интегро-дифференциальных уравнений, которые могут иметь непрерывный спектр запаздываний.

4.1. Неустойчивость динамики цены в макроэкономическом уравнении Фишера

В современной экономической литературе имеется достаточно подробное качественное описание механизма формирования внутренних цен на товарную продукцию, основанное на анализе динамики финансовых потоков при осуществлении экспортно-импортных операций. При этом особое внимание уделяется такому значимому фактору, как показатель торгового баланса, избыток или дефицит которого определяет направление изменения цен.

Прежде чем рассматривать формализованную математическую модель динамики цены, базирующуюся на классическом макроэкономическом уравнении Фишера, необходимо выдвинуть ряд предположений [41]:

- 1) рассматривается схема свободной торговли без влияния правительств и монопольных структур;

Из (1.41) очевидно, что при $d_2^2 > b^6 S_2^2$ предельный цикл является устойчивым, а при $d_2^2 < b^6 S_2^2$ имеет место неустойчивость предельного цикла.

На рис. 1.4 показаны циклические изменения цены и объема товара в окрестности исследуемого положения равновесия при следующих значениях параметров системы (1.38):

$$b = 1; d_1 = 0,5; d_2 = 2; S_1 = 0,5; S_2 = 1,5.$$

Условие $d_2 = \pm b^3 S_2$ обращает в нуль выражение для первой ляпуновской величины. Это может означать, что в исходной системе (1.38) имеются два предельные цикла, которые могут соединиться в один двукратный цикл путем уплотнения траекторий. Такая ситуация возможна, если вторая ляпуновская величина l_2 отлична от нуля. Полагая для определенности $S_2 = \frac{d_2}{b^3}$, в результате вычислений получим $l_2 = 0$. Более того, l_3 – следующая третья ляпуновская величина – обращается при данных условиях также в нуль. Равенство нулю трех первых ляпуновских величин означает, что положение равновесия является центром, а не фокусом. То есть исходная диссипативная система (1.38) при

$$S_1 = \frac{d_1}{b^2}, \quad S_2 = \frac{d_2}{b^3} \quad (1.42)$$

превращается в консервативную с сохранением фазового объема.

Выпишем явный вид (1.38) исключая параметры S_1, S_2 с помощью формул (1.42)

$$\begin{aligned} \dot{P} &= d_2 \frac{P^2}{2} - d_1 P - Y, \\ \dot{Y} &= b^2 P + d_1 Y - \frac{d_1}{b} \frac{Y^2}{2}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

Для нас важным представляется найти первый интеграл системы (1.43). Для этого преобразуем переменные P и Y с помощью линейной замены

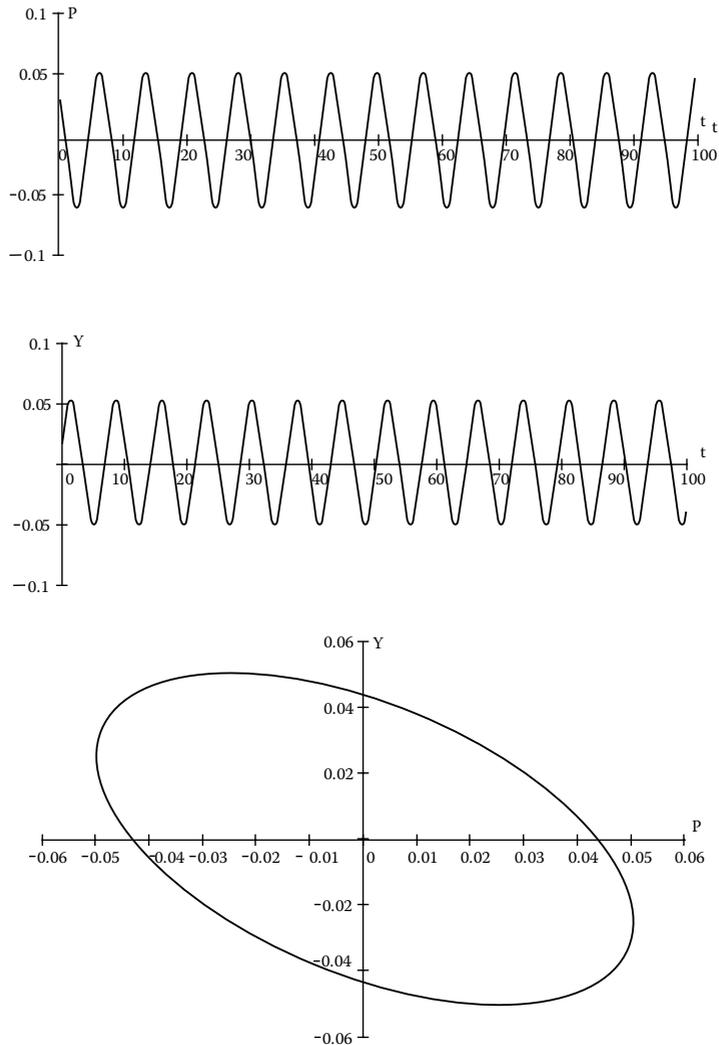


Рис. 1.4. Предельный цикл в системе (1.38)

внешнего «большого» неустойчивого предельного цикла. Затем в регионе 5 сосуществуют два «большие» цикла: внешний является устойчивым, пока внутренний неустойчив. Эти два цикла сливаются и исчезают вдоль линии $L_5 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = k_0 \rho \mu_1, \mu_1 > 0\}$, где $k_0 = 0,752\dots$ Это есть седлоузловая бифуркация предельного цикла. После данной бифуркации в системе отсутствуют предельные циклы. В регионе 6 имеются все три равновесия: тривиальное седло E_0 и два устойчивые нетривиальные фокуса (узла) $E_{1,2}$. Нетривиальные равновесия сливаются с тривиальным на нижней части линии $L_2 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = 0, \mu_2 > 0\}$ вследствие бифуркации «pitchfork», и мы возвращаемся в регион 1.

Таким образом, поведенческие свойства системы (3.46) определяются путем сравнения величин $I_Y - S_Y$ и $S_3 - \frac{S_Y I_3}{I_Y}$. Если выполнено условие $I_Y - S_Y > S_3 - \frac{S_Y I_3}{I_Y}$, то $S = \text{sign}(\rho) = -1$. В противном случае $I_Y - S_Y < S_3 - \frac{S_Y I_3}{I_Y}$ дает значение $S = +1$. Возвращаясь к вопросу о выборе знака величины S_K , следует отметить, что положения равновесия седлового типа в исходной динамической системе (3.41) возможны только при соблюдении условия $S_K < -\frac{I_K S_Y}{I_Y}$, т. е. $S_K < 0$.

Таким образом, в настоящем разделе продемонстрировано все многообразие динамического поведения модели Кальдора в случае вырождения трех равновесий в одно и прослежена иерархия неустойчивостей, сопровождающаяся каскадом соответствующих бифуркаций [11].

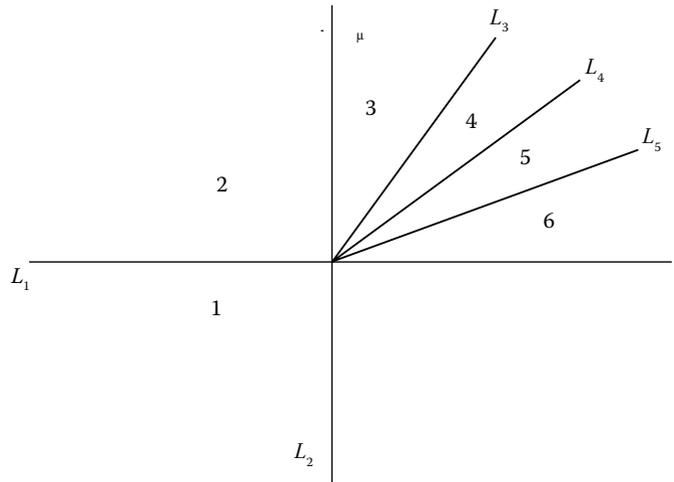


Рис. 3.7. Бифуркационная диаграмма при $S = -1$

переходе из региона 2 в регион 3 в результате бифуркации «pitchfork». В регионе 3 все три положения равновесия являются локализованными внутри «большого» предельного цикла. На полупрямой $L_3 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = \rho\mu_1, \mu_1 > 0\}$ нетривиальные фокусы $E_{1,2}$ претерпевают бифуркацию Хопфа. Эта бифуркация приводит к возникновению двух «малых» неустойчивых предельных циклов вокруг нетривиальных положений равновесия. Равновесные точки становятся устойчивыми. Таким образом в регионе 4 имеется три предельные цикла: внешний «большой» и два внутренних «малых». Вдоль линии $L_4 = \left\{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = \frac{4\rho}{5}\mu_1, \mu_1 > 0\right\}$ «малые» циклы образуют симметричную фигуру, напоминающую по внешнему виду лемнискату Бернулли с центром в E_0 в результате произошедшей глобальной гомоклинической бифуркации. На протяжении линии L_4 седло E_0 имеет две гомоклинические орбиты. Эти орбиты могут трансформироваться одна в другую с помощью симметричных преобразований. При пересечении линии L_4 на переходе из региона 4 в регион 5 происходит не только разрушение «малых» циклов, но и появление

$$Y_1 = P - \frac{Y}{b}, \quad Y_2 = \frac{1}{\xi} \left(P + \frac{Y}{b} \right) + \frac{1}{2a}, \quad (1.44)$$

где $\xi^2 = \frac{b-d_1}{b+d_1}$, $a = \frac{d_2}{4\omega_1}$, $\omega^2 = b^2 - d_1^2$.

Тогда (1.43) будет представлена в форме

$$\begin{aligned} \dot{Y}_1 &= aY_1^2 + a\xi^2 Y_2^2 - (\xi^2 + 1)Y_2 + \frac{\xi^2 + 2}{4a}, \\ \dot{Y}_2 &= 2aY_1Y_2. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Систему (1.45) можно представить как уравнение в полных дифференциалах

$$\left(a_1Y_1^2 + a\xi^2 Y_2^2 - (\xi^2 + 1)Y_2 + \frac{\xi^2 + 2}{4a} \right) dY_2 = 2aY_1Y_2 dY_1. \quad (1.46)$$

Путем введения интегрирующего множителя Y_2^{-2} в (1.46) получим следующее уравнение

$$\left(a\xi^2 - \frac{\xi^2 + 1}{Y_2} + \frac{\xi^2 + 2}{4aY_2^2} \right) dY_2 = 2ad \left(\frac{Y_1^2}{Y_2} \right). \quad (1.47)$$

Интегрируя (1.47), будем иметь

$$Y_1^2 = \xi^2 Y_2^2 - \frac{\xi^2 + 1}{a} Y_2 \ln|Y_2| + KY_2 - \frac{(\xi^2 + 2)}{4a}, \quad (1.48)$$

где K – произвольная постоянная, определяемая из начальных условий.

Таким образом выражения (1.44) и (1.48) определяют функциональную взаимосвязь цены и объема товара, являющуюся постоянным балансом между доходом производителя и его издержками в любой момент времени.

Возвращаясь к системе (1.38), следует напомнить, что коэффициенты d_1 , d_2 есть эластичность и ее производная функции спроса по цене, а S_1 , S_2 – эластичность и ее производная цены предложения

по величине объема товара, т. е.

$$d_1 = \eta_D, \quad d_2 = \eta'_D, \quad S_1 = \eta_S, \quad S_2 = \eta'_S.$$

(Имеется в виду, что эластичности и их производные вычислены в тривиальном положении равновесия.)

Тогда условия (1.42) примут несколько иной вид

$$\begin{aligned} \eta_D &= b^2 \eta_S, \\ \eta'_D &= b^3 \eta'_S. \end{aligned} \tag{1.49}$$

Первое выражение в (1.49) означает условие перехода от устойчивого положения равновесия к неустойчивому с рождением (или гибелью) предельного цикла, а вторая формула (1.49) определяет границу между типами устойчивости автоколебательных режимов.

$R_2 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = 0, \mu_1 < 0\}$ претерпевает бифуркацию Хопфа с рождением устойчивого предельного цикла. В регионе 3 этот цикл существует. При пересечении линии $R_3 = \left\{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = \frac{-p}{5} \mu_1, \mu_1 < 0\right\}$ происходит глобальная гетероклиническая бифуркация с появлением соответствующих орбит, связанных с седлами $E_{1,2}$ и в регионе 4 формируется гетероклинический цикл. Далее все три положения равновесия сосуществуют вместе до пересечения верхней части прямой R_1 , и происходит возвращение в регион 1.

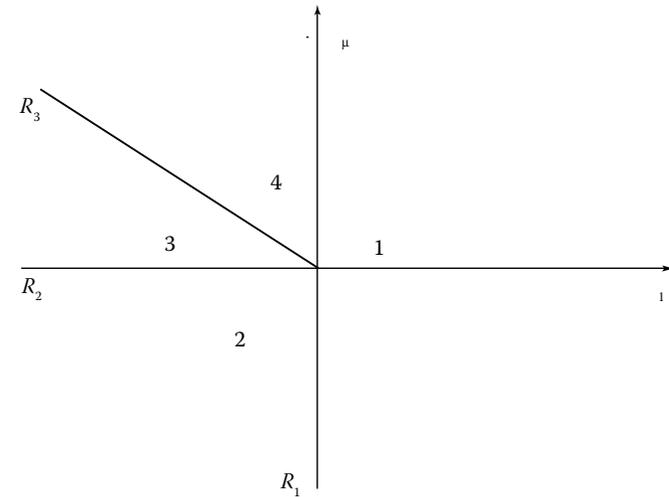


Рис. 3.6. Бифуркационная диаграмма при $S = +1$

Рассмотрим случай $S = -1$. Соответствующая бифуркационная диаграмма изображена на рис. 3.7.

В регионе 1 имеется единственное тривиальное равновесие E_0 , являющееся устойчивым узлом, далее переходящим в фокус. На полупрямой $L_1 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2 = 0, \mu_1 < 0\}$ происходит бифуркация Хопфа и рождается устойчивый предельный цикл. Два неустойчивых узла отделяются от тривиального равновесия при пересечении верхней части прямой $L_2 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = 0, \mu_2 > 0\}$ на

При $\mu_1 = 0, \mu_2 = 0$ имеем $N = 3\alpha^3 (I_Y - S_Y)^2 \left(\frac{S_Y I_3}{I_Y} - S_3 + I_Y - S_Y \right)$,
 $M = \alpha^4 (I_Y - S_Y)^3 \left(\frac{S_Y I_3}{I_Y} - S_3 \right)$. Систему (3.45), уже являющуюся нор-

мальной формой Пуанкаре, целесообразно привести к еще более простому виду с помощью линейного преобразования

$$x_1 = p\sqrt{|M|}V_1, \quad x_2 = p^2\sqrt{|M|}V_2, \quad \tau = \frac{1}{p}t,$$

$$\text{где } p = \left| \frac{N}{M} \right| = \frac{3}{\alpha} \left| \frac{1}{I_Y - S_Y} - \frac{1}{S_{3Y} - S_Y \frac{I_3}{I_Y}} \right|.$$

Окончательно получим

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= p^2 \mu_1 x_1 + p \mu_2 x_2 + S x_1^3 - x_1^2 x_2, \end{aligned} \quad (3.46)$$

где $S = \text{sign}(p) = \pm 1$.

