МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з навчальної дисципліни "ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"

**для студентів галузі знань
0306 "Менеджмент і адміністрування"
всіх форм навчання**

Харків. Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.

Протокол № 6 від 08.01.2014 р.

Укладач Ковальова К. О.

М54 Методичні рекомендації до самостійної роботи з навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" для студентів галузі знань 0306 "Менеджмент і адміністрування" всіх форм навчання / укл. К. О. Ковальова. – Х. : Вид. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 52 с. (Укр. мов.)

Наведено матеріал змістового модуля 1 "Лінійна алгебра. Аналітична геометрія. Диференціальне числення" за двома темами: "Функції декількох змінних" та "Екстремум функції декількох змінних", кожна з яких складається з теоретичних питань, практичних завдань та завдань для самостійної роботи.

Рекомендовано для студентів галузі знань 0306 "Менеджмент і адміністрування" всіх форм навчання.

Вступ

Фахівці з економіки повинні добре володіти математичним апаратом. Дуже багато математичних понять знаходять своє застосування в економічній теорії.

Виробничі функції можуть залежати від декількох факторів. Наприклад, попит на деякий товар може залежати від ціни, доходів споживачів, ціни альтернативного товару. Тому такі виробничі функції представляють собою функції багатьох змінних. Вивчення властивостей цих функцій спирається на аналіз їх ліній і поверхонь рівня, їх граничні та диференціальні властивості. Так, аналіз ліній рівня виробничої функції двох змінних дозволяє розв'язати задачі про оптимальний розподіл ресурсів або про оптимальне споживання і под. Відповісти на питання про те, як (кількісно) змінюється значення виробничої функції в разі зміни одного з факторів виробництво (наприклад, як змінюється попит у разі зміни доходів населення або зміни ціни), можна за допомогою поняття еластичності функції, яке виражається через часткові похідні цієї функції. Розв'язання задачі про значення об'ємів випуску товарів, за яких підприємство отримає найбільший прибуток, належить до задач про екстремум функції багатьох змінних. Наведені приклади свідчать про значення властивостей функції багатьох змінних в економічній теорії.

Дані методичні рекомендації до самостійної роботи присвячені вивченню математичної теорії функцій багатьох змінних і застосуванню її в процесі розв'язання конкретних завдань, зокрема завдань економіки.

Наведений матеріал змістового модуля 1 "Лінійна алгебра. Аналітична геометрія. Диференціальне числення" структурований за двома темами робочої програми: темою 16 "Функції багатьох змінних" та темою 17 "Екстремум функції багатьох змінних". Кожна з них складається зі: стислого наведення основних теоретичних понять теми, що сприяє вдосконаленню вже наявних знань з даної теми; прикладів розв'язання типових задач даної галузі, що дозволяє самостійно засвоїти основні методи та засоби розв'язання задач з теми; завдань для самостійної роботи та питань для самоперевірки.

Після вивчення зазначених тем студент вмітиме: знаходити область визначення функції, лінії рівня та їх застосування в економіці; знаходити похідну за напрямом і градієнт функції; обчислювати локальні та умовні екстремуми функцій; знаходити найменше та найбільше значення функції у замкненій області; складати і розв'язувати нормальні системи рівнянь для одержання емпіричної формули за методом найменших квадратів; застосовувати показники еластичності для аналізу виробничої функції, розв'язувати задачі оптимізації в економіці (локальної, умовної та абсолютної); знатиме методи диференціювання функцій кількох змінних; володітиме методом множників Лагранжа.

Теми, які ввійшли в роботу ("Функції багатьох змінних" та "Екстремум функції багатьох змінних"), було обрано згідно з робочою програмою.

Тема 16. Функції декількох змінних

16.1. Основні поняття функції декількох змінних

Функцією кількох змінних $x_1, x_2, ..., x_n$ називається змінна z, якщо кожній сукупності значень $\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$ із множини X ставиться у відповідність певне значення z, тобто $z = f\left(x_1, x_2, ..., x_n\right)$.

Змінну z називають *залежною змінною* (функцією), а змінні $x_1, x_2, ..., x_n$ – *незалежними змінними* (аргументами).

Приклад 16.1. Прикладом функції декількох змінних є **функція корисності** – це співвідношення між обсягами товарів і послуг, що споживаються, і рівнем корисності (задоволеності від споживання товару), якого досягає споживач:

$$U = f(x, y, z, ..., u, t),$$

де U – корисність;

$(x, y, z, ..., u, t)$ – кількість відповідних товарів, що споживаються за певний період.

Приклад 16.2. Ще один приклад функції декількох змінних – **функція витрат** – залежність між обсягами виробництва та мінімально можливими витратами, необхідними для його отримання:

$$Q = f(P_L, L, P_K, K),$$

де L, K – затрати праці та капіталу;

P_L, P_K – ціни відповідних ресурсів.

Приклад 16.3. Функція Кобба-Дугласа – виробнича функція, що показує обсяг випуску продукції Q при затратах капітала K і трудових ресурсів L. Для випадку двох змінних вона має вигляд:

$$Q = AK^{\alpha} L^{1-\alpha},$$

де $A > 0$ – параметр продуктивності конкретно узятої технології;

$0 < \alpha < 1$ – частка капіталу в доході.

Надалі обмежимося розгляданням основних понять та положень функції кількох змінних на прикладі функції двох змінних $z = f(x, y)$.

Сукупність пар (x, y) значень x і y, при яких визначається функція $z = f(x, y)$ називається *областю визначення* або *областю існування* цієї функції.

Приклад 16.4. Знайти та зобразити область визначення функції $z = \dfrac{2x - y}{x + y}$.

Розв'язання: функція не визначена лише тоді, коли $y = -x$. Геометрично це означає, що область визначення функції складається із двох півплощин, одна з яких лежить вище, а друга нижче прямої $y = -x$ (рис. 1).

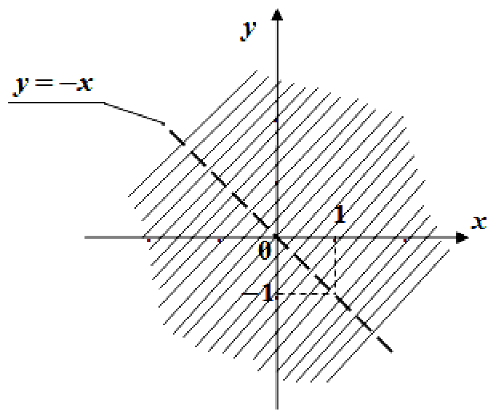

Рис. 1. **Область визначення функції прикладу 16.4**

Графіком функції двох змінних $z = f(x, y)$ називається безліч точок $(x, y, f(x, y))$ тривимірного простору, де $(x, y) \in D$ і є деякою поверхнею.

Приклад 16.5. Графік функції $z = \sqrt{16 - (x^2 + y^2)}$ зображено на рис. 2.

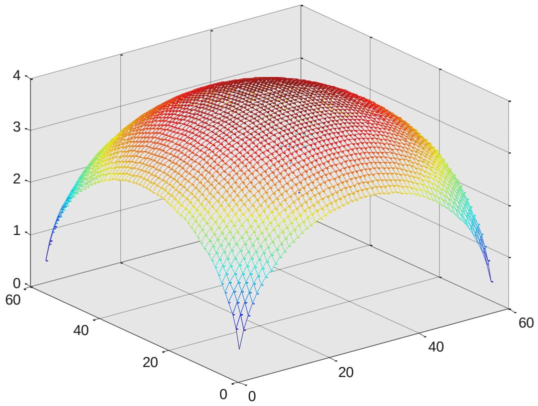

Рис. 2. **Трьохмірне зображення графіку функції прикладу 16.5**

Переріз графіка функції $f(x, y)$ площиною $z = z_0$ називається *лінією рівня* цієї функції.

16.1.1. Лінії рівня в економічних задачах

Значну частину економічних механізмів ілюструється на рисунках, що зображують лінії рівня функцій двох змінних $z = f(x, y)$. Наприклад, лінії рівня виробничої функції називають *ізоквантами*.

Нехай x і y – два різні фактори виробництва, а функція $z = f(x, y)$ характеризує виробництво продукції, що дозволяється факторами x і y. На рис. 3 лінії рівня $f(x, y) = Q$ зображено суцільними лініями, а штриховими обведена так звана *економічна область,* яка характеризується тим, що частина ізоквант, що відсікається нею, представляють собою графіки спадних функцій, тобто зменшення кількості одного фактора призводить до збільшення іншого, не змінюючи розмірів виробництва. Інакше кажучи, економічна область – це множина значень факторів, що допускають заміну одного з них іншим. Очевидно, що всі "розумні" значення x і y належать економічній області.

Ізокванти дозволяють геометрично ілюструвати розв'язання ***задачі про оптимальний розподіл ресурсів***. Нехай $z = g(x, y)$ – функція витрат, необхідних для забезпечення значень ресурсів x і y (часто можна вважати, що функція витрат лінійна: $g(x, y) = p_x x + p_y y$, де p_x, p_y – ціни факторів x і y). Лінії рівня цієї функції також зображені на рис. 3.

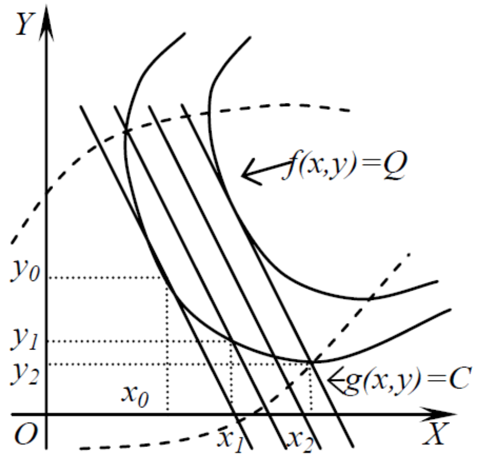

Рис. 3. **Лінії рівня функції виробництва**

Комбінація ліній рівня функцій $f(x,y)$ і $g(x,y)$ дозволяє робити висновки про переваги того чи іншого значення факторів x і y. Очевидно, наприклад, що пара (x_1, y_1) має більше переваг, ніж пара (x_2, y_2), оскільки забезпечує більший випуск з меншими витратами. Оптимальними ж значеннями факторів будуть значення (x_0, y_0) – координати точки дотику лінії рівня функції виробництва і функції витрат.

Лінії рівня ***функції корисності*** (вони називаються *кривими байдужості*) також дозволяють розглядати питання заміщення одного товару іншим і ілюструвати розв'язок *задачі про оптимальне споживання* (споживацького вибору) (рис. 4).

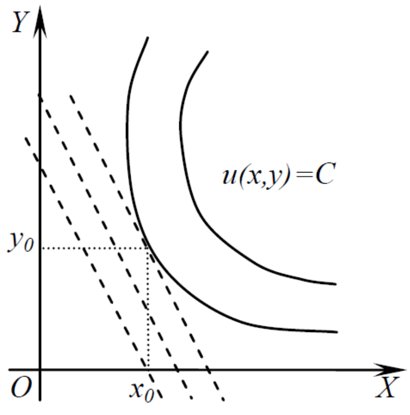

Рис. 4. **Лінії рівня функції корисності**

Лінії рівня витрат на придбання товарів x і y зображені на рис. 4 пунктиром. Оптимальне споживання забезпечується значенням (x_0, y_0) – координатами точок дотику кривої байдужості і лінії рівня витрат. У цій точці задана корисність досягається найбільш економічним чином.

