

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ
УКРАЇНИ
ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ
ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ



Методичні рекомендації
до виконання лабораторних робіт
з навчальної дисципліни

«ФІЗИКА»



МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**Методичні рекомендації
до виконання лабораторних робіт
з навчальної дисципліни**

"ФІЗИКА"

**для студентів напрямів підготовки "Комп'ютерні науки",
"Видавничо-поліграфічна справа"
денної форми навчання**

Харків. Вид. ХНЕУ, 2008

Затверджено на засіданні кафедри фізики та електроніки.
Протокол №5 від 18.12.2007 р.

M54 Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з навчальної дисципліни "Фізика" для студентів напрямів підготовки "Комп'ютерні науки", "Видавничо-поліграфічна справа" денної форми навчання / Укл. О. О. Бондаренко, А. Г. Батрак, В. Ю. Вдовьонков, О. М. Гоков, Е. А. Жидко. — Харків: Вид. ХНЕУ, 2008. — 212 с. (Укр. мов.)

Подано опис лабораторних робіт з даної навчальної дисципліни та методичні рекомендації до кожної роботи, які містять: основні теоретичні відомості про явища, які вивчаються; основні фізичні закони, що їх описують; опис експериментальної установки та методики експерименту; контрольні запитання для самоконтролю. Наведено додатки, зразок оформлення звіту, а також перелік рекомендованої літератури.

Рекомендовано для студентів напрямів підготовки "Комп'ютерні науки", "Видавничо-поліграфічна справа" денної форми навчання.

Вступ

Фізика – наука експериментальна, а тому на першому плані під час її вивчення – фізичний практикум.

Завдання лабораторного практикуму з фізики полягає в навчанні студентів техніці експериментальних досліджень, аналізу й узагальненню отриманих результатів, у повторенні й осмисленні теоретичного матеріалу, набутті навичок самостійної дослідницької роботи.

Грамотність та ерудиція сучасного фахівця можуть бути обумовлені тільки глибоким знанням фізики. І це зрозуміло, тому що практична діяльність фахівця, який працює в галузі збору й обробки економічної інформації, нерозривно пов'язана із застосуванням електронних обчислювальних машин та електронних засобів збору й передачі інформації. Високий рівень сучасної науки, техніки й виробництва, постійне відновлення матеріальної бази електронних обчислювальних машин потребують від молодих фахівців глибоких теоретичних знань з фізики, доброго знання вимірювальної апаратури та вміння з нею працювати.

У кожній лабораторній роботі даються загальні теоретичні відомості про досліджуване явище, опис установки й експериментальної методики, контрольні питання для самоперевірки. Література для самостійної підготовки наведена наприкінці рекомендацій.

Під час роботи в лабораторії необхідне суворе дотримання правил техніки безпеки. На початку кожного циклу робіт студенти одержують загальний інструктаж з техніки безпеки й повинні розписатися у відповідному журналі.

Рекомендуються наступні етапи в підготовці й проведенні лабораторних робіт:

1. У позаурочний час (до занять) уважно вивчити опис лабораторної роботи й за рекомендованою літературою – теоретичний матеріал, що стосується даної теми. Скласти короткий конспект проведення роботи, який включає схему установки й формули для обчислення необхідних величин.

2. На початку занять перед виконанням чергової лабораторної роботи необхідно одержати допуск до роботи, відповівши на деякі питання за темою роботи в процесі короткої співбесіди з викладачем.

3. Ознайомитися зі схемою експериментальної установки й вимірювальних приладів.

4. Ввімкнути експериментальну установку обов'язково в присутності викладача або лаборанта.

5. Результати вимірювань записати в таблицю і показати викладачеві.

6. Виконати потрібні обчислення, побудувати графік, якщо це необхідно.

7. Зробити висновки.

8. Під час наступного лабораторного заняття захистити дану лабораторну роботу, маючи звіт про неї з усіма необхідними обчисленнями, таблицями, графіками тощо. До здачі роботи допускаються студенти, які виконали лабораторну роботу й оформили звіт. Захист роботи проводиться у формі опитування за змістом виконаних лабораторних робіт. Перелік контрольних запитань та завдань наведений у кінці кожної роботи.

Звіт про лабораторну роботу оформлюється згідно зі зразком, наведеним у додатку В.

Ніколи не слід починати виконання лабораторної роботи, якщо в ній що-небудь залишається незрозумілим.

Не бажано, щоб студент, виконавши лабораторну роботу, переконувався в правильності її виконання тільки тому, що результат відповідає табличному значенню шуканої величини або результату, вже раніше отриманому іншими студентами. Необхідно, щоб упевненість у правильному виконанні роботи була наслідком усвідомлення того, що всі вимірювання зроблені правильно і що в них не було допущено помилок. До цього приводить як уважне виконання роботи у всіх її частинах, так і необхідне повторення всіх окремих вимірювань кілька разів, причому всі ці вимірювання повинні виконуватися однаково ретельно.

Лабораторна робота №1

Вимірювання фізичних величин, математичні методи обробки й похибки результатів вимірювань

Мета роботи – оволодіння математичними методами обробки результатів експериментів, оцінка похибок вимірювань і формування навичок користування деякими вимірювальними приладами.

Загальні положення

1. Про вимірювання фізичної величини. Фізика – наука експериментальна, кількісна. Це означає, що фізичні закони встановлюються й перевіряються шляхом накопичення й зіставлення експериментальних даних. Властивості, які характерні для об'єктів матеріального світу, можуть бути охарактеризовані фізичними величинами. Фізична величина визначає якусь одну властивість матерії. Наприклад, робота характеризує властивість матеріальних тіл передавати один одному деяку кількість енергії під час їхньої взаємодії.

Результати фізичних експериментів подаються найчастіше набором деяких чисел. Фізичні закони формулюються у вигляді математичних формул, що пов'язують між собою числові значення фізичних величин. У зв'язку з цим необхідно навчитися правильно вимірювати числові значення фізичних величин і правильно зіставляти їх з формулами.

Виміряти фізичну величину – значить порівняти її з іншою однорідною величиною, прийнятою за одиницю виміру.

Прийнято розрізняти два основних види вимірювань.

1. Прямі вимірювання – вимірювання, під час яких результат впливає з експериментальних даних декількох вимірювань однієї й тієї ж величини. До таких належать вимірювання, здійснювані або за допомогою приладів, градуйованих заздалегідь у певних одиницях, або шляхом безпосереднього порівняння вимірюваної фізичної величини з її мірами. Наприклад, вимірювання довжини – метром, величини струму – амперметром, часу – секундоміром.

2. *Непрямі вимірювання* – вимірювання, у процесі яких шукану величину одержують на основі експериментальних даних прямих вимірювань декількох різних величин, пов'язаних із певною функціональною залежністю. Вдаватися до такого прийому доводиться тому, що прямі вимірювання в деяких випадках можуть дати недостатньо надійні результати або виявитися дуже складними, а іноді й зовсім неможливими. Наприклад, кінетична енергія тіла легко знаходиться з формули:

$$E_k = \frac{mv^2}{2},$$

де m – маса тіла;

v – швидкість тіла.

У ході виконання обчислень необхідно завжди керуватися практично необхідною точністю. Виконувати обчислення з більшою точністю, ніж цього допускають дані задачі, безглуздо.

Різниця між точним числом x і його наближеним значенням a називається абсолютною похибкою даного наближеного числа:

$$\Delta = |x - a|.$$

Якщо абсолютна похибка величини a не перевищує одиниці розряду останньої цифри числа a , то вважають, що в числа a всі знаки правильні. Два числа вважають однаково точними, якщо відносні похибки цих чисел $\varepsilon = \frac{\Delta}{a}$, допущені під час округлення, однакові.

У процесі запису результатів вимірювань і похибок необхідно округляти числа. Під час округлення залишають лише правильні знаки числа, всі інші відкидають. При цьому користуються загальновідомими правилами округлення чисел. А саме правилом доповнення, тобто збільшують останню із цифр, що залишається, на одиницю, якщо перша з тих, що відкидаються, більша ніж 5, і залишають останню з тих, що залишаються, незмінною, якщо перша з тих, що відкидаються, менша ніж 5. Якщо частина, що відкидається, складається тільки з однієї цифри 5, то округлення звичайно робиться так, щоб остання цифра залишилася

парною. Наприклад, округляючи число $\pi = 3,14159265\dots$ до третього знака після коми, отримуємо $\pi = 3,142$.

Правила округлення у випадку математичних операцій над числами:

1. У процесі додавання й віднімання округлення всіх чисел виконується до розряду, на одиницю меншого, ніж розряд найменш точного числа. В остаточному результаті зберігають стільки значущих цифр, скільки їх у найменш точному числі, що входить в операцію:

$$4,20 + 0,353 - 2,211 = 2,34.$$

2. Під час множення й ділення наближених чисел у результаті зберігають стільки значущих цифр, скільки їх має найменш точне наближене число:

$$5,048 \times 2,6 \approx 13,0.$$

3. У ході піднесення до степеня зберігають у результаті стільки значущих цифр, скільки їх має піднесене до степеня число:

$$(1,25)^2 = 1,5625 \approx 1,56.$$

4. У процесі добування кореня результат обчислюється до скількох значущих цифр, скільки їх має підкореневе число:

$$\sqrt{4,22} \approx 2,102 \approx 2,10.$$

5. Користуючись таблицями логарифмів, вибирають значення логарифма до числа знаків, яке дорівнює числу знаків у логарифмованому числі:

$$\lg 77,23 \approx 2,8878 \approx 2,888.$$

Якщо відповідна операція є проміжною, то в її результаті варто брати на одну значущу цифру більше, ніж зазначено в правилах, а в остаточному результаті останню цифру відкидати з дотриманням правил округлення.

2. Похибка вимірювань. Унаслідок недосконалості вимірювальних приладів, неконтрольованих коливань умов вимірювань, труднощів урахування всіх побічних явищ під час вимірювань, недосконалості органів чуттів спостерігача та з інших причин результат вимірювання не є точним, а містить певну похибка (помилку). Тому завдання вимірювань полягає не у визначенні правильного значення вимірюваної величини, а у встановленні інтервалу, всередині якого перебуває правильне значення цієї величини. Теорія похибок вказує на те, як слід здійснювати вимірювання і їхню обробку, щоб величина цього інтервалу була мінімальною.

Похибки, що виникають під час вимірювання, поділяються на два великих класи:

1. Систематичні похибки – помилки, що зберігають величину й знак від досліду до досліду. Природа й характер систематичних помилок можуть бути відомі. До них належать помилки, викликані неточністю градування вимірювальних приладів, постійним і одnobічним зовнішнім впливом, особистими якостями спостерігача. Такі похибки можна врахувати, а отже й усунути.

Зменшити внесок систематичних похибок шляхом повторення досліду, звичайно, не можна. Для цього потрібно вдосконалити прилад або змінити методику вимірювань.

Приклади систематичних похибок: помилки, пов'язані зі зсувом нульової точки термометра, з неправильною вагою гир, з неточним розподілом шкали вимірювальних лінійок і т. д.

2. Випадкові похибки – помилки, які непередбаченим чином змінюють свою величину (і знак!) від досліду до досліду. Випадкові похибки залежать від неточності вимірювальних приладів, від недосконалості наших органів чуттів і від безперервної дії зовнішніх умов, що змінюються (зміни температури, тиску, вологості тощо). Такі помилки можна звести до мінімуму, але повністю усунути їх неможливо. У процесі багаторазових вимірювань вони підкоряються статистичним законам і їхній вплив на результат вимірювання можна врахувати.

Різновидом випадкових похибок є так звані промахи (операторські помилки), або грубі помилки, що виникають через неуважність спостерігача під час ввімкнення приладу, відліку по шкалі або запису результату. Наприклад, відлік по шкалі 18 замість 13, запис результату 17,5 замість 1,75. Промахи виявляються в різкій відмінності результату

одного з вимірювань від інших і повинні бути виключені до математичної обробки.

Повністю усунути випадкові похибки неможливо. Тому постає завдання одержання за даними вимірювань якомога точнішого значення вимірюваної величини й оцінки його точності. Це завдання вирішується методами математичної обробки результатів вимірювань.

3. Оцінка точності результату багаторазових прямих вимірювань. Теорія похибок справджується тільки для випадкових похибок, тому надалі слід вважати, що грубі промахи й систематичні похибки повністю усунуті з вимірювань.

Абсолютна похибка. Нехай зроблено N вимірювань деякої величини, правильне значення якої a . У результаті вимірювань буде одержаний ряд наближених значень a_1, a_2, \dots, a_n цієї величини. Як показує теорія, найбільш імовірним значенням вимірюваної величини є її середнє арифметичне значення \bar{a} :

$$a_{\text{сер}} = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \bar{a} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i. \quad (1.1)$$

Різниця між значенням, отриманим у кожному вимірюванні, й середнім арифметичним значенням величини називається абсолютною похибкою окремого вимірювання:

$$\Delta a_1 = a_1 - \bar{a} \text{ – абсолютна похибка 1-го вимірювання;}$$

$$\Delta a_2 = a_2 - \bar{a} \text{ – абсолютна похибка 2-го вимірювання;}$$

$$\Delta a_n = a_n - \bar{a} \text{ – абсолютна похибка } n\text{-го вимірювання.}$$

Середньою абсолютною похибкою вимірювання є середнє арифметичне абсолютних значень похибок окремих вимірювань:

$$\Delta a_{\text{сер}} = \frac{\Delta a_1 + \Delta a_2 + \dots + \Delta a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i = \Delta \bar{a}. \quad (1.2)$$

У випадку нескінченно великої кількості вимірювань:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \Delta a_i = 0. \quad (1.3)$$

Тоді середнє арифметичне значення результатів окремих вимірювань \bar{a} точно дорівнює справжньому значенню вимірюваної величини a .

Практично n завжди кінцеве, так що \bar{a} залишається найбільш імовірним значенням вимірюваної величини a . Для визначення максимальної величини $\overline{\Delta a}$ всі доданки у виразі (1.2) треба додати за модулем незалежно від їхнього знака, тобто:

$$\overline{\Delta a} = \frac{|\Delta a_1| + |\Delta a_2| + \dots + |\Delta a_n|}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n |\Delta a_i|. \quad (1.4)$$

При досить великій кількості вимірювань випадкові похибки будуть рівноймовірні як у бік збільшення, так і в бік зменшення значення вимірюваної величини. Це значить, що правильне значення вимірюваної фізичної величини перебуває в інтервалі:

$$\bar{a} - \overline{\Delta a}, \bar{a} + \overline{\Delta a}.$$

Кінцевий результат вимірювань прийнято записувати:

$$a = \bar{a} \pm \overline{\Delta a}. \quad (1.5)$$

Зі збільшенням кількості вимірювань середня абсолютна похибка зменшується, отже, вимірювання треба виконувати стільки разів, щоб вона дорівнювала похибці приладу.

Якщо в результаті вимірювань виходить ряд абсолютно однакових значень вимірюваної величини або обчислена похибка менша від тієї, котру дає прилад, то в ролі середньої абсолютної похибки вибирається власна похибка приладу, яка дорівнює, як правило, ціні (половині ціни) поділки шкали приладу (на штангенциркулі, мікрометрі точність приладу зазначена на самому інструменті). Це ж правило застосовується до випадків, коли виконується одне вимірювання.

Якщо для визначення періоду коливань T був вимірний час одного повного коливання маятника секундоміром, ціна найменшої поділки якого $0,2$ с, то $\Delta T = 0,2$ с. Але, виміривши час t декількох n повних коливань, можна одержати значення періоду $T = t/n$ в n раз точніше, тобто $\Delta T = \frac{0,2}{n}$ (с).

Відносна похибка. Нехай після ряду проведених вимірювань довжини предмета одержано: $l = (2,000 \pm 0,001) \text{ м}$. У цьому випадку похибка 1 мм цілком прийнятна. Але якщо ми з такою же похибкою вимірюємо діаметр кульки, який дорівнює 3 мм, то отриманий результат не може нас задовольнити. З наведеного прикладу випливає, що абсолютна похибка не повністю характеризує якість вимірювань. Тому для повної характеристики вимірювань поряд з абсолютною похибкою вводиться відносна похибка $\varepsilon = \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}}$.

Відносна похибка є відношенням середньої абсолютної похибки $\Delta \bar{a}$ до середнього значення вимірюваної величини \bar{a} . Вона показує, яку частину вимірюваної величини становить середня абсолютна похибка, є величиною безрозмірною і виражається у відсотках:

$$\varepsilon = \frac{\Delta \bar{a}}{\bar{a}} 100\%. \quad (1.6)$$

У наведеному вище прикладі під час вимірювання довжини предмета похибка становить:

$$\varepsilon_1 = \frac{0,001}{2} 100\% = 0,05\%,$$

а під час вимірювання діаметра кульки:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3} 100\% = 33\%,$$

хоча абсолютні похибки вимірювань були однаковими.

4. Оцінка точності результатів непрямих вимірювань. Нехай деяка величина U , виміряна непрямим способом, пов'язана з величинами x, y, \dots, t , що визначені прямими вимірюваннями, може бути задана функціональною залежністю:

$$U = f(x, y, \dots, t). \quad (1.7)$$

Математична обробка результатів непрямих вимірювань здійснюється по-різному у випадках, коли аргументи постійні й коли вони змінні. Слід пояснити ці випадки на прикладі визначення прискорення вільного падіння g за формулою $h = \frac{gt^2}{2}$.

Можна виконати серію вимірювань часу падіння t , кидаючи тіло щоразу з однієї й тієї ж висоти h . Це і є випадок постійних аргументів. Щоправда, значення t_1, t_2, \dots все-таки будуть різними, але ця розбіжність невелика й повністю обумовлена випадковими помилками вимірювань. Ряд значень t_1, t_2, \dots повинен бути математично оброблений, як було зазначено вище, тобто повинні бути знайдені \bar{t} й $\overline{\Delta t}$.

В іншому варіанті вимірювань можна в кожному випадку кидати тіло з довільної висоти, не прагнучи того, щоб вона виявилася однаковою. Це й буде випадок змінних аргументів. Очевидно, що в цьому випадку обчислювати середнє арифметичне величин h_i або величин t_i було б зовсім безглуздо.

Розглянемо кожний із цих випадків.

4.1. Випадок змінних аргументів. За результатами прямих вимірювань у кожному досліді (x_i, y_i, \dots) необхідно обчислити значення побічно вимірюваної величини U_i . Отриманий ряд значень U_1, U_2, \dots треба математично обробити, як це робиться для прямо вимірюваної величини, тобто знайти \bar{U} й $\overline{\Delta U}$. Такий підхід цілком природний, оскільки значення U_1, U_2, \dots розрізняються несуттєво, тільки через випадкові помилки вимірювання. Слід зазначити, що в розглянутому випадку помилки приладів, які вимірюють величини x, y , впливають на величину U як випадкові, тому що для різних значень аргументу вони мають різні модулі й знаки. Тому, на відміну від прямого вимірювання, додатковий

облік похибок приладу тут не потрібний, величина $\Delta\bar{U}$ є найбільшою похибкою вимірювань.

Обчислення зручно записати у вигляді таблиці (табл. 1.1 складена для розглянутого вище прикладу визначення g).

Таблиця 1.1

Приклад таблиці для визначення g

№ вимірювання	h, м	t, с	g, м/с ²	$ g - \bar{g} $
1				
2				
3				
	Середнє значення		\bar{g}	$\Delta\bar{g}$

Остаточний результат: $g = \bar{g} \pm \Delta\bar{g}$.

4.2. Випадок постійних аргументів. У цьому випадку можна було б вчинити, як у попередньому, але це був би занадто трудомісткий процес (особливо, коли аргументів багато), а приладові похибки залишилися б неврахованими. Тому діють інакше.

Очевидно, що максимально точним значенням величини U є значення \bar{U} , які одержують при підстановці у формулу, що визначає цю величину, середніх значень аргументів \bar{x} , \bar{y} , ..., \bar{t} :

$$\bar{U} = f(\bar{x}, \bar{y}, \dots, \bar{t}).. \quad (1.8)$$

Тепер необхідно обчислити найбільшу похибку $\Delta\bar{U}$, точніше кажучи, виразити її через $\Delta x, \Delta y, \dots, \Delta t$.

Виявляється, що в більшості випадків простіше спочатку обчислити відносну похибку ε , а потім знайти найбільшу абсолютну похибку результату непрямих вимірювань, множачи на $\Delta\bar{U}/U$ (фактично множать на \bar{U}).

Нижче показано, як це можна зробити.

За визначенням, відносна похибка непрямого вимірювання $\varepsilon = \frac{\Delta U}{U}$.