Относительно системы (3.46) нетрудно заметить, что она инвариантна относительно замены $x_1 \rightarrow -x_1$ и $x_2 \rightarrow -x_2$ и всегда имеет тривиальное равновесие $E_0 = (0, 0)$. Два другие возможные положения равновесия имеют координаты $E_{1,2} = (\pm\sqrt{-S\mu_1}, 0)$ и существуют для $\mu_1 < 0$, если $S = 1$, и для $\mu_1 > 0$, если $S = -1$.

Существенным для системы (3.46) является факт слияния всех трех положений равновесия в одно тривиальное при $\mu_1 = 0$.

Пусть $S = 1$. Бифуркационная диаграмма представлена на рис. 3.6.

В регионе 1 имеется единственное тривиальное положение равновесия E_0 , являющееся седловой точкой. Пересекая нижнюю ветвь линии $R_1 = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = 0\}$, происходит бифуркация типа «pitchfork» с появлением пары симметричных седел $E_{1,2}$, пока тривиальное равновесие E_0 станет устойчивым узлом. Этот узел превращается в устойчивый фокус в регионе 2, который при пересечении полупрямой

РАЗДЕЛ 2

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНОГО МУЛЬТИПЛИКАТОРА-АКСЕЛЕРАТОРА

2.1. Модель мультипликатора-акселератора с конечной продолжительностью инвестиционного лага

В настоящем разделе рассмотрен пример одной из разновидностей моделей мультипликатора-акселератора, иллюстрирующий различные аспекты проблематики экономической цикличности на феноменологическом уровне. В качестве базовой используем известную модель Гудвина [1], обладающую встроенным нелинейным элементом в систему взаимодействия мультипликатора-акселератора. Динамика данной модели характеризуется наличием запаздываний двух типов: с позиции спроса на инвестиции – отставание с конечной продолжительностью действия акселератора, а на стороне предложения имеется непрерывно распределенное запаздывание.

В качестве основной переменной в модели рассматривается доход, или выпуск продукции $Y = Y(t)$. Избыточный спрос формализуется уравнением

$$D = C + I + G, \quad (2.1)$$

где D – совокупный спрос, складывающийся из потребительского спроса C , спроса на инвестиции I и независимых расходов G . Все перечисленные слагаемые являются фактическими затратами. Между потреблением C и доходом Y допускаем простейшую прямую пропорциональную зависимость без запаздывания $C = cY$, где величина $0 < c < 1$ характеризует предельную склонность к потреблению. Также полагаем, что реальные затраты на инвестирование производятся с некоторым фиксированным лагом продолжительностью в θ единиц времени после принятия инвестиционного решения $F(t)$, т. е. $I(t) = F(t - \theta)$. Именно здесь действие акселератора проявляется

ся как функциональная зависимость между мерой объема решений об инвестировании $F(t)$ и мгновенной скоростью изменения дохода (объема выпуска продукции) $\frac{dY(t)}{dt}$. В самом общем виде это можно представить таким образом

$$F(t) = \varphi\left(\frac{dY(t)}{dt}\right),$$

где φ – некоторая нелинейная функция, обладающая свойством насыщения.

То есть для малых изменений дохода срабатывает классический линейный акселератор, а при дальнейшем увеличении дохода (объема выпуска продукции) уровень зависимости F достигает своего верхнего предела F_{\max} , обусловленного ресурсными и мощностными ограничениями структуры производства.

При существенном сокращении объема производства выпуска продукции величина F стремится к нижней границе F_{\min} , зависящей, вообще говоря, от нормы амортизации основного капитала. Для удобства последующих математических действий в исследуемой модели ограничимся тейлоровским разложением функции $\varphi(x)$ до третьего порядка включительно

$$\varphi(x) \approx \varphi_1 \cdot x + \varphi_2 \frac{x^2}{2} + \varphi_3 \frac{x^3}{6},$$

где φ_i , $i = \overline{1,3}$ – соответствующие производные функции $\varphi(x)$.

Так как нами уже дано описание основных составляющих функции совокупного спроса, получим следующее уравнение:

$$D(t) = cY(t) + \varphi\left(\frac{dY(t-\theta)}{dt}\right) + G. \quad (2.2)$$

По поводу независимых расходов G следует сказать, что их можно считать неизменными, т. е. $G = \text{const}$.

Далее проанализируем ситуацию на стороне предложения. Основное допущение будет состоять в том, что величина объема выпус-

Так как μ_1, μ_2 – малые величины, то, очевидно, что $S_K < 0$. Используя замену переменных $\tilde{Y} = [\alpha(I_Y - S_Y) - \mu_2]U_1 + U_2$ и $\tilde{K} = I_Y U_1$, преобразуем систему (3.41) к виду нелинейного осциллятора.

Имеем

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= U_2 + a_{30}U_1^3 + a_{21}U_1^2U_2 + a_{12}U_1U_2^2 + a_{03}U_2^3, \\ \dot{U}_2 &= \mu_1U_1 + \mu_2U_2 + b_{30}U_1^3 + b_{20}U_1^2U_2 + b_{12}U_1U_2^2 + b_{03}U_2^3, \end{aligned} \quad (3.43)$$

где $a_{30} = \frac{I_3}{I_Y} (\alpha(I_Y - S_Y) - \mu_2)^3$; $a_{21} = \frac{3I_3}{I_Y} (\alpha(I_Y - S_Y) - \mu_2)^2$;

$$a_{12} = \frac{3I_3}{I_Y} (\alpha(I_Y - S_Y) - \mu_2); \quad a_{03} = \frac{I_3}{I_Y};$$

$$b_{ij} = \left[\alpha \left(S_Y - \frac{S_3}{I_3} I_Y \right) + \mu_2 \right] a_{ij}; \quad i + j = 3; \quad j = \overline{0,3}.$$

Для построения нормальной формы Пуанкаре системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3.43) выполним нелинейную редукцию переменных состояния

$$\begin{aligned} U_1 &= V_1 + \left(\frac{a_{21}}{3} + \frac{b_{12}}{6} \right) V_1^3 + \left(\frac{a_{12} + b_{03}}{2} \right) V_1^2 V_2 + a_{03} V_1 V_2^2, \\ U_2 &= V_2 - a_{30} V_1^3 + \frac{b_{12}}{6} V_1^2 V_2 + b_{03} V_1 V_2^2. \end{aligned} \quad (3.44)$$

В результате преобразований получим представление системы (3.43) с учетом формул (3.44)

$$\begin{aligned} \dot{V}_1 &= V_2, \\ \dot{V}_2 &= \mu_1 V_1 + \mu_2 V_2 + M V_1^3 + N V_1^2 V_2, \end{aligned} \quad (3.45)$$

где $M = b_{30}$, $N = b_{21} + 3a_{30}$.

точке A , характеризуется низким объемом инвестиций, который явно недостаточен для полного возмещения изношенного капитала. Уменьшение капитала через определенное время повысит склонность субъектов предпринимательства к инвестированию, и спрос на него возрастет, что приведет к росту инвестиционной функции $I(Y, K)$. Равновесие нарушится.

Точка B , наоборот, представляет состояние равновесия при высокой экономической активности. В результате достижения оптимального размера капитала спрос на инвестиции начнет падать, значение функции $I(Y, K)$ уменьшится, и экономика выйдет из состояния равновесия.

В процессе изменения экономической конъюнктуры при встречном движении графиков функций накоплений и инвестиций возможно совмещение точек A и C , а в другом случае – B и C . Существенным является тот факт, что эти положения равновесия A , C и B , C станут неустойчивыми.

В этой связи представляется актуальным подробное изучение ситуации, когда все три состояния равновесия A , B и C находятся на достаточно близком расстоянии друг от друга и возможно их слияние в одну точку. Наше дальнейшее исследование будет посвящено детальному анализу свойств динамической системы (3.41) с учетом вышеизложенного допущения.

Рассмотрим поведение системы (3.41) вблизи тривиального положения равновесия. Линейная часть (3.41) обладает характеристическим полиномом

$$\lambda^2 + (I_k - \alpha(I_Y - S_Y))\lambda + \alpha[I_Y S_K + I_K S_Y] = 0. \quad (3.42)$$

Если предположить, что коэффициенты (3.42) являются малыми величинами, т. е. $\mu_1 = -\alpha[I_Y S_K + I_K S_Y]$ и $\mu_2 = \alpha(I_Y - S_Y) - I_K$, то в системе (3.41) может иметь место бифуркация Богданова – Такенса, так называемая бифуркация «двойного нуля» [46]. Выберем в качестве бифуркационных параметры $I_K = \alpha(I_Y - S_Y) - \mu_2$ и $S_K = -\frac{\alpha S_Y}{I_Y}(I_Y - S_Y) - \frac{\mu_1}{\alpha I_Y} + \mu_2$.

ка Y продукции запаздывает по отношению к величине совокупного спроса D . Форма запаздывания является непрерывно распределенной и представляется как линейное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\varepsilon \frac{dY}{dt} = D - Y, \quad (2.3)$$

где $\varepsilon > 0$ – постоянная времени запаздывания, характеризующая динамику адаптации между спросом и предложением.

Балансовый синтез спроса и предложения с учетом (2.2) и (2.3) дает дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом

$$\varepsilon \frac{dY(t)}{dt} - \varphi \left(\frac{dY(t-\theta)}{dt} \right) + (1-c)Y - G = 0. \quad (2.4)$$

Данное уравнение (2.4) является выражением общей модели мультипликатора-акселератора Гудвина с нелинейными взаимосвязями.

По форме (2.4) есть ничто иное как смешанное дифференциально-разностное уравнение.

Очевидно, что уравнение (2.4) имеет особое решение $Y^* = \frac{G}{1-c}$, которое служит уровнем равновесия для дохода (объема выпуска продукции) в результате действия статического мультипликатора. Представляется целесообразным в дальнейшем ввести переменную $y(t) = \frac{Y(t) - G}{1-c}$, являющуюся величиной отклонения дохода от своего равновесного значения.

Для новой переменной $y(t)$ уравнение (2.4) преобразуется к виду

$$\varepsilon s \frac{dy(t)}{dt} - \varphi \left(s \frac{dy(t-\theta)}{dt} \right) + s^2 y(t) = 0, \quad (2.5)$$

где $s = 1 - c$ – предельная склонность к сбережению.

Данная модель, описываемая уравнением (2.5) определяет динамику дохода (объема выпуска продукции) в отклонениях от описанного ранее уровня равновесия $Y^* = \frac{G}{s}$.

Для последующего анализа динамических свойств исследуемого процесса изменения дохода необходимо выполнить ряд преобразований и упрощений математического характера, позволяющих свести смешанное дифференциально-разностное уравнение первого порядка к обыкновенному дифференциальному уравнению более высокого порядка [35].

Введем новое время $\tau = t - \theta$ вместо t . Тогда (2.5) может быть представлено как

$$\varepsilon s \frac{dy(\tau + \theta)}{d\tau} - \varphi \left(s \frac{dy(\tau)}{d\tau} \right) + s^2 y(\tau + \theta) = 0. \quad (2.6)$$

Следующим шагом преобразований служит разложение левой части уравнения (2.6) по степеням θ с сохранением слагаемых, содержащих первую степень θ . Имеем

$$\varepsilon s \frac{dy(\tau)}{d\tau} + \varepsilon s \theta \frac{d^2 y(\tau)}{d\tau^2} + s^2 \left(y(\tau) + \theta \frac{dy(\tau)}{d\tau} \right) - \varphi \left(s \frac{dy(\tau)}{d\tau} \right) = 0$$

или

$$\varepsilon s \frac{d^2 y}{d\tau^2} + (\varepsilon + \theta s) \frac{dy}{d\tau} - \frac{1}{s} \varphi \left(s \frac{dy}{d\tau} \right) + sy = 0. \quad (2.7)$$

В уравнение (2.1.7) подставим явный вид функции φ в виде кубического полинома и в результате преобразований получим обыкновенное дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 y}{d\tau^2} + \left(\frac{\varepsilon + \theta s - \varphi_1}{\varepsilon \theta} \right) \frac{dy}{d\tau} + \frac{s}{\varepsilon \theta} y - \frac{s\varphi_2}{2\varepsilon \theta} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^2 - \frac{s^2 \varphi_3}{6\varepsilon \theta} \left(\frac{dy}{d\tau} \right)^3 = 0. \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} I(\tilde{Y}, \tilde{K}) &= -I_K \tilde{K} + I_Y \tilde{Y} + I_3 \tilde{Y}^3 + O(\tilde{Y}^5), \\ S(\tilde{Y}, \tilde{K}) &= S_K \tilde{K} + S_Y \tilde{Y} + S_3 \tilde{Y}^3 + O(\tilde{Y}^5). \end{aligned} \quad (3.40)$$

Здесь I_3, S_3 – соответствующие коэффициенты разложения исходных функций в ряд Тейлора и, кроме того, справедливо условие $I_Y > S_Y$. Таким образом система (3.39) получит следующее явное представление:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha (I_Y - S_Y) \tilde{Y} - \alpha (I_K - S_K) \tilde{K} + \alpha (I_3 - S_3) \tilde{Y}^3, \\ \dot{K} &= I_Y \tilde{Y} - I_K \tilde{K} + I_3 \tilde{Y}^3. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Система (3.41) может иметь три положения равновесия:

а) тривиальное $\tilde{Y}_0 = 0, \tilde{K}_0 = 0$, соответствующее точке C на рис. 3.5;

б) нетривиальные $\tilde{Y}_{1,2} = \mp \sqrt{-\frac{(S_Y I_K + S_K I_Y)}{S_K I_3 + S_3 I_K}}$,

$\tilde{K}_{1,2} = \frac{S_3 I_Y + S_Y I_K}{S_3 I_K + S_K I_3} \cdot \tilde{Y}_{1,2}$, что соответствует точкам A и B (рис. 3.5).

Точки A, B, C представляют возможные варианты статического равновесия. В [41] утверждается, что равновесие в точке C неустойчиво, а в точках A и B – устойчиво. В точке C неустойчивость равновесия связана с тем, что при $y_A < y < y_c$ накопления превышают инвестиции, и на рынке благ образуется избыток, который будет способствовать дальнейшему сокращению производства. В случае $y_c < y < y_b$ из-за превышения объема инвестиций над объемом накопленных возникает дефицит благ, стимулирующий рост производства.