16.2. Частинний та повний прирости функції

Нехай $z = f(x, y)$ – функція двох незалежних змінних x і y. Надамо змінній x приріст Δx, залишаючи змінну y незмінною, тоді різниця

$$\Delta_x z = f(x + \Delta x, y) - f(x, y) \tag{1}$$

називається *частинним приростом функції* $f(x, y)$ *по змінній* x.

Аналогічно, якщо x зберігає постійне значення, а y одержує приріст Δy, функція одержує приріст, що називається *частинним приростом функції* $f(x, y)$ *по змінній* y:

$$\Delta_y z = f(x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{2}$$

Якщо обидві змінні x і y одержали відповідно прирости Δx і Δy, тоді функція $z = f(x, y)$ одержить новий приріст Δz, що називається *повним приростом* функції z і визначається формулою:

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y). \tag{3}$$

Слід зазначити, що повний приріст функції, загалом кажучи, не дорівнює сумі приватних приростів цієї функції $\Delta z \neq \Delta_x z + \Delta_y z$.

16.3. Частинні похідні функції декількох змінних

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta_x z}{\Delta x}$, то вона називається *частинною похідною* функції $z = f(x, y)$ по змінній x і позначається:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}. \tag{4}$$

Якщо існує границя $\lim\limits_{\Delta y \to 0} \dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$, то вона називається *частинною похідною* функції $z = f(x, y)$ по змінній y і позначається:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}. \tag{5}$$

У процесі обчислення частинних похідних функції двох змінних користуються вже відомими формулами і правилами диференціювання функції однієї змінної. Слід лише пам'ятати, що при знаходженні частинної похідної $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ обчислюють звичайну похідну функції змінної x, вважаючи змінну y сталою. При знаходженні похідної $\frac{\partial z}{\partial y}$ сталою вважається змінна x.

Приклад 16.6. Знайти частинні похідні функції $z = x^3y^2 - 2x + 3y^5 - 1$.

Розв'язання: дифференціюємо задану функцію спочатку по x, вважаючи при цьому змінну y сталою:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2y^2 - 2.$$

А потім по y, вважаючи сталою змінну x:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^3y + 15y^4.$$

16.3.1. Частинні похідні вищих порядків

Якщо задано функцію $z = f(x, y)$ і обчислені її частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ і $\frac{\partial z}{\partial y}$, то вони також є функціями незалежних змінних x і y, а тому від кожної із них можна обчислити похідні як по змінній x, так і по змінній y.

Частинні похідні від частинних похідних першого порядку називаються *частинними похідними другого порядку*. Вони позначаються:

$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xx}(x, y)$ – тут f дифференціюється послідовно два рази по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = f''_{xy}$ – тут f спочатку дифференціюється по x, а потім результат дифференціюється по y;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yx}$ – тут f спочатку дифференціюється по y, а потім результат дифференціюється по x;

$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = f''_{yy}(x, y)$ – тут f дифференціюється послідовно два рази по y

Аналогічно означаються і позначаються частинні похідні вищих порядків.

Похідні $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ та $\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ називають *мішаними похідними.* Для мішаних похідних справджується наступна *теорема*: якщо функція $z = f(x, y)$ та її частинні похідні $f_x^{'}, f_y^{'}, f_{xy}^{''}, f_{yx}^{''}$ визначені та неперервні в точці $M(x, y)$ і в деякій її околиці, то у цій точці мішані похідні не залежать від порядку диференціювання, тобто

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\left(f_{xy}^{''} = f_{yx}^{''}\right). \tag{6}$$

Приклад 16.7. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z = \sin y - e^{2x} y^2 + 5xy.$

Розв'язання: Спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -2e^{2x} y^2 + 5y; \ \frac{\partial z}{\partial y} = \cos y - 2ye^{2x} + 5x.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -4e^{2x} y^2; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\sin y - 2e^{2x};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(-2e^{2x} y^2 + 5y\right) = -4ye^{2x} + 5;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\cos y - 2ye^{2x} + 5x\right) = -4ye^{2x} + 5;$$

Таким чином, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$, що підтверджує співвідношення (6).

16.3.2. Економічна інтерпретація частинних похідних. Еластичність виробничої функції

Необхідно навести спочатку економічну інтерпретацію частинних похідних. Нехай задана виробнича функція $z = f(x, y)$, що виражає, наприклад, витрати виробництва від кількості x і y двох видів продукції, що випускається. Припустимо, що фактор x змінився на Δx, тоді виробнича функція зміниться на $\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$. Тоді $\frac{\Delta_x z}{\Delta x}$ виражає середній приріст виробничої функції на одиницю приросту фактору x. Перейшовши до границі при $\Delta x \to 0$, отримаємо *граничні витрати виробництва* на одиницю продукції x:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta_x z}{\Delta x} = \frac{\partial z}{\partial x}.$$

Аналогічно за фактором y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta_y z}{\Delta y} = \frac{\partial z}{\partial y}.$$

Еластичність виробничої функції $z = f(x, y)$ відносно факторів виробництва $x(y)$ визначається формулою:

$$E_x(z) = \frac{x}{z}\frac{\partial z}{\partial x}; \left(E_y(z) = \frac{y}{z}\frac{\partial z}{\partial y} \right), \tag{7}$$

і вказує наближено процентний приріст виробничої функції, що відповідає приросту фактора $x(y)$ на 1 % за умови, що фактор $y(x)$ не змінюється.

Якщо виробнича функція задає залежність виробництва z від n виробничих факторів у вигляді $z = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_m)$, то диференціальні характеристики такої функції – $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ – *граничні ефективності фактора* x_i і – $E_{x_i}(z) = \frac{x_i}{z}\frac{\partial z}{\partial x_i}$ – *еластичність виробництва* z *відносно фактора* x_i ($i = \overline{1, m}$) та інше.

Слід зауважити, що *від'ємне значення коефіцієнту еластичності* показує на зменшення виробничої функції при збільшенні відповідного фактору.

16.4. Визначення похідної за напрямом та формула для її обчислення

Розглянемо в області D функцію $z = f(x, y)$ та точку $M(x, y)$. Проведемо із точки M вектор $\vec{S}$, напрямні косинуси якого $\cos\alpha, \cos\beta$. На векторі $\vec{S}$, на відстані ΔS від його початку, розглянемо точку $M_1(x+\Delta x, y+\Delta y)$. У цьому випадку функція отримує приріст: $\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y)$.

Вектор $\overrightarrow{\Delta S}$, координатами якого є прирости аргументів, назвемо вектором приростів: $\overrightarrow{\Delta S} = (\Delta x, \Delta y)$. Таким чином,

$$\left|\Delta\vec{S}\right| = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}\ .$$

Границя відношення $\dfrac{\Delta z}{\Delta S}$ при $\Delta S \to 0$ називається *похідною від функції* $z = f(x, y)$ *в точці* (x, y) *за напрямом вектора* $\vec{S}$ *та позначається* $\dfrac{\partial z}{\partial s}$, *тобто*

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta S} = \frac{\partial z}{\partial s}\ . \qquad (8)$$

Приклад 16.8. Від заданої функції $z = x^2 - xy + y^3$ знайти похідну в точці $M(1,-2)$ за напрямом вектора $\vec{S}(3,-1)$.

Розв'язання: Знайдемо частинні похідні функції z і їх значення в точці M:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - y, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1,-2)} = 2-(-2) = 4;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 3y^2, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1,-2)} = -1 + 3(-2)^2 = 11.$$

Знайдемо напрямні косинуси вектора $\vec{S}$:

$$\cos\alpha = \frac{S_x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{3}{\sqrt{10}}, \cos\beta = \frac{S_y}{\sqrt{x^2+y^2}} = -\frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Похідна за даним напрямом дорівнює:

$$\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial z}{\partial y}\cos\beta = 4\frac{3}{\sqrt{10}} - 11\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

16.5 Градієнт та його властивості

У кожній точці області D, у якій задана функція $z = f(x, y)$, визначимо вектор, проекціями якого на осі координат є значення частинних похідних $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ першого порядку цієї функції у відповідній точці:

$$\mathrm{grad}\, z = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j\ . \qquad (9)$$

Цей вектор називається *градієнтом* функції $f(x,y)$.

Приведемо наступну теорему, що встановлює зв'язок між градієнтом і похідною по напрямку.

Теорема. *Нехай дане скалярне поле* $z = f(x,y)$ *й визначене в цьому скалярному полі поле градієнтів*

$$\mathrm{grad}z = \frac{\partial u}{\partial x} i + \frac{\partial u}{\partial y} j.$$

Похідна $\frac{\partial u}{\partial s}$ *по напряму деякого вектора* $\vec{S}$ *дорівнює проекції вектора* $gradz$ *на вектор* $\vec{S}$.

Слід установити деякі властивості градієнта.

1. *Похідна в даній точці за напряму вектора* $\vec{S}$ *має найбільше значення, якщо напрям вектора* $\vec{S}$ *збігається з напрямом градієнта; це найбільше значення похідної дорівнює* $|\mathrm{grad}z|$.

2. *Похідна за напрямом вектора, дотичного до лінії рівня, дорівнює нулю*.

Приклад 16.9. Задано функцію $z = x^2 + y^2 + 2x - 6y$. Визначити її градієнт у точці $M(1,1)$.

Розв'язання: визначемо частинні похідні першого порядку заданої функції та обчислимо їх значення у даної точки:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 2, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1,1)} = 2 + 2 = 4; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2y - 6, \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M(1,1)} = 2 - 6 = -4.$$

Отже, можна записати, що $\mathrm{grad}z = 2\vec{i} - 4\vec{j}$.

Розв'язання типових задач з теми

Визначити частинні похідні функції багатьох змінних.

Задача 1. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = x^2 \sin y$.

Розв'язання:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x\sin y; \ \frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \cos y.$$

Задача 2. Знайти частинні похідні $\frac{\partial z}{\partial x}$ та $\frac{\partial z}{\partial y}$ функції $z = x^y$.

Розв'язання:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1};\ \frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

Задача 3. Знайти частинні похідні функції $u = x^{x^2+y^2+z^2}$.

Розв'язання:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \cdot e^{x^2+y^2+z^2};\ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y \cdot e^{x^2+y^2+z^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = 2z \cdot e^{x^2+y^2+z^2}.$$

Задача 4. Для виробництва деякого товару визначена функція $f(x, y) = xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4 - 120y$, де x, y – фактори виробництва. Знайти: а) закон зміни виробничої функції; б) еластичність функції за кожним фактором; в) коефіцієнти еластичності за факторами $x = 1,\ y = 1$.