Оскільки $\Delta U \approx dU$, то:

$$\varepsilon = \frac{\Delta U}{U} \approx \frac{dU}{U} = d \ln U. \quad (1.9)$$

Отже, для визначення ε необхідно:

1) прологарифмувати функцію U і знайти повний диференціал від логарифма, взявши всі часткові диференціали за модулем (для обчислення максимальної помилки);

2) замінити знаки диференціала d знаками кінцевих приростів Δ ;

3) підставивши в отриманий вираз середні значення аргументів \bar{x} , \bar{y} , ..., \bar{t} і їх середні абсолютні похибки $\overline{\Delta x}$, $\overline{\Delta y}$, ..., $\overline{\Delta t}$, обчислити значення відносної похибки ε .

Знаючи відносну похибку ε результату, не важко обчислити і його середню абсолютну похибку:

$$\overline{\Delta U} = \varepsilon \bar{U}. \quad (1.10)$$

Тоді остаточний результат непрямих вимірювань подається у вигляді $U = \bar{U} \pm \overline{\Delta U}$.

Приклад. У процесі обчислення коефіцієнта поверхневого натягу σ води методом відриву кільця використовується наступна формула:

$$\sigma = \frac{F}{2\pi(D_1 - d)}, \quad (1.11)$$

де F – сила поверхневого натягу;

D_1 – зовнішній діаметр кільця;

d – товщина кільця.

F , D_1 і d визначаються методом прямих вимірювань. Необхідно обчислити \bar{F} , \bar{D}_1 , \bar{d} і $\overline{\Delta F}$, $\overline{\Delta D}_1$, $\overline{\Delta d}$, як показано раніше, після чого виконати пункти 1 – 3:

$$\ln \alpha = \ln F - \ln 2 - \ln \pi - \ln(D_1 - d);$$

$$d \ln \alpha = d \ln F - d \ln 2 - d \ln \pi - d \ln(D_1 - d) \quad (1.12)$$

або

$$\frac{d\alpha}{\alpha} = \frac{dF}{F} - \frac{d\pi}{\pi} - \frac{d(D_1 - d)}{D_1 - d};$$

$$\varepsilon = \frac{\overline{\Delta F}}{\overline{F}} + \frac{\overline{d\pi}}{\pi} + \frac{\overline{\Delta D_1} + \overline{\Delta d}}{D_1 - d}. \quad (1.13)$$

Якщо функцію (1.7) неможливо прологарифмувати, то спочатку потрібно визначити середню абсолютну похибку $\overline{\Delta U}$ як повний диференціал цієї функції, замінивши знак d на Δ і взявши всі часткові диференціали за модулем (для визначення найбільшого значення $\overline{\Delta U}$), тобто:

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy + \dots + \frac{\partial U}{\partial t} dt$$

і

$$\Delta U = \left| \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x \right| + \left| \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y \right| + \dots + \left| \frac{\partial U}{\partial t} \Delta t \right|. \quad (1.14)$$

Підставивши у вираз (1.14) середні значення \overline{x} , \overline{y} , ..., \overline{t} і їх середні абсолютні похибки $\overline{\Delta x}$, $\overline{\Delta y}$, ..., $\overline{\Delta t}$, можна обчислити середню абсолютну похибку $\overline{\Delta U}$. Потім для оцінки точності результату непрямого вимірювання величини U обчислити відносну похибку:

$$\varepsilon = \frac{\overline{\Delta U}}{U} 100 \%. \quad (1.15)$$

Якщо у вираз (1.7) входять константи (g , π , ...) або величини, вимірювані заздалегідь, і параметри лабораторної установки, то за середню абсолютну похибку приймають величину, яка дорівнює одиниці (половині одиниці) найменшого розряду, заданого в числі.

Приклади: $\pi = 3,14$; $\Delta\pi = 0,01$.

$m = 125,3$; $\Delta m = 0,1$.

5. Запис результатів вимірювань. Варто сказати кілька слів про запис результатів вимірювань. Обчислена величина $\Delta\bar{U}$ визначає точність, з якою є сенс обчислювати \bar{U} , тому що знання похибки $\Delta\bar{U}$ рятує від зайвих проміжних обчислень. Легко побачити, наприклад, що запис $M = (20,1653 \pm 0,54)$ Н · м безглуздий. Обчислення середнього значення в цьому випадку треба робити з точністю до другого знака після коми або, максимум, до третього. При похибці 0,54 останні дві цифри числа 20,1653 не означають абсолютно нічого. Правильний запис результату був би $M = (20 \pm 0,5)$ Н · м.

Ще приклади: 1) якщо $\bar{J} = 157,3$ г·см² й $\Delta\bar{J} = 1,5$ г · см²,
результат $\bar{J} = (157,3 \pm 1,5)$ г · см²;

2) якщо $\bar{m} = 135$ мг, $\Delta\bar{m} = 0,0005$ мг,
то результат $m = (135,0000 \pm 0,0005)$ мг.

У процесі запису результату середнє значення \bar{U} й середня абсолютна похибка $\Delta\bar{U}$ округляються до того знака, в якому починається значуща цифра в числі $\Delta\bar{U}$, а самі \bar{U} й $\Delta\bar{U}$ обчислюються з точністю, більшою тільки на один порядок, щоб знати, як їх округлити.

У багатьох випадках переважно зазначають величину похибки у відсотках від вимірюваної величини.

Наприклад, вага гирі $2,00 \pm 0,10$ г або $2,00$ г $\pm 5\%$.

6. Графічні методи обробки результатів. Дуже важливим методом обробки результатів досліду є подання їх у вигляді графіка. Графік дозволяє наочно подати функціональну залежність і визначити її параметри (наприклад, кутовий коефіцієнт у випадку лінійної залежності).

1. Графіки повинні виконуватися на міліметровому папері (розмір порядку 10 см x 10 см).

2. Звичайно, використовують прямокутну систему координат з однаковими масштабами по осях x й y . Значення аргументу зазвичай відкладають по осі абсцис, функції – по осі ординат.

3. На координатних осях необхідно вказувати не тільки величини, що відкладають, але й одиниці їхнього вимірювання.

4. Масштаб принципово може бути яким завгодно, але вибирати його потрібно так, щоб одержати приблизно рівні розміри графіка по довжині й по висоті.

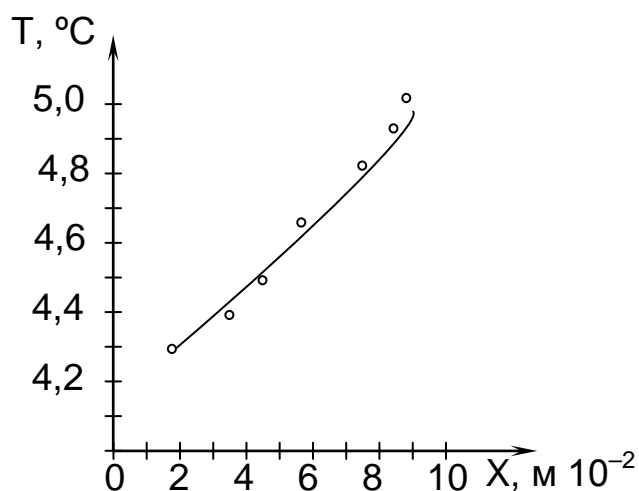


Рис. 1.1. Приклад графічної залежності

Якщо перше значення вимірюваної величини дуже відрізняється від нуля і якщо зміна цієї величини незначна, відлік на початку координат потрібно починати не від нуля, а від якогось значення, близького до першого вимірюваного значення даної величини. Коли масштаб обраний, потрібно розділити осі в обраному масштабі на рівні інтервали й надписати на осях значення цих інтервалів (рис. 1.1).

5. На основі даних табл. 1.2 на графік наносять точки (маленькими кружечками), які рекомендується позначати чорнилом, а криву проводити так, щоб нанесені точки виділялися чітко. Оскільки всі вимірювання виконані з тією чи іншою похибкою, то може мати місце деякий розкид точок (вони не укладаються точно на одній кривій). У цьому випадку потрібно проводити між точками плавну лінію так, щоб якомога більша кількість точок лягла на цю лінію, а інші розподілилися приблизно рівномірно вище й нижче від неї (див. рис. 1.1). За допомогою отриманого графіка можна для будь-якого проміжного значення однієї з величин знайти відповідне йому значення іншої величини.

Таблиця 1.2

Результати вимірювань

T, °C	X, м
4,30	0,018
4,38	0,034
4,49	0,047

4,64	0,059
4,82	0,074
4,95	0,082

7. Вимірювальні прилади. Вимірювання лінійних розмірів тіл залежно від необхідної точності можна виконати за допомогою різних вимірювальних приладів. Найбільш простими є масштабні лінійки, штангенциркулі, мікрометри. Більшість масштабних лінійок дозволяє проводити вимірювання з точністю до 1 мм; штангенциркулі мають точність 0,1; 0,15 і навіть 0,02 мм. Точність вимірювань, що дає мікрометр, становить 0,01 мм. Є й більш точні мікрометри.

Ноніус. Ноніусом називається спеціальна шкала, що доповнює звичайний масштаб і дозволяє підвищити точність вимірювань у 10 – 20 разів. Ноніус може бути лінійним (рис. 1.2) і круговим.

Лінійний ноніус 2 – це невелика лінійка, що ковзає уздовж шкали основної лінійки 1. Шкала ноніуса має 10 поділок, а довжина цієї шкали дорівнює 19 поділкам основної лінійки.

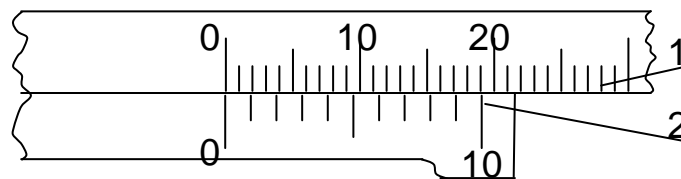


Рис. 1.2. Лінійний ноніус

Умовні позначення:

1 – основна лінійка;

2 – ноніус.

Таким чином, кожна поділка ноніуса на 1,9 більша від однієї поділки шкали основної лінійки, що дозволяє підвищити точність вимірювань до 0,1 мм. Ноніус є складовою частиною штангенциркуля й мікрометра.

Штангенциркуль. Штангенциркуль (рис. 1.3) слугує для вимірювань лінійних розмірів, які не вимагають високої точності. Він складається з основної лінійки, яка розділена на міліметри і закінчується нерухомою ніжкою А. На цій лінійці ведеться відлік цілого числа міліметрів. Уздовж лінійки ковзає друга ніжка В, на яку нанесена шкала ноніуса. Ніжка В може закріплюватися гвинтом С. У вихідному стані ніжки

А та В повинні бути розташовані впритул одна до одної. При цьому нуль ноніуса повинен збігатися з нулем масштабної лінійки.

Для вимірювання довжини деталі Д розсовують ніжки штангенциркуля й між ними розміщують вимірювану деталь; потім присувають рухливу ніжку В до деталі й закріплюють її гвинтом С. Для вимірювання внутрішнього діаметра тіла використовують ніжку Е.

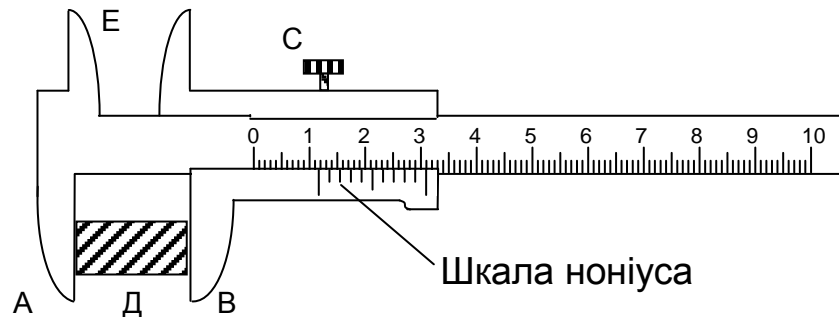


Рис. 1.3. Штангенциркуль

Відлік виконується в такий спосіб. Спочатку по основній лінійці від її нульового ділення до нульового ділення ноніуса визначають ціле число міліметрів. Потім відлічують десяті частки міліметра. Для цього визначають, яка з десяти поділок ноніуса збігається з якою поділкою основної лінійки. Наприклад, якщо збіглася сьома поділка, то до цілого числа міліметрів варто додати $7 \times 0,1 \text{ мм} = 0,7 \text{ мм}$.

На рис. 1.4 показане одне з можливих положень ноніуса під час вимірювання довжини деталі. У цьому випадку довжина дорівнює:

$$l = 6 + 3 \times 0,1 = 6,3 \text{ мм.}$$

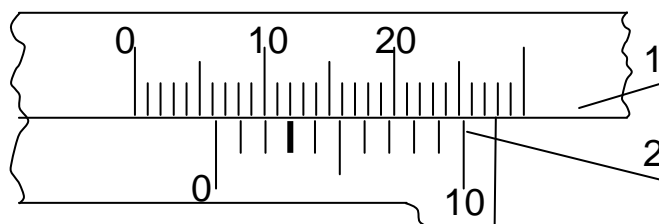


Рис. 1.4. Одне з можливих положень ноніуса

Умовні позначення:

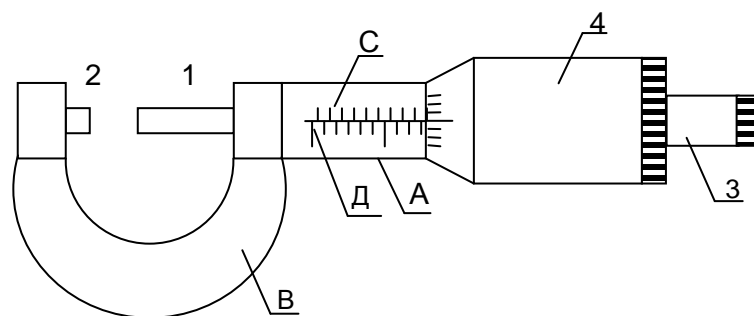
1 – основна лінійка;

2 – ноніус.

Мікрометр. Для більш точних вимірювань застосовують мікрометричні інструменти. Вони бувають декількох типів: мікрометр для зовнішніх вимірювань, мікрометричний глибиномір, мікрометричний нутромір.

Мікрометр для зовнішніх вимірювань (рис. 1.5) складається з порожнього стрижня А, жорстко з'єданого скобою В. У порожнину стрижня вгвинчений мікрометричний гвинт 1. Під час вимірювання предмет затискають між нерухомим стрижнем 2 і рухливим торцем мікрометричного гвинта. Гвинт обертають, тримаючись за тріскачку 3, доти, поки не буде чути тріск тріскачки. Разом з мікрометричним гвинтом обертається корпус барабана 4, переміщуючись поступально відносно стрижня.

Відліковий пристрій складається з двох шкал. Відлік виконується по горизонтальній шкалі, нанесеній на порожній стрижень, і по шкалі барабана. Горизонтальна шкала стрижня є подвійною із ціною поділки 0,5 мм. Поділки нанесені по обидва боки від поздовжньої горизонтальної

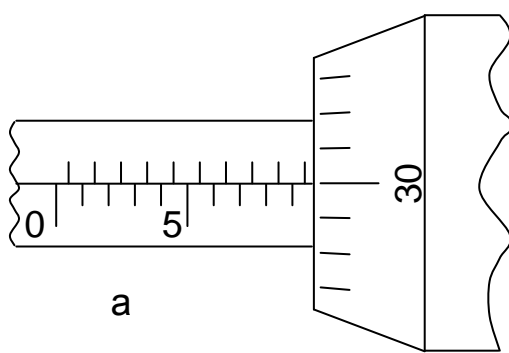


лінії таким чином, що верхня шкала С зрушена щодо нижньої Д на 0,5 мм, тобто на половину поділки кожної шкали. Барабан має 50 поділок. Шкала барабана дозволяє робити відлік сотих часток міліметра. Один повний оберт барабана відповідає лінійному переміщенню стрижня на 0,5 мм.

Рис. 1.5. Мікрометр для зовнішніх вимірювань

Таким чином, ціна однієї поділки барабана:

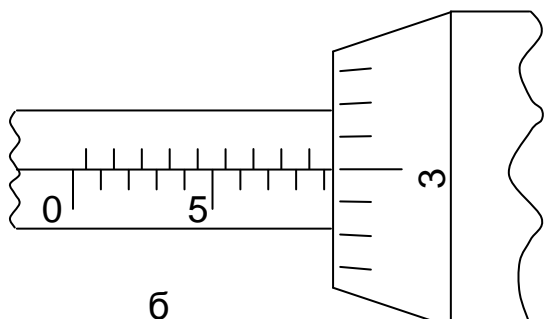
$$0,5 \text{ мм} : 50 = 0,01 \text{ мм.}$$



Відлік результату вимірювання виконується в такий спосіб: по нижній

20

горизонтальній шкалі до краю барабана визначають ціле число міліметрів; по верхній – відраховують 0,5 мм, якщо риса на верхній шкалі знаходиться між краєм барабана 4 й останньою поділкою на нижній шкалі (рис. 1.6а):



$$l = 9 + 0,5 + 0,30 = 9,8 \text{ мм,}$$

і 0 мм, якщо цю рису не видно (рис. 1.6б):

$$l = 9 + 0,30 = 9,3 \text{ мм.}$$

Рис. 1.6. Вимірювальний пристрій мікрометра

Для знаходження сотих часток міліметра визначають, яка поділка барабана збігається з горизонтальною рисою на стрижні, що розділяє шкали С та Д. У підсумку показання всіх шкал підсумовують. Іноді шкала мікрометра буває збита: при зіткненні стрижнів 1 й 2 показання мікрометра відрізняється від нуля. Необхідно або помітити це показання й вилучити його з усіх вимірюваних величин або відрегулювати мікрометр відповідно до його інструкції.

Порядок виконання роботи

1. Вивчити математичні методи обробки результатів вимірювань.
2. Одержати у викладача штангенциркуль і мікрометр. Після вивчення принципу їхньої дії визначити розміри виданих деталей різної геометричної форми.
3. Визначити абсолютну й відносну похибки проведених вимірювань.

Контрольні питання

1. Що таке прямі й непрямі вимірювання? Наведіть приклади.
2. Які похибки називаються систематичними й випадковими? Які їхні причини?
3. Дайте визначення абсолютної похибки окремого вимірювання, середньої абсолютної похибки й відносної похибки вимірювань.
4. Сформулюйте правила округлення чисел.

5. Як виконується математична обробка результатів прямих вимірювань?
6. Як виконується математична обробка результатів непрямих вимірювань для випадку змінних аргументів?
7. Як визначити максимально точне значення величини й найбільшу похибку при непрямому вимірюванні з постійним аргументом?
8. Сформулюйте правила побудови графіків.
9. Поясніть призначення ноніуса.
10. Що таке штангенциркуль і яке в нього призначення?
11. Сформулюйте правила вимірювання товщини деталі за допомогою мікрометра.
12. Чи можна робити виміри мікрометром з більшою точністю, ніж штангенциркулем?

Модуль 1. Основи класичної механіки.

Коливання механічних систем

Лабораторна робота №2

Вивчення законів кінематики й динаміки поступального руху на приладі Атвуда

Мета роботи – вивчення рівномірного та рівноприскореного рухів, вимірювання прискорення вільного падіння тіл, перевірка другого закону Ньютона.

Загальні положення

Усі тіла в природі перебувають у русі. Щоб описати рух матеріальної точки, треба вибрати певне тіло відліку. З обраним тілом відліку пов'язують якусь систему координат, здебільшого прямокутну, за допомогою якої можна вказати просторове розташування рухомої точки в будь-який момент часу. Рух матеріальної точки буде визначено, якщо в системі відліку будуть знайдені координати точки як функції часу:

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t). \quad (2.1)$$

Лінія, яку описує матеріальна точка в просторі, називається траєкторією руху. Рівняння (2.1) є рівнянням траєкторії в параметричній (координатній) формі. Вони еквівалентні одному векторному рівнянню руху точки: $\vec{r} = \vec{r}(t)$, де \vec{r} – радіус-вектор точки. Він також визначає положення точки в просторі (рис. 2.1). У цьому випадку рух точки за час Δt буде визначатися вектором переміщення $\Delta\vec{r}$. Вектор переміщення чисельно дорівнює довжині відрізка прямої, що сполучає початкове й кінцеве

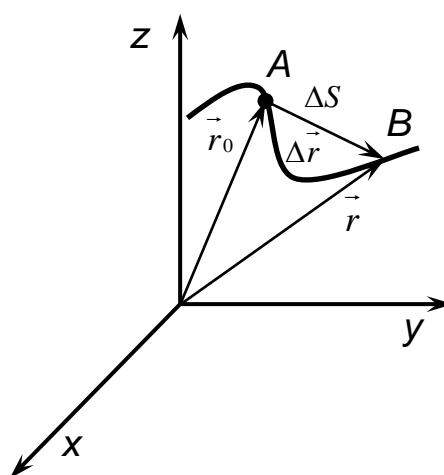


Рис. 2.1. Радіус-вектор \vec{r} та переміщення $\Delta\vec{r}$ матеріальної точки в декартовій системі відліку

положення точки через час Δt . Стрілка в кінці відрізка вказує на напрям руху тіла.