Относительно устойчивости точек A и B отметим, что отклонение от A или B вправо приводит к избытку благ и сокращению их производства, а отклонение влево – к дефициту и расширению производства. Состояние экономической системы, соответствующее

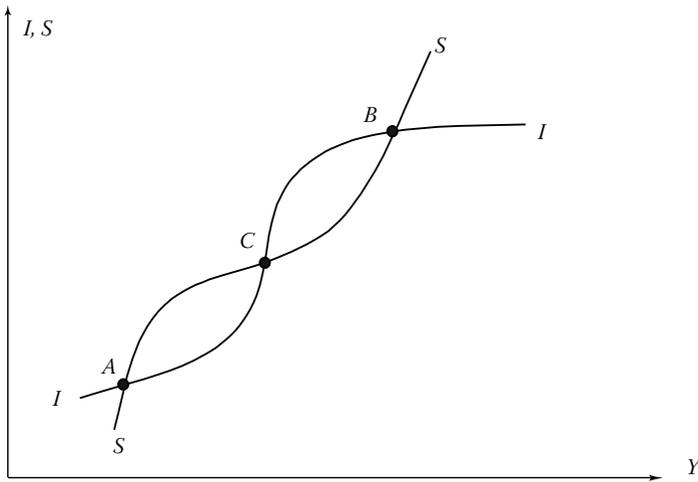


Рис. 3.5. Структура равновесий в модели Кальдора

Динамическая модель Кальдора выражается следующими уравнениями:

$$\begin{aligned} \dot{Y} &= \alpha[I(Y, K) - S(Y, K)] \\ \dot{K} &= I_0(Y, K), \end{aligned} \quad (3.39)$$

где $I_0(Y, K)$ – реализованное инвестирование, вообще говоря, отличающееся от запланированного $I(Y, K)$; величина $\alpha > 0$ характеризует скорость изменения дохода во временной области.

Функции $I(Y, K)$ и $S(Y, K)$ обладают симметрией относительно точки равновесия (такое предположение вполне допустимо). Полагаем также, что зависимость вышеуказанных функций по переменной K является линейной и реализованное инвестирование совпадает с планируемым, т. е. $I_0 = I$. Тогда удобно ввести новые переменные $\tilde{Y} = Y - Y_c$ и $\tilde{K} = K - K_c$, являющиеся отклонениями исходных уровней дохода и капитала от равновесных значений в точке C .

Функции инвестирования и дохода в силу симметрии являются нечетными и могут быть представлены в виде

Представим (2.8) в виде системы двух дифференциальных уравнений посредством замены переменных $y = y_1$, $\frac{dy}{d\tau} = y_2$

$$\begin{aligned} \frac{dy_1}{d\tau} &= y_2 \\ \frac{dy_2}{d\tau} &= -\frac{s}{\varepsilon\theta} y_1 + \frac{\varphi_1 - \varepsilon - s\theta}{\varepsilon\theta} y_2 + \frac{s\varphi_2}{2\varepsilon\theta} y_2^2 + \frac{s^2\varphi_3}{6\varepsilon\theta} y_2^3. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Качественное исследование динамической системы (2.9) естественно начинать с изучения состояний равновесия. Очевидно, что в (2.9) имеется только тривиальное положение равновесия $y_1^* = 0$, $y_2^* = 0$. Для классификации типа данной особой точки необходимо найти характеристические числа линейной части (2.9), определяемые из квадратного уравнения

$$\lambda^2 - \frac{(\varphi_1 - \varepsilon - s\theta)}{\varepsilon\theta} \lambda + \frac{s}{\varepsilon\theta} = 0. \quad (2.10)$$

Из явного вида (2.10) можно сделать вывод о том, что особая точка системы (2.9) может быть устойчивым (неустойчивым) узлом либо устойчивым (неустойчивым) фокусом. Для нас наибольший интерес представляет ситуация со сменой устойчивости сложного фокуса, которая может сопровождаться рождением предельного цикла с возникновением соответствующего автоколебательного режима. В таком случае решение (2.10) представим в виде

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu}{2} \mp i\omega, \quad (2.11)$$

где $\omega^2 = \frac{s}{\varepsilon\theta}$, $i^2 = -1$, а $\mu = \frac{\varphi_1 - \varepsilon - \theta s}{\varepsilon\theta}$ является малой величиной.

То есть, при $\mu = 0$ соответственно собственные числа являются чисто мнимыми $\lambda_{1,2} = \mp i\omega$.

Дифференцируя выражение (2.11) по параметру μ , получим $\lambda' = \frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{2}$. Это означает, что собственные числа $\lambda_{1,2}$ пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью. Поэтому можно утверждать, что все условия бифуркационной теоремы Хопфа выполнены, и в системе (2.9) возможно возникновение из сложного фокуса предельного цикла.

Здесь уместно обратить внимание на причину возникновения неустойчивости в модели мультипликатора-акселератора. По всей видимости, именно акселератор «взрывает» затухающие колебания, порождаемые мультипликатором, и генерирует структурное самоподдерживающееся колебательное движение (автоколебания). Мы уже убедились, что неустойчивость возникает в данной экономической системе, когда меняется один из ее параметров. Наиболее естественно считать изменяющимся параметром коэффициент линейного акселератора ϕ_1 , критическое значение которого $\phi_1^* = \varepsilon + \theta\varepsilon$ изменяет направление демпфирования в системе (2.9). Коэффициент ϕ_1 , таким образом, будет играть роль бифуркационного параметра. Критерий устойчивости может быть теперь записан в виде $\phi_1 < \phi_1^*$. Линейный анализ показывает, что, когда ϕ_1 проходит, увеличиваясь, через ϕ_1^* , потеря устойчивости фокусом вызывается парой комплексно сопряженных чисел матрицы коэффициентов линейной части системы (2.9).

Потеря устойчивости при $\phi_1 = \phi_1^*$ происходит в условиях теоремы Хопфа, согласно которой в дополнение к стационарному появляются периодические решения.

Однако непосредственно из теоремы Хопфа нельзя получить информацию о том, описывают ли эти периодические решения те режимы, которые могут реально наблюдаться в качестве установившихся. Периодические решения могут быть неустойчивыми и, соответственно, ненаблюдаемыми без применения специальных процедур. Поэтому следующей целью нашего исследования рождающихся периодических решений в системе (2.9) является выведе-

$I = I(Y, K)$ предполагается, что предельная склонность к инвестированию $I_Y = \frac{\partial I}{\partial Y}$ положительная, но переменная. То есть, она имеет так называемое «нормальное» значение для «нормальных» значений уровня дохода Y . Для значений дохода меньше данного «нормального» интервала предельная склонность к инвестированию снижается вследствие потерь прибыли в периоде низкого уровня активности по сравнению с «нормальным» уровнем. Она также уменьшается для значений Y выше «нормального» интервала из-за положительного эффекта масштаба и роста затрат. Таким образом, функция инвестирования является S-образной кривой. Кроме того, Кальдор предполагал, что более высокий уровень основного капитала приводит к уменьшению предельной эффективности основных фондов и, соответственно, имеет место уменьшение уровня дохода. То есть, $\frac{\partial I}{\partial K} = -I_K < 0$ ($I_K > 0$).

Функция накопления также является нелинейной $S = S(Y, K)$. Предельная склонность к накоплению $S_Y = \frac{\partial S}{\partial Y}$ положительна и меньше единицы, но меняется. Аргументация этого может быть следующей: существует «нормальный» уровень склонности к накоплению соответственно «нормальному» промежутку изменения дохода. Ниже этого интервала сбережения будут уменьшаться в сторону потребления, а выше данного интервала они будут увеличиваться. Иначе говоря, функция сбережений является перевернутой S-образной кривой.

Кальдор выдвинул дополнительное предположение о том, что $S_K = \frac{\partial S}{\partial K}$ – положительная величина, то есть функция сбережений сдвигается вверх при увеличении уровня капитала. Это утверждение подвергается сомнению рядом исследователей [40, 44], так как не было удовлетворительно объяснено самим Кальдором. В дальнейших рассуждениях мы будем полагать, что для S_K допустима перемена знака.

На рис. 3.5 показаны качественные зависимости функций инвестирования и накопления от уровня дохода при фиксированном значении уровня капитала.

$P = \left\{ (\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 = -\frac{6}{25}\alpha_2^2, \alpha_2 < 0 \right\}$, разрушаясь в результате глобальной бифуркации на петле сепаратрисы седла (при этом период движения по циклу возрастает до бесконечности). Наконец, при переходе из области 4 в область 1 через участок T_+ линии кратности неустойчивый узел и седло сливаются и исчезают.

Воспользовавшись формулами (3.35), выпишем уравнения бифуркационных линий в исходных малых параметрах μ_1, μ_2 :

а) линия бифуркации «складка»

$$T = \left\{ (\mu_1, \mu_2) : \mu_1 \left(\mu_2 + \frac{K}{2}\mu_1 \right) = 0 \right\};$$

б) линия бифуркации Хопфа

$$H = \left\{ (\mu_1, \mu_2) : \mu_2 (\mu_2 - K\mu_1) = 0, \mu_2 > \frac{K}{2}\mu_1 \right\};$$

в) линия глобальной бифуркации

$$P = \left\{ (\mu_1, \mu_2) : (7\mu_2 - K\mu_1)(7\mu_2 - 6K\mu_1) = 0, \mu_2 > \frac{K}{2}\mu_1 \right\}.$$

На этом исследовании бифуркации коразмерности два Богданова – Такенса применительно к системе (3.14) полностью завершено. Случай $S = +1$ может быть изучен при помощи замены $t \rightarrow -t, \xi_2 \rightarrow -\xi_2$. Существенным отличием здесь будет неустойчивость предельного цикла. Кроме того, важным для нас является тот факт, что предельный цикл вблизи точки бифуркации Богданова – Такенса обладает частотой, пропорциональной квадратному корню из малого параметра. Это означает, что деловой цикл в модели Кейнса может иметь очень большой период, который весьма непросто обнаружить при численных экспериментах с исходной моделью.

3.3. Бифуркации в нелинейной модели Кальдора

Основное допущение этой модели, выдержанной в кейнсианском духе, состоит в том, что функции инвестирования и накопления являются сугубо нелинейными функциями дохода Y и уровня основных фондов K [41]. Относительно инвестиционной функции

дение явных формул, описывающих их устойчивость, амплитуду и период.

Для достижения указанной цели воспользуемся методикой, изложенной в [37], сохраняя оригинальные обозначения для удобства применения предложенной сводки рецептурных указаний.

Чтобы привести систему (2.9) к виду нормальной формы Пуанкаре, выполним замену переменных $y_1 = x_1, y_2 = -\omega x_2$ и получим при $\mu = 0$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 - \frac{\omega^3 \varphi_2}{2} x_2^2 + \frac{\omega^4 s \varphi_3}{6} x_2^3. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Представим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений (2.12) в качестве комплексного дифференциального уравнения для переменной $z = x_1 + ix_2$:

$$\begin{aligned} \dot{z} &= i\omega z + g_{20} \frac{z^2}{2} + g_{11} z \bar{z} + g_{02} \frac{\bar{z}^2}{2} + g_{30} \frac{z^3}{6} + g_{21} \frac{z^2 \bar{z}}{2} + \\ &+ g_{12} \frac{z \bar{z}^2}{2} + g_{03} \frac{\bar{z}^3}{6}, \end{aligned} \quad (2.13)$$

где \bar{z} – комплексно сопряженная по отношению к z , а обратная замена дает $x_1 = \text{Re } z, x_2 = \text{Im } z$.

Для дальнейших вычислений нам понадобятся только коэффициенты g_{20}, g_{11}, g_{02} и g_{21} . Предъявим для них явные выражения

$$g_{20} = -g_{11} = g_{02} = \frac{i\omega^3 \varphi_2}{4}, \quad g_{21} = \frac{\omega^4 s \varphi_3}{8}. \quad (2.14)$$

Имея формулы (2.14), получим:

1) значение первой ляпуновской величины

$$\text{Re } c_1(0) = \frac{s^3 \varphi_3}{16\epsilon^2 \theta^2}; \quad (2.15)$$

2) амплитуда малых колебаний

$$\rho \approx \sqrt{\frac{8\varepsilon\theta(\varphi_1 - \varepsilon - \theta s)}{-s^3\varphi_3}}; \quad (2.16)$$

3) приближенное значение периода колебаний

$$T \approx \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{s^2\varphi_2^2}{24\varepsilon^2\theta^2} \rho^2 \right). \quad (2.17)$$

Само периодическое решение с точностью до выбора начальной фазы для исходной переменной запишется в виде

$$Y(\tau) \approx \frac{G}{s} + \rho \cos\left(\frac{2\pi\tau}{T}\right) + \frac{\rho^2 s \varphi_2}{12\varepsilon\theta} \left(\cos\left(\frac{4\pi\tau}{T}\right) + 3 \right). \quad (2.18)$$

Для нас важным является знак коэффициента φ_3 , определяющий знак первой ляпуновской величины в (2.15). Если $\varphi_3 > 0$, то $\text{Re } c_1(0) > 0$ и, следовательно, предельный цикл неустойчив, т. е. имеет место жесткое возбуждение автоколебаний, сопровождающееся явлением гистерезиса. Однако предположение о положительности φ_3 является нереалистичным, т. к. не будет соблюдено условие достижения порогового насыщения F_{max} (F_{min}) при увеличении (уменьшении) скорости изменения дохода Y . Поэтому следует полагать $\varphi_3 < 0$ ($\text{Re } c_1(0) < 0$). В таком случае рождается устойчивый предельный цикл с мягким режимом возникновения автоколебаний.

Анализируя явный вид приближенного решения для $Y(\tau)$ в формуле (2.18) следует отметить вклад коэффициента φ_2 . Отличное от нуля значение φ_2 вносит определенную асимметрию в структуру результирующих колебаний. Очевидно, что они не являются гармоническими даже при малых значениях амплитуды. Кроме того, коэффициент φ_2 оказывает влияние на увеличение периода колебаний с ростом их амплитуды.

Экономический смысл асимметрии цикла заключается в различии продолжительности периодов подъема и депрессии, что в це-

бифуркация «складка» является невырожденной и, пересекая линию T справа налево, появляются два равновесия.

Обозначим левое как E_1 , а правое E_2 :

$$E_{1,2} = (\xi_{1,2}^0, 0) = \left(\frac{1}{2} \left(-\alpha_2 \pm \sqrt{\alpha_2^2 - 4\alpha_1} \right), 0 \right).$$

Точка $\alpha = 0$ отделяет две ветви T_- и T_+ линии бифуркации «складка» для $\alpha_2 < 0$ и $\alpha_2 > 0$ соответственно. Вдоль ветви T_- сосуществуют устойчивый узел E_1 и седловая точка E_2 , а вблизи T_+ – неустойчивый узел E_1 и седло E_2 .

Вертикальная прямая $\alpha_1 = 0$ есть линия, на которой равновесие E_1 имеет пару собственных значений с нулевой суммой: $\lambda_1 + \lambda_2 = 0$. Нижняя часть

$$H = \{(\alpha_1, \alpha_2) : \alpha_1 = 0, \alpha_2 < 0\}, \quad (3.38)$$

связана с невырожденной бифуркацией Хопфа ($\lambda_{1,2} = \pm i\omega$), а верхняя полупрямая является небифуркационной линией, относящейся к нейтральному седлу. В результате бифуркации Хопфа рождается устойчивый предельный цикл, т. е. первая ляпуновская величина отрицательна.

Цикл существует в окрестности H для $\alpha_1 < 0$.

Положение равновесия E_2 остается седлом для всех значений параметров левее линии T . Других локальных бифуркаций здесь больше нет.