Розв'язання:

1. Щоб визначити зміни виробничої функції за факторами x і y, необхідно знайти часткові похідні від виробничої функції:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^3 - 6xy^2;$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 3xy^2 - 6x^2y + 8y^3 - 120.$$

2. Тепер обчислюємо еластичність функції за кожним фактором згідно з визначенням:

$$E_x(f) = \frac{x}{f}\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x}{f}\left(y^3 - 6xy^2\right) = \frac{x\left(y^3 - 6xy^2\right)}{xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4 - 120y};$$

$$E_y(f) = \frac{y}{f}\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{y}{f}\left(3xy^2 - 6x^2y + 8y^3 - 120\right) =$$

$$= \frac{y\left(3xy^2 - 6x^2y + 8y^3 - 120\right)}{xy^3 - 3x^2y^2 + 2y^4 - 120y}.$$

3. Обчислимо коефіцієнти еластичності за факторами $x=1,\ y=1$:

$$E_x(f)=\frac{1(1-6)}{1-3+2-120}\approx 0{,}04;$$

$$E_y(f)=\frac{1(3-6+8-120)}{1-3+2-120}\approx 0{,}96.$$

Таким чином, у разі збільшення фактора x на 1 % (за умови, що фактор y не змінюється) буде мати місце відносне збільшення даної виробничої функції приблизно на 0,04 %. У разі збільшення фактора y на 1 % (за умови, що фактор x не змінюється) буде мати місце відносне збільшення даної виробничої функції приблизно на 0,96 %.

Визначити частинні похідні другого порядку.

Задача 5. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=x^3-4x^2y+5y^2$.

Розв'язання: спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-8xy;\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-4x^2+10y.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x-8y;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=10;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-8x;\ \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-8x.$$

Задача 6. Знайти частинні похідні другого порядку функції $z=\ln(x^2+y^2)$.

Розв'язання: спочатку знайдемо частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{2x}{x^2+y^2};\quad \frac{\partial z}{\partial y}=\frac{2y}{x^2+y^2}.$$

Знайдемо частинні похідні другого порядку:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{2y^2-2x^2}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{2x^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2};$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2};\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=\frac{-4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$

Задача 7. Перевірити, що функція $z = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє рівняння $\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0$.

Розв'язання: знайдемо частинні похідні першого та другого порядку, які є в даному рівнянні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right);$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{e^{\frac{x}{y}} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) \cdot y - e^{\frac{x}{y}}}{y^2} = \frac{-xe^{\frac{x}{y}} - ye^{\frac{x}{y}}}{y^3} = -\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^3}.$$

Підставляємо знайдені похідні в дане рівняння:

$\frac{e^{\frac{x}{y}}}{y} + \frac{xe^{\frac{x}{y}}}{y^2} - y\frac{e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^3} = 0$; або $\frac{ye^{\frac{x}{y}} + xe^{\frac{x}{y}} - e^{\frac{x}{y}}(x+y)}{y^2} = 0$.

Отже, $0 = 0$.

Отримано тотожність, тому функція $z = e^{\frac{x}{y}}$ задовольняє дане рівняння.

Визначити похідні за напрямом.

Задача 8. Знайти похідну функції $z = 3x^4 - xy + y^3$ в точці $M(1, 2)$ в напрямі, що утворює з віссю Ox кут 60°.

Розв'язання: позначимо $\vec{s}$ вектор, що утворює кут 60° з віссю Ox і має одиничну довжину. Тоді координати вектора $\vec{s}$ будуть наступними:

$$\cos 60^\circ = \frac{1}{2}; \cos(90^\circ - \cos 60^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Отже, $\vec{s}\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

Тоді $\frac{\partial z}{\partial s} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Знайти частинні похідні та їх значення в точці $M(1, 2)$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 12x^3 - y, \ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = 12 \cdot 1 - 2 = 10.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -x + 3y^2, \ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = -1 + 3 \cdot 4 = 11.$$

Остаточно, $\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_M = 10 \cdot \frac{1}{2} + 11 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{10 + 11\sqrt{3}}{2}$.

Задача 9. Задано функцію $u = x^2 + y^2 + z^2$. Знайти похідну $\frac{\partial u}{\partial S}$ в точці $P(1, 1, 1)$ в напрямі вектора $\overline{S} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$.

Розв'язання: Обчислюємо напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}; \ \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{3}}; \ \cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Далі $\frac{\partial u}{\partial x} = 2x; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y; \ \frac{\partial u}{\partial z} = 2z$ в точці $P(1, 1, 1)$:

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_P = 2, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_P = 2, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P = 2.$$

Отже, $\left.\frac{\partial u}{\partial s}\right|_P = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3}$.

Задача 10. Знайти похідну функції $u = x^2 - 2xz + y^2$ в точці $A(1, 2, -1)$ за напрямом від точки A до точки $B(2, 4, -3)$.

Розв'язання: координати вектора $\vec{s} = \overrightarrow{AB}$ будуть $\vec{s} = (2-1, 4-2, -3+1) = (1, 2, -2)$, а його напрямні косинуси

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2}} = \frac{1}{3}; \ \cos\beta = \frac{2}{3}; \ \cos\gamma = -\frac{2}{3}.$$

Тепер обчислимо значення частинних похідних в точці A:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 2z, \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_A = 2 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) = 4; \ \frac{\partial u}{\partial y} = 2y, \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_A = 2 \cdot 2 = 4;$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = -2x, \left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_A = -2 \cdot 1 = -2.$$

Остаточно, $\left.\dfrac{\partial u}{\partial s}\right|_A = 4\cdot\dfrac{1}{3} + 4\cdot\dfrac{2}{3} + 2\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{16}{3}.$

Визначити градієнт функції.

Задача 11. Знайти градієнт функції $z = \ln(xy^2 + 1)$ в точці $A(1, 1)$. Розв'язання: знаходимо частинні похідні:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{y^2}{xy^2 + 1}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2xy}{xy^2 + 1}.$$

Обчислюємо їх в точці A: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial x}\right|_A = \dfrac{1}{2}$; $\left.\dfrac{\partial z}{\partial y}\right|_A = 1$.

Отже, $\left.\mathrm{grad}z\right|_A = \dfrac{1}{2}\vec{i} + \vec{j}$.

Задача 12. Знайти похідну функції $z = \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{y^2}{3}$ в точці $M(2, 4)$ за напрямом градієнта функції z.

Розв'язання: знаходимо частинні похідні і градієнт в тоці M :

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_M = \left.x\right|_M = 2; \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_M = \left.y\right|_M = 4; \quad \left.\mathrm{grad}z\right|_M = 2\vec{i} + 4\vec{j}.$$

За умовою напрям $\vec{s}$ співпадає з напрямом $\mathrm{grad}z$. Тому знайдемо його напрямні косинуси:

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{2^2 + 4^2}} = \frac{2}{\sqrt{20}}; \quad \cos\beta = \frac{4}{\sqrt{20}}.$$

Отже, $\left.\dfrac{\partial z}{\partial s}\right|_M = 2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{20}} + 4\cdot\dfrac{2}{\sqrt{20}} = \dfrac{12}{\sqrt{20}} = \dfrac{6}{\sqrt{5}}.$

Варіанти завдань для самостійної роботи

1. Визначити частинні похідні функції декількох змінних:

№	Функція	№	Функція	№	Функція
1	$z = x^2 \sin y$	3	$z = \cos y - tg3x$	5	$z = \dfrac{x}{x^2 + y^2}$
2	$z = xe^y + 2xy$	4	$z = x^{y^2 - 2y}$	6	$z = arctg\,\dfrac{y}{x}$

№	Функція	№	Функція	№	Функція
7	$z=2^{x^2-5xy-y^2}$	**15**	$z=\frac{\sin^2 x-\cos y}{xy}$	**23**	$z=\ln\frac{x^2}{y+2}$
8	$z=\ln\frac{x+y}{x-y}$	**16**	$z=\arcsin(xy)$	**24**	$z=\sin x-x\cos y$
9	$z=arctg\sqrt{\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}}$	**17**	$z=\sqrt{\sin x-\sin y}$	**25**	$z=\frac{3}{\cos^2(3x-y)}$
10	$z=x^{5y-4}$	**18**	$z=5^{x+y}-3^{y-x}$	**26**	$z=\arcsin\frac{x}{y}$
11	$z=2e^{x^2-y^2}$	**19**	$z=\frac{\sqrt{x+y}-y}{\sqrt{x+y}+x}$	**27**	$z=\sqrt{\frac{1+x}{1+y}}$
12	$z=tg(3x-y)$	**20**	$z=xy^3-4x^2y$	**28**	$z=\sin x\cdot\cos y$
13	$z=y^{e^x}-3xy^2$	**21**	$z=\arccos(x+y)$	**29**	$z=e^{5y}\sin 6x$
14	$z=\frac{x+y}{arctgx}$	**22**	$z=-\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	**30**	$z=\ln(1-x^2y^2)$

2. Визначити частинні похідні другого порядку функції декількох змінних:

№	Функція	№	Функція	№	Функція
1	$z=3x^4-6xy^2+y$	**7**	$z=y^3-2x^2y+\sqrt{x}$	**13**	$z=x\cdot\ln\frac{y}{x}$
2	$z=x^{\sqrt{y}}$	**8**	$z=\sin x\cdot\cos y$	**14**	$z=\frac{x+y}{x-y}$
3	$z=2e^{x^2-y^2}$	**9**	$z=\frac{x}{y+1}$	**15**	$z=\sin^2 x-\cos y$
4	$z=tg(3x-y)$	**10**	$z=xe^y+2xy$	**16**	$z=\arcsin(xy)$
5	$z=\sin(\cos y+1)$	**11**	$z=\cos y-tg3x$	**17**	$z=e^x\cdot\ln y$
6	$z=\arcsin\frac{x}{y}$	**12**	$z=\ln\frac{x+5}{6-y}$	**18**	$z=arctg\frac{y}{x}$

№	Функція	№	Функція	№	Функція
19	$z=2^{x^2-5xy-y^2}$	**23**	$z=\arccos(x+y)$	**27**	$z=\sqrt{\sin x-\sin y}$
20	$z=\sin y\cdot\ln x$	**24**	$z=-\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$	**28**	$z=5^{x+y}-3^{y-x}$
21	$z=\dfrac{x^2y^2}{x+y}$	**25**	$z=e^{5y}\sin 6x$	**29**	$z=\ln\dfrac{x^2}{y+2}$
22	$z=xy^3-4x^2y$	**26**	$z=\ln(x-y)$	**30**	$z=\sin x-x\cos y$

3. Знайти похідну функції у точці M за напрямом вектора $\vec{s}$:

№	Функція	точка M	вектор $\vec{s}$
1	$z=yx^4-5xy^2+x$	(1; 3)	(4; 4; 0)
2	$z=3x^4-6xy^2+y$	(6; 0)	(-1; -5; 3)
3	$z=4x^2+xy-\sqrt{y}$	(5; 2)	(-1; 0; 1)
4	$z=x^2y^2+2x-2y$	(-3; 4)	(9; 9; 3)
5	$z=xy^3-4x^2y$	(-2; 1)	(-1; 4; 0)
6	$z=\arccos(x+y)$	(0; 0)	(2; 2; -2)
7	$z=e^{5y}\sin 6x$	(-1; 0)	(3; -4; 1)
8	$z=\ln(x-y)$	(1; 0)	(0; -8; 1)
9	$z=5^{x+y}-3^{y-x}$	(0; 9)	(1; 2; -1)
10	$z=\ln(x+y)$	(1; 0)	(7; 5; 7)
11	$z=x^2\sin y$	(π ; 0)	(-3; 1; 2)
12	$z=xe^y+2xy$	(0; -1)	(-3; 2; 1)
13	$z=xy^3-4x^2y$	(5; 3)	(0; -2; 4)
14	$z=\sin^2 x-\cos y$	(-3; 3)	(9; 4; -1)
15	$z=e^x\cdot\ln y$	(0; -4)	(3; -6; -1)
16	$z=\sin x\cdot\cos y$	(-2; 1)	(0; -1; 4)
17	$z=\dfrac{x}{y+1}$	(1; 3)	(1; 3; 2)