Між векторним і координатним способом опису руху тіла існує безпосередній зв'язок:

1) числові значення проекцій радіуса-вектора рухомої точки на координатні осі системи з тим самим початком відліку дорівнюють координатам точки:

$$r_x = x = f_1(t), \quad r_y = y = f_2(t), \quad r_z = z = f_3(t), \quad (2.2)$$

тобто $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, де $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – одиничні вектори (орти), спрямовані вздовж відповідних координатних осей;

2) траєкторією руху тіла є годограф радіуса-вектора (крива, яку описує кінець вектора \vec{r} , як на рис. 2.1);

3) вектор переміщення виражається через відповідні зміни координат рухомої точки:

$$\Delta\vec{r} = \Delta x\vec{i} + \Delta y\vec{j} + \Delta z\vec{k}. \quad (2.3)$$

Щоб знайти рівняння траєкторії в явному вигляді, треба з рівняннями (2.1) провести такі операції, щоб був виключений час (тобто знайти зв'язок між її координатами в довільний момент часу). Залежно від форми траєкторії рух може бути **прямолінійним** або **криволінійним**.

Основними кінематичними величинами, що характеризують рух матеріальної точки в просторі, є швидкість і прискорення.

Швидкість – це характеристика руху тіла в кожний момент часу або в кожній точці його траєкторії; визначається вона межею відношення вектора переміщення тіла до відповідного проміжку часу за умови, коли останній наближається до нуля:

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt}. \quad (2.4)$$

Оскільки рух тіла можна подати сукупністю миттєвих перебувань його в послідовних точках траєкторії, то характеристику руху, яка розглядається, називають миттєвою швидкістю.

Швидкість – це вектор, прикладений у заданій точці траєкторії і спрямований по дотичній до неї в цій точці в бік руху.

На практиці часто в описах руху задовольняються середньою швидкістю, що дорівнює відношенню вектора переміщення до відповідного проміжку часу, за який відбулось переміщення:

$$\vec{v}_{cp} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}, \quad (2.5)$$

або середньою скалярною швидкістю, що дорівнює відношенню пройденого шляху до відповідного часу, за який цей шлях пройдено:

$$v_{cp} = \frac{s}{t}. \quad (2.6)$$

При нерівномірному поступальному русі швидкість тіла змінюється з часом. Для оцінки зміни швидкості в часі введено фізичну величину, що називається прискоренням. Прискорення в певний момент часу або в даній точці траєкторії визначається межею відношення вектора зміни швидкості до відповідного проміжку часу:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}. \quad (2.7)$$

У загальному випадку криволінійного руху, в якому швидкість змінюється за величиною і напрямом, повне прискорення можна виразити як суму двох складових $\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_\tau$. Перша складова прискорення (рис. 2.2):

$$a_n = \frac{d\vec{v}_n}{dt}, \quad (2.8)$$

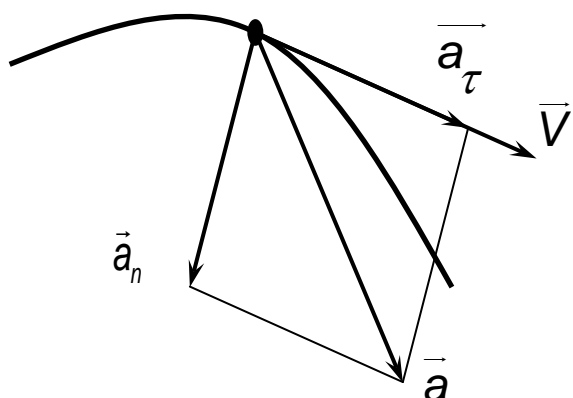
що визначає зміну швидкості за напрямом, називається нормальним, або доцентровим, прискоренням.

Друга складова прискорення (див. рис. 2.2):

$$\vec{a}_\tau = \frac{d\vec{v}}{dt}, \quad (2.9)$$

що визначає зміну швидкості за модулем, називається тангенціальним прискоренням.

Знаючи тангенціальне і нормальне прискорення, можна знайти модуль і напрям повного прискорення руху в даній точці траєкторії, а саме:



$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}; \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{a_n}{a_\tau}. \quad (2.10)$$

Тангенціальне і нормальне прискорення можуть бути ознаками різних рухів, наприклад:

Рис. 2.2. Повне прискорення руху в даній точці траєкторії

- 1) $a_\tau = \text{const}$ – рівнозмінний рух;
- 2) $a_\tau = 0$; $a_n \neq 0$ – рівномірний криволінійний рух;
- 3) $a_\tau = 0$; $a_n = \text{const}$ – рівномірний рух по колу.

Вільне падіння тіл. Вільне падіння – рух тіла під дією тільки сили тяжіння, тобто рух тіла поблизу поверхні Землі за відсутності дій на нього інших (окрім Землі) тіл.

Вільне падіння є рівноприскореним, відбувається з прискоренням, яке називається прискоренням вільного падіння (позначається буквою \vec{g}). Значення прискорення вільного падіння поблизу поверхні Землі вважається таким, що дорівнює $g \approx 9,8 \frac{M}{c^2}$.

Згідно із сучасними поглядами, з кожним об'єктом речовини з масою m пов'язаний інший вид матерії – гравітаційне поле. Саме одним із проявів поля є його силова дія на інше тіло масою m_0 , розміщене в будь-якій точці поля. Кількісною характеристикою гравітаційного поля є фізична величина, що називається напруженістю.

Напруженість – вектор, який чисельно дорівнює силі дії поля, розрахованій на одиницю маси пробного тіла в заданій точці:

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{m_0}. \quad (2.11)$$

Напруженість поля, що створюється Землею на відстані $r = R_3 + h$ від її центра, ϵ :

$$\vec{E} = -G \frac{M}{r^3} \vec{r}, \quad (2.12)$$

де R_3 – радіус Землі;

M – маса Землі;

G – гравітаційна постійна;

h – висота над поверхнею Землі.

Модуль напруженості поля ϵ :

$$E = G \frac{M}{r^2}. \quad (2.13)$$

Згідно із законом всесвітнього тяжіння, прискорення вільного падіння на поверхні Землі дорівнює:

$$g = G \frac{M}{R_3^2}. \quad (2.14)$$

Крім сили тяжіння тіла розрізняють ще й **вагу тіла** \vec{P} . Під вагою розуміють силу, з якою нерухоме щодо Землі тіло тисне на горизонтальну опору або розтягує підвіс унаслідок його тяжіння до Землі. Тобто сила тяжіння тіла і вага тіла рівні між собою з погляду вільних векторів, проте відрізняються точками застосування: сила тяжіння прикладена до тіла, а вага тіла – до опори або до підвісу.

Відповідно до цієї термінології, якщо тіло вільно падатиме в полі тяжіння Землі, для нього існуватиме сила тяжіння, але вага буде відсутньою. Тобто в цьому випадку для нього настає *невагомість*. Очевидно, що невагомість може спостерігатися також під час компенсації всіх сил, що діють на тіло.

Другий закон Ньютона. Дії тіл одне на одного, що змінюють їх швидкість і створюють прискорення, називають силами.

Як свідчать експерименти, що проводились в інерційних системах відліку, дії одних і тих же сил на різні тіла по-різному змінюють їх швидкість, тобто надають їм різних прискорень. Крім того, дія на одне й те ж тіло різних сил показує, що сила і викликане нею прискорення тіла пропорційні одне одному. Цей коефіцієнт пропорційності, що характеризує тіло, є мірою його інерції і називається масою m :

$$\vec{F} = m\vec{a}. \quad (2.15)$$

Формула (2.15) виражає основний закон динаміки поступального руху – другий закон Ньютона, який можна сформулювати таким чином: *сила, що діє на тіло, дорівнює добутку маси тіла на прискорення, що створене цією силою, причому напрями сили і прискорення співпадають.*

Опис лабораторної установки

Прилад Атвуда призначений для дослідження закону руху тіл у полі земного тяжіння. З його допомогою можуть бути перевірені основні закони кінематики і динаміки.

Загальний вид приладу Атвуда показаний на рис. 2.3.

На вертикальній колоні 1, яка закріплена в підставці 2, встановлені три кронштейни: нижній 3, середній 4, верхній 5, а також верхня втулка 6.

Підставка оснащена регульованими ніжками 7, які дозволяють провести вирівнювання положення приладу.

На верхній втулці за допомогою диска 8 закріплений підшипник 9, ролик 10 і електромагніт 11.

Через ролик проходить нитка 12 з прив'язаними на її кінцях вантажами 13 і 14.

Електромагніт після підведення до нього напруги за допомогою фрикційної муфти утримує ролик з вантажами у стані спокою.

Верхній і середній кронштейни можна переміщувати вздовж колони і фіксувати в будь-якому положенні, встановлюючи таким чином довжину шляху. Для визначення довжини шляху на колоні є міліметрова шкала 15.

Усі кронштейни мають покажчики положення, а верхній кронштейн – додаткову межу, що полегшує точне узгодження нижньої межі додаткового вантажу з певним початком шляху руху.

На середньому кронштейні закріплене кільце 16 і фотоелектричний датчик 17. Кільце 16 знімає з великого вантажу, який падає вниз, додатковий вантаж 18, а фотоелектричний датчик у цей час утворює електричний імпульс, що сигналізує про початок рівномірного руху великих вантажів. Оптична вісь фотоелектричного датчика (межа на його корпусі) знаходиться на рівні покажчика положення середнього кронштейна.

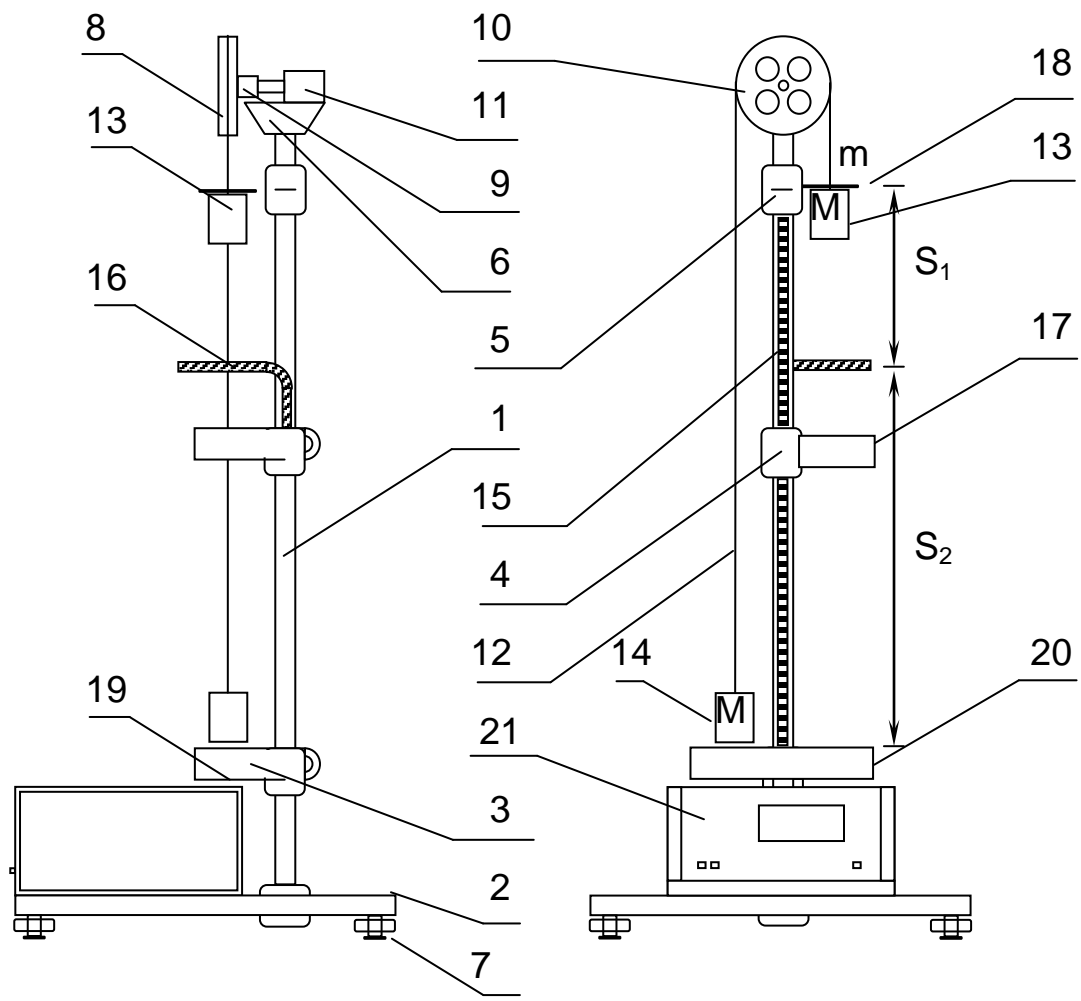


Рис. 2.3. Прилад Атвуда

Нижній кронштейн 3 оснащений двома пластинами 19 з гумовими амортизаторами, об які ударяються вантажі, що завершують свій рух. Тут розташований також фотоелектричний датчик 20. Оптична вісь датчика знаходиться на рівні покажчика положення кронштейна. Після перетину оптичної осі нижньою гранню вантажу, який падає, утворюється електричний сигнал про проходження вантажем певного шляху.

У підставці приладу знаходиться мілісекундомір 21. До підставки також підключені фотоелектричні датчики і обмотка електромагніту 11.

Порядок виконання роботи

Розглянемо рух системи, яка складається з двох вантажів масою M і $M + m$, а також блока радіуса r з моментом інерції J .

Якщо вантажі однакові, то потенційна енергія системи не залежить від їх висоти, оскільки спад потенційної енергії одного вантажу приводить до еквівалентного зростання потенційної енергії іншого. Отже, коли вантажі різні, зміна потенційної енергії системи визначається положенням перевантаження масою m .

Хай правий вантаж опустився на відстань h . Тоді зміна потенційної енергії системи дорівнює: $\Delta E_p = mgh$.

Потенційна енергія переходить в кінетичну енергію поступальної та обертальної ходи. Набута кінетична енергія дорівнює зміні потенційної енергії:

$$mgh = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{(M+m)v^2}{2} + \frac{mv^2}{2}, \quad (2.16)$$

де $h = \frac{at^2}{2}$;

$\omega = \frac{v}{r}$ – кутова швидкість обертання;

$v = at$ – лінійна швидкість.

Підставляючи значення h , ω , v у (2.16), одержимо:

$$a = \frac{mg}{2M + m + \frac{J}{r^2}}. \quad (2.17)$$

Якщо знехтувати моментом інерції блоку, формула (2.17) набуде вигляду:

$$a = \frac{mg}{2M + m}. \quad (2.18)$$

У ході виконання роботи потрібно виконати наступні **завдання**.

1. Вивчення рівномірного руху

Починаючи з того моменту, коли переважок знятий, вантажі рухаються рівномірно ($a = 0$). Тому виконується умова:

$$\frac{h_1}{t_1} = \frac{h_2}{t_2} = \dots = \frac{h_i}{t_i} = v = const \quad (2.19)$$

Для перевірки цієї умови необхідно, встановлюючи на різній висоті кронштейн 4, вимірювати шлях s_2 (рис. 2.4) і відповідний йому час руху t_2 . Перевірити співвідношення (2.19).

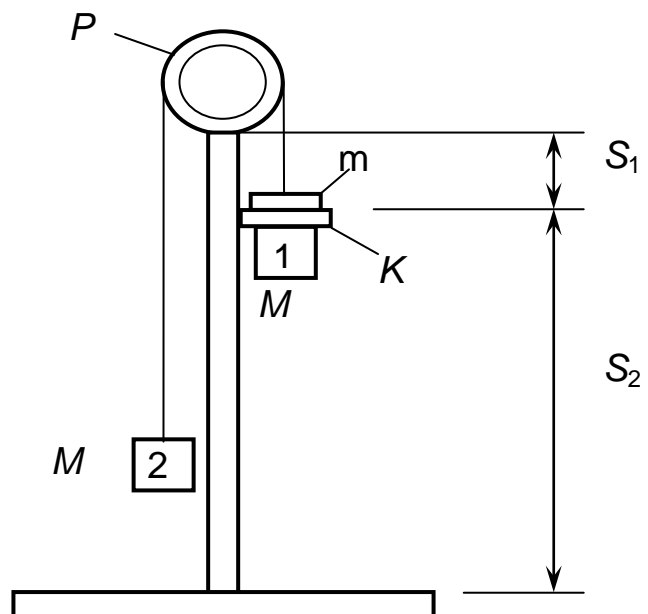
2. Вивчення рівноприскореного руху

2.1. Перевірка закону швидкості $v = at$. Якщо на шляху руху встановити кільце, то після того, як переважок буде знятий, вантаж рухатиметься рівномірно. Прискорення у момент зняття переважка може бути обчислене, якщо відомі швидкість у цей момент і час t' від початку руху до зняття переважка:

$$a = \frac{v}{t'} = \frac{h/t_1}{t'}. \quad (2.20)$$

Миттєва швидкість v визначається як відношення шляху до часу при рівномірному русі (див. завдання 1).

Для виконання цього завдання потрібно:



- 1) визначити миттєву швидкість v , як у завданні 1;
- 2) за допомогою секундоміра виміряти час руху вантажу до зняття переважка, тобто на шляху s_1 (див. рис. 2.4);
- 3) змінюючи положення кільця К, повторити дослід 2 – 3 рази;
- 4) перевірити співвідношення:

$$a = \frac{v_1}{t_1} = \frac{v_2}{t_2} = \dots = \frac{v_5}{t_5}; \quad (2.21)$$

- 5) порівняти зі значенням прискорення, обчисленим за формулою (2.18).

2.2 Перевірка закону шляху $s = \frac{at^2}{2}$. Для цього слід встановити

нижню грань вантажу 13 перед оптичною віссю фотоелектричного датчика 17 (див. рис. 2.3). На вантаж 13 покласти переважок такої форми, щоб він не зачіпав кільце 16. Тоді вантаж 13 на ділянці шляху $s = s_2$ (див. рис. 2.4) рухатиметься не рівномірно, як це було раніше, а рівноприскорено. Встановлюючи на різній висоті кронштейн 4, необхідно вимірювати шлях s_2 і відповідний йому час руху t . Необхідно перевірити, чи має місце співвідношення:

$$a = \frac{2s_{21}}{t_1^2} = \frac{2s_{22}}{t_2^2} = \frac{2s_{23}}{t_3^2} = \dots \quad (2.22)$$

3. Визначення величини прискорення вільного падіння

Розглянемо систему, яка складається з двох вантажів масою M і $M + m$. Після вимкнення електромагніту система почне рухатися з прискоренням під впливом сили тяжіння $F = mg$. Вантаж $M + m$, рухаючись із цим прискоренням, пройде шлях s_1 і набуде швидкості, отриманої зі співвідношення:

$$v^2 = 2as_1. \quad (2.23)$$

З другого закону Ньютона випливає:

$$a = \frac{mg}{2M + m}. \quad (2.24)$$

На ділянці шляху s_2 (рис. 2.4) вантаж 1 рухається рівномірно, тобто $s_2 = vt$, де t – час руху його на ділянці шляху s_2 . Звідси, враховуючи (2.23) і (2.24), одержимо:

$$\left(\frac{s_2}{t}\right)^2 = 2\frac{mg}{2M + m}s_1, \quad (2.25)$$

звідки:

$$g = \frac{2M + m}{m} \frac{s_2^2}{2s_1 t^2}. \quad (2.26)$$

Таким чином, знаючи маси вантажів і вимірюючи шляхи s_1 і s_2 , а також час руху вантажу 1 на шляху s_2 , можна за формулою (2.26) обчислити величину прискорення вільного падіння g .

1. За формулою (2.26) визначити величину прискорення вільного падіння, скориставшись даними табл. 2.1.

2. Обчислити відносну похибку вимірювання прискорення вільного падіння:

$$\delta = \frac{|g - g_t|}{g_t} 100\%, \quad (2.27)$$

де g – прискорення вільного падіння, визначене згідно з п. 6;

g_t – теоретичне значення прискорення вільного падіння.

Для спрощення виконання завдань 1, 2.1, 3 рекомендовано заповнити наступну таблицю (табл. 2.1).