Обойдем точку $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ по окружности малого радиуса против часовой стрелки. В области 1 положений равновесия и циклов нет. При переходе из области 1 в область 2 через участок T_- линии кратности в системе (3.34) появляются два равновесия – седло E_2 и устойчивый узел E_1 . Далее узел превращается в фокус, который теряет устойчивость в результате бифуркации Хопфа с образованием устойчивого предельного цикла на линии нейтральности фокуса H . Этот предельный цикл исчезает на линии

Исключая θ_1, θ_2 , выразим малые параметры α_1, α_2 через μ_1, μ_2

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= K^2 \mu_2^2 - K^3 \mu_2 \mu_1, \\ \alpha_2 &= K^2 \mu_1 - 2K \mu_2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Бифуркационная диаграмма для случая $S = -1$ расположена на рис. 3.4.

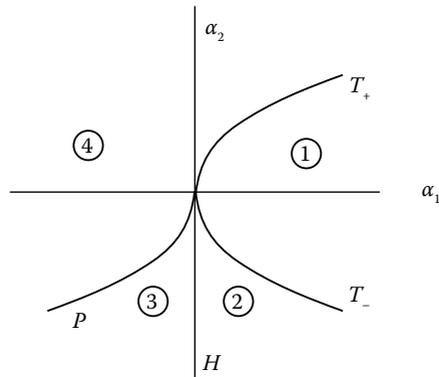


Рис. 3.4. Диаграмма бифуркации Богданова – Такенса в системе (3.34) для $S = -1$

Наш анализ системы (3.34) начнем с вычисления координат неподвижных точек. Очевидно, что они расположены в фазовой плоскости по горизонтальной оси, т. к. $\xi_2 = 0$, и удовлетворяют квадратному уравнению

$$\alpha_1 + \alpha_2 \xi_1 + \mu_2 \xi_1^2 = 0. \quad (3.36)$$

Уравнение (3.36) может иметь от нуля до двух корней. Дискриминантная парабола

$$T = \{(\alpha_1, \alpha_2) : 4\alpha_1 - \alpha_2^2 = 0\} \quad (3.37)$$

связана с бифуркацией «складка». Вдоль этой линии система (3.34) имеет равновесие с нулевым собственным значением. Если $\alpha_2 \neq 0$,

лом является характерной особенностью для нелинейных моделей экономической динамики.

Несколько ранее нами было подробно рассмотрено влияние параметра акселератора ϕ_1 на вырождение линейной части системы (2.9), инициирующее непосредственно бифуркацию рождения предельного цикла из положения равновесия типа сложного фокуса и установление режима самоподдерживающихся колебаний [12].

Резюмируя, хотелось бы подчеркнуть, что в данном исследовании поведенческих свойств нелинейной модели мультипликатора-акселератора Гудвина выявлен механизм возникновения цикла, определен характер его устойчивости и дана содержательная интерпретация влияния всех параметров нелинейного акселератора на особенности автоколебательного режима.

2.2. Модель мультипликатора-акселератора с непрерывно распределенным запаздыванием

В предыдущем подразделе нами подробно исследован пример одной нелинейной модели мультипликатора-акселератора, характеризующейся возникновением устойчивого предельного цикла в окрестности положения равновесия. При этом существенным элементом в конструкции акселератора являлось конечномерное запаздывание в функциональной зависимости между мерой объема решений об инвестировании и мгновенной скоростью изменения дохода (объема выпуска продукции). В качестве основных допущений при синтезе исходной модели использовались нелинейная зависимость акселератора от производной дохода и линейная связь в функции потребления от величины дохода.

В настоящем изложении модель мультипликатора-акселератора будет представлена в ином виде. Прежде всего выдвинем предположение, что теперь действие акселератора выражается в форме непрерывно распределенного запаздывания [14].

Следуя Р. Аллену [1], если функция инвестиций $I(t)$ представляет фактические индуцированные капиталовложения в момент време-

ни t , вызванные изменениями в величине объема производства $Y(t)$, то запаздывание будет описано дифференциальным уравнением

$$\frac{dI}{dt} = \beta \left(\varphi \left(\frac{dY}{dt} \right) - I \right), \quad (2.19)$$

где φ – нелинейная функция акселератора, а постоянный параметр $\beta > 0$ характеризует темп изменений инвестиционной функции $I(t)$.

По поводу $\varphi \left(\frac{dY}{dt} \right)$ следует заметить, что ее поведение при небольших

изменениях дохода близко к линейному, а при дальнейшем возрастании $\frac{dY}{dt}$ функция акселератора замедляет свой рост и даже

может демонстрировать изменение монотонности. Будем полагать, что механизм действия акселератора удовлетворительно описывается кубической параболой

$$\varphi(u) = \varphi_1 u + \varphi_2 \frac{u^2}{2} + \varphi_3 \frac{u^3}{6},$$

где φ_i , $i = \overline{1,3}$ – соответствующие производные $\varphi(u)$.

Следующий шаг заключается во введении запаздывания в модель мультипликатора. В последующем анализе мы также будем пользоваться непрерывным представлением для описания динамики мультипликационного эффекта при помощи соответствующего дифференциального уравнения.

Предположим, что на стороне совокупного спроса запаздывания отсутствуют. Планируемое потребление будет $C = C(Y)$, а независимые расходы определяются величиной G .

Тогда совокупный спрос может быть представлен в форме уравнения

$$D = C(Y) + I + G. \quad (2.20)$$

$$\begin{aligned} n_{11} &= L_R \left(F_{YY} - \frac{L_R}{L_Y} L_{RR} \right) + L_Y \left(F_{YR} - \frac{L_R}{L_Y} L_{YR} \right), \\ n_{02} &= \frac{L_R^2}{2} \left(F_{RR} - \frac{L_R}{L_Y} L_{RR} \right). \end{aligned}$$

Выполним нелинейную редукцию переменных y_1, y_2 по следующим формулам

$$\begin{aligned} y_1 &= u_1 + \frac{m_{11} + n_{02}}{2} u_1^2 + m_{02} u_1 u_2, \\ y_2 &= u_2 - m_{02} u_1^2 y_2 + n_{02} u_1 u_2 \end{aligned}$$

и пренебрегая слагаемыми выше второй степени, получим систему

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + n_{20} u_1^2 + (n_{11} + 2m_{20}) u_1 u_2. \end{aligned} \quad (3.32)$$

При помощи замены $w_1 = u_1 + \delta$, $w_2 = u_2$ исключим из (3.32) линейное слагаемое по переменной u_2

$$\begin{aligned} \dot{w}_1 &= w_2, \\ \dot{w}_2 &= \theta_1 + \theta_2 w_1 + n_{20} w_1^2 + (n_{11} + 2m_{20}) w_1 w_2, \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\text{где } \theta_1 = \frac{n_{20}}{(n_{11} + 2m_{20})^2} \mu_2^2 - \frac{\mu_1 \mu_2}{n_{11} + 2m_{20}}, \quad \theta_2 = \mu_1 - \frac{2n_{20}}{n_{11} + 2m_{20}} \mu_2.$$

Для окончательного построения нормальной формы системы (3.31) – (3.33) требуется еще одно масштабирование переменных

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{w_1}{n_{20} K^2}, \quad \xi_2 = \frac{\text{sign}(K)}{n_{20} K^3} w_2 \text{ и времени } t = |K| \tau, \quad K = \frac{n_{11} + 2m_{20}}{n_{20}} \neq 0 \\ \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \alpha_1 + \alpha_2 \xi_1 + \xi_1^2 + S \xi_1 \xi_2, \end{aligned} \quad (3.34)$$

где $\alpha_1 = (n_{11} + 2m_{20}) K^3 \theta_1$, $\alpha_2 = K^2 \theta_2$, $S = \text{sign}(K) = \pm 1$.

При $\mu_1 = \mu_2 = 0$ собственные числа являются кратными и равными нулю $\lambda_{1,2} = 0$. Такое вырождение в линейной части (3.14) может привести к возникновению бифуркации Богданова – Такенса [7], изучению которой и будет посвящено дальнейшее изложение.

Очевидно, что в данном случае необходимо выбирать два бифуркационные параметра, определяемых выражениями для следа и определителя матрицы A

$$\begin{aligned} F_Y - L_R &= \mu_2, \\ F_R L_Y - F_Y L_R &= -\mu_1. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Пусть в качестве бифуркационных служат параметры функции F , найденные из условия (3.29)

$$\begin{aligned} F_Y &= L_R + \mu_2, \\ F_R &= \frac{L_R^2 + L_R \mu_2 - \mu_1}{L_Y}. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Следующим важным этапом является построение соответствующей нормальной формы для интересующей нас бифуркации координатности два. Заменой переменных $Y = L_R y_1 + y_2$, $R = L_Y y_1$ получим систему

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + m_{20} y_1^2 + m_{11} y_1 y_2 + m_{02} y_2^2, \\ \dot{y}_2 &= \mu_1 y_1 + \mu_2 y_2 + n_{20} y_1^2 + n_{11} y_1 y_2 + n_{02} y_2^2, \end{aligned} \quad (3.31)$$

где $m_{20} = \frac{L_R^2 L_{YY}}{2L_Y} + L_R L_{YR} + \frac{L_Y L_{RR}}{2}$,

$$m_{11} = \frac{L_R L_{YR}}{L_Y} + L_{YR}, \quad m_{02} = \frac{L_Y L_{YY}}{2},$$

$$n_{20} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} L_R^2 \left(F_{YY} - \frac{L_R}{L_Y} L_{YY} \right) + 2L_Y L_R \left(F_{YR} - \frac{L_R}{L_Y} L_{YR} \right) + \\ + L_Y^2 \left(F_{RR} - \frac{L_R}{L_Y} L_{RR} \right) \end{pmatrix},$$

Здесь мы откажемся от гипотезы линейности функции потребления и допустим, что $C(Y)$ – существенно нелинейная функция величины объема производства Y .

В самом общем случае ограничимся представлением $C(Y)$ в форме полинома третьей степени, т. е.

$$C(Y) = C_1 Y + C_2 \frac{Y^2}{2} + C_3 \frac{Y^3}{6}.$$

Коэффициенты C_i , $i = \overline{1,3}$ имеют такую же интерпретацию, как в функции акселератора, причем $C_1 > 0$, а знаки C_2 и C_3 могут быть произвольными.

Параметр независимых расходов G будем считать постоянным.

Рассмотрим ситуацию на стороне предложения. Здесь реакция объема производства Y на совокупный спрос D предполагается не мгновенной, а инерционной, т. е. имеет место непрерывно распределенное запаздывание в виде соответствующего дифференциального уравнения

$$\frac{dY}{dt} = \alpha(D - Y), \quad (2.21)$$

где $\frac{1}{\alpha}$ – постоянная времени мультипликатора.

Уравнения (2.19) – (2.21) полностью определяют систему двух нелинейных дифференциальных уравнений, описывающих взаимодействие мультипликатора и акселератора. Данная система запишется так

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= \alpha(C(Y) - Y + I + G), \\ \frac{dI}{dt} &= \beta \left(\varphi \left(\frac{dY}{dt} \right) - I \right). \end{aligned} \quad (2.22)$$

Так как $\varphi(0) = 0$, то система (2.22) имеет особые решения, определяемые системой алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} C(Y) - Y + G &= 0, \\ I &= 0. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Первое уравнение (2.23) с учетом вида функции $C(Y)$ может иметь от одного до трех корней, которые являются координатами положения равновесия системы (2.22).

Систему двух нелинейных дифференциальных уравнений (2.22) представим в виде одного дифференциального уравнения второго порядка

$$\frac{d^2 Y}{dt^2} = \alpha \left(\left(C'(Y) - 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) \frac{dY}{dt} + \beta \left(\frac{dY}{dt} \right) + \beta (C(Y) - Y + G) \right), \quad (2.24)$$

где $C'(Y) = \frac{dC(Y)}{dY}$.

С помощью (2.24) нам удалось элиминировать зависимость от переменной $I(t)$, и далее мы будем оперировать над векторным полем, состоящим из фазовых переменных $Y(t)$ и $\frac{dY(t)}{dt}$. Если ввести координаты $y_1 = Y(t)$, $y_2 = \frac{dY(t)}{dt}$, то уравнение (2.24) целесообразно трансформировать в форму системы двух дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2, \\ \dot{y}_2 &= \alpha \left(\left(C'(y_1) - 1 - \frac{\beta}{\alpha} \right) y_2 + \beta (\varphi(y_2) + C(y_1) - y_1 + G) \right). \end{aligned} \quad (2.25)$$

Очевидно, что система (2.25) имеет такие же положения равновесия, что и система (2.24).

Пусть координаты особой точки заданы в виде $(y_1^*, y_2^* = 0)$, где y_1^* — суть решения уравнения $C(y_1) - y_1 + G = 0$. Введем новые переменные $u_1 = y_1 - y_1^*$, $u_2 = y_2$ для анализа поведенческих свойств системы (2.25) в окрестности заданного положения равновесия.

При этом нами не были оговорены какие-либо ограничивающие условия на коэффициенты при квадратичных членах и поэтому можно утверждать, что в самом общем случае максимально возможное количество предельных циклов в окрестности положения равновесия Y_0, R_0 равно трем.

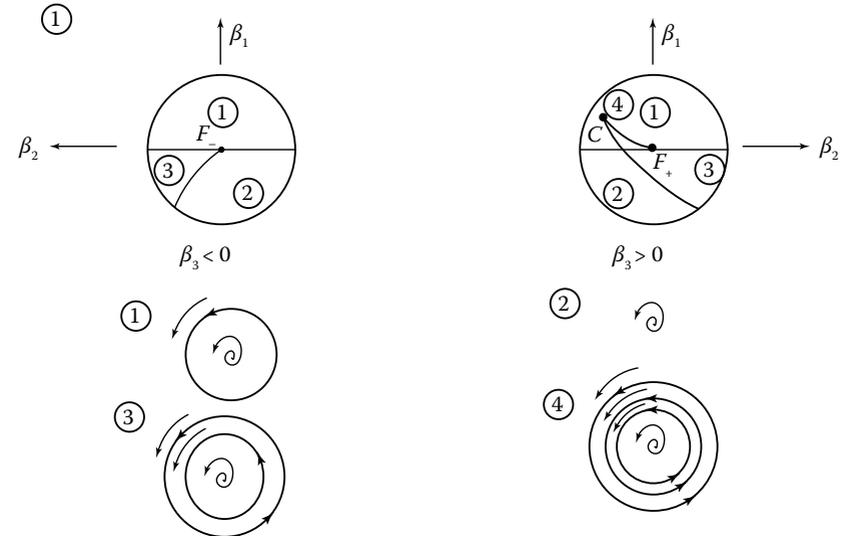


Рис. 3.2. Бифуркационная диаграмма для бифуркации $l_2 = 0$ при $l_3 < 0$

До сих пор мы исследовали поведение системы (3.14) на одной границе области устойчивости, определяемой следом матрицы динамики. Далее будем полагать, что и след, и определитель данной матрицы являются малыми знакопеременными величинами. Пусть $\det A = -\mu_1$, $tr A = \mu_2$.