№	Функція	точка M	вектор $\vec{s}$
18	$z = xe^{y} + 2xy$	(6; 0)	(6; 0; -2)
19	$z = \cos y - tg3x$	(5; 2)	(5; 2; -3)
20	$z = \ln \dfrac{x+5}{6-y}$	(-3; 4)	(-3; 4; -5)
21	$z = x^2 + 2y^2 - x - y$	(-2; 1)	(-2; 1; 6)
22	$z = arctg(x - y)$	(1; 0)	(1; 0; 4)
23	$z = x^3 + y^3 - 6xy$	(-1; -1)	(-1; -1; 6)
24	$z = \sin^2 x - \cos y^2$	(1; -5)	(1; 1; 1)
25	$z = \sqrt{4x + 3y}$	(0; 9)	(0; 9; -6)
26	$z = e^{\frac{x}{2}} \dfrac{y}{2}$	(1; -2)	(2; 4; -5)
27	$u = x + y + z$	(4; 4)	(0; -1; 3)
28	$z = \sqrt[3]{x^2 - xy + y^2}$	(6; -1)	(5; 3; -2)
29	$z = e^{x+2y}$	(-5; 1)	(-3; 3; 0)
30	$z = \dfrac{x-1}{x+1}$	(3; 3)	(0; -4; 2)

4. Знайти $\mathrm{grad} z$ у точці A функції декількох змінних:

№	Функція	точка A
1	$z = y^3 - 3xy - x^3$	(1; 3)
2	$z = \ln(xy - 1)$	(6; 0)
3	$z = x^2 + xy^2 - 2x^2y - y$	(5; 2)
4	$z = e^{3x} - 4e^{y} + 5xy$	(-3; 4)
5	$z = x^4 - 5x^3y^3 + 3x^2 - y^2 + 4x$	(-2; 1)
6	$z = \cos x - \sin y + tg(xy)$	(1; 0)
7	$z = x^3 + 3xy - y^3$	(-1; -1)

№	Функція	точка A
8	$z=\sin^2(x-y)+\cos^2 x$	(1; -5)
9	$z=\ln\dfrac{x-y^2}{xy+1}$	(0; 9)
10	$z=\dfrac{xy}{x^2+y^2+1}$	(1; -2)
11	$z=e^{x^2+xy+y^2-x-y}$	(2; 4)
12	$z=\ln\dfrac{x+1}{y-1}$	(0; -1)
13	$z=\sqrt{x^2y+xy^2}$	(5; 3)
14	$z=\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{1}{y}$	(-3; 3)
15	$z=2y-6x+3\ln x-5\ln y$	(0; -4)
16	$z=x^5+y^5-5xy^2+5x^2$	(-2; 1)
17	$z=arctg\,\dfrac{x}{y}$	(1; 3)
18	$z=\dfrac{x-y}{\sqrt{xy}}$	(6; 0)
19	$z=\arcsin(xy)$	(5; 2)
20	$z=xy^3+x^2y-3x+5xy$	(-3; 4)
21	$z=x^4-y^3+3x^2-2xy+\sqrt{y}$	(-2; 1)
22	$z=\ln x-3\ln(y+1)+x$	(1; 0)
23	$z=tgx-y+\sin\, y-x$	(-1; -1)
24	$z=e^{\frac{x}{2}}(x+y-1)$	(1; -5)
25	$z=x^2+y^3-6xy+1$	(0; 9)
26	$z=\arccos\left(\sqrt{xy}\right)$	(1; -2)
27	$z=\dfrac{x-1}{1-xy}$	(4; 4)

№	Функція	точка A
28	$z=\dfrac{\sin x}{\cos(xy)}$	(6; -1)
29	$z=\ln\dfrac{y}{x+1}-2\ln x+3\ln y$	(5; 1)
30	$z=x^2+xy^2-y+1$	(3; 3)

5. Дана виробнича функція $f(x,y)$, де x,y – фактори виробництва. Знайти: а) закон зміни виробничої функції; б) еластичність функції за кожним фактором; в) коефіцієнти еластичності за факторами x,y та пояснити їх економічний зміст:

№	Функція $f(x,y)$	Фактори (x,y)	№	Функція $f(x,y)$	Фактори (x,y)
1	$z=xy^3+x^2y$	(2; 3)	**12**	$z=\dfrac{\sin^2 x-\cos y}{xy}$	(1; 0)
2	$z=x^4-y^3+3x^2y$	(-6; 0)	**13**	$z=\arcsin(xy)$	(-1; -1)
3	$z=\ln x-3\ln(y+1)$	(-1; -1)	**14**	$z=\sqrt{\sin x-\sin y}$	(1; -5)
4	$z=tgx+\sin y$	(2; 7)	**15**	$z=5^{x+y}-3^{y-x}$	(0; 9)
5	$z=e^{\frac{x}{2}}(x+y)$	(1; -9)	**16**	$z=yx^2-xy^2$	(-2; 1)
6	$z=x^2\sin y$	(4; 4)	**17**	$z=4x^3+6xy$	(1; 3)
7	$z=xe^y+2xy$	(6; -1)	**18**	$z=\ln(xy)$	(-1; 1)
8	$z=\cos y-tg3x$	(-5; 1)	**19**	$z=x^2y^2+e^{xy}$	(1; -5)
9	$z=x^{y^2-2y}$	(3; 3)	**20**	$z=e^{\frac{y}{x}}$	(1; 1)
10	$z=y^{e^x}-3xy^2$	(-2; 5)	**21**	$z=\dfrac{x-1}{2-xy}$	(5; -3)
11	$z=\dfrac{x+y}{arctgx}$	(-2; 1)	**22**	$z=3x^2y+2xy^2$	(-3; 4)

№	Функція $f(x,y)$	Фактори (x,y)	№	Функція $f(x,y)$	Фактори (x,y)
23	$z=e^{xy}-e^{x}$	(6; -1)	**27**	$z=4x^2+xy-\sqrt{y}$	(1; 7)
24	$z=2xy-6x^2$	(1; -3)	**28**	$z=x^2y^2+2x-2y$	(5; 5)
25	$z=yx^4-5xy^2+x$	(-5; 1)	**29**	$z=xy^3-4x^2y$	(-1; -2)
26	$z=3x^4-6xy^2+y$	(2; -1)	**30**	$z=yx^4-5xy^2+x$	(3; 4)

Запитання для самоперевірки

1. Що називається функцією кількох змінних?
2. Що таке частинний приріст функції за змінною x?
3. Що таке частинний приріст функції за змінною y?
4. Як знайти частинну похідну за змінною x? Як знайти частинну похідну за змінною y?
5. Що називається частинними похідними другого порядку від функції з двома невідомими?
6. Що називається еластичністю виробничої функції? На що вказує еластичність?
7. Що називається похідною за напрямом?
8. Як обчислюється похідна за напрямом?
9. Що називається градієнтом функції?
10. Які властивості має градієнт?

Тема 17. Екстремум функції декількох змінних

17.1. Необхідна та достатня умови існування локального екстремуму

Нехай функція $z=f(x,y)$ визначена в деякій області точки (x_0,y_0). Кажуть, що функція $z=f(x,y)$ має в точці (x_0,y_0) *строгий максимум (мінімум)*, якщо $f(x,y)<f(x_0,y_0)$, ($f(x,y)>f(x_0,y_0)$) для всіх точок (x, y), достатньо близьких до x_0, y_0 Точка (x_0, y_0) – *точка максимуму (мінімуму)*.

Максимум і мінімум функції називають *екстремумами функцій*.

1. Необхідна умова екстремуму.

Якщо диференційована функція $z = f(x, y)$ має екстремум в точці $P_0(x_0, y_0)$, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто:

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0; \quad \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}} = 0. \tag{10}$$

Виконання (10) є необхідною умовою екстремуму, однак не є достатньою.

Для того, щоб визначити достатню умову екстремуму, розглянемо визначник, елементи якого є похідні другого порядку від функції $z = f(x, y)$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}. \tag{11}$$

2. Достатня умова існування екстремуму.

Нехай функція $z = f(x, y)$ неперервна в D разом зі своїми частинними похідними першого і другого порядків і точка $P_0(x_0, y_0)$ є критичною.

Знайдемо в точці P_0 похідні другого порядку (11) і позначимо:

$$A = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad B = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}, \quad C = \left.\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}.$$

Якщо $AC - B^2 > 0$ *(*$\Delta > 0$*), то функція має в точці* $P_0(x_0, y_0)$ *екстремум: максимум якщо* $A < 0$ *і мінімум якщо* $A > 0$*.*

Якщо $AC - B^2 < 0$ *(*$\Delta < 0$*), то в точці* $P_0(x_0, y_0)$ *екстремуму немає.*

Якщо $AC - B^2 = 0$ *(*$\Delta = 0$*), то висновок про екстремум зробити не можна.*

Отже, достатню умову екстремуму для функції двох змінних слід записати у вигляді:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix} > 0. \qquad (12)$$

Іноді практика вимагає знаходити екстремуми функції за якихось умов. Наприклад, необхідно знайти максимум функції прибутку фірми при випуску декількох видів товарів за умови, що є певна квота на загальний об'єм виробництва. Наступний підрозділ присвячено цій темі.

Приклад 17.1. Дослідити функцію $z = 2x^3 - 6xy + 2y^3$ на локальний екстремум.

Розв'язання: за необхідною умовою екстремуму (10) слід перевірити, чи має функція стаціонарні точки. Отже, визначимо похідні першого порядку:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x^2 - 6y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 6y^2 - 6x.$$

Припустивши, що ці похідні дорівнюють нулю, отримаємо систему рівнянь для обчислення координат стаціонарної точки:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x^2 - 6y = 0 \\ 6y^2 - 6x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 1 \\ y_1 = 0, y_2 = 1 \end{cases}.$$

Отримали стаціонарні точки $M_1(0, 0)$ та $M_2(1, 1)$. За достатньою умовою перевіримо, чи є ці точки точками локального екстремуму. Для цього знайдемо всі похідні другого порядку і обчислимо їх значення у точках $M_1(0, 0)$ та $M_2(1, 1)$:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_1} = 12x\big|_{M_1} = 0, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_1} = 12y\big|_{M_1} = 0.$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 12x\big|_{M_2} = 12, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{M_2} = 12y\big|_{M_2} = 12.$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_1} = -6\big|_{M_1} = -6 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{M_1}, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{M_2} = -6\big|_{M_2} = -6 = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial z}\right|_{M_2}.$$

Обчислимо визначник (11) для точки $M_1(0,0)$:

$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0$, отже за умовою (12), в точці $M_1(0,0)$ екстремуму немає.