Для цього в одному експерименті провести наступні вимірювання:

- 1) покласти на правий вантаж переважок;
- 2) встановити систему так, щоб лівий вантаж знаходився внизу;
- 3) встановити кільце для зняття переважка на відстані 20 – 25 см від верхнього краю штанги;
- 4) нижню підставку встановити на відстані 45 – 50 см від верхнього краю;

5) величину s_2 визначити як різницю відліків по верхньому краю правого вантажу і положенню знятого переважака;

6) величину s_1 визначити як різницю відліків між верхнім та середнім кронштейнами;

7) натиснути кнопку «Пуск»;

8) для заданих s_1 та s_2 виміряти час t_1 за допомогою секундоміра, а час t_2 – за допомогою мілісекундоміра 21, що знаходиться в підставці приладу;

9) вимірювання повторити не менше п'яти разів і визначити середнє значення часів руху t_1 та t_2 за формулою:

$$t = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i, \quad (2.28)$$

де n – кількість вимірювань;

t_i – час, одержаний в i -му вимірюванні;

10) змінюючи положення середнього кронштейну (тобто змінюючи шляхи s_1 та s_2), повторити дослід 3 – 4 рази;

11) заповнити табл. 2.1;

12) для кожного із завдань виконати потрібні обчислення, вибираючи з таблиці потрібні дані.

Таблиця 2.1

Вимірювання середніх значень часу

№ вимірювання	S_1	S_2	t_1	t_2
1				
Середнє значення t				
2				
Середнє значення t				
3				
Середнє значення t				

4. Перевірка другого закону Ньютона

У процесі перевірки цього закону необхідно, щоб рухома маса залишалася постійною, а величина діючої сили змінювалася. Це можна здійснювати, перекладаючи переважок m_1 і m_2 з одного вантажу на інший.

Сила, що приводить систему в рух, дорівнює різниці ваг правого і лівого тіл. Якщо обидва переважка знаходяться на правому тілі, то:

$$F_1 = (m_1 + m_2)g.$$

Якщо менший переважок (m_2) перекласти на ліве тіло, то:

$$F_2 = (m_1 - m_2)g.$$

Для двох різних випадків на основі другого закону Ньютона одержимо:

$$F_1 = (2M + m_1 + m_2)a_1 \text{ і } F_2 = (2M + m_1 + m_2)a_2;$$

$$s_{21} = \frac{a_1 t_1^2}{2} \text{ і } s_{22} = \frac{a_2 t_2^2}{2}.$$

При $s_{21} = s_{22}$, маємо:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{t_2^2}{t_1^2}. \quad (2.29)$$

Порядок виконання цього завдання:

- 1) на правий вантаж покласти обидва переважки m_1 і m_2 ;
- 2) знайти s_1 і t_1 (час t_1 вимірювати секундоміром);
- 3) вимірювання виконати 4 – 5 разів;
- 4) перекласти менший переважок на лівий вантаж;
- 5) повторити вимірювання пп. 2 і 3;

6) перевірити правильність співвідношення $\frac{m_1 + m_2}{m_1 - m_2} = \left(\frac{t_2}{t_1}\right)^2$.

Контрольні питання

1. Що називають механічною системою?
2. Що називають радіусом-вектором та переміщенням тіла (матеріальної точки)?
3. Що називають шляхом, який пройдено тілом (матеріальною точкою)?
4. Яким співвідношенням визначається середня швидкість та середнє прискорення тіла за проміжок часу Δt ?
5. Яким співвідношенням визначається миттєва швидкість?
6. Дайте визначення миттєвого прискорення. На довільному графіку залежності $v(t)$ покажіть, як визначати миттєве прискорення.
7. Яким співвідношенням визначається нормальне, тангенціальне і повне прискорення?
8. Які умови виконуються при рівномірному прямолінійному русі (при рівномірному криволінійному русі)?
9. Які умови виконуються при нерівномірному прямолінійному русі (при нерівномірному криволінійному русі)?
10. Який вигляд має рівняння траєкторії матеріальної точки: а) за умови рівномірного прямолінійного руху; б) за умови рівноприскореного прямолінійного руху?
11. Який рух називається вільним падінням?
12. Поясніть відмінність понять ваги тіла і сили тяжіння.
13. Що таке силове поле? Які величини вводяться для характеристики цього поля і як вони пов'язані між собою?
14. Чому дорівнює прискорення вільного падіння на висоті, що дорівнює середньому радіусу Землі?
15. Що стверджує перший, другий і третій закони Ньютона?
16. Що стверджує всесвітній закон тяжіння?
17. Між чим виникає гравітаційна взаємодія?
18. Як створюється рівномірний рух двох вантажів на приладі Атвуда?
19. Обчисліть силу натягу нитки при рівноприскореному русі вантажів, при рівномірному русі.

Лабораторна робота №3

Вивчення процесу зіткнення тіл

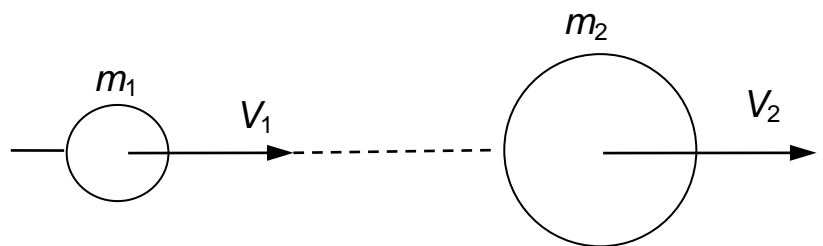
Мета роботи – експериментальне визначення швидкості куль при зіткненні, середньої сили зіткнення двох куль; перевірка законів збереження імпульсу та енергії куль до і після зіткнення.

Загальні положення

У механіці під ударом розуміють короточасну взаємодію двох або більше тіл, що виникає в результаті їх зіткнення. Наприклад, зіткнення куль, удар молота об ковадло, потрапляння кулі в мішень та ін.

При зіткненні тіла деформуються. При цьому кінетична енергія, якою вони володіли перед ударом, частково або повністю переходить в потенційну енергію пружної деформації і у внутрішню енергію цих тіл.

Нижче обмежимося розглядом центрального удару двох однорідних куль. Удар двох куль називається центральним, якщо кулі до удару рухаються уздовж прямої, що проходить через їх центри.



У граничних випадках розрізняють непружний і пружний удари тіл.

1. Непружний удар куль. Ідеально непружний

удар – це такий, після якого обидва тіла залишаються zdeформованими і рухаються як одне ціле. При ідеально непружному ударі потенційна енергія деформації не виникає, а кінетична енергія тіл повністю або частково перетворюється на внутрішню. Після ідеально непружного удару тіла, що зіткнулися, або рухаються з однаковою швидкістю, або перебувають у стані спокою. У цьому випадку виконується лише закон збереження імпульсу, а закону збереження механічної енергії не дотримано.

Рис. 3.1. Випадок центрального удару двох куль (одна куля наздоганяє іншу)

Розглянемо дві кулі з масами m_1 і m_2 , які рухаються в одному напрямі зі швидкостями \vec{v}_1 і \vec{v}_2 . Знайдемо їх спільну швидкість \vec{u} після удару.

Припустимо, що кулі утворюють замкнену систему. Згідно із законом збереження імпульсу сумарний імпульс куль після удару повинен бути таким же, як і до удару. Оскільки кулі рухаються уздовж однієї прямої, можна замість векторного рівняння писати рівняння алгебраїчне. Отже:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = (m_1 + m_2) u,$$

звідси:

$$u = \frac{m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2}. \quad (3.1)$$

Зрозуміло, що на деформацію тіл витрачена певна енергія, величину якої можна визначити з рівняння:

$$\Delta E = \frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} - \frac{(m_1 + m_2) u^2}{2} = \frac{m_1 m_2 (v_1 - v_2)^2}{2(m_1 + m_2)}. \quad (3.2)$$

Ця частина кінетичної енергії тіл перетворилась у внутрішню енергію тіл, що можна помітити за нагріванням тіл від удару.

2. Пружний центральний удар двох куль. Абсолютно пружним називається такий удар, при якому механічна енергія тіл не переходить в інші форми енергії. При такому ударі протягом короткочасного зіткнення двох куль відбувається їх деформація, точка зіткнення перетворюється на круглий майданчик. Кінетична енергія тіла, що ударяється, переходить повністю або частково в потенційну енергію пружної деформації. При цьому виникають пружні сили, що зростають зі збільшенням деформації. У момент найбільшого стиснення куль пружні сили максимальні. Потім тіла повертаються до первинної форми, відштовхуючи одне одного. У результаті потенційна енергія пружної деформації знову переходить у кінетичну енергію руху, поки кулі не розійдуться. Ідеальному удару відповідає повне відновлення форми тіл,

які ударяються. Час зіткнення залежить від пружних констант матеріалу куль, їх відносної швидкості у момент початку удару і від їх маси.

Ідеально пружних ударів в природі не існує, оскільки завжди частина енергії витрачається на необоротну деформацію тіл і збільшення їх внутрішньої енергії. Проте для деяких тіл, наприклад сталевих куль, втратами механічної енергії можна нехтувати.

Розглянемо центральний абсолютно пружний удар. У цьому випадку виконуються закони збереження повної механічної енергії і збереження повного імпульсу системи тіл:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2; \quad (3.3)$$

$$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2},$$

де u_1 и u_2 – швидкості куль після удару.

Із цих рівнянь неважко визначити величини u_1 і u_2 швидкостей куль після удару. Для цього перетворимо формули (3.3) і одержимо:

$$m_1(v_1 - u_1) = m_2(u_2 - v_2); \quad (3.4)$$

$$m_1(v_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - v_2^2). \quad (3.5)$$

Поділивши рівняння (3.5) на (3.4) і виконавши скорочення, маємо:

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2. \quad (3.6)$$

Якщо помножити рівняння (3.6) на m_1 (або на m_2), додати (або відняти) до (від) рівняння (3.4), знайдемо, відповідно, швидкості куль після удару:

$$u_1 = \frac{(m_1 - m_2)v_1 + 2m_2 v_2}{m_1 + m_2}; \quad (3.7)$$

$$u_2 = \frac{(m_2 - m_1)v_2 + 2m_1v_1}{m_1 + m_2}.$$

Одержані формули придатні також і для розрахунку швидкостей куль, якщо відбувається зустрічний центральний пружний удар. Проте в цьому випадку швидкості куль до удару мають протилежні знаки, що необхідно враховувати в процесі підстановки відповідних величин у дані формули.

Деякі важливі окремі випадки:

а) якщо маси куль рівні $m_1 = m_2 = m$, то з (3.4) можна побачити, що $u_1 = v_2$ і $u_2 = v_1$, тобто тіла, ударяючись, обмінюються швидкостями. Якщо при цьому $v_2 = 0$, тобто друга куля до удару буде нерухома, то перша куля після удару зупиняється, а друга – починає рухатися зі швидкістю першої кулі в тому ж напрямі;

б) припустимо тепер, що маса другої кулі значно більша порівняно з масою першої кулі і друга куля перебуває у стані спокою, тобто $m_2 \rightarrow \infty$, $v_2 = 0$, то $u_1 = -v_1$ і $u_2 = 0$. У цьому випадку перша куля відскакує від другої з тією ж за величиною швидкістю, з якою вона ударила, але в протилежному напрямі. Прикладом може бути удар м'яча об стінку.

Опис лабораторної установки

Загальний вигляд лабораторної установки зображений на рис. 3.2. Підставка 1 має регульовані ніжки 2, які дозволяють установити прилад в горизонтальне положення. До підставки прикріплена колона 3, на якій розташовані два кронштейни, нижній – 4 і верхній – 5.

На верхньому кронштейні закріплені горизонтальні стрижні і комірчик, що слугують для встановлення відстані між кулями. До втулок верхнього кронштейна прикріплені підвіси, через які проходять дроти 6, що підводять напругу до куль 7.

Довжина підвісів куль може бути відрегульована.

На нижньому кронштейні закріплені косинці зі шкалами 8, а на спеціальних напрямних – електромагніт 9. Електромагніт можна пересувати уздовж правої шкали і змінювати висоту його встановлення.

Косинці зі шкалами також можна пересувати уздовж нижнього кронштейна.

В основі приладу закріплений мікросекундомір 10. До складу приладу входить комплект сталевих куль різної маси. До куль і

куль до і після зіткнення.

Розглянемо систему, що складається з двох куль, підвішених на практично нерозтяжних нитках (рис. 3.3). Маса куль однакові ($m_1 = m_2 = m = 100$ г). Відведемо праву кулю 1 на кут α від положення рівноваги. При цьому вона матиме запас потенційної енергії $E_p = mgh$. Ця енергія в початковий момент зіткнення повністю переходить в кінетичну. Таким чином, швидкість у момент удару можна знайти за законом збереження енергії:

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2}, \quad (3.8)$$

звідки

$$v_1 = \sqrt{2gh}. \quad (3.9)$$

Висоту h підняття кулі при її відхиленні від положення рівноваги легко можна знайти з $\triangle ABC$:

$$h = AD = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2}. \quad (3.10)$$

Підставляючи h у формулу (3.9), одержимо:

$$v_1 = \sqrt{2gh} = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha}{2}. \quad (3.11)$$

Повертаючись у положення рівноваги і маючи в момент перед ударом швидкість v_1 , права куля 1 передає кількість руху лівій кулі 2, яка до удару перебуває у стані спокою ($v_2 = 0$). Тепер під дією удару друга куля почала рухатися. При рівності мас двох куль, одна з яких нерухома (як у нашому експерименті), рухома куля повністю передає кількість руху нерухомій кулі і зупиняється.

Якщо виміряти кут відхилення першої і другої куль після удару α_1 і α_2 , то можна обчислити їх швидкості u_1 і u_2 :

$$u_1 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_1}{2}; \quad (3.12)$$

$$u_2 = 2\sqrt{gl} \sin \frac{\alpha_2}{2}. \quad (3.13)$$

Оскільки в даному випадку перша куля після удару зупиняється (тобто $\alpha_1 = 0$), зрозуміло, що $u_1 = 0$.

Закон збереження повного імпульсу куль перевіряється за формулою (3.3).

Для визначення середньої сили зіткнення двох куль запишемо другий закон механіки:

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v}. \quad (3.14)$$

Якщо розглядати це рівняння стосовно удару, то тут: \vec{F} – середня сила удару, t – час удару, тобто час зіткнення куль, що ударяються, m – маса одного з тіл, що ударяються (інше вважаємо нерухомим), $\Delta\vec{v}$ – зміна швидкості цього тіла в результаті удару. Оскільки перша куля після зіткнення залишається у спокої ($u_1 = 0$), то $\Delta v = v_1 - u_1 = v_1$ і формулу (3.14) можна переписати у вигляді:

$$F\tau = mv_1,$$

де $\tau = \Delta t$ – час удару, звідки:

$$F = \frac{mv_1}{\tau}. \quad (3.15)$$

Таким чином, якщо відома маса куль, середню силу удару завжди можна обчислити, знаючи швидкість кулі v_1 у момент, який безпосередньо передує удару, і час зіткнення τ .

Для виконання роботи треба провести наступні вимірювання і розрахунки.

1. Підвісити кулі на гнучких ізолюваних провідниках так, щоб їх положення відповідали кутам $\alpha = 0$.
2. Натиснути клавішу «Мережа».
3. Ввімкнути електромагніт, для чого відпустити клавішу «Пуск».

4. Відвести праву кулю в бік електромагніту і встановити її нерухомо, вимірявши кут α . Ліва куля повинна перебувати у спокої.
5. Натиснути клавішу «Скидання». Мікросекундомір після цього повинен показувати «0».
6. Натиснути клавішу «Пуск». Після зіткнення куль спостерігати, на який кут α_1 і α_2 відхиляться кулі.
7. Прочитати на шкалі мікросекундоміра часовий інтервал між зіткненнями куль Δt .
8. Вимірювання повторити 5 разів. Результати вимірювань записати у вигляді таблиці.
9. Пересунути електромагніт на декілька позначок.
10. Повторити пп. 4 – 8.
11. Виміряти довжину підвісу куль.
12. За формулами (3.11), (3.12) і (3.13) обчислити швидкість першої кулі до удару і кожної з куль після удару.
13. Використовуючи вирази (3.3) і (3.15), визначити середню силу удару і перевірити здійсненність закону збереження імпульсу.
14. Зробити висновки.

Контрольні питання

1. У чому полягає явище удару та якими фізичними величинами воно характеризується?
2. Запишіть формули законів збереження імпульсу та енергії і поясніть їх.
3. Виведіть формули для швидкості системи з двох куль при абсолютно непружному ударі.
4. Виведіть формули для швидкостей куль при абсолютно пружному ударі. Розгляньте випадки: а) $m_1 \neq m_2$; б) $m_1 = m_2$; в) $m_2 \gg m_1$.
5. Дайте визначення лінії удару.
6. Побудуйте фізичну дослідну модель частково пружного удару.

Лабораторна робота №4

Вивчення законів коливного руху за допомогою математичного й фізичного маятників

Мета роботи – вивчення законів коливного руху математичного й фізичного маятників і вимірювання на цій основі прискорення вільного падіння.

Загальні положення

1. Гармонійні коливання. Коливання – процеси, що характеризуються певною повторюваністю в часі. Коливання називаються вільними або власними, якщо вони відбуваються за рахунок спочатку повідомленої енергії при наступній відсутності зовнішніх впливів на коливну систему.

Гармонійні коливання – коливання, за яких коливна величина змінюється за законом синуса (косинуса). За допомогою уявлень про гармонійні коливання можна описувати різні гармонійні процеси.

Гармонійні коливання величини s описуються рівнянням:

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (4.1)$$

де A – амплітуда коливань – максимальне значення коливної величини;

ω_0 – кругова (циклічна) частота (показує, як змінюється фаза коливань за 2π с, або кутова швидкість обертання радіуса-вектора);

φ – початкова фаза коливань у момент часу $t = 0$;

$(\omega_0 t + \varphi)$ – фаза коливань – величина, що однозначно визначає стан коливної системи в момент часу t .

Певні стани системи повторюються через проміжок часу $T = 2\pi / \omega_0$ – період коливань. Величина, обернена періоду, – частота коливань $\nu = 1/T$.

Візьмемо похідні від s за часом:

$$\frac{ds}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0 \cos\left(\omega_0 t + \varphi + \frac{\pi}{2}\right); \quad (4.2)$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = -A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi) = A\omega_0^2 \cos(\omega_0 t + \varphi + \pi). \quad (4.3)$$

Диференціальне рівняння гармонійних коливань має вигляд:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \omega_0^2 s = 0. \quad (4.4)$$

Розв'язанням цього рівняння є вираз:

$$s = A \cos(\omega_0 t + \varphi).$$

Докладніше про коливний гармонійний рух читайте в додатку А.

2. Математичний маятник. Матеріальна точка, підвішена на невагомій і нерозтяжній нитці, яка здійснює коливання під дією сили ваги \vec{P} , називається математичним маятником. Маятником, близьким до математичного, може слугувати невелика важка кулька, підвішена на тонкій довгій нитці. Сили, що діють на кульку, показані на рис. 4.1. Вертикально вниз діє сила ваги:

$$\vec{P} = m\vec{g}, \quad (4.5)$$

де g – прискорення вільного падіння,
 m – маса кульки.

Розкладемо силу ваги на складові: за напрямком нитки – \vec{P}_2 і в перпендикулярному напрямку, що збігається з напрямком руху кульки – \vec{P}_1 . Сила \vec{P}_2 натягує нитку маятника, а сила \vec{P}_1 викликає прискорення

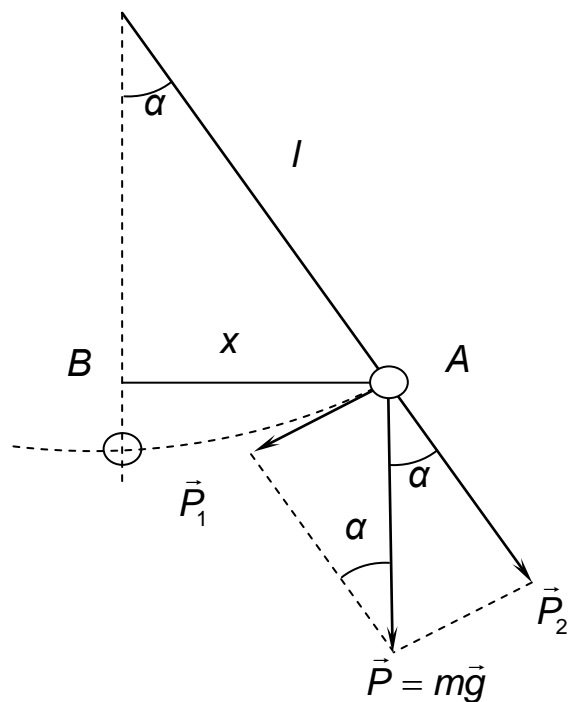


Рис. 4.1. Математичний маятник

кульки, повертаючи її в положення рівноваги. При малих кутах відхилення нитки α можна вважати, що сила P_1 і зсув кульки x спрямовані вздовж однієї прямої. Із силового трикутника ΔP_1AP маємо:

$$P_1 = -P \sin \alpha, \quad (4.6)$$

де $\sin \alpha = \frac{x}{l}$.