В таком случае характеристическое уравнение (3.15) примет вид

$$\lambda^2 - \mu_2 \lambda - \mu_1 = 0. \quad (3.28)$$

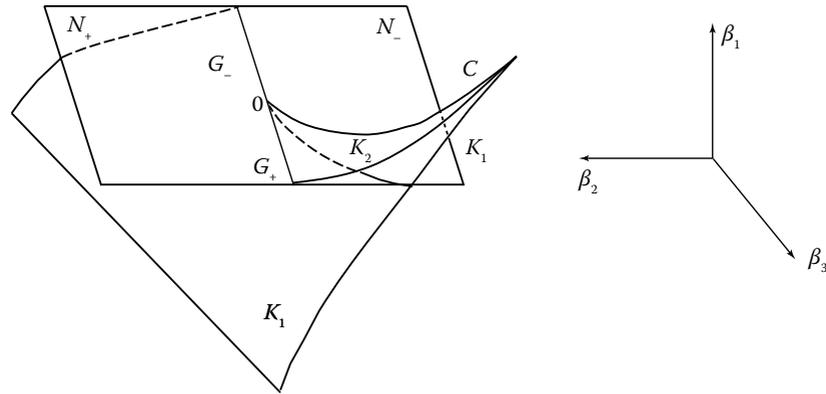


Рис. 3.2. Взаимное расположение бифуркационных поверхностей в окрестности бифуркации $l_2 = 0$

Плоскость N отвечает бифуркации рождения цикла из неподвижной точки O (положения равновесия). На полуплоскости N_- – потеря устойчивости фокусом «мягкая», а на N_+ – «жесткая». Искривленной поверхности K отвечает нелокальная бифуркация коразмерности один «двукратный цикл». Часть этой поверхности K_1 отвечает устойчивому снаружи кратному циклу. Другая часть K_2 – неустойчивому снаружи кратному циклу. На поверхности K имеется ребро возврата C – общая линия для указанных выше частей поверхности кратного цикла. На линии C происходит нелокальная бифуркация коразмерности два – бифуркация слияния трех циклов. Линия пересечения полуплоскости N_- с поверхностью K_1 отвечает бифуркации коразмерности «один плюс один», при которой одновременно происходит изменение устойчивости фокуса и слияние удаленной от него пары циклов.

На рис. 3.3 представлена бифуркационная диаграмма в окрестности 0 (нуль) для $l_3 < 0$.

Возвращаясь к описанию исходной модели Кейнса (3.1), следует подчеркнуть, что использовался набор ограничений на параметры линейной части системы (3.14), который позволил удовлетворить требованиям теоремы Хопфа о существовании предельного цикла.

Учитывая явный вид нелинейной функции потребления $C(Y)$, получим в результате необходимых преобразований систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= -\alpha\beta S u_1 + (\alpha\beta\varphi_1 - \beta - \alpha S)u_2 + \alpha\beta(C_3 y_1^* + C_2) \frac{u_1^2}{2} + \\ &+ \alpha(C_3 y_1^* + C_2)u_1 u_2 + \alpha\beta\varphi_2 \frac{u_2^2}{2} + \alpha\beta C_3 \frac{u_1^3}{6} + \\ &+ \alpha C_3 \frac{u_1^2 u_2}{2} + \alpha\beta\varphi_3 \frac{u_2^3}{6}, \end{aligned} \quad (2.26)$$

$$\text{где } S = 1 - C_1 - C_2 y_1^* - C_3 \frac{(y_1^*)^2}{2}.$$

Рассмотрим частный случай системы (2.26) при условиях $\varphi_2 = 0$, $C_3 y_1^* + C_2 = 0$. При соблюдении вышеуказанных ограничений в (2.26) исчезают квадратичные слагаемые, т. е. имеется симметрия относительно замены $u_1 \Leftrightarrow -u_1$, $u_2 \Leftrightarrow -u_2$. Далее, если предположить, что

$$G = -\frac{C_2(C_2^2 + 3C_3(1 - C_1))}{3C_3^2},$$

то уравнение для особых точек y_1 факторизуется следующим образом

$$(C_3 y_1 + C_2) \left(\frac{y_1^2}{6} + \frac{C_2}{3C_3} y_1 - \frac{(C_2^2 + 3C_3(1 - C_1))}{3C_3^2} \right) = 0. \quad (2.27)$$

Соответственно, $y_1^* = -\frac{C_2}{C_3}$ есть координата положения равновесия, в окрестности которого исследуется поведение системы (2.26).

Чтобы обеспечить положительность y_1^* , допускаем $C_2 < 0$, $C_3 > 0$, а параметр $S = 1 - C_1 + \frac{C_2^2}{2C_3} > 0$.

После оговоренных выше упрощений система (2.26) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= u_2, \\ \dot{u}_2 &= -\alpha\beta s u_1 + (\alpha\beta\varphi_1 - \beta - \alpha s)u_2 + \alpha\beta C_3 \frac{u_1^3}{6} + \\ &+ \alpha C_3 \frac{u_1^2 u_2}{2} + \alpha\beta\varphi_3 \frac{u_2^3}{6}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Нас будут интересовать качественные свойства системы (2.28) в окрестности тривиального положения равновесия $u_1^* = 0$, $u_2^* = 0$. Для определения типа равновесия необходимо выяснить спектральные свойства линейной части (2.28) с соответствующим характеристическим уравнением

$$\lambda^2 - \mu_1 \lambda + \alpha\beta S = 0, \quad (2.29)$$

где $\mu_1 = \alpha\beta\varphi_1 - \alpha S - \beta$.

Явный вид квадратичного уравнения (2.29) аналогичен характеристическому полиному в [12]. Поэтому при анализе ситуации возникновения периодического режима в системе (2.29) в результате смены устойчивости особой точки типа сложного фокуса

$$\lambda_{1,2} = \frac{\mu_1}{2} \pm i\omega, \quad \omega^2 = \alpha\beta S$$

можно сделать вывод о том, что причиной этого явления является переход линейного параметра акселератора через некоторое критическое значение $\varphi_1^C = \frac{\alpha S + \beta}{\alpha\beta}$.

При этом значение производной собственного числа λ по малому параметру μ_1 отлично от нуля

$$\frac{d\lambda}{d\mu_1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

Так как имеются связи между (3.18) и (3.19)

$$\begin{aligned} g_{20} &= \frac{1}{4}(a_{20} - a_{02} + 2b_{11} + i(b_{20} - b_{02} - 2a_{11})), \\ \bar{g}_{11} &= \frac{1}{4}(a_{20} + a_{02} - i(b_{20} + b_{02})), \end{aligned}$$

то получим параметрические ограничения на существование трех предельных циклов.

Согласно условию (3.25)

$$\begin{aligned} a_{20} - a_{02} + 2b_{11} &= 4(a_{20} + a_{02}) \\ b_{20} - b_{02} - 2a_{11} &= -4(b_{20} + b_{02}) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} 2b_{11} &= 3a_{20} + 5a_{02}, \\ 2a_{11} &= 5b_{20} + 3b_{02}. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Соотношения (3.26) являются алгебраическими условиями существования трех предельных циклов в системе общего вида (3.18). Они получены прямыми вычислениями соответствующих ляпуновских величин для шестипараметрической квадратичной системы без применения каких либо канонических моделей типа систем Баутина, Андроной и др. [6], использующих пяти параметрическую форму представления исследуемых моделей.

При наличии параметрических возмущений запишем дифференциальное уравнение, характеризующее динамику амплитуды колебаний с тремя малыми параметрами β_j , $j = 1, 3$:

$$\dot{\rho} = \beta_1 \rho + \beta_2 \rho^2 + \beta_3 \rho^3 + l_3 \rho^4. \quad (3.27)$$

Здесь $\beta_1 = \mu$, $\beta_2 = l_1$, $\beta_3 = l_2$, $l_3 \neq 0$.

Бифуркационная диаграмма системы для случая $l_3 < 0$ изображена на рис. 3.2 [4].

- 1) $\mu = g_{11} = 0$;
- 2) $\mu = g_{20} + \bar{g}_{11} = 0$;
- 3) $\mu = \text{Im}(g_{20}g_{11}) = \text{Im}(\bar{g}_{11}^3 g_{02}) = \text{Im}(g_{20}^3 g_{02}) = 0$;
- 4) $\mu = g - 4\bar{g}_{11} = |g_{02}| - 2|g_{11}| = 0$.

Выражения (3.20) означают условия существования первого интеграла в системе (3.18), т. е. наличия гамильтониана. В такой системе имеется бесконечный набор периодических траекторий, непрерывно зависящий от начальных условий. Естественно, изолированных замкнутых траекторий (предельных циклов) в условиях гамильтоновости существовать не может.

В статье Х. Жоладека [48] приведены формулы для вычисления трех ляпуновских величин для уравнения (3.19)

$$\begin{aligned} l_1 &= -\frac{1}{2} \text{Im} g_{20}g_{11}, \\ l_2 &= -\frac{1}{12} \text{Im}((g_{20} - 4\bar{g}_{11})(g_{20} + \bar{g}_{11})\bar{g}_{11}g_{02}), \\ l_3 &= -\frac{5}{64} \text{Im}((4|g_{11}|^2 - |g_{02}|^2)(g_{20} + \bar{g}_{11})\bar{g}_{11}^2g_{02}). \end{aligned} \quad (3.21)$$

Таким образом с помощью (3.21) нетрудно установить цикличность особой точки:

- 1) циклы отсутствуют, если $\mu \neq 0$;

- 2) имеется единственный предельный цикл, если $\mu = 0$

$$\text{Im}(g_{20}g_{11}) \neq 0; \quad (3.22)$$

- 3) сосуществуют два предельные цикла, если $\mu = \text{Im}(g_{20}g_{11}) = 0$;

$$g_{20} \neq 4\bar{g}_{11}; \quad (3.23)$$

- 4) наблюдаются три предельные цикла, если

$$\mu = g_{20} - 4\bar{g}_{11} = 0. \quad (3.24)$$

В таком случае можно говорить об удовлетворении условий теоремы Хопфа о рождении в системе (2.28) из сложного фокуса предельного цикла вокруг тривиального положения равновесия.

Сам по себе факт наличия автоколебательного режима является весьма примечательным, однако малоинформативным. Бифуркационная теорема Хопфа не дает ответа на вопрос о единственности предельного цикла и характере его устойчивости.

Для решения поставленных задач приведем (2.28) к виду нормальной формы Пуанкаре при $\mu_1 = 0$, используя замену переменных $u_1 = x_1, u_2 = -\omega x_2$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -\omega x_2, \\ \dot{x}_2 &= \omega x_1 - \frac{\alpha\beta C_3}{\omega} \frac{x_1^3}{6} + \alpha C_3 \frac{x_1^2 x_2}{2} + \alpha\beta\varphi_3 \omega^2 \frac{x_2^3}{6}. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Система (2.30) может быть сведена к комплексному дифференциальному уравнению

$$\dot{Z} = i\omega Z + g_{30} \frac{Z^3}{6} + g_{21} \frac{Z^2 \bar{Z}}{2} + g_{12} \frac{Z \bar{Z}^2}{2} + g_{03} \frac{\bar{Z}^3}{6}, \quad (2.31)$$

где $Z = x_1 + ix_2, \bar{Z} = x_1 - ix_2$;

$$\begin{aligned} g_{30} &= \frac{\alpha \left(3C_3 - \beta\omega^2\varphi_3 - \frac{i\beta C_3}{\omega} \right)}{8}; \quad g_{21} = \frac{\alpha \left(C_3 + \beta\omega^2\varphi_3 - \frac{i\beta C_3}{\omega} \right)}{8}; \\ g_{12} &= \frac{\alpha \left(-C_3 - \beta\omega^2\varphi_3 - \frac{i\beta C_3}{\omega} \right)}{8}; \quad g_{03} = \frac{\alpha \left(-3C_3 + \beta\omega^2\varphi_3 - \frac{i\beta C_3}{\omega} \right)}{8}. \end{aligned}$$

Располагая конкретными выражениями коэффициентов g_{ij} нетрудно определить первую ляпуновскую величину

$$l_1(0) = \text{Re} \frac{g_{21}}{2} = \frac{\alpha(C_3 + \beta\omega^2\varphi_3)}{16}. \quad (2.32)$$

Как и ранее [5], предполагаем $\varphi_3 < 0$ вследствие эффекта инвестиционного насыщения, а коэффициент $C_3 > 0$. Поэтому в формуле (2.32) возможна перемена знака, что свидетельствует о различных типах устойчивости предельных циклов. Из (2.32) непосредственно следует устойчивость предельного цикла при $C_3 + \beta\omega^2\varphi_3 < 0$ ($l_1(0) < 0$), а при противоположных знаках неравенств имеет место неустойчивый автоколебательный режим с катастрофической потерей устойчивости.

Значительно больший интерес представляет случай, когда первая ляпуновская величина является малой знакопеременной величиной, т. е.

$$l_1 = \mu_2. \quad (2.33)$$

Хорошо известно [6], что поведение динамических систем вблизи таких значений параметров, удовлетворяющих равенству $C_3 + \beta\omega^2\varphi_3 = 0$, при которых первая ляпуновская величина l_1 обращается в нуль, существенно зависит от знака второй ляпуновской величины l_2 . В зависимости от первой и второй ляпуновских величин и знака действительной части корней характеристического уравнения μ_1 в малой окрестности состояния равновесия на фазовой плоскости могут существовать один или два предельные цикла при всех возможных сочетаниях устойчивости и неустойчивости (один устойчивый или неустойчивый предельный цикл или два предельные цикла – устойчивый внутри неустойчивого или наоборот).

Вторая ляпуновская величина определяется по формуле

$$l_2 = \frac{-1}{12\omega} \operatorname{Im} g_{30} g_{12}. \quad (2.34)$$

После подстановки в (2.34) фактических значений параметров получим

$$l_2 = \frac{\beta\alpha^2 C_3}{6\omega^2} (C_3 - \beta\omega^2\varphi_3)$$

или с учетом того, что справедливо $C_3 + \beta\omega^2\varphi_3 = 0$, –

Система двух обыкновенных дифференциальных уравнений (3.18) является нормальной формой Пуанкаре и может быть непосредственно применена для вычисления основных характеристик рождающегося предельного цикла, таких как амплитуда, частота и период колебаний, а также для определения устойчивости периодических решений. В работе В. Занга [19] предъявлены соответствующие формулы и доказано, что предельный цикл может быть как устойчивым, так и неустойчивым в зависимости от значений характерных параметров.

Здесь уместно подчеркнуть, что в цитируемой выше работе рассматривалась ситуация, когда рождающийся предельный цикл является единственным с вполне определенным типом устойчивости. Однако при этом важнейшим вопросом при исследовании бифуркации Хопфа является проблема максимального количества предельных циклов, которые могут появиться из положения равновесия (неподвижной точки) при параметрическом возмущении исследуемой системы. Эта задача решена полностью только для квадратичного случая полиномиальных систем Н. Н. Баутиным [6], где доказано, что максимальное число предельных циклов, которые могут возникнуть в квадратичной системе из особой точки типа фокус, равно трем.

Для определения максимальной кратности предельного цикла в системе дифференциальных уравнений (3.18) необходимо вычислить значения первых трех ляпуновских фокусных величин.