Обчислимо визначник (11) для точки $M_2(1,1)$:

$\Delta = \begin{vmatrix} 12 & -6 \\ -6 & 12 \end{vmatrix} = 108 > 0$, отже за умовою (12), в точці $M_2(1,1)$ є екстремум.

$A = \left.\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{M_2} = 12 > 0$, а тому в цій точці функція має мінімум.

17.2. Поняття і визначення умовного екстремуму за методом множників Лагранжа

Нехай задано функцію $z = f(x,y)$, стосовно якої ставиться вимога знайти її екстремуми за умови, що $\varphi(x,y) = 0$ – рівняння розв'язку.

Ця задача умовного екстремуму зводиться до знаходження звичайного екстремуму функції:

$$F(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda\varphi(x,y), \qquad (13)$$

де F – функція Лагранжа;

λ – множник Лагранжа.

Стаціонарні точки знаходять із системи рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x} = \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0; \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} = \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda\dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x,y) = 0; \end{cases} \qquad (14)$$

тобто з системи (14) знаходимо x, y, λ.

Кожна стаціонарна точка існування та характер умовного екстремуму залежать від знака другого диференціалу функції Лагранжа $L(x, y, \lambda)$. Для цього необхідно скласти та обчислити визначник 3-ого порядку:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} \\ \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} & \dfrac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} \end{vmatrix}. \qquad (15)$$

Якщо в стаціонарній точці (x_0, y_0, λ_0):

$\Delta > 0$ та $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} > 0$, то ця точка – *точка мінімуму* функції $L(x, y, \lambda)$;

$\Delta < 0$ та $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} < 0$, то ця точка – *точка максимуму* функції $L(x, y, \lambda)$.

Приклад 17.2. Знайти екстремум функції $f = x - xy + y$ за умови, що $x^2 + y^2 = 1$.

Розв'язання: утворимо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = x - xy + y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$$

і знайдемо її частинні похідні першого порядку:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 1 - y + 2\lambda x; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 - x + 2\lambda y; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1.$$

Одержимо систему рівнянь для визначення координат стаціонарних точок функції Лагранжа:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 - y + 2\lambda x = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 - x + 2\lambda y = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_{1,2,3,4} = 1, 0, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ y_{1,2,3,4} = 0, 1, \dfrac{\sqrt{2}}{2}, -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \lambda_{1,2,3,4} = -\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}, \dfrac{1-\sqrt{2}}{2}, \dfrac{\sqrt{2}+1}{2} \end{cases}.$$

Для функції $L(x,y,\lambda) = x - xy + y + \lambda \cdot (x^2 + y^2 - 1)$ маємо чотири стаціонарні точки: $M_1(1, 0, -\frac{1}{2})$, $M_2(0, 1, -\frac{1}{2})$, $M_3(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$ та $M_4(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{2})$. Відповідно, для вихідної функції $z = f(x,y)$ ці точки можуть бути точками умовного екстремуму.

Перевіримо кожну точку за умовою (15):

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y^2} = 2\lambda; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x} = -1; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial \lambda} = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial x} = 2x; \quad \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial \lambda} = \frac{\partial^2 L}{\partial \lambda \partial y} = 2y.$$

Для точки $M_1(1, 0, -\frac{1}{2})$ визначник дорівнює:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -1 < 0 \;\Rightarrow\; M_1(1, 0, -\frac{1}{2})$$ – точка максимуму функції $z_{\max} = 1$.

Для точки $M_2(0, 1, -\frac{1}{2})$ визначник дорівнює:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = -1 < 0 \;\Rightarrow\; M_2(0, 1, -\frac{1}{2})$$ – точка максимуму функції. $z_{\max} = 1$.

Для точки $M_3(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$ визначник дорівнює:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1-\sqrt{2} & -1 & \sqrt{2} \\ -1 & 1-\sqrt{2} & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 2.3431 > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 1 - \sqrt{2} < 0 \;\Rightarrow$$

$M_3(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1-\sqrt{2}}{2})$ – не є точкою ні максимуму, ні мінімуму функції.

Для точки $M_4(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}+1}{2})$ визначник дорівнює:

$$\Delta = -\begin{vmatrix} 1+\sqrt{2} & -1 & -\sqrt{2} \\ -1 & 1+\sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{vmatrix} = 13.6569 > 0, \quad \frac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 1+\sqrt{2} > 0 \quad \Rightarrow$$

$M_4(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ -\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{\sqrt{2}+1}{2})$ – точка мінімуму функції. $z_{\min} = -\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$.

17.3. Найбільше та найменше значення функції в замкненій області

Іноді практика вимагає знаходити екстремуми функції за якихось обмежень у формі нерівностей. Наприклад, необхідно знайти максимум функції попиту при обмеженні часу, обмеженні доходів споживачів і т.д. У процесі розв'язання таких задач слід спиратись на наступне твердження: *функція* $f(x, y)$*, що диференційована в обмеженій і замкненій області, досягає свого найбільшого і найменшого значень в цій області або в стаціонарних точках, або в межових точках області*.

Наведене дає можливість сформулювати *алгоритм пошуку абсолютного екстремуму*:

1) знаходимо стаціонарні точки функції $f(x, y)$ і ті точки, в яких часткові похідні не існують;

2) відкидаємо з розгляду ті точки, що не попали до області;

3) *1 спосіб* пошуку стаціонарних точок на межі області: записуємо функції Лагранжа з урахуванням умов, що описують рівняння межі області, і знаходимо їх критичні точки, серед яких відкидаємо ті, що не належать межі області;

2 спосіб пошуку стаціонарних точок на межі області:

а) якщо це можливо, виражаємо деякі змінні з рівнянь межі, роблячи їх залежними від інших незалежних змінних;

б) підставляємо вирази для залежних змінних у вираз для функції $f(x, y)$, отримуємо нову функцію, яка виражається через незалежні змінні;

в) для нової функції знаходимо стаціонарні точки, серед яких відкидаємо ті, що не належать межі області;

4) додаємо до розгляду крайові точки перетину кривих (поверхонь) області;

5) знаходимо значення функції у всіх знайдених стаціонарних точках області, межі і в крайових точках, щоб обрати серед них найбільше і найменше значення.

Приклад 17.3. Знайти найменше і найбільше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy - x - y + 5$ в обмеженій замкнутій області D: $x \geq 0$, $y \geq 0$ та $x + y \leq 3$.

Розв'язання:

1. Знаходимо стаціонарні точки функції $f(x, y)$ і ті точки, в яких часткові похідні не існують:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2y - x = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Перша стаціонарна точка, що належить області D: $M_1(1,\ 1)$.

2. Знайдемо стаціонарні точки на межі області (рис. 5):

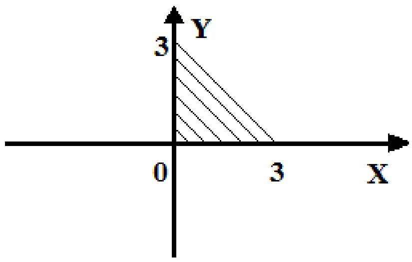

Рис. 5. **Замкнута область D прикладу 17.3**

а) виражаємо деякі змінні з рівнянь межі, роблячи їх залежними від інших незалежних змінних;

б) підставляємо вирази для залежних змінних у вираз для функції $f(x, y)$, отримуємо нову функцію, яка виражається через незалежні змінні.

в) для нової функції знаходимо стаціонарні точки, серед яких відкидаємо ті, що не належать межі області.

Пункти а) – в):

1) $x = 0,\ 0 \leq y \leq 3,\ z = y^2 - y + 5.\ \dfrac{dz}{dy} = 2y - 1 = 0 \Rightarrow\ y = \dfrac{1}{2}.$

Таким чином отримано ще три стаціонарні точки: $M_2 = (0,0)$, $M_3 = (0, \frac{1}{2})$, $M_4 = (0,3)$.

2) $y = 0$, $0 \le x \le 3$, $z = x^2 - x + 5$. $\frac{dz}{dx} = 2x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$.

Таким чином отримано ще три стаціонарні точки: $M_5 = (0,0)$, $M_6 = (\frac{1}{2}, 0)$, $M_7 = (3,0)$.

3) $y = 3 - x$, $0 \le x \le 3$, $z = x^2 + (3-x)^2 - x(3-x) - x - 3 + x + 5 =$ $= 3x^2 - 9x + 11$. $\frac{dz}{dx} = 6x - 9 = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}$.

Таким чином отримано ще одну стаціонарну точку $M_8 = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$.

3. Знаходимо значення функції у всіх знайдених стаціонарних точках області, межі і в крайових точках, щоб обрати серед них найбільше і найменше значення.

$z(M_1) = 4$, $z(M_2) = 5$, $z(M_3) = 4{,}75$, $z(M_4) = 11$, $z(M_5) = 5$, $z(M_6) = 4{,}25$, $z(M_7) = 11$, $z(M_8) = 4{,}25$.

Таким чином, $\max\limits_D z = 11$, $\min\limits_D z = 4$.

17.4. Метод найменших квадратів

Нехай у результаті досліджень функціональної залежності між x та y значенням аргументу $x_1, x_2, ..., x_n$ поставлені у відповідність значення функції $y_1, y_2, ..., y_n$, тобто отримано таку таблицю даних:

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

Такий спосіб завдання функції часто зустрічається в економічних задачах. Інколи необхідно знайти значення функції для значень аргументу, що не містяться в таблиці. В цьому випадку визначають функціональну залежність між x та y. Ця задача розв'язується наближеними методами.

Задача полягає в знаходженні функції $y = f(x)$, значення якої при $x = x_i$, $i = 0,1,..,n$ мало відрізняються від табличних значень y_i: $y_i - y(x_i) = \varepsilon_i$, $i = 0, 1,.., n$.

Вигляд функції вибирається графічним способом. Для табличної функції будується графік і приблизно вгадується функціональна залежність шляхом порівняння відомих функцій з розташуванням даних на графіку. Зазвичай розглядаються такі функції:

- Лінійна $y = ax + b$.
- Квадратична $y = ax^2 + bx + c$ та інші.

Нехай зв'язок між x_i та y_i описується рівнянням $y = f(x, a, b, c, ...)$. Коефіцієнти a, b, c слід шукати так, щоб похибка була мінімальною. Для цього потрібно мінімізувати суму квадратів відхилень:

$$F = \sum_{i=0}^{n} |\varepsilon_i|^2 \to \min .$$

Цей варіант є оптимальним. Для обчислення параметрів функції $y = f(x, a, b, c, ...)$ використовується *метод найменших квадратів*.