Знак «мінус» означає, що сила спрямована в бік, протилежний напрямку зсуву кульки x . Оскільки при малих кутах $\sin \alpha \approx \alpha$, замінимо α відношенням $\frac{x}{l}$:

$$P_1 = -mg \frac{x}{l}. \quad (4.7)$$

Зі співвідношення (4.7) випливає: повертаюча сила пропорційна відхиленню й протилежна йому за знаком. Отже, нехтуючи тертям об повітря й у підвіску, при малих кутах відхилення коливання кульки можна вважати гармонійними, тобто такими, які відбуваються за законом (4.1).

Обчислимо власну частоту й період коливань математичного маятника, скориставшись законом збереження енергії.

Максимальна потенційна енергія кульки:

$$U_m = mgh = mgl(1 - \cos \alpha) = 2mgl \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx mgl \frac{\alpha^2}{2}. \quad (4.8)$$

Максимальна кінетична енергія кульки:

$$K = \frac{mv_m^2}{2}. \quad (4.9)$$

З огляду на (4.2) маємо:

$$K = \frac{mv_m^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 x^2}{2} = \frac{m\omega_0^2 l^2 \alpha^2}{2}. \quad (4.10)$$

Порівнявши вирази (4.8) і (4.10) і виконавши відповідні скорочення, одержимо:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (4.11)$$

звідки період коливань математичного маятника дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \quad (4.12)$$

Як видно, період коливань при малих кутах відхилення не залежить від маси маятника.

З виразу (4.12) одержимо формулу для прискорення вільного падіння:

$$g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}. \quad (4.13)$$

Таким чином, знаючи довжину маятника l й вимірявши період його коливань T , можна визначити величину прискорення g .

3. Фізичний маятник. Тіло, укріплене на нерухомій горизонтальній осі O , що не проходить через його центр ваги A і здатне робити коливання щодо цієї осі, називається фізичним маятником (рис. 4.2).

Покажемо, що маятник, відхилений на малий кут α від положення рівноваги, буде здійснювати гармонійні коливання.

Позначимо через J момент інерції маятника щодо осі, що проходить через точку O . Силу ваги $P = mg$ можна розкласти на дві складові: сила P_2 , яка врівноважується реакцією опори, сила $P_1 = P \sin \alpha$ приводить маятник у рух.

На основі другого закону динаміки для обертового руху ($M = J\varepsilon$) маємо:

$$J\varepsilon = -P_1 l, \quad (4.14)$$

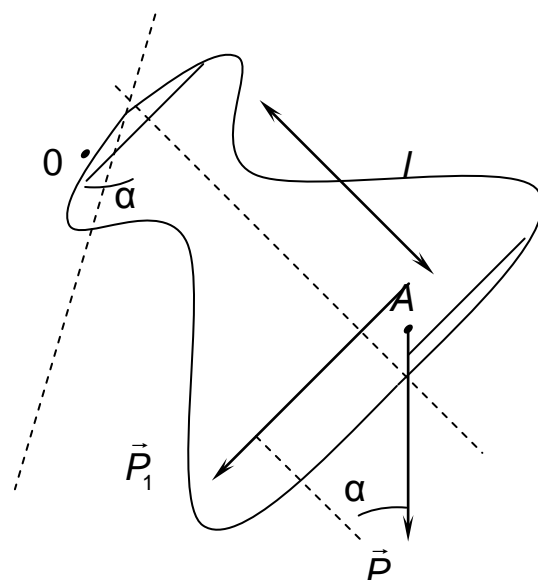
де $\varepsilon = \frac{d^2\alpha}{dt^2}$ – кутове прискорення тіла, що обертається;

l – відстань від точки підвісу до центра ваги.

Знак «мінус» обраний тому, що діюча сила спрямована в бік, протилежний додатному напрямку відхилення маятника. Оскільки кут α малий, маємо $\sin\alpha \approx \alpha$ й:

$$P_1 \approx mg\alpha. \quad (4.15)$$

Рис. 4.2. Фізичний маятник



Підставивши (4.15) в (4.14), одержимо:

$$J \frac{d^2\alpha}{dt^2} + mgl\alpha = 0; \quad (4.16)$$

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\alpha = 0. \quad (4.17)$$

Позначимо $\frac{mgl}{J} = \omega^2$, тоді рівняння (4.17) набуде вигляду:

$$\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \omega^2\alpha = 0. \quad (4.18)$$

Отримане диференціальне рівняння гармонійних коливань. Розв'язанням цього рівняння є функція $\alpha = A \sin \omega t$, де:

$$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}. \quad (4.19)$$

Таким чином, фізичний маятник здійснює гармонійні коливання із частотою ω . З останнього виразу одержуємо формулу для періоду коливань фізичного маятника:

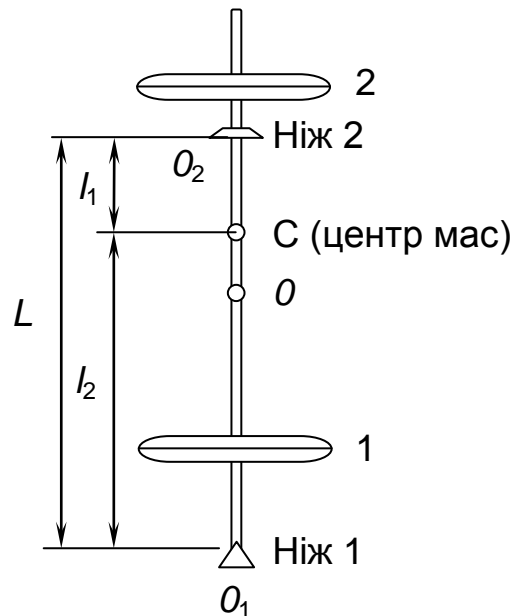
$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}. \quad (4.20)$$

Оборотний маятник є окремим випадком фізичного маятника. Він являє собою стрижень, на який одягнені два ролики – 1 і 2 – і два ножі (рис. 4.3). Маятник може здійснювати коливання навколо осі, що проходить через ніж 1 (точка O_1) або ніж 2 (точка O_2).

У першому випадку маятник займає положення, протилежне показаному на рис. 4.3. При даному положенні роликів 1 й 2 можна так підібрати положення ножів, що період коливань маятника в обох випадках буде однаковим ($T_1 = T_2$).

Відстань між двома точками підвісу, для яких $T_1 = T_2 = T$, являє собою наведену довжину L оборотного маятника.

З огляду на формулу (4.20), можна написати:



$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{mgl_1}}, \quad (4.21) \quad \text{Рис. 4.3. Оборотний маятник}$$

$$T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{mgl_2}}, \quad (4.22)$$

де J_1 й J_2 – моменти інерції маятника щодо осей, які проходять відповідно через точки O_1 й O_2 . З теореми Штейнера маємо:

$$J_1 = J_0 + ml_1^2; \quad (4.23)$$

$$J_2 = J_0 + ml_2^2, \quad (4.24)$$

де J_0 – момент інерції маятника щодо осі, що проходить через центр мас;
 l_1 й l_2 – відстані від осей O_1 й O_2 до центра мас.

Оскільки при перекиданні маятника період його коливань залишається незмінним, маємо:

$$T_1 = T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ml_1^2}{mgl_1}}, \quad (4.25)$$

$$T_2 = T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + ml_2^2}{mgl_2}}. \quad (4.26)$$

Отже:

$$\frac{T^2}{4\pi^2} mgl_1^2 = J_0 + ml_1^2; \quad (4.27)$$

$$\frac{T^2}{4\pi^2} mgl_2^2 = J_0 + ml_2^2. \quad (4.28)$$

Віднімаючи від (4.27) вираз (4.28), можна одержати формулу для прискорення вільного падіння:

$$g = \frac{4\pi^2 L}{T^2}, \quad (4.29)$$

де $L = l_1 + l_2$ – наведена довжина маятника.

Таким чином, досягши рівності періодів $T_1 = T_2 = T$ і вимірявши наведену довжину маятника L , можна за формулою (4.29) обчислити величину прискорення вільного падіння.

Опис лабораторної установки

Підставку 1 (рис. 4.4) за допомогою регульованих ніжок 2 можна встановлювати в горизонтальне положення. У підставці закріплений стовпчик 3, на якому встановлені верхній кронштейн 4 і нижній кронштейн 5 з фотоелектричним датчиком 6.

З одного боку кронштейна 4 знаходиться математичний маятник 7, з іншого боку – на вмонтованих вкладках – оборотний маятник 8.

Довжину математичного маятника можна регулювати за допомогою воротка 9, а вимірювати – за допомогою шкали на колоні 3.

Оборотний маятник виконаний у вигляді сталевго стрижня, на якому встановлені два ножі, повернені один до одного лезами, і два ролики.

На стрижні через кожні 10 мм є кільцеві канавки, що слугують для точного визначення довжини оборотного маятника, тобто відстані між ножами при рівності періодів коливань маятника в обох його положеннях. Ножі й ролики можна переміщувати вздовж осі стрижня й закріплювати в будь-якому положенні. Ширина ножів і роликів кратна 10 мм.

Нижній кронштейн разом із фотоелектричним датчиком можна переміщувати вздовж стовпчика й фіксувати в довільно обраному положенні. Фотоелектричний датчик з'єднаний розніманням з мілісекундоміром 10, прикріпленим до підставки 1.

Порядок виконання роботи

1. Визначення прискорення вільного падіння за допомогою математичного маятника

1. Нижній кронштейн разом із фотоелектричним датчиком установити в нижній частині стовпчика так, щоб верхня грань кронштейна показувала на шкалі довжину не менше 50 см.

2. Повертаючи нижній кронштейн, розташувати над датчиком математичний маятник.

3. Відхиливши кульку від положення рівноваги на $4 - 5^\circ$, привести математичний маятник у рух.

4. Натиснути кнопку «Скидання». Після підрахунку вимірником 10 коливань ($n = 10$) натиснути клавішу «Стоп» і відрахувати час t .

6. За формулою $T = \frac{t}{n}$ визначити період коливань математичного маятника.

7. Виміряти довжину l маятника.

8. За формулою (4.13) визначити прискорення g .

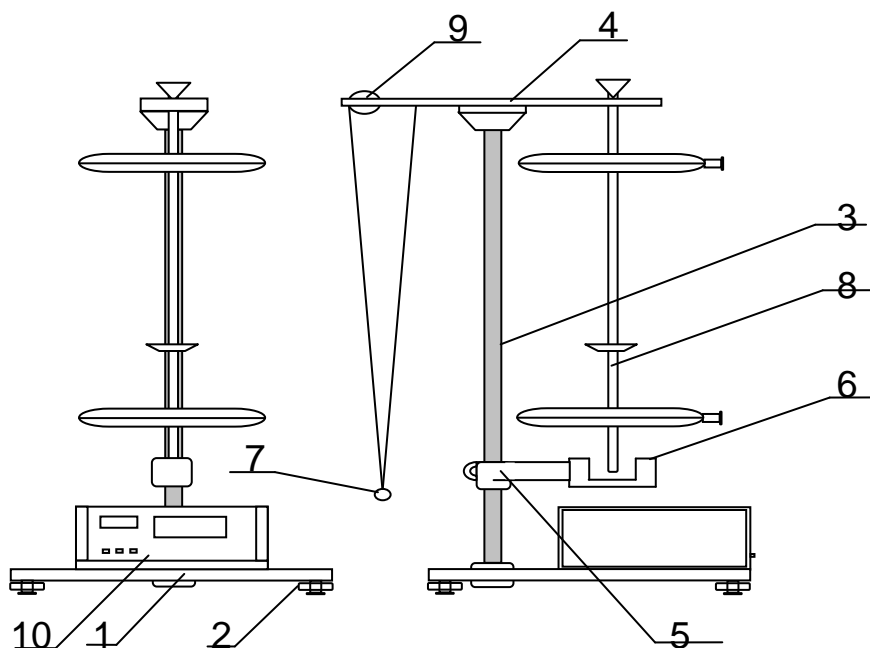


Рис. 4.4. Схема експериментального приладу

2. Визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника

1. Повернути нижній кронштейн на 180° . Встановити ролики на стрижні 8 (рис. 4.4) несиметрично, так щоб один із них перебував поблизу кінця стрижня, а інший – поблизу його середини. Ножі маятника закріпити по обидва боки від центра мас отриманої системи (рис. 4.3), щоб вони були повернені один до одного лезами. Один із них помістити поблизу вільного кінця стрижня, а другий – на половині відстані між роликами. Надалі ролики й ніж 1 переміщати не можна.

2. Закріпити маятник так, щоб ніж 1, який перебуває поблизу кінця стрижня, лежав на вкладці верхнього кронштейна. Нижній кронштейн разом із фотоелектричним датчиком перемістять таким чином, щоб стрижень маятника перетинав оптичну вісь.

3. Відхилити маятник на $4 - 5^\circ$ від положення рівноваги й відпустити. Натиснути клавішу «Скидання». Після підрахунку вимірником 10 повних коливань натиснути клавішу «Стоп». Визначити період коливань оборотного маятника $T_{1\text{про}}$.

4. Зняти маятник і закріпити його на ножі 2. Нижній кронштейн із фотоелектричним датчиком перемістити таким чином, щоб маятник перетинав оптичну вісь фотоелектричного датчика.

5. Відхилити маятник на $4 - 5^\circ$ від положення рівноваги. Виміряти

період коливань $T_{2\text{про}}$ і порівняти результат з отриманою раніше величиною $T_{1\text{про}}$.

6. Якщо $T_{2\text{про}} > T_{1\text{про}}$, то ніж 2 перемістіть в напрямку ролика, що знаходиться наприкінці стрижня; якщо $T_{2\text{про}} < T_{1\text{про}}$ – у напрямку середини стрижня.

7. Повторно виміряти період $T_{2\text{про}}$ і порівняти з величиною $T_{1\text{про}}$. Потрібно змінювати положення другого ножа до одержання рівняння $T_{2\text{про}} = T_{1\text{про}}$ з точністю до 0,5%.

8. Визначити наведену довжину оборотного маятника L , підраховуючи на стрижні між ножами кількість насічок, які нанесені через кожні 10 мм.

9. За формулою (4.29) визначити прискорення вільного падіння g .

10. Перевірка похибки вимірювання g проводиться за формулою:

$$E = \frac{|g - g_t|}{g_t}, \quad (4.30)$$

де g – величина, отримана в результаті вимірювань;

g_t – табличне значення прискорення вільного падіння.

3. Визначення моменту інерції фізичного маятника

Якщо фізичний маятник являє собою круглий однорідний стрижень, то, знаючи прискорення сили ваги й вимірявши період коливання, можна визначити момент його інерції. Дійсно, для однорідного стрижня центр ваги перебуває на рівних відстанях від його кінців, тобто:

$$l = \frac{1}{2}L,$$

де L – довжина стрижня.

Тоді з формули (4.20) одержимо:

$$J = \frac{T^2 mgL}{8\pi^2}. \quad (4.31)$$

Порядок визначення моменту інерції маятника.

1. Зняти з оборотного маятника ролики й ніж 2.

2. Закріпити маятник так, щоб ніж 1, який перебуває поблизу кінця стрижня, лежав на вкладці верхнього кронштейна. Нижній кронштейн разом із фотоелектричним датчиком слід перемістити таким чином, щоб стрижень маятника перетинав оптичну вісь.

3. Відхилити маятник на $4 - 5^\circ$ від положення рівноваги й відпустити. Натиснути клавішу «Скидання». Після підрахунку вимірником 10 повних коливань натиснути клавішу «Стоп». Визначити період коливань оборотного маятника T .

4. За формулою (4.31) визначити момент інерції оборотного маятника (маса маятника 1,5 кг).

Контрольні питання

1. Розкажіть про хід виконання роботи.
2. Який вигляд має рівняння вільних незгасаючих гармонійних коливань?
3. Чому дорівнює швидкість гармонійного осцилятора?
4. Чому дорівнює прискорення гармонійного осцилятора?
5. Чому дорівнює кінетична енергія гармонійного осцилятора?
6. Зробіть висновок з формули для періоду коливань математичного маятника.
7. Чому дорівнює період коливань математичного маятника?
8. Зробіть висновок з формули для періоду коливань фізичного маятника.
9. Чому дорівнює період коливань фізичного маятника?
10. Опишіть пристрій і властивості оборотного маятника.
11. У чому полягає принцип визначення прискорення вільного падіння за допомогою оборотного маятника.
12. Розкрийте другий закон динаміки для обертового руху.
13. Дайте поняття кутового прискорення.
14. Дайте визначення моменту сили.
15. Дайте визначення моменту інерції матеріальної точки й будь-якого тіла.
16. Запишіть і сформулюйте теорему Штейнера.

Лабораторна робота №5

Визначення моменту інерції тіла

Мета роботи – вивчення закону збереження енергії та визначення моменту інерції маятника Максвелла.

Загальні положення

1. Поняття про момент інерції тіл. Кінетичною енергією називається енергія рухомого тіла. Потенційна енергія – це енергія, яка обумовлена взаємним розташуванням тіл або частин тіл і характером їх взаємодії.

Абсолютно твердим тілом називається система матеріальних точок, взаємні відстані між якими не змінюються. Будь-який рух абсолютно твердого тіла можна розкласти на поступальний і обертальний. Поступальний рух твердого тіла описується тими ж рівняннями, що й рух матеріальної точки.

Сукупність тіл, які в даному завданні механіки відіграють істотну роль, називається механічною системою. Механічна система називається консервативною, якщо всі зовнішні та внутрішні непотенційні сили, що діють на неї, не здійснюють роботи, а всі зовнішні потенційні сили – стаціонарні. Механічна енергія консервативної системи не змінюється з часом. Цей закон називається законом збереження механічної енергії.

Закон збереження механічної енергії для системи багатьох матеріальних точок можна сформулювати так:

повна енергія ізольованої системи матеріальних точок, яка дорівнює сумі кінетичних енергій точок і потенційної енергії їх взаємодії, є величиною постійною.

У даній лабораторній роботі в процесі обчислення кінетичної енергії тіла необхідно користуватися поняттям моменту інерції тіла. Момент інерції характеризує інерційні властивості тіла при обертальному русі і відіграє ту ж роль, що й маса тіла при поступальному русі. Момент інерції тіла залежить не тільки від маси тіла, але й від розташування частинок тіла щодо осі обертання.

Ознайомимось стисло з основними методами експериментального визначення моментів інерції тіл і законами динаміки обертального руху, на яких ці методи засновані.

Момент інерції матеріальної точки щодо якої-небудь осі обертання є добутком маси цієї точки і квадрату її відстані від осі обертання:

$$J = mr^2, \quad (5.1)$$

Момент інерції системи матеріальних точок щодо якої-небудь осі обертання визначається рівнянням:

$$J = \sum_{i=1}^n m_i r_i^2, \quad (5.2)$$

де m_i – маса i -ї точки системи;
 r_i – відстань від i -ї точки до осі.

У загальному випадку момент інерції твердого тіла визначається як:

$$J = \lim_{\Delta m_i \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \Delta m_i r_i^2 = \int_0^m r^2 dm, \quad (5.3)$$

де Δm_i – елемент маси твердого тіла;
 r_i – відстань від елемента маси Δm_i до осі.

Аналітичне визначення моменту інерції можливе за формулою (5.3) тільки для невеликої кількості тіл простої геометричної форми (циліндра, кулі, кільця, стрижня). Для більшості тіл довільної форми легше визначити момент інерції дослідним шляхом.

У деяких випадках момент інерції тіла J відносно довільно заданої осі можна знайти за допомогою теореми Штейнера:

$$J = J_0 + md^2, \quad (5.4)$$

де m – маса тіла;

J_0 – момент інерції даного тіла щодо осі, що проходить через центр мас тіла паралельно до заданої осі;

d – відстань між вказаними осями.

Використовуючи основне рівняння динаміки обертального руху, можна обчислити момент інерції тіла J щодо нерухомої осі за формулою:

$$J = \frac{M}{\varepsilon}, \quad (5.5)$$

де M – результівний момент сил, які діють на тіло щодо даної нерухомої осі;

ε – кутове прискорення тіла.

З іншого боку, момент інерції тіла J щодо заданої осі і його кутова швидкість ω дозволяють обчислити кінетичну енергію обертального руху цього тіла $J\omega^2/2$.

Моменти інерції однорідних тіл правильної геометричної форми щодо осей, що проходять через центри мас, наведені в табл. 5.1.

Таблиця 5.1

Моменти інерції однорідних тіл правильної геометричної форми

Тіло	Вісь	Момент інерції
Куля радіуса r	будь-яка вісь	$\frac{2}{5}mr^2$
Диск радіуса r	вісь, перпендикулярна до площини диска	$\frac{1}{2}mr^2$
Циліндр радіуса r і висоти l	вісь, перпендикулярна до осі симетрії	$\frac{1}{4}mr^2 + \frac{1}{12}ml^2$
Циліндр радіуса r і висоти l	осі симетрії	$\frac{1}{2}mr^2$
Тонкий стрижень довжиною l	вісь, перпендикулярна до стрижня	$\frac{1}{12}ml^2$
Куб з довжиною руба l	будь-яка вісь	$\frac{1}{6}ml^2$

2. Рівняння динаміки обертального руху твердого тіла.