Представим систему (3.18) в форме одного комплексного дифференциального уравнения для переменной $Z = x_1 + ix_2$ при $\mu \neq 0$.

$$\dot{Z} = (i + \mu)z + g_{20} \frac{Z^2}{2} + g_{11} Z \bar{Z} + g_{02} \frac{\bar{Z}^2}{2}, \quad (3.19)$$

где $g_{jk} = g_{jk}(a_{jk}, b_{jk})$, $\bar{j}, \bar{k} = 0, 2$, $j + k = 2$.

Особая точка из фокуса превращается в центр при выполнении следующих условий:

Иначе говоря, собственные числа пересекают мнимую ось с ненулевой скоростью.

Таким образом, соблюдены условия бифуркационной теоремы Хопфа и в системе (3.14) при смене устойчивости положения равновесия типа сложного фокуса происходит рождение (или гибель) предельного цикла с возникновением соответствующего режима автоколебаний.

В качестве бифуркационного выбран параметр $F_Y = L_R$, что равносильно условию

$$I_Y - S_Y - L_R = 0.$$

Для анализа данной бифуркации при помощи замены переменных $Y = F_R x_1$, $R = L_R x_1 + \omega_0 x_2$ построим нормальную форму системы (3.14) при $\mu = 0$.

В результате преобразований с изменением масштаба времени $\tau = \omega t$ получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + a_{20} \frac{x_1^2}{2} + a_{11} x_1 x_2 + a_{02} \frac{x_2^2}{2}, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + b_{20} \frac{x_1^2}{2} + b_{11} x_1 x_2 + b_{02} \frac{x_2^2}{2}; \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\text{где } a_{20} = \frac{F_R^2 F_{YY} + 2F_R L_R F_{YR} + L_R^2 F_{RR}}{\omega_0 F_R};$$

$$a_{11} = F_{YR} + \frac{L_R F_{RR}}{F_R}; \quad a_{02} = \frac{\omega_0 F_{RR}}{F_R};$$

$$b_{20} = \frac{F_R^2 (F_R L_{YY} - F_{YY}) + 2F_R L_R (F_R L_{YR} - F_{YR}) + L_R^2 (F_R L_{RR} - F_{RR})}{\omega_0 F_R};$$

$$b_{11} = \frac{F_R^2 L_{YR} - F_R F_{YR} + L_R (F_R L_{RR} - F_{RR})}{\omega_0 F_R}; \quad b_{02} = L_{RR} - \frac{F_{RR}}{F_R}.$$

$$l_2 = \frac{\beta \alpha^2 C_3^2}{3\omega^2}. \quad (2.35)$$

Очевидно, что величина l_2 не обращается в нуль ни при каких значениях параметров и строго положительна, т. е. $l_2 > 0$.

Если перейти от комплекснозначных переменных к полярным координатам, то будем иметь два независимых дифференциальных уравнения для амплитуды и фазы циклов

$$\dot{\rho} = \rho(\mu_1 + \mu_2 \rho^2 + l_2 \rho^4), \quad (2.36)$$

$$\dot{\psi} = \omega.$$

Положительные равновесия для первого уравнения (2.37) удовлетворяют биквадратному уравнению

$$\mu_1 + \mu_2 \rho^2 + l_2 \rho^4 = 0. \quad (2.38)$$

Уравнение (2.38) может иметь нуль, одно или два положительных решений (циклов).

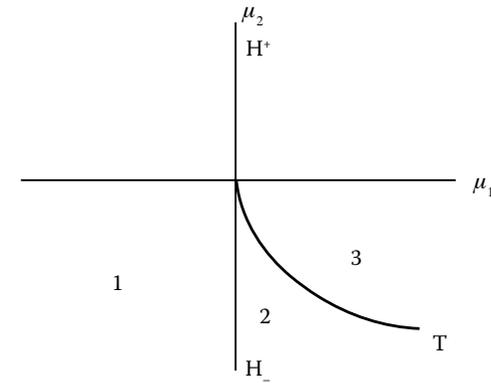


Рис. 2.1. Бифуркационная диаграмма

На рис. 2.1. изображена соответствующая бифуркационная диаграмма. Линия $H = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_1 = 0\}$ относится к обычной бифуркации Хопфа. Положение равновесия устойчиво при $\mu_1 < 0$ и

неустойчиво для $\mu_1 > 0$. Если мы пойдём по линии $\mu_1 = 0$ в точки, где $\mu_2 < 0$, то на фазовой плоскости из сложного фокуса второго порядка родится неустойчивый предельный цикл (грубый), а фокус делается негрубым устойчивым. Когда же мы выйдем, пересекая H^- , в область 2, то из устойчивого сложного фокуса рождается устойчивый предельный цикл. В области 2 одновременно сосуществуют оба цикла: устойчивый и неустойчивый, которые сливаются и исчезают на линии $T = \{(\mu_1, \mu_2) : \mu_2^2 = 4l_2\mu_1, \mu_2 < 0\}$.

Линия T характеризует бифуркацию двукратного цикла. Далее в области 3 предельные циклы отсутствуют.

На рис. 2.2 изображена область сосуществования двух предельных циклов.

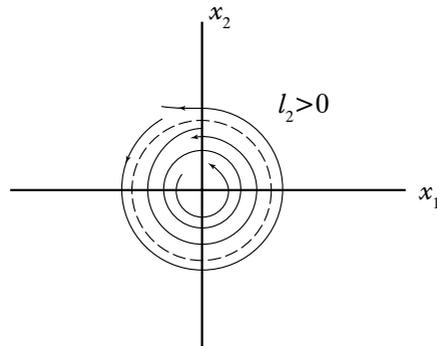


Рис. 2.2. Устойчивый и неустойчивый предельные циклы

В завершение данного исследования хотелось бы отметить, что наличие двух предельных циклов в исходной динамической системе мультипликатора-акселератора обусловлено наличием не только нелинейности в функции акселератора, но и существенной нелинейностью функции потребления, т. к. именно соотношение между нелинейными коэффициентами указанных функций обеспечивает бифуркацию двукратного цикла.

где коэффициенты при квадратичных слагаемых есть вторые производные по соответствующим переменным в точке равновесия Y_0, R_0 , а величины $F_Y = I_Y - S_Y > 0$ и $F_R = I_R + S_R > 0$.

Матрица линейной части (3.14) в точке равновесия имеет представление

$$A = \begin{pmatrix} F_Y & -F_R \\ L_Y & -L_R \end{pmatrix}$$

с соответствующим характеристическим полиномом

$$\lambda^2 - trA \cdot \lambda + det A = 0, \quad (3.15)$$

где $trA = F_Y - L_R$ – след матрицы A, $det A = F_R L_Y - F_Y L_R$ – определитель матрицы A.

В случае, когда $trA < 0$ и $det A > 0$ можно утверждать, что система (3.14) устойчива в линейном приближении. Нас более предметно будет интересовать ситуация в малой окрестности на границе области линейной устойчивости $trA = \mu$, где μ – малая знакпеременная величина. Это означает, что величины F_Y и L_R достаточно близки, а их точное равенство означает переход через нуль дивергенции векторного поля переменных $Y(t), R(t)$.

Так как $det A > 0$, можно положить $\omega^2(\mu) = det A = F_R L_Y - F_Y L_R$ и $F_Y = L_R + \mu$.

Тогда (3.15) преобразуется следующим образом

$$\begin{aligned} \lambda^2 - \mu\lambda + \omega_0^2 - \mu L_R &= 0, \\ \omega_0^2 &= F_R L_Y - L_R^2. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Дифференцируя (3.16) по параметру μ при $\mu = 0$ получим

$$\frac{d\lambda}{d\mu} = \frac{1}{2} - i \frac{L_R}{2\omega_0} \quad (3.17)$$

Из (3.17) следует, что вещественная часть производной собственного числа отлична от нуля.

Относительно функции спроса на инвестиции следует отметить, что значения $I(Y, R)$ находятся в прямой зависимости от величины национального дохода и в обратной от процентной ставки. С другой стороны, это значит, что рост дохода или процентной ставки будет стимулировать население к увеличению сбережений, а при условии возрастания объема производства (дохода) денежный спрос $L(Y, R)$ возрастает.

Для системы (3.12) предположим существование, как минимум, одного положительного особого решения Y_0, R_0 , являющегося положением статического равновесия $IS - LM$ модели. Для алгебраического вычисления комбинации значений величины национального дохода и ставки процента необходимо решить систему уравнений

$$\begin{aligned} I(Y_0, R_0) &= S(Y_0, R_0), \\ L(Y_0, R_0) &= M. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Анализ динамических свойств системы (3.12) достаточно ограничить локальной областью двумерного пространства исходных переменных $Y(t)$ и $R(t)$ вблизи положения равновесия Y_0, R_0 .

С этой целью введем переменные величины $\bar{Y}(t) = Y(t) - Y_0$, $\bar{R}(t) = R(t) - R_0$, имеющие смысл отклонений от равновесных значений дохода и процентной ставки и разложим правые части системы (3.12) в ряд Тейлора в точке равновесия, сохранив слагаемые первой и второй степени по соответствующим переменным. Для удобства опустим черту над переменными и, не нарушая общности, положим $\tau_R = \tau_Y = 1$, $F(Y, R) = I(Y, R) - S(Y, R)$.

Тогда система (3.12) может быть представлена в виде

$$\begin{aligned} \frac{dY}{dt} &= F_Y Y - F_R R + F_{YY} \cdot \frac{Y^2}{2} + F_{YR} YR + F_{RR} \cdot \frac{R^2}{2} + O(|Y|^2 + |R|^2)^{\frac{3}{2}}, \\ \frac{dR}{dt} &= L_Y Y - L_R R + L_{YY} \cdot \frac{Y^2}{2} + L_{YR} YR + L_{RR} \cdot \frac{R^2}{2} + O(|Y|^2 + |R|^2)^{\frac{3}{2}}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

2.3. Циклические режимы в нелинейной модели мультипликатора-акселератора с двумя степенями свободы

Рассмотрим модель мультипликатора-акселератора с учетом пространственной неоднородности. Такая модель отражает особенности межрегиональной торговли при введении мультипликатора импорта-экспорта, что согласуется с уже изученным ранее мультипликатором локальных расходов и общей макроэкономической концепцией Кейнса и Самуэльсона [30, 31]. Пусть количество ввезенного товара зависит от локального дохода Y , который теперь является функцией времени t , и обобщенной пространственной координаты r . Допуская в качестве первого приближения локальное действие, полагаем, что импортируемые товары будут ввозиться из ближайших окрестностей изучаемой точки, тогда как экспортная продукция будет производиться при воздействии той же самой склонности к импортированию в окрестности этой точки. Тогда чистое активное торговое сальдо определяется произведением постоянной склонности к импортированию и разницей доходов экспортно-импортных операций. Иначе говоря, мы можем записать вышеизложенное с помощью формулы

$$X - M = m \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2},$$

где X – объем экспорта;

M – объем импорта;

m – постоянная склонность к импортированию.

Пространственная модель мультипликатора-акселератора будет представлена в виде одного дифференциального уравнения второго порядка с нелинейной функцией инвестиций

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} + SY - m \frac{\partial^2 Y}{\partial r^2} = (\nu - 1 - S) \frac{\partial Y}{\partial t} - \frac{\nu}{3} \left(\frac{\partial Y}{\partial t} \right)^3, \quad (2.39)$$

где S – предельная склонность к сбережению;

ν – коэффициент акселератора.

В нашем обсуждении предполагается, что все параметры модели S, v, m – являются постоянными положительными величинами, не зависящими ни от времени, ни от пространственной координаты.

Модель, описываемая уравнением (2.39), является достаточно сложным математическим объектом, демонстрирующим многообразие форм пространственно-временной организации. Поэтому в дальнейшем изложении мы сконцентрируемся на динамических процессах, предварительно дискретизовав пространство на две части, взаимосвязанные региональной торговлей. Это поможет нам изучить такие явления как частотное согласование и квазипериодическое движение. Другими словами, мы можем столкнуться с новым видом аттрактора – *инвариантным тором*.

Уравнение в частных производных (2.39) представляется в форме двух согласованных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка:

$$\begin{aligned} \ddot{Y}_1 + (S_1 + m_1)Y_1 - m_2 Y_2 &= (v_1 - 1 - S_1)\dot{Y}_1 - \frac{v_1}{3}\dot{Y}_1^3, \\ \ddot{Y}_2 + (S_2 + m_2)Y_2 - m_1 Y_1 &= (v_2 - 1 - S_2)\dot{Y}_2 - \frac{v_2}{3}\dot{Y}_2^3. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Здесь мы допустили, что параметры акселератора, темпов накоплений и импорта различны для каждой области дискретизации.

Ранее для модели мультипликатора-акселератора в одной области нами были обнаружены периодические режимы с появлением соответствующих автоколебаний и исследован характер их устойчивости. По всей видимости, для модели с двумя областями циклическое движение также является вероятным. Более того, возможным является квазипериодическое движение с двумя согласованными частотами.

Рассмотрим систему (2.40) в традиционной форме системы дифференциальных уравнений первого порядка, размерность которой будет равна 4.

Пусть $x_1 = Y_1, x_2 = \dot{Y}_1, x_3 = Y_2, x_4 = \dot{Y}_2$. Тогда (2.40) предстанет в виде

3.2. IS – LM МОДЕЛЬ КЕЙНСА

Рассмотрим динамическую экономическую систему, представленную Д. Кейнсом в его «Общей теории занятости, процента и денег» [20]. Данная модель выражает условия достижения совместного равновесия на рынках благ и денег и называется, соответственно, *IS-LM* моделью. В самой простой форме деловой цикл описывается при помощи системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \tau_Y \frac{dY}{dt} &= I(Y, R) - S(Y, R), \\ \tau_R \frac{dR}{dt} &= L(Y, R) - M. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Согласно В. Зангу [19] здесь все параметры и переменные положительны и означают: $Y = Y(t)$ – величину национального дохода; $R = R(t)$ – ставку процента; $I = I(Y, R)$ – функцию спроса на инвестиции, возрастающую по величине национального дохода $\frac{\partial I}{\partial Y} = I_Y > 0$ и убывающую по норме процента $\frac{\partial I}{\partial R} = -I_R < 0$; $S = S(Y, R)$ – функцию сбережений, возрастающую по обоим переменным $\frac{\partial S}{\partial Y} = S_Y > 0, \frac{\partial S}{\partial R} = S_R > 0$; $L = L(Y, R)$ – совокупный денежный спрос, растущий по доходу $\frac{\partial L}{\partial Y} = L_Y > 0$ и убывающий по процентной ставке $\frac{\partial L}{\partial R} = -L_R < 0$; M – постоянное предложение денег; τ_Y, τ_R – соответствующие временные постоянные.

Система (3.12) иллюстрирует действие простого механизма: превышение спроса на инвестиции над объемом сбережений приводит к увеличению национального дохода, и наоборот; а в случае, когда совокупный спрос на денежные ресурсы выше, чем имеющееся предложение, процентная ставка возрастает.

моделирование. По этой причине в настоящей работе используется методология выявления, анализа и прогнозирования происходящих в экономике процессов и явлений самоорганизации качественными методами исследования динамических моделей. Выявляя существенно нелинейные процессы самоорганизации, мы имеем возможность выделить как управляемые факторы, так и те, которые не подвержены нашему влиянию [34].