Методом найменших квадратів для табличної функції (y_i, x_i), $i = 1, 2,.., n$ побудуємо лінійну функцію $y = ax + b$. Коефіцієнти a і b знайдемо з умови:

$$S(a,b) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2 \to \min . \tag{16}$$

З необхідної умови екстремуму функції два змінних запишемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial S}{\partial a} = 0 \\ \dfrac{\partial S}{\partial b} = 0 \end{cases} . \tag{17}$$

Звідси:

$$\begin{cases} 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right)(-x_i) = 0 \\ 2\sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (ax_i + b)\right) = 0 \end{cases} . \tag{18}$$

Отримуємо систему лінійних рівнянь для обчислення коефіцієнтів a та b:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b = \sum_{i=1}^{n} y_i x_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)a + nb = \sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}. \tag{19}$$

Система (19) називається *нормальною системою* методу найменших квадратів. Ця система має єдиний розв'язок, оскільки її визначник

$$\begin{vmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & n \end{vmatrix} = n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2 \neq 0.$$

Переконаємося, що значення коефіцієнтів a та b, отримані з системи, дають мінімум функції $S(a,b)$. Для цього скористаємося формулами (10) – (12). Знайдемо частинні похідні другого порядку функції $S(a,b)$:

$$\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} = \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial a} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i, \quad \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} = 2n.$$

Складемо визначник:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial^2 S}{\partial a^2} & \frac{\partial^2 S}{\partial a \partial b} \\ \frac{\partial^2 S}{\partial b \partial a} & \frac{\partial^2 S}{\partial b^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 & 2\sum_{i=1}^{n} x_i \\ 2\sum_{i=1}^{n} x_i & 2n \end{vmatrix} = 4\left(n\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)^2\right) > 0$$

та $\frac{\partial^2 S}{\partial a^2} = 2\sum_{i=1}^{n} x_i^2 > 0$, отже, функція $S(a,b)$ при обчислених значеннях a і b набуває *мінімального значення*.

У процесі побудови квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ методом найменших квадратів для табличної функції (y_i, x_i), $i = 1, 2, .., n$ коефіцієнти a, b, c обчислюються з умови:

$$S(a,b,c) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \left(ax_i^2 + bx_i + c\right)\right)^2 \to \min. \tag{20}$$

З необхідної умови екстремуму функції трьох змінних $\frac{\partial S}{\partial a}=0$, $\frac{\partial S}{\partial b}=0$, $\frac{\partial S}{\partial c}=0$ для обчислення коефіцієнтів a, b, c отримуємо систему:

$$\begin{cases} \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^4\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)b+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)c=\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^3\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)b+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)c=\sum_{i=1}^{n} x_i y_i \\ \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)a+\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\right)b+nc=\sum_{i=1}^{n} y_i \end{cases}. \qquad (21)$$

Приклад 17.4. Торгівельне підприємство має мережу, що складається з 4 магазинів, інформація про діяльність яких представлена в наступній таблиці. Керівництво підприємства хотіло б знати, як залежить розмір річного товарообігу від торгівельної площі магазина.

Річний товарообіг, тис. грн	19,76	40,95	56,29	89,05
Торгівельна площа, тис. м^2	0,24	0,55	0,78	1,21

Розв'язання: позначимо y_i – річний товарообіг, тис. грн;

x_i – торгівельна площа, тис. м^2.

Обчислимо коефіцієнти нормальної системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{4} x_i = 2{,}78,\ \sum_{i=1}^{4} x_i^2 = 2{,}43,\ \sum_{i=1}^{4} x_i y_i = 178{,}92,\ \sum_{i=1}^{4} y_i = 206{,}05.$$

Отже, маємо систему

$\begin{cases} 2{,}43a+2{,}78b=178{,}92 \\ 2{,}78a+4b=206{,}05 \end{cases}$, розв'язуючи яку, отримаємо: $a\approx 71{,}73$, $b\approx 1{,}66$.

Отже, отримано рівняння шуканої прямої: $y=71{,}73x+1{,}66$.

Графіки заданої табличної функції і побудованої лінійної функції наведено на рис. 6.

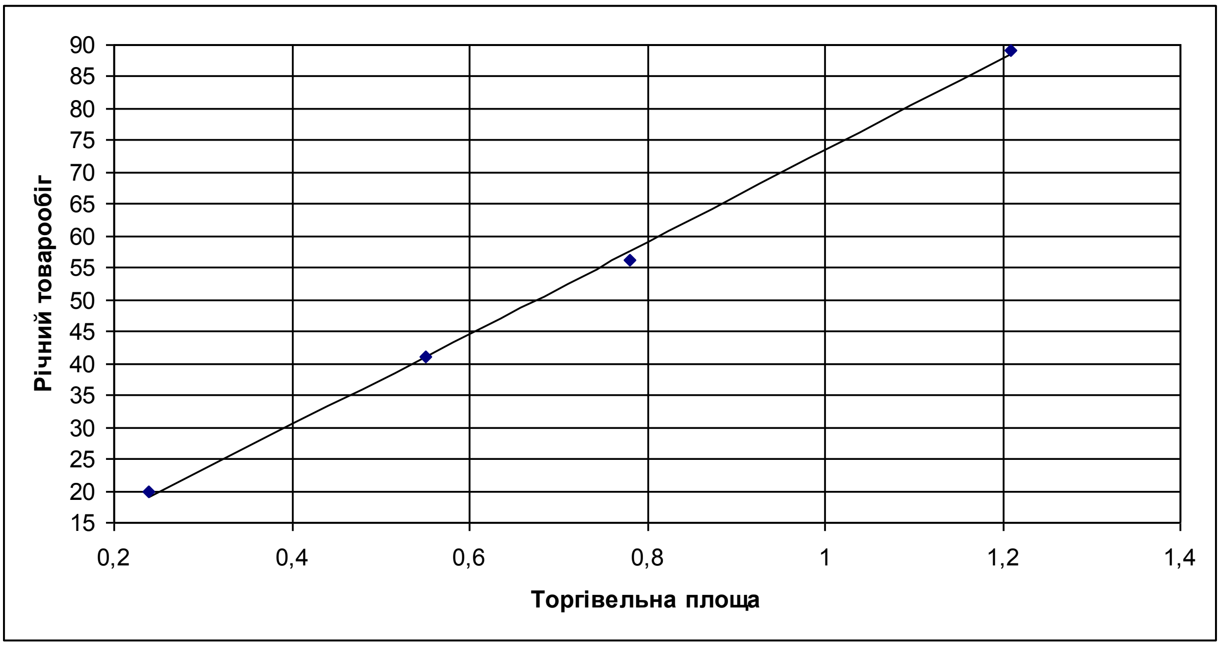

Рис. 6. **Графіки заданої табличної функції і побудованої лінійної функції: ♦ – дані табличної функції, ——— – побудована лінія функції**

Розв'язання типових задач за теми

Дослідити функції на локальний екстремум.

Задача 1. Дослідити функцію $z = x^2 + 2y^2 - x - y$ на локальний екстремум.

Розв'язання: за необхідною умовою екстремуму (10) слід перевірити, чи має функція стаціонарні точки:

$$\begin{matrix} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - 1 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 4y - 1 = 0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x_0 = 0.5 \\ y_0 = 0.25 \end{matrix}.$$

За достатньою умовою (12) слід перевірити, чи є ця точка точкою екстремуму. Для цього знайдемо всі похідні другого порядку і обчислимо їх значення у точці (x_0, y_0):

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x_0 = 0.5 \\ y_0 = 0.25}} = 2, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x_0 = 0.5 \\ y_0 = 0.25}} = 4, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x_0 = 0.5 \\ y_0 = 0.25}} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{\substack{x_0 = 0.5 \\ y_0 = 0.25}} = 0.$$

Обчислимо визначник (11):

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 > 0$, отже у стаціонарній точці $(0.5,\ 0.25)$ є умовний екстремум.

Задача 2. Дослідити функцію $z = x^2 - y^2 + 3xy$ на локальний екстремум.

Розв'язання: за необхідною умовою екстремуму (10) перевіримо, чи має функція стаціонарні точки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x + 3y = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= -2y + 3x = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_0 &= 0 \\ y_0 &= 0 \end{aligned}.$$

За достатньою умовою (12) перевіримо, чи є ця точка точкою екстремуму. Для цього знайдемо всі похідні другого порядку і обчислимо їх значення у точці (x_0, y_0):

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}} = 2, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}} = -2, \quad \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{\substack{x_0=0\\ y_0=0}} = 3.$$

Обчислимо визначник (11):

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = -13 < 0$, отже у стаціонарній точці $(0,\ 0)$ екстремуму немає.

Задача 3. Дослідити функцію $z = x^3 + y^2 - 6x - y$ на локальний екстремум.

Розв'язання: за необхідною умовою екстремуму (10) перевіримо, чи має функція стаціонарні точки:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 3x^2 - 6 = 0 \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y - 1 = 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} x_0 &= \pm\sqrt{2} \\ y_0 &= 0.5 \end{aligned}.$$

За достатньою умовою (12) перевіримо, чи є ці точки точками екстремуму. Для цього знайдемо всі похідні другого порядку і обчислимо їх значення у точках $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$:

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x_0=\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = 6x\Big|_{\substack{x_0=\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = 6\sqrt{2},\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x_0=\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = 2,\ \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x_0=\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{\substack{x_0=\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = 0.$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right|_{\substack{x_0=-\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = 6x\Big|_{\substack{x_0=\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = -6\sqrt{2}, \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right|_{\substack{x_0=\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = 2, \left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right|_{\substack{x_0=\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = \left.\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}\right|_{\substack{x_0=\sqrt{2}\\ y_0=0.5}} = 0.$$

Обчислимо визначник (11): $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 12\sqrt{2} > 0$, отже у стаціонарній точці $A_1\left(\sqrt{2},\ 0.5\right)$ є умовний екстремум.

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} -6\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -12\sqrt{2} < 0$, отже у стаціонарній точці $A_2\left(-\sqrt{2},\ 0.5\right)$ екстремуму немає.

Знайти умовний екстремум функцій методи множників Лагранжа.

Задача 4. Знайти екстремум функції $z = 2x + y$ за умови, що $x^2 + y^2 = 5$.

Розв'язання: утворимо функцію Лагранжа:

$$L(x, y, \lambda) = 2x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 5).$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку цієї функції:

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 2 + 2\lambda x; \quad \frac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y; \quad \frac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 5.$$

Запишемо систему рівнянь для обчислювання стаціонарних точок:

$$\begin{cases} 2 + 2x\lambda = 0 \\ 1 + 2\lambda y = 0 \\ x^2 + y^2 - 5 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\lambda} \\ \dfrac{1}{\lambda^2} + \dfrac{1}{4\lambda^2} = 5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp 2 \\ y = \mp 1 \\ \lambda = \pm\dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Отже, функція Лагранжа має дві стаціонарні точки: $A_1(-2,-1,0.5)$, $A_2(2,1,-0.5)$.

Обчислюємо визначник (15): $\Delta = -\begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 2x \\ 0 & 2\lambda & 2y \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = 8\lambda\left(x^2+y^2\right).$

У стаціонарній точці $A_1(-2,-1,0.5)$ обчислюємо визначник $\Delta(-2,-1,0.5)=20>0$ та $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}=1>0$, отже у точці $A_1(-2,-1,0.5)$ функція має *умовний мінімум*: $z_{\min}(-2,-1)=-5$.

У стаціонарній точці $A_2(2,1,-0.5)$ обчислюємо визначник $\Delta(2,1,-0.5)=-20<0$ та $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-1<0$, отже у точці $A_2(2,1,-0.5)$ функція має *умовний максимум*: $z_{\max}(2,1)=5$.

Задача 5. Знайти точки умовного екстремуму функції $u = x-2y+2z$ за умови, що $x^2+y^2+z^2=1$.