Обертальний рух твердого тіла може відбуватися як навколо нерухомої точки (сферичний рух), так і навколо нерухомої осі. У першому випадку закон зміни моменту імпульсу тіла подається у вигляді векторного рівняння:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (5.6)$$

де \vec{L} – момент імпульсу тіла, що дорівнює геометричній сумі моментів імпульсів всіх частинок \vec{L}_i цього тіла щодо нерухомої точки 0:

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^n \vec{L}_i; \quad (5.7)$$

\vec{M} – результувний момент усіх зовнішніх сил відносно тієї ж точки 0.

Закон зміни моменту імпульсу тіла щодо осі, наприклад осі Z, записується у вигляді рівняння:

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (5.8)$$

де L_z і M_z – проекції векторів \vec{L} і \vec{M} рівняння (5.7) на вісь Z.

Момент імпульсу тіла щодо осі Z знайдемо, якщо спроекуємо (5.8) на вісь Z:

$$\vec{L}_z = \sum_{i=1}^n \vec{L}_{iz}. \quad (5.9)$$

Після підсумовування і перетворень приходимо до співвідношення:

$$L_z = J_z \omega_z,$$

де ω_Z – кутова швидкість обертання тіла щодо осі Z;

J_Z – момент інерції тіла щодо тієї ж осі.

Після підстановки (5.9) в рівняння (5.8) приходимо до основного рівняння динаміки обертального руху:

$$\frac{d(J_Z \omega_Z)}{dt} = M_Z. \quad (5.10)$$

Оскільки для твердого тіла $J_Z = const$, то:

$$J_Z \frac{d\omega_Z}{dt} = M_Z \quad (5.11)$$

або

$$J_Z \varepsilon_Z = M_Z, \quad (5.12)$$

де $\varepsilon_Z = \frac{d\omega_Z}{dt}$ – кутове прискорення тіла щодо осі Z.

Рівняння (5.11) і (5.12) – рівняння динаміки обертального руху твердого тіла навколо осі Z.

Момент інерції тіла K , наприклад щодо осі Z, обчислюється за формулою:

$$J_Z = \int_{(K)} R^2 dm, \quad (5.13)$$

де dm – елемент маси тіла;

R – відстань від цього елемента до осі Z.

Одиниця вимірювання моменту інерції в СІ $[J] = \text{кг м}^2$. Формулу (5.13) можна використовувати для теоретичного визначення моменту інерції тіла. Моменти інерції тіла щодо паралельних осей Z і ZC (вісь ZC проводиться через точку C – центр мас або інерції тіла) пов'язані формулою Штейнера:

$$J_Z = J_{ZC} + md^2, \quad (5.14)$$

де J_{ZC} – момент інерції тіла щодо осі ZC;

m – маса тіла;

d – відстань між осями Z і ZC .

Момент інерції будь-якого тіла залежить також від орієнтації осі. Наприклад, моменти інерції циліндра довжиною l і радіусом R ($R \gg l$) щодо прямокутних осей XC , YC , ZC , що проходять через точку C – його центр мас (за умови, що вісь ZC співпадає з віссю циліндра), не однакові:

$$J_{ZC} = \frac{1}{2} mR^2; J_{XC} = J_{YC} = \frac{1}{12} ml^2.$$

Проте для будь-якого тіла існує інваріантна характеристика, що не залежить від напрямку осей і визначає інерційні властивості тіла при обертальному русі. Вона подібна до маси тіла, що визначає його інерційні властивості і є інваріантною характеристикою тіла при поступальному русі. При обертанні ж тіла інваріантною характеристикою є *тензор інерції*, який можна зіставити з кожною точкою цього тіла. Взагалі тензор – це складне математичне поняття і докладне вивчення його властивостей не входить в програму курсу загальної фізики. Відзначимо лише один з інваріантів тензора інерції – лінійний інваріант:

$$J_1 = J_x + J_y + J_z = inv. \quad (5.15)$$

У правильності (5.15) можна переконатися, якщо обчислити моменти інерції довільного тіла щодо прямокутних осей $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$, проведених в якій-небудь точці цього тіла і розташованих під кутом один до одного (рис. 5.1).

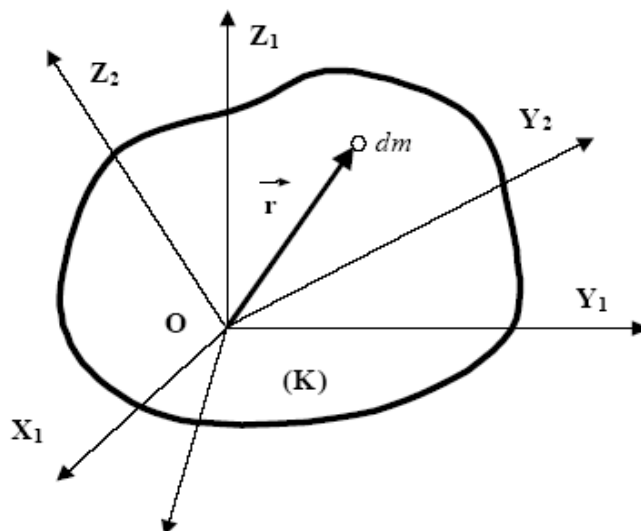


Рис. 5.1. Обчислення моменту інерції довільного тіла щодо прямокутних осей $X_1, Y_1, Z_1, X_2, Y_2, Z_2$

Положення елемента маси dm тіла визначатимемо радіусом-вектором r , проведеним із початку координат. Тоді щодо осей X_1, Y_1, Z_1 можна обчислити суму моментів інерції:

$$J_{X_1} + J_{Y_1} + J_{Z_1} = \int_{(K)} (y_1^2 + z_1^2) dm + \int_{(K)} (x_1^2 + z_1^2) dm + \int_{(K)} (x_1^2 + y_1^2) dm = 2 \int_{(K)} (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2) dm = 2 \int_{(K)} r^2 dm. \quad (5.16)$$

Аналогічно обчислимо суму моментів інерції відносно X_2, Y_2, Z_2 :

$$J_{X_2} + J_{Y_2} + J_{Z_2} = \int_{(K)} (y_2^2 + z_2^2) dm + \int_{(K)} (x_2^2 + z_2^2) dm + \int_{(K)} (x_2^2 + y_2^2) dm = 2 \int_{(K)} (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2) dm = 2 \int_{(K)} r^2 dm. \quad (5.17)$$

З порівняння (5.16) і (5.17) знаходимо:

$$J_{X_1} + J_{Y_1} + J_{Z_1} = J_{X_2} + J_{Y_2} + J_{Z_2}.$$

3. Поняття тензора і еліпсоїда інерції. Обчислимо момент інерції J_s твердого тіла щодо довільної осі, що проходить через початок координат в напрямі, позначуваному одиничним вектором \vec{s} . Розкладемо радіус-вектор \vec{r} елемента маси тіла dm на складові вздовж осі й перпендикулярно до неї: $\vec{r} = \vec{r}_{\parallel} + \vec{r}_{\perp}$ (рис. 5.2).

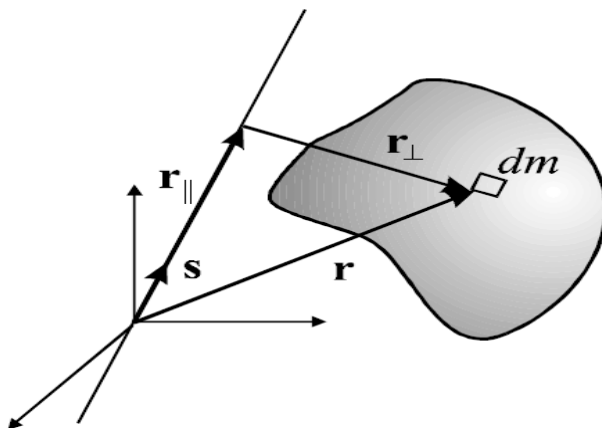


Рис. 5.2. Еліпсоїд інерції

За визначенням моменту інерції:

$$J_s = \int r_{\perp}^2 dm = \int (r^2 - r_{\parallel}^2) dm. \quad (5.18)$$

Очевидно, що:

$$r_{\parallel} = (\vec{r}\vec{s}) = xs_x + ys_y + zs_z,$$

де x, y, z і s_x, s_y, s_z – декартові координати векторів \vec{r} і \vec{s} .

Підставивши це рівняння в (5.18), одержимо:

$$I_s = I_{xx}s_x^2 + I_{yy}s_y^2 + I_{zz}s_z^2 + 2I_{xy}s_xs_y + 2I_{zx}s_zs_x + 2I_{yz}s_ys_z, \quad (5.19)$$

де $I_{xx}, I_{yy}, I_{zz}, I_{xy}, I_{xz}, I_{yz}$ – постійні, які визначаються виразами:

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int (r^2 - x^2) dm, & I_{xy} &= -\int xy dm, \\ I_{yy} &= \int (r^2 - y^2) dm, & I_{zx} &= -\int zx dm, \\ I_{zz} &= \int (r^2 - z^2) dm, & I_{yz} &= -\int yz dm. \end{aligned}$$

Отже, момент інерції щодо довільної осі можна розрахувати за формулою (5.19), знаючи шість величин. Ці величини зручно записати у вигляді симетричної матриці:

$$\hat{I} = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}. \quad (5.20)$$

Така матриця називається тензором інерції тіла, а величини I_{ij} – компонентами тензора інерції.

Знаючи тензор інерції тіла, можна визначити момент інерції щодо довільної осі, використовуючи формулу (5.19) і теорему Штейнера.

Формула (5.19) допускає наочну геометричну інтерпретацію. Через початок координат проводимо прямі у різних напрямках s і на них відкладемо відрізки завдовжки $1/\sqrt{I_s}$. Геометричним місцем кінців таких відрізків буде деяка поверхня. Знайдемо її рівняння. Згідно з побудовою радіус-вектор точки, що лежить на цій поверхні, визначається виразом $\vec{r} = \vec{s}/\sqrt{I_s}$. Виразивши звідси s і підставивши його значення у вираз (5.19), одержимо рівняння поверхні:

$$\sum I_{ij} x_i x_j = 1.$$

Оскільки момент інерції I_s має кінцеві значення для будь-якого напрямку осі s , приходимо до висновку, що ця поверхня другого порядку є еліпсоїдом. Його називають еліпсоїдом інерції тіла.

Тензор інерції залежить від вибору системи координат. При зміні координатної системи змінюються і значення компонент тензора інерції тіла. Зокрема, координатні осі можна спрямувати вздовж головних осей еліпсоїда інерції. У цій координатній системі в рівнянні (5.19) зникають члени, що містять добуток різних координат, і тензор інерції матиме тільки діагональні компоненти. Осі цієї системи координат називають головними осями тензора інерції, а діагональні елементи тензора інерції в цій системі відліку – головними компонентами тензора інерції. Очевидний їх фізичний сенс: це є моменти інерції тіла щодо головних осей.

Напрями головних осей тензора інерції можна знайти, використовуючи властивості симетрії тіла.

Введення тензора інерції дозволяє записати рівняння обертальної динаміки для довільного обертання твердого тіла:

$$\frac{d}{dt} \vec{L} = \frac{d}{dt} \hat{I} \vec{\omega} = \vec{M},$$

де \vec{L} – момент імпульсу тіла;

ω – кутова швидкість;

\vec{M} – момент зовнішніх сил.

При цьому кінетична енергія тіла, що обертається, запишеться у вигляді:

$$E = \frac{\omega \hat{I} \omega}{2}.$$

Розглянемо декілька прикладів визначення моменту інерції.

4. Перевірка рівняння обертальної динаміки на приладі Обербека. Рівняння обертальної динаміки при обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі має вигляд:

$$J\varepsilon = M, \quad (5.21)$$

де J – момент інерції тіла щодо осі;

ε – кутове прискорення;

M – момент сили щодо осі обертання.

Рівняння (5.21) відображає лінійну залежність ε від M .

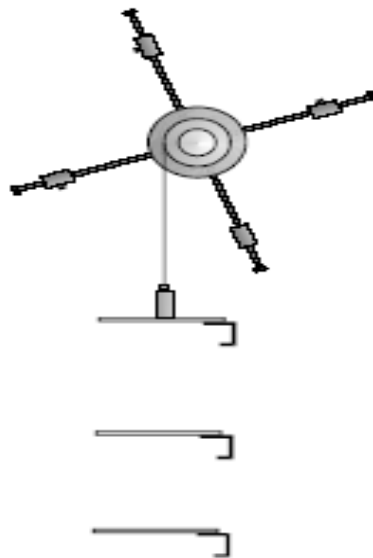


Рис. 5.3. Прилад Обербека

На рис. 5.3 схематично показаний прилад Обербека, за допомогою якого зручно досліджувати динаміку обертального руху. Чотири стрижні закріплені на втулці під прямим кутом один до одного. На стрижні нанизані вантажі однакової маси. Втулка і три шківів з радіусами r_i , вказаними на установці, насаджені на загальну вісь. Вісь горизонтально закріплена в підшипниках, так що вся система може обертатися навколо неї. Пересуваючи вантажі по стрижнях, можна змінювати момент інерції системи. На шків намотується нитка, до кінця якої прив'язана гиря відомої маси m . При падінні гирі сила натягнення нитки T створює

момент щодо осі обертання $M = T r_i$, який приводить до обертання системи.

Силу T можна знайти з рівняння поступальної ходи гирі:

$$ma = mg - T, \quad (5.22)$$

де m – маса гирі;

a – її прискорення.

З цих рівнянь одержуємо момент сили натягу нитки:

$$M = m(g - a)r. \quad (5.23)$$

Варіюючи масу гирі та радіус шків, можна змінювати момент цієї сили. У разі щільного намотування нерозтяжної нитки прискорення a пов'язане з кутовим прискоренням ε співвідношенням $\varepsilon = a/r$. Прискорення a можна визначити, вимірюючи час t_i , протягом якого вантаж опускається на відстань h_i :

$$a = \frac{2h_i}{t_i^2}. \quad (5.24)$$

Тоді:

$$\varepsilon = \frac{2h_i}{rt_i^2}. \quad (5.25)$$

5. Визначення моменту інерції тіла методом крутильних коливань. Момент інерції твердого тіла визначає його інерційні властивості при обертальному русі. Існують різні методи експериментального визначення моментів інерції тіл. Один із них – метод крутильних коливань.

Кругла горизонтальна платформа (рис. 5.4), що підвішена на трьох однакових, симетрично розташованих нитках (трифілярний підвіс), закріплених внизу біля країв платформи і вгорі біля країв

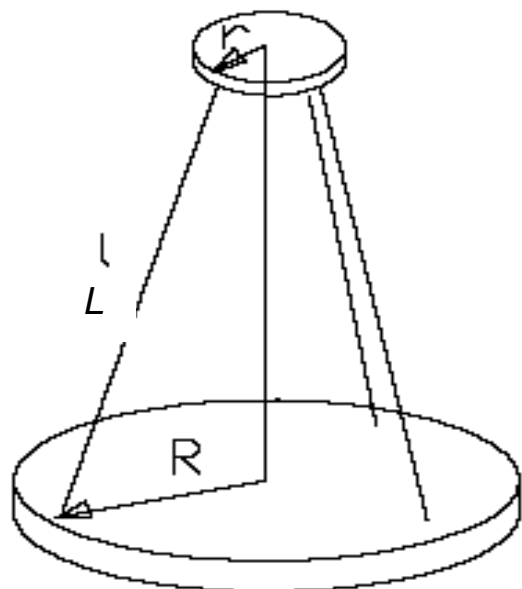


Рис. 5.4. Крутильний маятник

невеликого диска, може здійснювати крутильні коливання навколо вертикальної осі, яка проходить через центр платформи.

Якщо платформа маси m , обертаючись із положення рівноваги в одному напрямі, підніметься на висоту h , то приріст потенційної енергії буде дорівнювати mgh , де g – прискорення сили тяжіння. Обертаючись у зворотному напрямі, платформа повернеться в положення рівноваги з кінетичною енергією, що дорівнює $J\omega_0^2/2$, де J – момент інерції платформи щодо її осі обертання, ω_0 – її кутова швидкість у момент проходження положення рівноваги. Нехтуючи роботою сил тертя, на основі закону збереження енергії маємо:

$$mgh = \frac{1}{2} J\omega_0^2. \quad (5.26)$$

При малих амплітудах можна вважати коливання платформи гармонійними. У цьому випадку залежність кута повороту платформи від часу має вигляд:

$$\alpha = \alpha_0 \sin \frac{2\pi}{T} t, \quad (5.27)$$

де α – кут повороту платформи;

α_0 – амплітудне значення кута повороту;

T – період коливань;

t – поточний час.

Продиференціювавши кутовий зсув за часом, одержимо залежність кутової швидкості ω від часу t :

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi\alpha_0}{T}. \quad (5.28)$$

У момент проходження платформи положення рівноваги ($t = 0, T/2, 3T/2, 2T, 5T/2, \dots$) ω набуває значення ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha_0}{T}. \quad (5.29)$$

Підставляючи (5.26) в (5.23), одержуємо:

$$mgh = \frac{1}{2} J \left(\frac{2\pi\alpha_0}{T} \right)^2. \quad (5.30)$$

Якщо l – довжина ниток підвіска, R – відстань від центра платформи до точок кріплення ниток на ній, r – відстань від центра верхнього малого диска до точок кріплення ниток на ньому, то видно (рис. 5.5), що:

$$h = OO_1 = BC - BC_1,$$

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2,$$

$$(BC_1)^2 = (BA_1)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha_0).$$

Виражаючи різницю BC і BC_1 як відношення різниці їх квадратів до їх суми:

$$h = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1},$$

знаходимо:

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{BC + BC_1}.$$

При малих кутах відхилення α_0 , виражених у радіанах, можна прийняти $\sin \frac{\alpha_0}{2} \approx \frac{\alpha_0}{2}$, а при $L \gg R$ можна допустити, що $BC + BC_1 \approx 2l$.

Враховуючи це, одержимо $h = \frac{Rr\alpha_0^2}{2l}$. Тоді на основі (5.30)

$$mg \frac{Rr\alpha_0^2}{2l} = \frac{1}{2} J \left(\frac{2\pi\alpha_0}{T} \right)^2, \text{ звідки:}$$

$$J = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \quad (5.31)$$

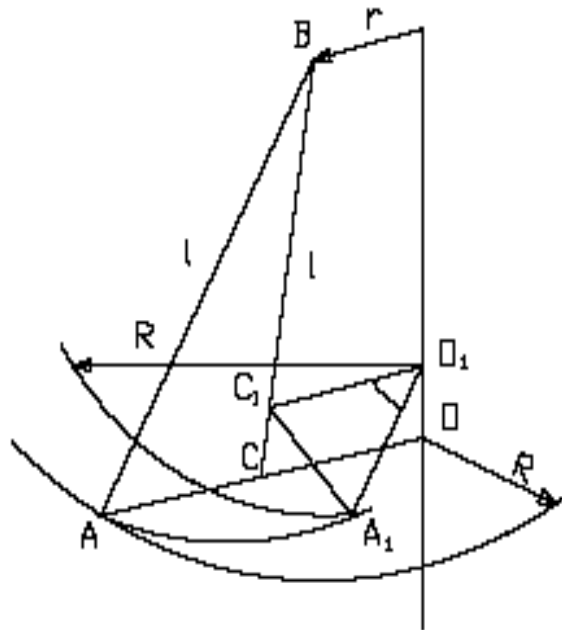


Рис. 5.5. Схема приладу Обербека для розрахунку моменту інерції

Формулу (5.31) можна використовувати для визначення моменту інерції як самої платформи, так і платформи з тілом, покладеним на неї. У першому випадку m – маса платформи, T – період її коливань, у другому – m – загальна маса платформи і тіла, T – період їх коливань.

6. Визначення моменту інерції махового колеса способом коливань. Для визначення моменту інерції експериментальна установка може бути представлена, як на рис. 5.6: масивне махове колесо 1, яке може обертатися з малим тертям навколо горизонтальної осі.

Вісь обертання проходить через центр тяжіння махового колеса, тому воно перебуває в байдужій рівновазі. Якщо на ободі махового колеса закріпити допоміжне тіло 2, система переходить в стан стійкої рівноваги. Якщо тепер повернути махове колесо на кут α_m і потім відпустити, воно почне здійснювати

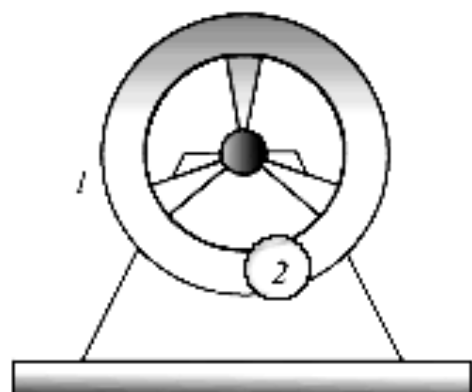


Рис. 5.6. Махове колесо

коливання з деяким періодом T . При малих кутах α_m коливання махового колеса можна вважати гармонійними: $\alpha = \alpha_m \sin \omega_0 t$.