В результате исследования мы наглядно продемонстрировали, что макроэкономическая модель роста может иметь несколько положений статического равновесия. Соответственно, в динамике состояниям равновесия системы соответствуют свои траектории эволюции. В случае, когда структура экономики является грубой, малые возмущения внешней среды не способны «выбить» ее со своей траектории роста. В ситуации негрубой системы даже малый скачок параметров (или «шок») допускает внезапный переход в другое состояние равновесия и траектория развития претерпевает качественные изменения. Слияние же положений равновесия сопровождается бифуркацией с катастрофической потерей устойчивости. В данной работе для квадратичной функции потребления были изучены эффекты вблизи двукратного положения равновесия с появлением катастрофы типа «складка». Если учесть нелинейности более высокого порядка, то возможно наблюдать бифуркации трехкратного вырождения положений равновесия с катастрофой «сборка», четырехкратного вырождения положений равновесия с катастрофой «ласточкин хвост» и т. д.

Качественное исследование свойств макроэкономической модели роста должно предшествовать выработке эффективных методов управления экономической системой на основе принципов самоорганизации. Использование самоорганизации позволяет оптимизировать издержки функционирования экономической системы, не допускать попадание управляющих параметров в зоны нежелательных бифуркаций и катастроф [22].

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2, \\ \dot{x}_2 &= -(S_1 + m_1)x_1 + (v_1 - 1 - S_1)x_2 + m_2x_3 - v_1 \frac{x_2^3}{3}, \\ \dot{x}_3 &= x_4, \\ \dot{x}_4 &= m_1x_1 - (S_2 + m_2)x_3 + (v_2 - 1 - S_2)x_4 - v_2 \frac{x_4^3}{3}. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Очевидно, что система (2.41) имеет тривиальное равновесие $x_i^* = 0, i = \overline{1, 4}$. Матрица линейной части (2.41) соответствующей данной особой точки выглядит следующим образом:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -(S_1 + m_1) & v_1 - 1 - S_1 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ m_1 & 0 & -(S_2 + m_2) & v_2 - 1 - S_2 \end{pmatrix}. \quad (2.42)$$

Матрица (2.42) обладает характеристическим полиномом

$$\begin{aligned} &(\lambda^2 - (v_1 - 1 - S_1)\lambda + S_1 + m_1)(\lambda^2 - \\ &-(v_2 - 1 - S_2)\lambda + S_2 + m_2) - m_1m_2 = 0. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Уравнение (2.43) есть уравнение четвертой степени, следовательно имеет четыре корня. Для нас наибольший интерес представляет ситуация, когда (2.43) имеет две пары комплексно сопряженных корней с малыми параметрами в действительных частях, т. е.

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha_1}{2} \pm i\omega_1, \quad \lambda_{3,4} = \frac{\alpha_2}{2} \pm i\omega_2. \quad (2.44)$$

Если предположить, что $v_i = 1 + S_i + \alpha_i, i = 1, 2$, то при $\alpha_i = 0$ существуют критические значения параметров акселераторов $v_i^c = 1 + S_i$, отвечающие за возможное появление соответствующих предельных циклов.

При $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ уравнение (2.43) примет вид биквадратного уравнения

$$\lambda^4 + (S_1 + m_1 + S_2 + m_2)\lambda^2 + (S_1 + m_1)(S_2 + m_2) - m_1 m_2 = 0,$$

которое при $\lambda^2 = -\omega^2$ дает уравнения для частот

$$\omega^4 - (S_1 + m_1 + S_2 + m_2)\omega^2 + (S_1 + m_1)(S_2 + m_2) - m_1 m_2 = 0. \quad (2.45)$$

Так как свободный член в (2.45) положителен, то (2.45) имеет два положительные корня для определения квадратов частот

$$\omega_{1,2}^2 = \frac{(S_1 + m_1 + S_2 + m_2) \pm \sqrt{D}}{2},$$

$$D = (S_1 + m_1 + S_2 + m_2)^2 - 4((S_1 + m_1)(S_2 + m_2) - m_1 m_2) > 0.$$

Для определенности положим $\omega_1 > \omega_2$. Если сравнить значения так называемых собственных частот $\bar{\omega}_i = \sqrt{S_i + m_i}$, $i = 1, 2$, то нетрудно доказать, что $\omega_1 > \bar{\omega}_1$, а $\omega_2 < \bar{\omega}_2$. Это означает, что общая частота согласованных колебаний либо больше максимальной, либо меньше минимальной из естественных частот. С другой стороны, в случае свободных колебаний при отсутствии внешних воздействий согласованная система никогда не сможет колебаться с промежуточной, по сравнению с естественными, частотой. Экономическая интерпретация данного факта состоит в том, что взаимосвязь двух регионов посредством торговых отношений ускоряет или замедляет цикл деловой активности в обеих областях.

Для дальнейшего рассмотрения свойств четырехмерного потока, обладающего положением равновесия с двумя парами чисто мнимых собственных значений, необходимо построить нормальную форму для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (2.41). Это можно сделать с помощью ряда линейных преобразований исходных переменных в следующей последовательности:

гистического экономического роста. При стремлении A к нулю два положения равновесия сливаются в одно и наблюдается состояние динамической неопределенности в смысле устойчивости экономической траектории роста с возможным «выбросом» соответствующей траектории в область депрессивной динамики. Возвращаясь к базовому макроэкономическому уравнению (3.2), сформулируем соответствующее условие устойчивости: производная функции потребления по объему ВВП в точке равновесия должна быть больше единицы

$$C'_Y(Y^*) > 1. \quad (3.11)$$

В этом случае, если исходить из гипотезы абсолютного дохода Кейнса, функция потребления является линейной

$$C(Y) = C_0 + C_1 Y.$$

Тогда, из (3.11) следует, что наблюдается экспоненциально неустойчивый рост, т. к. ранее предполагалось выполнение условия $C_1 < 1$.

Другими словами, модель экономического роста с линейной функцией потребления может быть устойчива только при условии превышения единицы предельной склонности к потреблению. Очевидно, что такое условие на практике не может быть выполнено для любых объемов ВВП. Это, в свою очередь, порождает дискуссии о различном поведении функции потребления в краткосрочном и долгосрочном периодах.

Подобного недостатка лишена функция потребления, построенная на гипотезе относительного дохода, ранее упомянутая нами.

Таким образом проблема изучения устойчивости экономического роста, описываемая уравнениями (3.1), (3.2), при наличии вышеуказанных существенных упрощающих предположений сведена к структурным свойствам функции потребления. Вполне естественно, что всегда существуют параметры, по той или иной причине оказавшиеся вне рамок нашего формального анализа. Это затрудняет применение стандартных структурных методов макроэкономического прогнозирования, таких как, например, имитационное

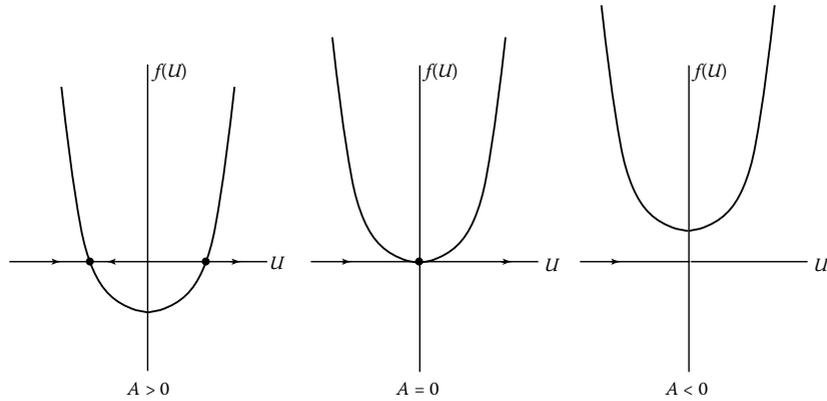


Рис. 3.1. Бифуркационная диаграмма для случая «двукратного равновесия»

Будем следить за устойчивым положением равновесия. Тогда при приближении параметра к бифуркационному значению $A = 0$ область притяжения этого равновесия с одной из сторон уменьшается, и после исчезновения равновесия все решения уходят из рассматриваемой фазовой области. В экономических приложениях такое явление называют «срывом равновесия».

Отметим, что при бифуркационном значении параметра $A = 0$ отображение проектирования $f(U, A) = 0$ на пространство параметров имеет особенность типа «складка». То есть имеет место потеря устойчивости – катастрофа «складка».

Важным количественным параметром зоны устойчивого развития модели экономического развития является параметр A , являющийся мерой расстояния между положениями равновесия Y_1 и Y_2 (или X_1 и X_2)

$$A = C_2^2(Y_2 - Y_1)^2 = C_2^2(X_2 - X_1)^2.$$

В случае, когда A достаточно далеко от нуля, одно из положений равновесия является устойчивым, другое – неустойчивым. Такая ситуация является достаточно типичной, например, при изучении ло-

$$\begin{aligned} x_1 &= m_2(y_1 + y_3) \\ x_2 &= -m_2(\omega_1 y_2 + \omega_2 y_4) \\ x_3 &= (S_1 + m_1 - \omega_1^2)y_1 + (S_1 + m_1 - \omega_2^2)y_3 \\ x_4 &= -\omega_1(S_1 + m_1 - \omega_1^2)y_2 - \omega_2(S_1 + m_1 - \omega_2^2)y_4. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Трансформация (2.46) переводит систему четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для действительных переменных в систему двух комплексных дифференциальных уравнений, которая с помощью перехода к полярным координатам $Z_j = \rho_j e^{i\phi_j}$, $j = \overline{1, 2}$ имеет следующее представление

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \alpha_1 \rho_1 + a_{11} \rho_1^3 + a_{12} \rho_1 \rho_2^2, \\ \dot{\rho}_2 &= \alpha_2 \rho_2 + a_{21} \rho_1^2 \rho_2 + a_{22} \rho_2^3, \\ \dot{\phi}_1 &= \omega_1 + O(|\rho|^2), \\ \dot{\phi}_2 &= \omega_2 + O(|\rho|^2). \end{aligned} \quad (2.47)$$

Здесь $|\rho|^2 = \rho_1^2 + \rho_2^2$; α_1, α_2 – малые знакопеременные параметры; коэффициенты $Z_j = \rho_j e^{i\phi_j}$, $j = \overline{1, 2}$ являются функциями исходных параметров системы.

Мы можем многое узнать о динамике системы (2.47) из рассмотрения плоского векторного поля, получаемого путем игнорирования угловых координат, следуя методике, изложенной в [42].

Выполним шкалирование переменных ρ_1, ρ_2 для уменьшения числа параметров. Полагая $\bar{\rho}_1 = \rho_1 \sqrt{|a_{11}|}$, $\bar{\rho}_2 = \rho_2 \sqrt{|a_{22}|}$, опуская для удобства дальнейших записей черту сверху над ρ_1, ρ_2 и при необходимости масштабируя время, получим систему

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \rho_1(\alpha_1 + \rho_1^2 + b\rho_2^2), \\ \dot{\rho}_2 &= \rho_2(\alpha_2 + c\rho_1^2 + d\rho_2^2), \\ d &= \pm 1, \quad b = \frac{a_{12}}{|a_{22}|}, \quad c = \frac{a_{21}}{|a_{11}|}. \end{aligned} \quad (2.48)$$

Для системы (2.48) характерны двенадцать топологически различных ситуаций, приведенных в таблице:

Случай	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d	+	+	+	+	+	+	-	-	-	-	-	-
b	+	+	+	-	-	-	+	+	+	-	-	-
c	+	+	-	+	-	-	+	-	-	+	+	-
$d - bc$	+	-	+	+	+	-	-	+	-	+	-	-

Данная классификация основана на анализе вторичных бифуркаций типа «вилка» из нетривиальных положений равновесия плоского векторного поля. Отметим, что особая точка $(\rho_1, \rho_2) = (0, 0)$ всегда служит положением равновесия, кроме того, в положительном квадранте могут иметь место до трех следующих положений равновесия:

$$\begin{aligned} (\rho_1, \rho_2) &= (\sqrt{-\alpha_1}, 0) \text{ при } \alpha_1 < 0, \\ (\rho_1, \rho_2) &= \left(0, \sqrt{\frac{-\alpha_2}{d}}\right) \text{ при } \alpha_2 d < 0, \\ (\rho_1, \rho_2) &= \left(\sqrt{\frac{d\alpha_2 - b\alpha_1}{Q}}, \sqrt{\frac{c\alpha_1 - \alpha_2}{Q}}\right) \text{ при } \frac{d\alpha_2 - b\alpha_1}{Q}, \frac{c\alpha_1 - \alpha_2}{Q} > 0, \end{aligned} \quad (2.49)$$

где $Q = d - bc$, $d = \pm 1$.

В целом поведение системы остается сравнительно простым до тех пор, пока в ней не происходят вторичные бифуркации Хопфа из неподвижной точки $(\rho_1^*, \rho_2^*) = \left(\sqrt{\frac{d\alpha_2 - b\alpha_1}{Q}}, \sqrt{\frac{c\alpha_1 - \alpha_2}{Q}}\right)$. Для обнару-

$$\begin{aligned} \text{Если } X(\tau) &= -\frac{U(\tau)}{C_2}, \text{ то (3.5) примет вид} \\ \frac{dU}{d\tau} &= f(U, A), \quad f(U, A) = U^2 - \frac{A}{4}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Пусть $U^* = U^*(A)$ является положением равновесия уравнения (3.9) при некоторых фиксированных значениях параметра A и пусть $\lambda(A) = f'(U^*, A)$.

При $\lambda < 0$ равновесие U^* устойчиво, а при $\lambda > 0$ – неустойчиво. При малом изменении параметра A поведение траектории (3.9) в окрестности положения равновесия с $\lambda \neq 0$ качественно не изменится.

Таким образом, неравенство $\lambda \neq 0$ является условием невырожденности, выделяющим грубый случай.

Модельной системой для грубой системы в окрестности положения равновесия является линеаризованное уравнение (3.9)

$$\frac{dU}{d\tau} = \lambda U, \quad \lambda \neq 0. \quad (3.10)$$

Иная ситуация возникает, когда при некоторых значениях параметра A собственное значение λ у положения равновесия U^* обращается в нуль

$$\lambda(A) = f'(U^*, A) = 0,$$

и выполняется условие невырожденности $f''_{UU} \neq 0$. В этом случае U^* – двукратный корень уравнения $f(U^*) = 0$.