Розв'язання: утворимо функцію Лагранжа:

$$L(x,y,z,\lambda) = x-2y+2z+\lambda\left(x^2+y^2+z^2-1\right).$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку цієї функції:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=1+2x\lambda;\quad \frac{\partial L}{\partial y}=-2+2y\lambda;\quad \frac{\partial L}{\partial z}=2+2z\lambda;\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x^2+y^2+z^2-1.$$

Запишемо систему рівнянь для обчислювання стаціонарних точок:

$$\begin{cases} 1+2x\lambda=0 \\ -2+2y\lambda=0 \\ 2+2z\lambda=0 \\ x^2+y^2+z^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=-1/2\lambda \\ y=1/\lambda \\ z=-1/\lambda \\ 1/4\lambda^2+1/\lambda^2+1/\lambda^2-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\mp 1/3 \\ y=\pm 2/3 \\ z=\mp 2/3 \\ \lambda=\pm 3/2 \end{cases}.$$

Отже, функція Лагранжа має дві стаціонарні точки:

$$M_1\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{2}\right) \text{ та } M_2\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right).$$

Обчислюємо визначник (15):

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda^3.$$

У стаціонарній точці $M_1\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{2}\right)$ обчислюємо визначник $\Delta\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{2}\right)=-27<0$ та $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=-3<0$, отже у точці $M_1\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{3}{2}\right)$ функція має *умовний максимум*: $u_{\max}\left(\frac{1}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)=3$.

У стаціонарній точці $M_2\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)$ обчислюємо визначник $\Delta\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)=27>0$ та $\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}=3>0$, отже у точці $M_2\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{3}{2}\right)$ функція має *умовний мінімум*: $z_{\min}\left(-\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3}\right)=-3$.

Задача 6. Знайти умовний екстремум функції $z=xy^2$ за умови, що $x+2y-1=0$.

Розв'язання: утворимо функцію Лагранжа:

$$L(x,y,\lambda)=\ xy^2+\lambda(x+2y-1).$$

Знайдемо частинні похідні першого порядку цієї функції:

$$\frac{\partial L}{\partial x}=y^2+\lambda;\quad \frac{\partial L}{\partial y}=2xy+2\lambda;\quad \frac{\partial L}{\partial \lambda}=x+2y-1.$$

Запишемо систему рівнянь для обчислювання стаціонарних точок:

$$\begin{cases} y^2+\lambda=0 \\ 2xy+2\lambda \\ x+2y-1=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1=1 \\ y_1=0 \\ \lambda_1=0 \end{cases} \text{та} \begin{cases} x_2=1/3 \\ y_2=1/3 \\ \lambda_2=-1/9 \end{cases}.$$

Отже, функція Лагранжа має дві стаціонарні точки: $A_1(1,\ 0,\ 0)$, $A_2\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{9}\right)$.

Обчислюємо визначник (15):

$$\Delta=-\begin{vmatrix} 0 & 2y & 1 \\ 2y & 2x & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}=8y-2x.$$

У стаціонарній точці $A_1(1, 0, 0)$ обчислюємо визначник $\Delta(1, 0, 0) = -2 > 0$ та $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 > 0$, отже у точці $A_1(1, 0, 0)$ функція має *умовний мінімум*: $z_{\min}(1, 0) = 0$.

У стаціонарній точці $A_2\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{9}\right)$ обчислюємо визначник $\Delta\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{9}\right) = 2 > 0$ та $\dfrac{\partial^2 L}{\partial x^2} = 0 > 0$, отже у точці $A_2\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ -\dfrac{1}{9}\right)$ функція має *умовний максимум*: $z_{\max}\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right) = \dfrac{1}{27}$.

Визначити найбільше і найменше значення наступних функцій у вказаних областях.

Задача 7. Знайти найбільше й найменше значення функції $z = \dfrac{1}{2}x^2 - xy + y$ в замкненій області, що обмежена параболою $y = \dfrac{x^2}{3}$ і прямою $y = 3$.

Розв'язання:

Знайдемо стаціонарні точки всередині області (рис. 7):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = x - y = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = -x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Маємо першу точку $M_1(1, 1)$, яка належить області D.

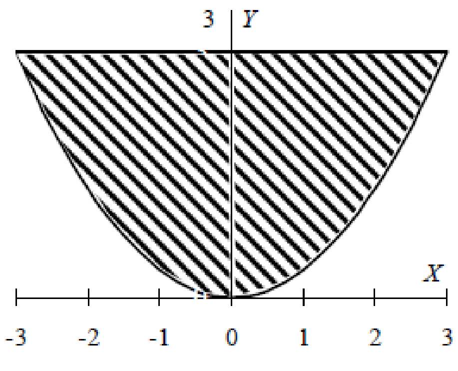

Рис. 7. **Область D задачі 7**

Тепер розглянемо криву $y=\dfrac{x^2}{3}$ Слід діяти за другим способом кроку (3) алгоритму. Підставляємо в рівняння функції рівняння кривої межі:

$$z\Big|_{y=\frac{x^2}{3}}=\frac{1}{2}x^2-x\frac{x^2}{3}+\frac{x^2}{3}=-\frac{x^3}{3}+\frac{5x^2}{6}.$$

Знаходимо стаціонарні точки отриманої функції:

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=-x^2+\dfrac{5x}{3}=0\Rightarrow\begin{cases}x=0\\ x=\dfrac{5}{3}\end{cases}$, що відповідають таким точкам на кривій $y=\dfrac{x^2}{3}$: $M_2(0,0)$ та $M_3\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{25}{27}\right)$, які належать даній області D.

Розглядаємо далі пряму $y=3$:

$$z\Big|_{y=3}=\frac{1}{2}x^2-3x+3,\quad \frac{\partial z}{\partial x}=x-3=0\Rightarrow x=3.$$

На цій прямій отримаємо наступну точку $M_4(3,3)$.

Обчислимо значення функції на кінцях проміжку – це точки $M_5(-3,3)$ та $M_4(3,3)$.

Переходимо до (5) кроку: знаходимо значення функції в отриманих чотирьох точках, щоб серед них знайти найбільше і найменше:

$$z(M_1)=\frac{1}{2},\ z(M_2)=0,\ z(M_3)=\frac{125}{162},\ z(M_4)=-\frac{3}{2},\ z(M_5)=\frac{33}{2}.$$

Серед одержаних значень функції обираємо найбільше й найменше значення:

$$\min_D z=-\frac{3}{2}\ \text{при}\ x=3,\ y=3;$$

$$\max_D z=\frac{33}{2}\ \text{при}\ x=-3,\ y=3.$$

Задача 8. Знайти найбільше й найменше значення функції $z=x+y$ в замкненому крузі $x^2+y^2\le 1$.

Розв'язання:

Знайдемо стаціонарні точки всередині круга:

$\begin{cases}\dfrac{\partial z}{\partial x}=1\neq 0\\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=1\neq 0\end{cases}$, отже стаціонарних точок в середині круга немає.

На межі, тобто на колі $x^2 + y^2 = 1$ розв'яжемо задачу за допомогою функції Лагранжа (1 спосіб п. 3 алгоритму) $L(x, y, \lambda) = = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1)$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial x} = 1 + 2\lambda x \\ \dfrac{\partial L}{\partial y} = 1 + 2\lambda y \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = x^2 + y^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ y = -\dfrac{1}{2}\lambda \\ \dfrac{\lambda^2}{4} + \dfrac{\lambda^2}{4} - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \mp\dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \lambda = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}.$$

Отримали дві точки: $M_1\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ та $M_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$, які належать колу, а отже й кругу (області D).

Переходимо до (5) кроку: знаходимо значення функції в отриманих двох точках, щоб серед них знайти найбільше і найменше:

$$z(M_1) = \sqrt{2}, \quad z(M_2) = -\sqrt{2}.$$

Серед одержаних значень функції обираємо найбільше й найменше значення:

$$\max_D z = \sqrt{2} \text{ при } x = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ y = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$\min_D z = -\sqrt{2} \text{ при } x = \frac{1}{\sqrt{2}},\ y = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Задача 9. Знайти найбільше і найменше значення функції $z = x^2 + y^2 - xy + x + y$ в області D, обмеженій лініями $x = 0$, $y = 0$, $x + y + 3 = 0$.

Розв'язання:

Знайдемо стаціонарні точки всередині області (рис. 8):

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x} = 2x - y + 1 = 0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial y} = 2y - x + 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}.$$

Маємо першу точку $M(-1,\ -1) \in D$.

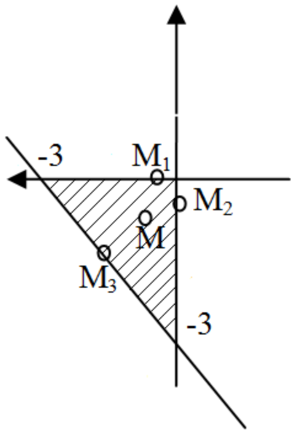

Рис.8. **Область D задачі 9**

Тепер розглянемо криві $x=0$, $y=0$, $x+y+3=0$. Слід діяти за другим способом кроку (3) алгоритму. Підставляємо в рівняння функції рівняння кривих межі:

$z\big|_{x=0}=y^2+y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}=2y+1\Rightarrow y=-\dfrac{1}{2}$. На цій прямій отримаємо наступну точку $M_1(0,\ -\frac{1}{2})$;

$z\big|_{y=0}=x^2+x$, $\dfrac{\partial z}{\partial x}=2x+1\Rightarrow x=-\dfrac{1}{2}$. На цій прямій отримаємо наступну точку $M_2(-\frac{1}{2},\ 0)$;

$$z\big|_{y=-x-3}=x^2+x^2+6x+9+x^2+3x+x-x-3=3x^2+9x+6,$$

$\dfrac{\partial z}{\partial x}=6x+9\Rightarrow x=-\dfrac{3}{2}$. На цій прямій отримаємо наступну точку $M_3(-\frac{3}{2},\ -\frac{3}{2})$.

Обчислимо значення функції на кінцях проміжку – це точки $(-3,0)$, $(0,0)$, $(0,-3)$.

Переходимо до 5 кроку: знаходимо значення функції в отриманих двох точках, щоб серед них знайти найбільше і найменше:

$z(M)=-1$; $z(M_1)=-\dfrac{1}{4}$; $z(M_2)=-\dfrac{1}{4}$; $z(M_3)=-\dfrac{3}{4}$; $z(-3,0)=6$; $z(0,0)=0$; $z(0,-3)=6$.

Серед одержаних значень функції обираємо найбільше й найменше значення:

$$\max_D z = 6,\ \min_D z = -1.$$

Методом найменших квадратів знайти залежність між x і y.

Задача 10. Темпи зростання продуктивності праці за роками в промисловості держави наведені в таблиці. Передбачаючи, що залежність y від x лінійна: $y = ax + b$, знайти a і b.

x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	100	156	170	184	194	295	220	229

Розв'язання: обчислимо коефіцієнти нормальної системи рівнянь:

$$\sum_{i=1}^{8} x_i = 36,\ \sum_{i=1}^{8} x_i^2 = 204,\ \sum_{i=1}^{8} x_i y_i = 7230,\ \sum_{i=1}^{8} y_i = 1458.$$

Отже, маємо систему:

$\begin{cases} 204a + 36b = 7230 \\ 36a + 8b = 1458 \end{cases}$, розв'язуючи яку, отримаємо: $a \approx 15.93$, $b \approx 110.57$.