При проходженні положення рівноваги кутова швидкість системи досягає максимального значення $\alpha_m \omega_0$, а отже, її максимальна кінетична енергія дорівнює:

$$E_T = \frac{J \alpha_m^2 \omega_0^2}{2}.$$

У даному випадку момент інерції системи J складається з моменту інерції махового колеса J_k і моменту інерції допоміжного тіла J_m . З іншого боку, потенційна енергія системи дорівнює: $E = mgh$, де m – маса допоміжного тіла, h – висота його підйому з положення рівноваги. З рис. 5.7 бачимо, що:

$$h = d - d \cos \alpha = 2d \sin^2 \alpha / 2,$$

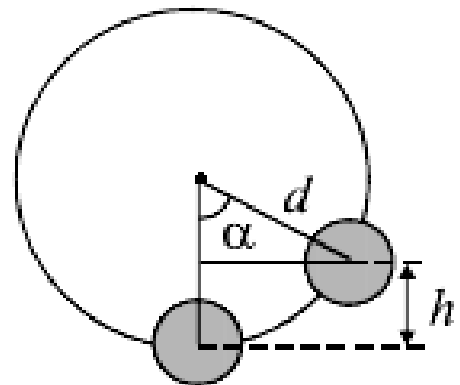


Рис. 5.7. Схема розрахунку h

де d – відстань від центра махового колеса до центра мас допоміжного тіла.

У разі малих коливань (у даному випадку їх можна вважати гармонійними) можна замінити $\sin \alpha$ на α . Якщо нехтувати силами тертя, то на основі закону збереження механічної енергії ми можемо порівняти максимальні значення кінетичної і потенційної енергій. Виразивши ω_0 через період коливань, для моменту інерції махового колеса одержимо:

$$J_k = mgd \frac{T^2}{4\pi^2} - J_T.$$

Усі величини в правій частині цього виразу доступні безпосередньому вимірюванню, що стосується величини J_T , її можна розрахувати на основі теореми Штейнера: $J_T = J_0 + md^2$.

Момент інерції допоміжного тіла J_0 щодо осі паралельної осі обертання і яка проходить через його центр мас можна знайти, знаючи геометричні розміри тіла, за формулами з табл. 5.1.

Опис лабораторної установки і методика експерименту

Загальний вигляд маятника Максвелла показаний на рис. 5.8. У підставці 1 з регульованими ніжками 2 закріплена колонка 3, на якій встановлений нерухомий верхній кронштейн 4 і пригвинчений рухомий нижній кронштейн 5. На верхньому кронштейні знаходиться електромагніт 6, фотоелектричний датчик 7 і комірчик 8 для закріплення та регулювання довжини біфілярного підвіса маятника.

Фотоелектричні датчики 7 і 9 сполучені з мілісекундомером 12, яким вимірюється час руху маятника від кронштейна 4 до кронштейна 5.

Нижній кронштейн разом із прикріпленим до нього фотоелектричним датчиком 9 можна переміщувати вздовж колонки і встановлювати в довільно вибраному положенні.

Маятник 10 – це диск з циліндровою віссю, прикріплений до верхнього кронштейна 4 за допомогою біфілярного підвіса. На диск можна надягати змінні кільця 11, що приводить до зміни моменту інерції системи.

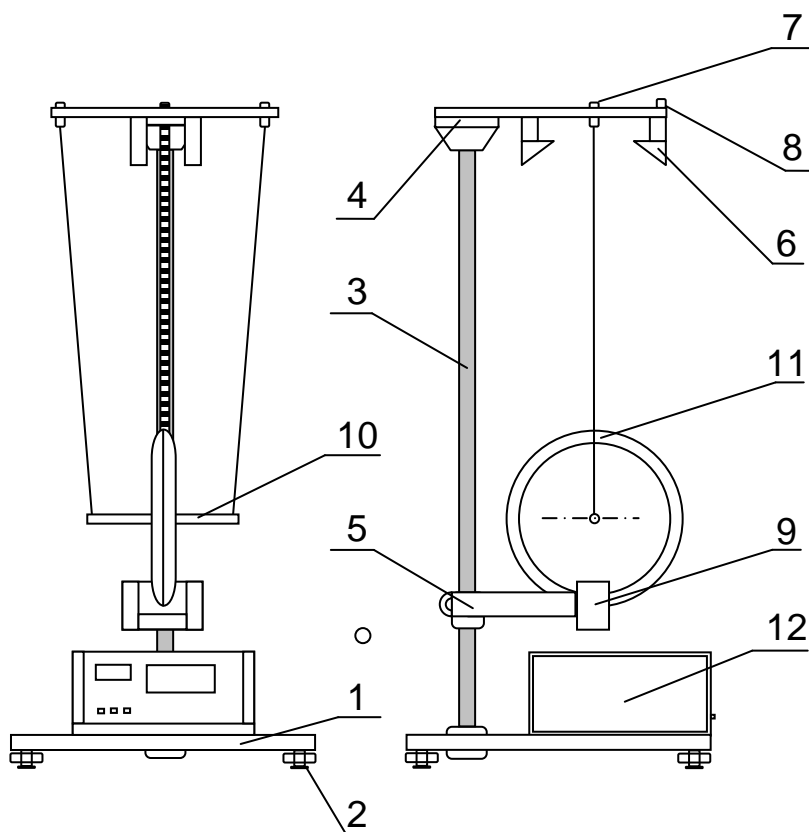


Рис. 5.8. Загальний вигляд маятника Максвелла

Маятник з надітим кільцем утримується у верхньому положенні електромагнітом 6. Довжина маятника визначається за допомогою міліметрової шкали на колонці приладу.

Момент інерції маятника визначається за формулою:

$$J = \frac{1}{4} mD^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right), \quad (5.32)$$

де J – момент інерції маятника;

D – зовнішній діаметр осі маятника разом з намотаною на неї ниткою підвіска;

t – час падіння маятника;

g – прискорення вільного падіння;

h – довжина маятника, рівна висоті, на яку він піднятий;

m – маса маятника разом із кільцем.

Величина D визначається за формулою:

$$D = D_0 + 2D_n, \quad (5.33)$$

де D_0 – діаметр осі маятника;

D_n – діаметр нитки підвіска.

Формулу (5.32) можна одержати на основі закону збереження енергії. Потенційна енергія маятника на висоті h переходить в кінетичну енергію в нижньому положенні:

$$mgh = \frac{J\omega^2}{2} + \frac{mv^2}{2}. \quad (5.34)$$

Права частина виразу (5.34) є сумою кінетичних енергій обертальної та поступальної ходи маятника. У виразі (5.34) ω – кутова швидкість обертання маятника, v – лінійна швидкість його руху вниз.

Враховуючи, що $\frac{v}{R} = \frac{2v}{D}$ і $v = at$, де a – прискорення руху маятника вниз, можна написати:

$$mgh = \frac{J}{2} \left(\frac{2at}{D} \right)^2 + \frac{m}{2} a^2 t^2 \quad (5.35)$$

або:

$$2mgh = \frac{4Ja^2 t^2}{D^2} + ma^2 t^2. \quad (5.36)$$

З формули (5.36) маємо момент інерції:

$$J = \frac{1}{4} mD^2 \left(\frac{2gh}{a^2 t^2} - 1 \right). \quad (5.37)$$

Оскільки $h = \frac{at^2}{2}$, а отже $a = \frac{2h}{t^2}$, то:

$$J = \frac{1}{4} mD^2 \left(\frac{2gh}{4h^2 / t^2} - 1 \right); \quad (5.38)$$

$$J = \frac{1}{4} mD^2 \left(\frac{gt^2}{2h} - 1 \right). \quad (5.39)$$

Вимірявши діаметр D , висоту h на яку піднятий маятник, і час його падіння, можна обчислити момент інерції J .

Порядок виконання роботи

1. Визначення моменту інерції маятника

1. Кронштейн 5 приладу пересунути і зафіксувати в крайньому нижньому положенні.
2. На диск маятника надіти довільно вибране кільце, притискаючи його до упору.
3. На вісь маятника намотати нитку підвіска й зафіксувати маятник у верхньому положенні.
4. Перевірити, чи відповідає нижня грань кільця нулю шкали на

колонці. Якщо ні, відгвинтити верхній кронштейн і відрегулювати його висоту. Пригвинтити верхній кронштейн.

5. Вимкнути електромагніт 6 натисненням клавіш «Пуск» мілісекундоміра.

6. Деблокувати гайку комірчика 8 і відрегулювати довжину біфілярного підвіска так, щоб край сталевого кільця після опускання маятника знаходився приблизно на 2 мм нижче за оптичну вісь нижнього фотоелектричного датчика. Стежити за тим, щоб вісь маятника була паралельною підставі приладу. Заблокувати комірчик.

7. Відпустити клавішу «Пуск» мілісекундоміра.

8. Намотати на вісь маятника нитку підвіска, укладаючи витки рівномірно з обох боків.

9. Закріпити маятник у верхньому положенні за допомогою електромагніту.

10. Натиснути клавішу «Скидання».

11. Натиснути клавішу «Пуск».

12. Після опускання маятника визначити вимірне значення часу його руху. Виконати вимірювання 5 разів. Підрахувати середнє значення часу руху.

13. За шкалою на вертикальній колонці приладу визначити довжину маятника.

14. Визначити діаметр осі разом з намотаною на неї ниткою за формулою (5.33).

15. Обчислити масу маятника разом з надітим на нього кільцем за формулою $m = m_{\text{оси}} + m_{\text{кільця}} + m_{\text{диска}}$.

16. За формулою (5.32) визначити момент інерції маятника.

2. Визначення похибки вимірювання

1. Похибка вимірювання моменту інерції визначити за формулою:

$$E = \frac{|J - J_t|}{J_t} 100\%, \quad (5.40)$$

де J – момент інерції, визначений експериментально;

J_t – теоретичне значення моменту інерції.

2. Для визначення J_t використовувати вираз:

$$J_t = J_0 + J_g + J_k, \quad (5.41)$$

де J_0 – момент інерції осі маятника;

J_g – момент інерції диска;

J_k – момент інерції кільця, надітого на диск.

3. Моменти інерції визначити за формулами:

$$J_0 = \frac{1}{8} m_0 D_0^2; \quad (5.42)$$

$$J_g = \frac{1}{8} m_g D_g^2 + \frac{1}{8} m_g D_0^2; \quad (5.43)$$

$$J_k = \frac{1}{8} m_k (D_k^2 + D_g^2), \quad (5.44)$$

де D_g – зовнішній діаметр диска;

D_k – зовнішній діаметр кільця.

Контрольні питання

1. Що таке момент інерції матеріальної точки?
2. Дайте визначення моменту інерції тіла.
3. Дайте визначення кінетичної та потенційної енергії.
4. Сформулюйте закон збереження механічної енергії.
5. Опишіть порядок виконання роботи.
6. Наведіть формулу кінетичної енергії обертального руху і зробіть висновок з неї.

Лабораторна робота №6

Вивчення невільних коливань

Мета роботи – вивчення коливних процесів, які виникають в системах, що здійснюють зв'язані коливання.

Загальні положення

Коливаннями називаються процеси, що відрізняються тим або іншим ступенем повторюваності. Таку властивість повторюваності мають, наприклад, гойдання маятника годинника, коливання струни або ніжок камертона, напруга між обкладинками конденсатора в контурі радіо-приймача і т. д. Залежно від фізичної природи процесу, що повторюється, розрізняють коливання: механічні, електромагнітні, електромеханічні і т. д. Коливання дуже поширені в природі. У багатьох випадках вони відіграють негативну роль. Разом із тим коливальні процеси лежать в самій основі різних галузей техніки. Залежно від характеру дії, що діє на систему, яка коливається, розрізняють вільні (або власні) коливання, вимушені коливання, автоколивання і параметричні коливання.

Вільними, або власними, називаються коливання, які відбуваються в системі, наданій самій собі після того, як їй був наданий поштовх або вона була виведена з положення рівноваги. Прикладом можуть слугувати коливання кульки, підвішеної на нитці (маятник).

Вимушеними називаються такі коливання, у процесі яких система, що коливається, піддається дії зовнішньої сили, що періодично змінюється. Прикладом можуть бути коливання моста, що виникають у процесі проходження по ньому людей, які крокують в ногу. Автоколивання, як і вимушені коливання, супроводжуються дією на систему, що коливається, зовнішніх сил, проте моменти часу, коли здійснюються ці дії, задаються системою, яка сама коливається, – система сама управляє зовнішньою дією. Прикладом автоколивальної системи є годинник, у якому маятник здійснює поштовхи за рахунок енергії піднятої гирі або закрученої пружини.

У процесі **параметричних** коливань за рахунок зовнішньої дії відбувається періодична зміна якого-небудь параметра системи,

наприклад довжини нитки, до якої підвішена кулька, що здійснює коливання.

Простими є **гармонійні коливання**, тобто такі коливання, при яких величина (наприклад, відхилення маятника), що коливається, змінюється з часом за законом синуса або косинуса. Цей вид коливань є особливо важливим із наступних причин: по-перше, коливання в природі і в техніці часто мають характер, дуже близький до гармонійних, і, по-друге, періодичні процеси іншої форми (з іншою залежністю від часу) можуть подаватися як накладення декількох гармонійних коливань.

Наприклад, рух (зсув x) кульки масою m , підвішеної на пружині до нерухомої платформи, описується лінійним однорідним диференціальним рівнянням другого порядку:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.1)$$

де $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$, k – коефіцієнт пружності пружини.

Загальне розв'язання рівняння (6.1) має вид гармонійного коливання:

$$x = A \cos(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.2)$$

де A і φ – довільні постійні.

Величина найбільшого відхилення системи від положення рівноваги називається амплітудою коливання. Амплітуда A – постійна позитивна величина. Її значення визначається величиною первинного відхилення або поштовху, яким система була виведена з положення рівноваги. Величина $(\omega_0 t + \varphi)$ називається *фазою коливання*. Постійна φ є значенням фази у момент часу $t = 0$ і називається початковою фазою коливання. Значення початкової фази визначається вибором початку відліку часу, і зазвичай розглядаються тільки значення, які лежать у межах від $-\pi$ до $+\pi$. Оскільки косинус – періодична функція з періодом 2π , різні стани системи, що здійснює гармонійні коливання, повторюються через такий проміжок часу T , за який фаза коливання

одержує приріст, що дорівнює 2π . Цей проміжок часу T називається періодом коливання: $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$. Кількість коливань в одиницю часу

називається частотою коливання: $\nu = \frac{1}{T}$. За одиницю частоти береться частота такого коливання, період якого дорівнює 1 с. Величину $\omega_0 = 2\pi\nu$ називають циклічною частотою.

Вираз для сили, що викликає і підтримує гармонійні коливання, має вигляд:

$$F = m \frac{d^2 x}{dt^2} = -m\omega_0^2 x. \quad (6.3)$$

Ця сила пропорційна до зсуву і завжди спрямована до положення рівноваги. Такою силою є сила пружності. Сили, не пружні за природою, але які задовольняють (6.3), називають квазіпружними. Тіло може здійснювати гармонійні коливання під дією пружної або квазіпружної сили.

Кінетична і потенційна енергії гармонійного коливання визначаються відповідно як:

$$E_k = \frac{m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2}{2} = \frac{mA^2\omega_0^2}{2} \sin^2(\omega_0 t + \varphi), \quad (6.4)$$

$$E_p = \frac{kx^2}{2} = \frac{kA^2}{2} \cos^2(\omega_0 t + \varphi). \quad (6.5)$$

Повна енергія дорівнює:

$$E = E_k + E_p = \frac{kA^2}{2}. \quad (6.6)$$

Систему, що описується рівнянням (6.1), називають **гармонійним осцилятором** (або гармонійним вібратором). Імпульс гармонійного осцилятора визначається як:

$$p = m \frac{dx}{dt} = -mA\omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi). \quad (6.7)$$

Координатну площину px прийнято називати фазовою площиною, а відповідний графік – фазовою траєкторією.

Вирішення ряду питань, зокрема, складання декількох коливань одного і того ж напрямку, значно полегшується і стає наочним, якщо зображати коливання графічно у вигляді векторів на площині. Одержана в такий спосіб схема називається векторною діаграмою. Гармонійне коливання може бути задане за допомогою вектора, довжина якого дорівнює амплітуді коливання, а напрям вектора утворює з віссю x кут, рівний початковій фазі коливання. Подання гармонійних коливань за допомогою векторів дає можливість звести додавання декількох коливань до добре відомої в математиці операції додавання векторів.

Якщо частоти коливань x_1 і x_2 неоднакові, то відповідні їм вектори обертатимуться з різною швидкістю. У цьому випадку результівний вектор пульсує по величині і обертається з непостійною швидкістю. Отже, результівним рухом буде в цьому випадку не гармонійне коливання, а певний складний коливний процес.

Особливий інтерес становить випадок, коли два гармонійні коливання однакового напрямку, що додаються, мало відрізняються за частотою. Результівний рух за цих умов можна розглядати як гармонійне коливання з пульсуючою амплітудою. Таке коливання називається **биттям**.

Позначимо частоту одного з коливань буквою ω , частоту другого коливання через $(\omega + \Delta\omega)$. За умовою $\Delta\omega \ll \omega$. Амплітуди обох коливань вважатимемо однаковими й рівними A . Оскільки частоти коливань дещо відмінні, завжди можна вибрати початок відліку часу так, щоб початкові фази обох коливань дорівнювали нулю. Тоді рівняння обох коливань матимуть наступний вигляд:

$$\begin{aligned} x_1 &= A \cos \omega t, \\ x_2 &= A \cos(\omega + \Delta\omega)t. \end{aligned}$$

Додаючи ці два вирази і застосовуючи тригонометричну формулу для суми косинусів, одержуємо:

$$x = x_1 + x_2 = \left(2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right) \cos \omega t. \quad (6.8)$$

Графік функції (6.8) зображений на рис. 6.1 (для $(\omega / \Delta\omega) = 10$).

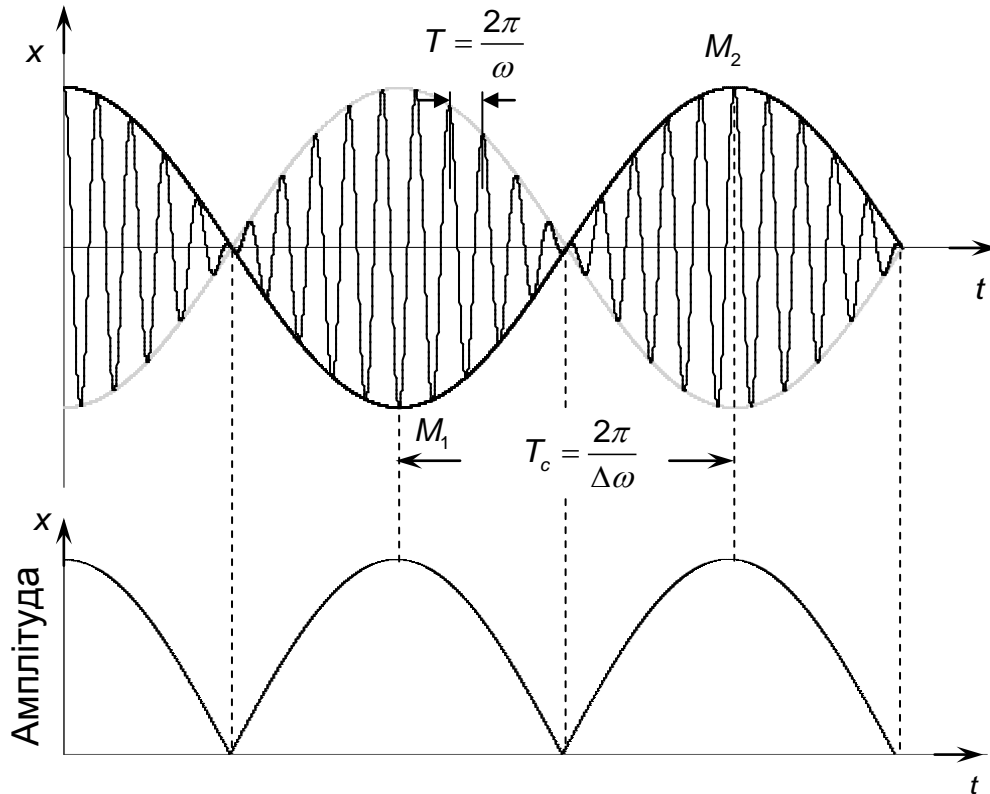


Рис. 6.1. Биття

Амплітуда такого коливання $A' = \left| 2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t \right|$ – періодична функція з частотою, що перевищує в 2 рази частоту виразу, який стоїть під знаком модуля, тобто з частотою $\Delta\omega$. Таким чином, частота пульсації амплітуди – її називають частотою биття – дорівнює різниці частот коливань, що додаються.