Модельное уравнение для данной бифуркации зависит от одного параметра и имеет вид (3.9). Тогда при $A > 0$ в системе (3.9) имеется два положения равновесия – устойчивое и неустойчивое (при этом неустойчивое является границей области притяжения устойчивого равновесия). При $A = 0$ они сливаются в «полуустойчивое» равновесие – возникает негрубая система. При $A < 0$ равновесия исчезают (рис. 3.1).

$$X(\tau) = \frac{X_0}{1 + C_2 X_0 \tau}, \text{ если } A = 0; \quad (3.6)$$

$$X(\tau) = \frac{4X_0 C_2 \sqrt{A} + Ath(\sqrt{A}\tau)}{4C_2 \sqrt{A} + 4X_0 C_2^2 th(\sqrt{A}\tau)}, \text{ если } A > 0; \quad (3.7)$$

$$X(\tau) = \frac{4X_0 C_2 \sqrt{-A} + Atg(\sqrt{-A}\tau)}{4C_2 \sqrt{-A} + 4X_0 C_2^2 tg(\sqrt{-A}\tau)}, \text{ если } A < 0; \quad (3.8)$$

Нетрудно заметить, что при различных значениях величины A решения дифференциального уравнения (3.5) существенно отличаются по своим свойствам, т. е. даже при небольших вариациях A в окрестности нуля происходит качественная смена сценария эволюции $X(\tau)$. Поэтому развитие ситуации может быть продиагностировано качественными методами без сложных и дорогостоящих количественных расчетов. При качественном прогнозировании следует уделять особое внимание тем факторам, которые могут изменить динамику роста ВВП как в худшую, так и в лучшую сторону.

Иначе говоря, если исследуемый процесс находится в зоне устойчивого развития, то остальная количественная информация (такая, как собственно траектория развития) становится уже менее значимой. Как правило, при макроэкономическом моделировании существуют ошибки и погрешности при задании параметров модели, а также весьма затруднен учет возмущений экзогенного характера. В этой связи уместно делать выводы не о какой-либо отдельно взятой траектории развития, а о некоторой области пространства возможных траекторий. Расчет же таких областей является предметом качественной теории дифференциальных уравнений.

Нормализуем переменную $X(\tau)$ таким образом, чтобы дифференциальное уравнение (3.5) было сведено к зависимости от одного параметра.

жения таких бифуркаций линеаризуем уравнения динамики в малой окрестности этой особой точки. В результате получим матрицу

$$T = \begin{pmatrix} \alpha_1 + 3(\rho_1^*)^2 + b(\rho_2^*)^2 & 2b\rho_1^*\rho_2^* \\ 2c\rho_1^*\rho_2^* & \alpha_2 + c(\rho_1^*)^2 + 3d(\rho_2^*)^2 \end{pmatrix},$$

имеющей след

$$trT = \frac{2}{Q}(\alpha_1 d(c-1) + \alpha_2(b-d))$$

и детерминант

$$\det T = \frac{4}{Q}((b\alpha_2 - d\alpha_1)(c\alpha_1 - \alpha_2)).$$

Учитывая условия существования данной особой точки (2.49), делаем вывод, что вторичная бифуркация Хопфа может иметь место только на прямой линии

$$\alpha_2 = \frac{d(1-c)}{b-d}\alpha_1 \quad (2.50)$$

и при этом справедливо $Q > 0$.

Отсюда сразу следует, что в случаях 2, 6, 7, 9, 11,12 вторичная бифуркация не происходит. Возможно также показать, что данная бифуркация не произойдет в случаях 1, 3, 4, 5, так как для ее реализуемости важно, чтобы угловой коэффициент прямой (2.50) лежал в промежутке между угловыми коэффициентами прямых, соответствующих «вилкам»

$$\alpha_2 = c\alpha_1, \quad \alpha_2 = \frac{d}{b}\alpha_1, \quad (2.51)$$

что равносильно

$$c < \frac{d(1-c)}{b-d} < \frac{d}{b}$$

в подходящем секторе плоскости (α_1, α_2) .

Как показывают несложные расчеты, в каждом случае данное требование не обеспечивает выполнение условия $Q > 0$.

Рассмотрим случай 8, в котором может произойти бифуркация Хопфа. Некоторые бифуркационные множества и фазовые портреты для этого случая представлены на рис. 2.3.

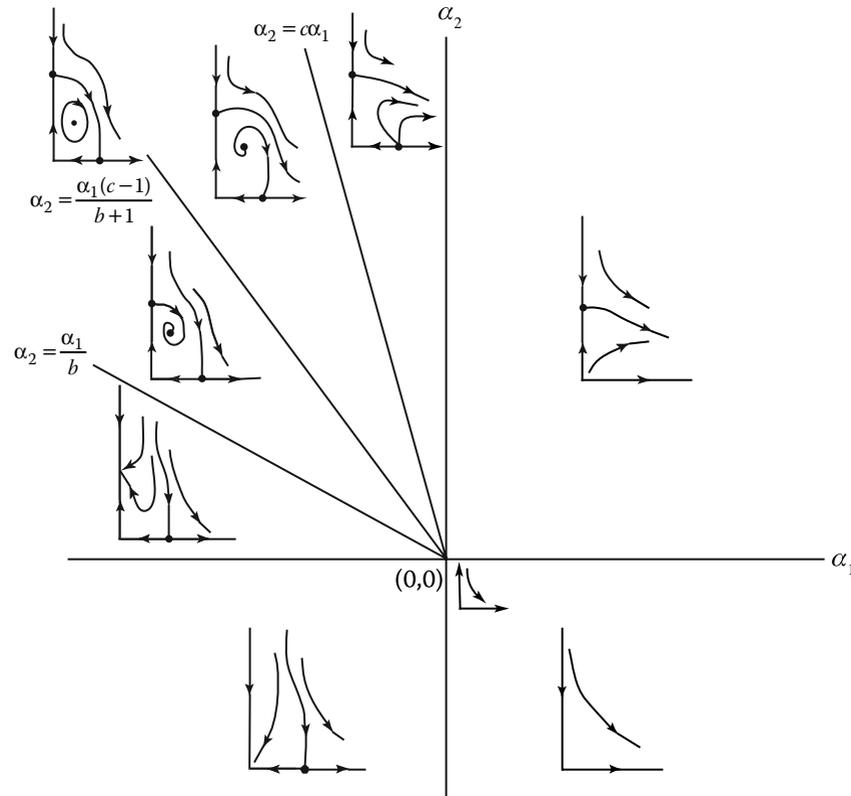


Рис. 2.3. Частичное бифуркационное множество вторичной бифуркации Хопфа

На линии бифуркации Хопфа (2.50) система

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_1 &= \rho_1(\alpha_1 + \rho_1^2 + b\rho_2^2), \\ \dot{\rho}_2 &= \rho_2\left(\frac{c-1}{b+1}\alpha_1 + c\rho_1^2 - \rho_2^2\right), \end{aligned} \quad (2.50)$$

Особые решения (3.2), соответствующие положениям статического равновесия, находятся из условия

$$\frac{dY}{dt} = 0 \quad \text{или} \quad C_2 Y^2 - (1 - C_1)Y + R = 0. \quad (3.3)$$

Квадратное уравнение (3.3) имеет представление решений

$$Y_{1,2}^* = \frac{1 - C_1 \pm \sqrt{A}}{2C_2}, \quad A = -4C_2 R + (1 - C_1)^2. \quad (3.4)$$

Если $C_1 < 1$, что обычно предполагается, и $A > 0$, то $Y_{1,2}^*$ – различные положительные числа. Иначе говоря, уравнение (3.2) имеет два положения равновесия, и при этом коэффициенты C_2 и R имеют одинаковые знаки. В случае $A = 0$ имеется двукратное положение равновесия $Y_{1,2}^* = \frac{1 - C_1}{2C_2}$.

При $A < 0$ уравнение (3.3) не имеет действительных решений, т. е. отсутствуют равновесные состояния для уравнения (3.2). Если же коэффициенты C_2 и R имеют разные знаки, то один из корней является положительным числом, а второй – отрицательным. Так как отрицательное решение не имеет в данном случае экономического содержания, то говорят о наличии единственного положения равновесия.

Для удобства дальнейшего анализа свойств дифференциального уравнения (3.2) введем новые переменные $X = Y - \frac{1 - C_1}{2C_2}$, $\tau = \frac{t}{v}$.

В результате замены переменных уравнение (3.3) примет вид

$$\frac{dX}{d\tau} = \frac{A}{4C_2} - C_2 X^2. \quad (3.5)$$

Выражение (3.5) – типовое дифференциальное уравнение с разделяющимися переменными. Интегральная кривая, проходящая через точку $\tau = 0$, $X(0) = X_0$ при $C_2 > 0$, дается уравнениями:

1) $C = C(y)$ – величина потребления, зависящая от ВВП. Будем полагать $C(y)$ нелинейной функцией, которая в самом простом варианте может быть представлена квадратичной зависимостью

$$C(y) = C_0 + C_1 y + C_2 y^2,$$

где C_0 – автономное потребление; C_1 – предельная склонность к потреблению для малых значений y ; C_2 – характеризует экстремальные свойства кривой потребления. Если $C_2 < 0$, то $C(y)$ имеет максимум, что согласуется с постулатом Кейнса о снижении склонности к потреблению с ростом дохода. В случае $C_2 > 0$ функция $C(y)$ имеет минимум согласно гипотезе относительного дохода Модильяни и Дьюзенберри [32].

2) $I = I\left(Y, \frac{dY}{dt}\right)$ – функция инвестиций. Предположим, что ин-

вестиции реагируют только на скорость изменения ВВП, т. е. выполняют функцию простого акселератора

$$I = v \frac{dY}{dt},$$

где v – предельный коэффициент капитала, или коэффициент приростной капиталоемкости продукции.

3) G – объем государственных расходов. В упрощенном варианте положим величину G независимой от уровня ВВП и постоянной во времени.

4) N_E – величина чистого экспорта, характеризующая показатель внешнеэкономической деятельности.

По аналогии с G также будем считать $N_E = const$.

Принимая во внимание все вышеизложенные допущения, модель (3.1) может быть представлена в форме обыкновенного дифференциального уравнения.

$$v \frac{dY}{dt} = -R + (1 - C_1)Y - C_2 Y^2, \quad (3.2)$$

где $R = C_0 + G + N_E = Const$.

интегрируемая, а функция

$$R(\rho_1, \rho_2) = \rho_1^\theta \rho_2^\beta (\alpha_1 + \rho_1^2 + \gamma \rho_2^2), \quad (2.53)$$

где $\theta = \frac{2(1-c)}{Q}$, $\beta = \frac{2(1+b)}{Q}$, $\gamma = \frac{1+b}{1-c}$ постоянная вдоль решений.

В случае 8 имеем $b > 0 > c$, $Q = -1 - bc > 0$, $\alpha_1 = -\alpha < 0$, поэтому линии уровня этой функции имеют вид, показанный на рис. 2.4.

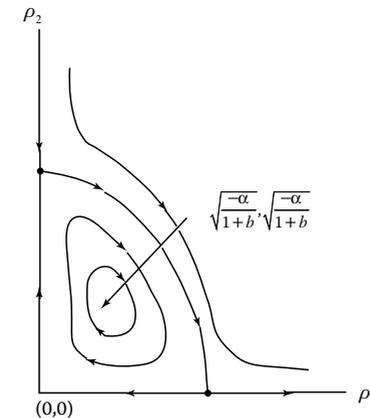


Рис. 2.4. Линии уровня $R(\rho_1, \rho_2)$ для случая 8

Так как система (2.52) является интегрируемой, то вторичная бифуркация Хопфа является вырожденной. Поэтому, чтобы полностью изучить топологию данной бифуркации, необходимо рассмотреть в (2.52) члены, содержащие более высокие степени исходных переменных.

К сожалению, мы не располагаем требуемой информацией, т. к. нелинейность в модели акселератора ограничивалась кубическим членом, а для исчерпывающего анализа потребовалось бы слагаемое пятой степени. Тем не менее, возможно обсудить выводы, которые могут быть сформулированы на основании полученных результаты о полном четырехмерном потоке системы (2.47). Необходимо напомнить, что здесь имеются два вращения $\dot{\phi}_1 = \omega_1$, $\dot{\phi}_2 = \omega_2$, при-

чем отношение частот $\omega_1 : \omega_2$ есть иррациональное число, которые следует восстановить для окончательных заключений. Как легко видеть, исходная четырехмерная система (2.47) имеет следующие виды аттракторов, соответствующие неподвижным точкам плоской системы (2.48):

- 1) тривиальная неподвижная точка ($\rho_1 = 0, \rho_2 = 0$);
- 2) периодическая орбита периода $\approx \frac{2\pi}{\omega_1} (\rho_1 = \rho_1^*, \rho_2 = 0)$;
- 3) периодическая орбита периода $\approx \frac{2\pi}{\omega_2} (\rho_1 = 0, \rho_2 = \rho_2^*)$;
- 4) инвариантный двумерный тор с периодами $\approx \frac{2\pi}{\omega_1}, \approx \frac{2\pi}{\omega_2} (\rho_1 = \rho_1^*, \rho_2 = \rho_2^*)$;
- 5) инвариантный трехмерный тор с периодами $\approx \frac{2\pi}{\omega_1}, \approx \frac{2\pi}{\omega_2}, O(\frac{1}{\alpha})$.

Последний (долгий) период на трехмерном торе ассоциируется с вторичной бифуркацией Хопфа в плоской системе (2.48). Здесь вполне можно ожидать наличия тонких резонансных эффектов и явлений, которые остаются вне нашего рассмотрения. Таким образом, мы надеемся найти узкий «клин» вокруг линии вторичной бифуркации Хопфа, в котором имеется хаотическая динамика, включающая трансверсальные гомоклинические орбиты и подковы. Следовательно, имеет место утверждение о том, что модель мультипликатора-акселератора циклов деловой активности с нелинейной функцией инвестиций, расширенная для случая межрегиональной торговли, приводимая в движение линейным мультипликатором импорта, может инициировать неупорядоченное движение.

Данный факт свидетельствует о проблематичности процессов экономического прогнозирования. По всей видимости, наиболее качественными являются краткосрочные прогнозы, т. к. за малый период времени экспоненциальное разбегание близких траекторий не происходит.

РАЗДЕЛ 3

САМООРГАНИЗАЦИЯ В КЕЙНСИАНСКИХ МОДЕЛЯХ

Рождением макроэкономики как науки мы обязаны Дж. М. Кейнсу, в первую очередь его выдающейся работе «Общая теория занятости, процента и денег», в которой впервые макроэкономическая проблематика представляет главный предмет исследования. Взгляды Кейнса, революционные для своего времени, в значительной степени сформировались в результате анализа причин возникновения Великой депрессии. Глобальный кризис 1929 – 1933 гг. побудил Кейнса и вслед за ним многих других экономистов к серьезному исследованию экономики как целостной системы [27].

В настоящем разделе мы уделим внимание некоторым задачам экономической динамики, математические модели которых базируются на основных постулатах теории Кейнса. В качестве таковых последовательно будут рассмотрены:

- 1) модель роста валового внутреннего продукта (ВВП);
- 2) IS – LM модель Кейнса;
- 3) модель Кальдора.

3.1. Динамика роста ВВП

При составлении долгосрочных программ социально-экономического развития, при макроэкономическом моделировании наиболее важным критериальным показателем является величина ВВП на душу населения. Следуя традициям посткейнсизма, рассмотрим в качестве базовой модели роста ВВП основное макроэкономическое тождество для величины совокупного дохода

$$Y = C + I + G + N_E \quad (3.1)$$

где Y – величина ВВП, рассматриваемая в стоимостном выражении.

Проанализируем составляющие формулы (3.1) с позиций их экономического содержания.