Отже, отримано рівняння шуканої прямої: $y = 15.93x + 110.57$.

Графіки заданої табличної функції і побудованої лінійної функції наведено на рис. 9.

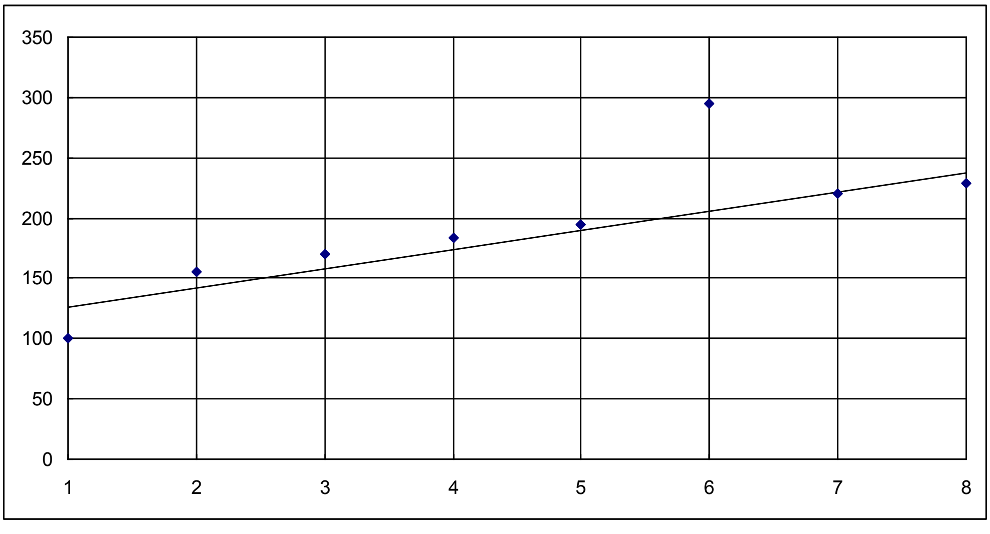

Рис. 9. **Графіки табличної та лінійної функцій**

Варіанти завдань для самостійної роботи

1. Дослідити функції на локальний екстремум:

№	Функція	№	Функція
1	$z=-x^2+xy-y^2+7x-y+1$	16	$z=x^2+3xy-y^2-y+5$
2	$z=-2x^2+4xy-y^2+12x+2$	17	$z=x^2+5xy-3y^2-2y+2$
3	$z=x^2+xy-y^2+x-y+3$	18	$z=x^2y+xy^2+6x-2y+1$
4	$z=x^2+xy+y^2-x-14y$	19	$z=-x^2-xy+y^2+x-4y$
5	$z=x^2y+xy+xy^2-3x+2y$	20	$z=xy-x^2y^2-3x+2y+5$
6	$z=-x^3-y^3+15xy$	21	$z=x^3+y^3-3xy$
7	$z=x^3+8y^2-6xy+5$	22	$z=-2x^2-2xy-2y^2+15x+1$
8	$z=-x^2-y^2-xy+6x+1$	23	$z=x^3-6xy+y^2-9x+6y+1$
9	$z=-x^2-y^2-xy+6x+1$	24	$z=4(x-y)-x^2-y^2$
10	$z=2x^3+2y^3-5xy+6$	25	$z=6(x-y)-3x^2-3y^2$
11	$z=-x^2+6xy-9y^2+y-x$	26	$z=2xy-3x^2-2y^2+10$
12	$z=x^3+3y^3-xy-1$	27	$z=-xy+x^2+y^2+x+2y-4$
13	$z=1+5xy-y+x^2-10y^2$	28	$z=2x^2-y^3+x-1$
14	$z=2(x+y)-3x^2-y^2$	29	$z=-x^2-5xy-y^2+x-3y+4$
15	$z=x^2+2xy-4y^2+3x-y-8$	30	$z=x^2-xy-7y^2+7x-9y+11$

2. Знайти умовний екстремум функцій методом множників Лагранжа:

№	Функція	Умова
1	$z=x-7y$	$x^2+y^2=1$
2	$z=xy$	$x/y=8$
3	$z=2x^2+y^2+1$	$2x+y-6=0$
4	$z=3x^2-y^2$	$3x+2y=6$

№	Функція	Умова
5	$z=-x^2-y^2+3$	$x-y=0$
6	$z=5x-y$	$x^2+y^2-9=0$
7	$z=x/y$	$xy=2$
8	$z=x^2y$	$2x-y+3=0$
9	$z=x+6y-xy$	$x^2-y=0$
10	$z=-x^2-y^2-xy+6x+1$	$x+y-4=0$
11	$z=-x^2-y^2-xy+6x+1$	$x+y-1=0$
12	$z=-x^2-5xy-y^2+x-3y+4$	$2x+y=3$
13	$z=x^2-xy-7y^2+7x-9y+11$	$x+5y-10=0$
14	$z=-x^2-5xy-y^2$	$x-y+1=0$
15	$z=xy^2$	$6x-7y=0$
16	$z=x+y$	$x^2+y^2=9$
17	$z=x+y^2$	$y=x-1$
18	$z=2x^2+3y^2-4$	$2x+y-3=0$
19	$z=3x^2-y^2-7$	$3x+2y=0$
20	$z=x^3+y^3$	$x-4y=0$
21	$z=-x^2-xy+x-2$	$x+4y-4=0$
22	$z=x^2+y^2-xy$	$x+y=0$
23	$z=5xy-y^2+3y$	$2x+y-13=1$
24	$z=x^2+y^2+y-x$	$x^2-y^2=5$
25	$z=2x^3+y^2-3$	$y-6=x$
26	$z=3x^2+5y^2-7x$	$x^2-2y^2=0$
27	$z=-xy-y^2$	$x-y=7$
28	$z=5x-y+1$	$x^2+y^2=2$

№	Функція	Умова
29	$z = x/y$	$xy = 5$
30	$z = x^2 y$	$2x - y = 1$

3. Визначити найбільше і найменше значення наступних функцій у вказаних областях:

№	Функція	Область
1	$z = x^3 + y^3$	$x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 4$
2	$z = -x^2 - xy + x - 2$	$x \ge 0, y \ge 0, x + y - 3 \le 0$
3	$z = x^2 + y^2 - xy$	$x \ge 0, y \le 0, x + y \le 10$
4	$z = 5xy - y^2 + 3y$	$\lvert x \rvert + \lvert y \rvert \le 2$
5	$z = x^2 + y^2 + y - x$	$x^2 + y^2 \le 1$
6	$z = 2x^3 + y^2 - 3$	$1 \le x \le 3, 0 \le y \le 4$
7	$z = 3x^2 + 5y^2 - 7x$	$x^2 + y^2 \le 9$
8	$z = -xy - y^2$	$x \ge 0, y \le 0, x + y \le 1$
9	$z = 5x - y + 1$	$x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 2$
10	$z = 5x - y$	$x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1$
11	$z = x/y$	$x \ge 0, y \le 0, x + y - 6 \le 0$
12	$z = x^2 y$	$\lvert x \rvert + \lvert y \rvert \le 6$
13	$z = x + 6y - xy$	$x^2 + y^2 \le 16$
14	$z = -x^2 - y^2 - xy + 6x + 1$	$0 \le x \le 2, 0 \le y \le 3$
15	$z = 2x^3 y + y^2 x$	$x \ge 0, y \le 0, x + y \le 2$
16	$z = x^2 + y^2 - xy$	$x \ge 0, y \ge 0, x + y - 5 \le 0$
17	$z = x^2 - 2xy - y^2$	$x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1/2$
18	$z = 5xy - x^3$	$x \ge 0, y \le 0, x + y - 3 \le 0$
19	$z = y^3 x$	$\lvert x \rvert + \lvert y \rvert \le 4$

№	Функція	Область
20	$z = x^2y - xy^2$	$x^2 + y^2 \le 4$
21	$z = xy$	$-1 \le x \le 2, 0 \le y \le 3$
22	$z = 2x^2 + y^2 + 1$	$0 \le x \le 3, -2 \le y \le 2$
23	$z = 3x^2 - y^2$	$x = 0, y = 0, x + y = 4$
24	$z = -x^2 - y^2 + 3$	$x = 0, y = 0, x - y = 2$
25	$z = x - 7y$	$-3 \le x \le 3, 0 \le y \le 5$
26	$z = 3x^2 + 5y^2 - 7x$	$x^2 + y^2 \le 25$
27	$z = -xy - y^2$	$\lvert x\rvert + \lvert y\rvert \le 7$
28	$z = 5x - y + 1$	$x \ge 0, y \le 0, x + y - 8 \le 0$
29	$z = x/y$	$x \ge 0, y \ge 0, x + y \le 1/5$
30	$z = x^2y$	$x \ge 0, y \ge 0, x + y - 7 \le 0$

4. Спільне для всіх варіантів: наприклад, є дані про розміри покупок y та їх роздрібну ціну x, наведено в таблиці. Передбачаючи, що залежність y від x лінійна: $y = ax + b$, знайти a і b.

y_i, кг	25	30	20	25	15	10	20	35	40	30
x_i, тис. грн	14	12	15	14	18	20	16	12	10	13

Запитання для самоперевірки

1. Як визначається екстремум функції кількох змінних?
2. Які необхідні умови існування екстремуму функції двох змінних?
3. Які достатні умови існування екстремуму функції двох змінних?
4. Що називається умовним екстремумом функції двох змінних?
5. Що являє собою функція Лагранжа?
6. Як знайти найменше та найбільше значення функції двох змінних у замкненій області?
7. У чому полягає принцип методу найменших квадратів?
8. Що описує система нормальних рівнянь?

Рекомендована література

Малярець Л. М. Вища математика для економістів у прикладах, вправах і задачах : навч. посіб. / Л. М. Малярець, А. В. Ігначкова. – Х. : ВД. "ІНЖЕК", 2006. – 544 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : практ. посіб. до розв'язання задач / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад . – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 476 с.

Малярець Л. М. Математика для економістів : навч. посіб. у 2-х ч. / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьєва, А. В. Ігначкова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 368 с.

Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисления / Н. С. Пискунов. – М. : Наука, – Т.1, 1985. – 432 с.

Робоча програма навчальної дисципліни "Вища та прикладна математика" для студентів галузі знань "Менеджмент і адміністрування" всіх форм навчання / укл. О. Д. Бабіна, О. В. Лежепьокова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2011. – 84 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації до самостійної роботи з навчальної дисципліни "ВИЩА ТА ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА"

для студентів галузі знань
0306 "Менеджмент і адміністрування"
всіх форм навчання

Укладач **Ковальова** Катерина Олександрівна

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**

Редактор **Промський М. Н.**

Коректор **Маркова Т. А.**

План 2014 р. Поз. № 40.

Підп. до друку Формат 60 х 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.

Ум.-друк. арк. 3,25. Обл.-вид. арк. 4,06. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ***Дк № 481 від 13.06.2001 р.***