Слід зазначити, що множник $2A \cos \frac{\Delta\omega}{2} t$ не тільки визначає амплітуду, але й впливає на фазу коливання. Це виявляється, наприклад, у тому, що відхилення, відповідні сусіднім максимумам амплітуди, мають протилежні знаки (див. точки M_1 і M_2 на рис. 6.1).

Можна розглянути систему, що має два степені вільності. Прикладом може слугувати важка кулька, підвішена на легкій довгій пружині, кінець якої закріплений на шарнірі так, що кулька разом з

пружиною може здійснювати маятникоподібні коливання в одній площині. Положення кульки можна визначити, задавши кут φ , який утворюється віссю пружини з вертикаллю, і відстань від осі шарніра до центра кульки l . Кулька може брати участь у двох коливаннях: по-перше, в коливаннях, при яких змінюється кут φ , по-друге, в коливаннях, при яких змінюється відстань l . Частота першого коливання визначається довжиною пружини l і прискоренням сили тяжіння g , частота другого – коефіцієнтом пружності пружини k і масою кульки m . Якщо розпочати одночасно обидва коливання, то кулька, взагалі кажучи, рухатиметься по деякій складній траєкторії, форма якої залежить від співвідношення частот і початкових фаз обох коливань.

Перейдемо до складання двох взаємно перпендикулярних гармонійних коливань однієї й тієї ж частоти ω , що здійснюються уздовж координатних осей x і y . Виберемо початок відліку часу так, щоб початкова фаза першого коливання дорівнювала нулю. Тоді рівняння коливань запишуться таким чином:

$$\left. \begin{aligned} x &= a \cos \omega t \\ y &= b \cos(\omega t + \alpha) \end{aligned} \right\}, \quad (6.9)$$

де α – різниця фаз обох коливань.

Вираз (6.9) є заданим у параметричній формі рівнянням траєкторії, по котрій рухається тіло, що бере участь в обох коливаннях. Ці рівняння після нескладних перетворень можна звести до рівняння еліпса, осі якого орієнтовані щодо координатних осей x і y довільно. Орієнтація еліпса та величина його півосей залежать досить складним чином від амплітуд a і b , а також різниці фаз α :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{2xy}{ab} \cos \alpha = \sin^2 \alpha. \quad (6.10)$$

У разі, коли частоти взаємно перпендикулярних коливань відрізняються на дуже малу величину $\Delta\omega$, їх можна розглядати як коливання однакової частоти, але з різницею фаз, що поступово змінюється. Рівняння коливань можна записати таким чином:

$$\begin{aligned} x &= a \cos \omega t, \\ y &= b \cos[\omega t + (\Delta\omega t + \alpha)] \end{aligned} \quad (6.11)$$

і вираз $(\Delta\omega t + \alpha)$ розглядати як різницю фаз, що поступово змінюється з часом за лінійним законом. Результуючий рух у цьому випадку відбувається по поступово змінній кривій, яка послідовно набуватиме форми, що відповідає всім значенням різниці фаз від $-\pi$ до $+\pi$.

Якщо частоти взаємно перпендикулярних коливань не однакові, то траєкторія результуючого руху має вигляд досить складних кривих, які називають фігурами Лісажу. Чим ближче до одиниці раціональний дріб, що виражає відношення частот коливань, тим складнішою виявляється фігура Лісажу. На рис. 6.2 для прикладу показана крива для відношення частот 3:4 і різниці фаз $\pi/2$.

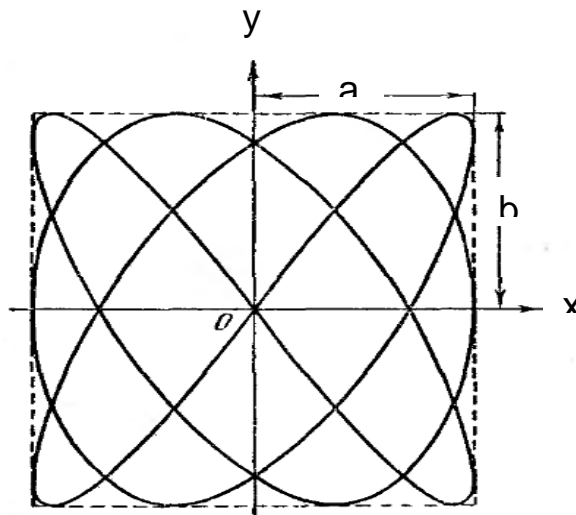


Рис. 6.2. Приклад фігури Лісажу для відношення частот 3:4 і різниці фаз $\pi/2$

Згасаючі коливання. У будь-якій реальній коливній системі завжди є сили опору, дія яких призводить до зменшення енергії системи. Якщо спад енергії не заповнюється за рахунок роботи зовнішніх сил, коливання затухатимуть. У разі вільних (або власних) згасаючих коливань (система виведена зовнішніми силами зі стану рівноваги або одержує за рахунок зовнішніх сил первинний поштовх, надалі надана самій собі й перебуває під впливом тільки квазіпружної сили і сили опору

середовища), розглядаючи малі коливання, запишемо для тіла, що коливається, рівняння другого закону Ньютона:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt}.$$

Перепишемо його у вигляді:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0, \quad (6.12)$$

де β – коефіцієнт опору;

$$2\beta = \frac{r}{m};$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m};$$

ω_0 – власна частота коливань системи.

За не дуже значного згасання (при $\beta < \omega_0$) коливання описуються функцією (розв'язання рівняння (6.12)):

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega t + \alpha). \quad (6.13)$$

Графік цієї функції зображений на рис. 6.3. Штриховими лініями показані межі зсуву точки x , що коливається.

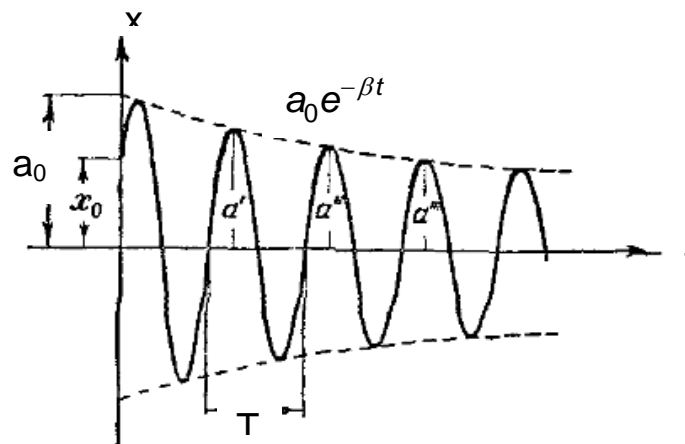


Рис. 6.3. Крива згасаючих коливань

Рух системи можна розглядати як гармонійне коливання частоти ω з амплітудою, що змінюється згідно із законом $a = a_0 e^{-\beta t}$. Верхня з пунктирних кривих на рис. 6.3 дає графік функції $a(t)$, величина a_0 – амплітуда в початковий момент часу. Швидкість згасання коливань визначається величиною $\beta = \frac{r}{2m}$, яку називають **коефіцієнтом згасання** (він обернений до величини проміжку часу, за який амплітуда зменшується в e разів). Період згасаючих коливань дорівнює:

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 + \beta^2}}. \quad (6.14)$$

Для характеристики згасання коливань використовують **логарифмічний декремент згасання** (він обернений до величини кількості коливань, що здійснюються за той час, за який амплітуда зменшується в e разів):

$$\lambda = \ln \frac{a(t)}{a(t+T)} = \beta T. \quad (6.15)$$

Для характеристики коливної системи використовується величина, яку називають **добротністю** коливної системи (добротність пропорційна числу коливань N_e , що здійснюються системою за час, коли амплітуда коливань зменшується в e разів):

$$Q = \frac{\pi}{\lambda} = \pi N_e. \quad (6.16)$$

Автоколивання. Якщо при згасаючих коливаннях заповнювати спад енергії системи, що витрачається на подолання опору середовища, то коливання стануть незгасаючими. Якщо зробити так, щоб коливна система сама управляла зовнішньою дією, забезпечуючи узгодженість поштовхів, що повідомляються їй, зі своїм рухом, то така система називається автоколивальною, а здійснювані нею незгасаючі коливання – автоколиваннями.

Вимушені коливання. Вимушеними називаються такі коливання, які виникають в коливній системі під дією зовнішньої сили, що періодично змінюється (вимушувальна сила). Хай вимушувальна сила змінюється з часом за гармонійним законом:

$$f = F_0 \cos \omega t. \quad (6.17)$$

Якщо вважати коливання досить малими і силу опору пропорційною до швидкості, то рівняння руху системи запишеться таким чином (враховуються, окрім вимушувальної сили, також квазіпружна сила і сила опору середовища):

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - r \frac{dx}{dt} + F_0 \cos \omega t$$

або після перетворень:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 2\beta \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad (6.18)$$

де $f_0 = \frac{F_0}{m}$;

$\beta = \frac{r}{2m}$ – коефіцієнт згасання;

$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ – власна частота коливань системи.

Загальне розв'язання такого неоднорідного рівняння дорівнює сумі загального розв'язку відповідного однорідного рівняння і окремого розв'язку неоднорідного рівняння. Загальне розв'язання однорідного рівняння має вигляд:

$$x = a_0 e^{-\beta t} \cos(\omega' t + \alpha'), \quad (6.19)$$

де $\omega' = \sqrt{\omega^2 - \beta^2}$;

α' – довільна постійна.

Окреме розв'язання неоднорідного рівняння:

$$x = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2}} \cos\left(\omega t - \arctg \frac{2\beta\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}\right). \quad (6.20)$$

Загальне розв'язання однорідного рівняння (6.19) відіграє помітну роль тільки на початковій стадії процесу, при так званому встановленні коливань (рис. 6.4). Функція (6.20) описує сталі вимушені коливання. Вони є гармонійними коливаннями з частотою, що дорівнює частоті вимушувальної сили. Амплітуда $a = (f_0 / \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\beta^2\omega^2})$ вимушених коливань пропорційна до амплітуди вимушувальної сили. Для даної коливної системи амплітуда залежить від частоти вимушувальної сили. Вимушені коливання відстають по фазі від вимушувальної сили. Величина відставання також залежить від частоти вимушувальної сили.

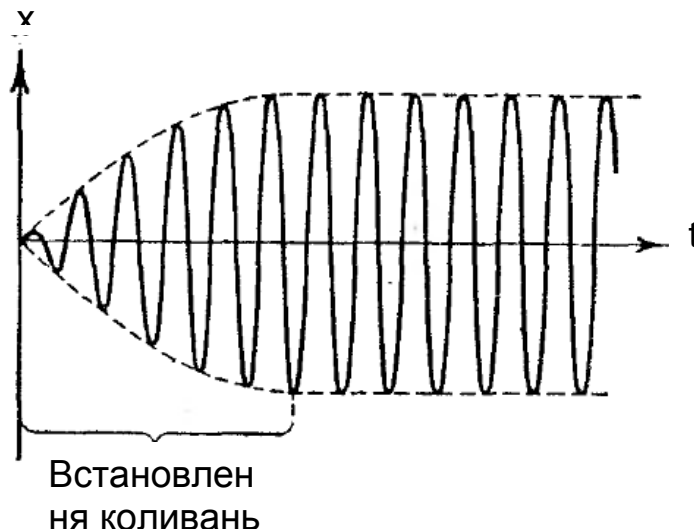


Рис. 6.4. Вимушені коливання

Залежність амплітуди вимушених коливань від частоти вимушувальної сили призводить до того, що за певної встановленої для даної системи частоти амплітуда коливань досягає максимального значення. Коливна система є особливо чутливою до дії сили, що вимушує, при цій частоті. Це явище називається *резонансом*, а відповідна частота – резонансною частотою:

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}. \quad (6.21)$$

Вираз для амплітуди при резонансі:

$$a_{рез} = \frac{f_0}{2\beta\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)}}. \quad (6.22)$$

У реальних коливних системах із згасанням амплітуда при резонансі досягає максимальних, але кінцевих значень. Чітко кажучи, в таких системах резонанс настає при частоті, дещо меншій від ω_0 , оскільки тертя «уповільнює» колювання.

Наявність у коливних систем однієї або декількох власних частот характеризує їх здатність вибірково відгукуватися на зовнішні періодичні дії. З явищем резонансу доводиться рахуватися при конструюванні машин і різних споруд. Власна частота колювань цих пристроїв не повинна бути близькою до частоти можливих зовнішніх дій. Разом із тим явище резонансу часто виявляється корисним, особливо в акустиці, радіотехніці і т. д.

Параметричний резонанс. У розглянутому вище випадку прикладена ззовні вимушувальна сила обумовлювала безпосередньо виведення системи зі стану рівноваги. Існує інший вид дії ззовні, за допомогою якої можна сильно розгойдати систему. Цей вид дії полягає у здійснюваній у такт з колюваннями періодичній зміні якого-небудь параметра системи, внаслідок чого саме явище називається *параметричним резонансом*. Розглянемо простий маятник – кульку на нитці. Якщо періодично змінювати довжину маятника l (збільшуючи її в моменти, коли маятник знаходиться в крайніх положеннях, і зменшуючи в моменти, коли маятник знаходиться в середньому положенні), то маятник сильно розгойдається. Збільшення енергії маятника при цьому відбувається за рахунок роботи, яку здійснює сила, що діє на нитку. Сила натягнення нитки при колюваннях маятника непостійна: вона менша в крайніх положеннях, коли швидкість зводиться до нуля, і більша в середньому положенні, коли швидкість маятника максимальна. Тому негативна робота зовнішньої сили при подовженні маятника виявляється меншою за величиною, ніж позитивна робота, що здійснюється при вкороченні маятника. У результаті робота зовнішньої сили за період виявляється більшою від нуля.

Розглянемо далі два можливі процеси коливань зв'язаних маятників: синфазні й протифазні коливання.

Частота синфазних коливань зв'язаних маятників. Два маятники, пов'язані між собою пружним зв'язком (пружиною), одержали назву зв'язаних. Якщо обидва таких маятника відхилити на однаковий кут φ в один бік і відпустити, то вони здійснюватимуть синфазний рух (рис. 6.5).

Другий закон Ньютона для даного випадку має вигляд:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}, \quad (6.23)$$

де J – момент інерції маятника;

$\vec{\varepsilon}$ – кутове прискорення;

\vec{M} – момент сили тяжіння.

Як відомо, момент сили дорівнює додатку сили і плеча. Плече сили дорівнює: $OB = L \sin \varphi$. Вісь обертання маятника проходить через точку O .

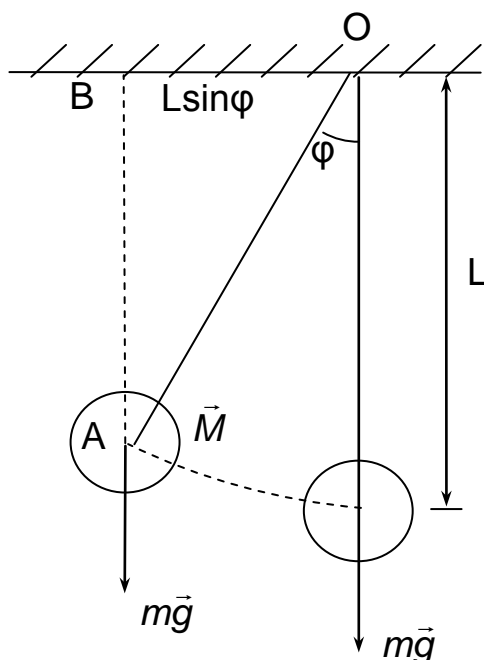


Рис. 6.5. Визначення частоти синфазних коливань

Момент сили тяжіння \vec{M} спрямований перпендикулярно до площини рисунка в точці A до нас або від нас залежно від напрямку руху маятника.

Оскільки $J = mL^2$, $M = mgL \sin \varphi$, то з (6.23) випливає, що:

$$mL^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mgL \sin \varphi. \quad (6.24)$$

Знак « $-$ » показує, що при відхиленні маятника, тобто при збільшенні кута, виникає момент сили, який прагне зменшити кут. При малих кутах φ можна вважати, що $\varphi \approx \sin \varphi$ і тоді (6.24) можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \frac{g}{L} \varphi = 0. \quad (6.25)$$

Порівнюючи останні дві формули, одержимо:

$$\omega_0^2 = \frac{g}{L}. \quad (6.26)$$

Оскільки $\omega = 2\pi\nu$, то одержимо:

$$\nu = \sqrt{\frac{g}{4\pi^2 L}}. \quad (6.27)$$

Частота протифазних коливань зв'язаних маятників. Якщо два зв'язані маятники відхилити на однаковий кут, але в протилежні сторони, і відпустити, то вони здійснюватимуть протифазні коливання (рис. 6.6).

Запишемо формулу другого закону Ньютона для даного випадку:

$$J\vec{\varepsilon} = \vec{M}_1 + \vec{M}_2, \quad (6.28)$$

де $M_1 = mgL \sin \varphi_1$;

$M_2 = mgL \sin \varphi_2$;

$$x = d \sin \varphi_1.$$

Плече сили $F = kx$ дорівнює: $l = d \sin \varphi_2$. У вираз для моменту сили M_2 входить число 2 через те, що в даному випадку одна пружина стискається, друга розтягується і результувна сила спрямована в один бік (див. рис. 6.6).

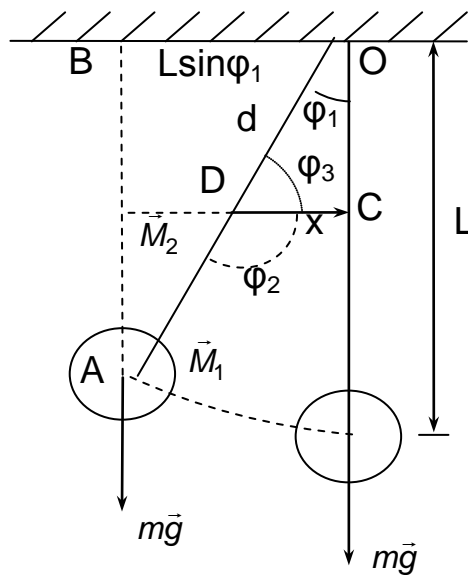


Рис. 6.6. Схема визначення частоти протифазних коливань

Слід врахувати, що момент \vec{M}_1 спрямований перпендикулярно до площини рис. 6.6 в точці A, а момент \vec{M}_2 – перпендикулярно до площини рис. 6.6 в точці D.

Враховуючи все сказане, як і у разі синфазних коливань, матимемо:

$$mL^2 \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mgL \sin \varphi_1 + 2kd^2 \varphi_1 = 0. \quad (6.29)$$

Після нескладних перетворень рівняння (6.29) можна записати у вигляді:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \left(\frac{g}{L} + \frac{2kd^2}{mL^2} \right) \varphi = 0. \quad (6.30)$$

Порівнюючи (6.1) і (6.30), одержимо:

$$\omega^2 = \frac{g}{L} + \frac{2kd^2}{mL^2}, \quad (6.31)$$

звідки:

$$\nu = \sqrt{\frac{1}{4\pi^2} \left(\frac{g}{L} + \frac{2kd^2}{mL^2} \right)}. \quad (6.32)$$

Опис лабораторної установки

Загальний вигляд приладу для дослідження коливань зв'язаних систем зображений на рис. 6.7 і 6.8. На підставці 1 (рис. 6.7) закріплена колонка 2 з втулкою 3 і кронштейном 4. На стрижні 5 втулки знаходяться три підвіски 6, на яких за допомогою кулькових підшипників підвішені два маятники і стрижень 7, що збуджує коливання. Маятники складаються зі стрижнів 8 і переміщуваних вантажів 9.

До нижнього кронштейна 4 прикріплений фотоелектричний датчик 10, світловий потік якого перетинається стрижнем одного з маятників у процесі його коливного руху.

Маятники зв'язані один з одним за допомогою двох пружин 11 (рис. 6.8), закріплених у спеціальній С-подібній обоймі, яку можна переміщувати вздовж стрижнів маятників.

Збудження коливань здійснюється за допомогою привідного диска, закріпленого на валу електродвигуна. Вал, рухаючи стрижень 7 (рис. 6.7), сполучений за допомогою двох пружин 12 (рис. 6.8) зі стрижнем маятника, спричиняє його коливання.

Між маятниками в нижній їх частині розташована шкала 13, за допомогою якої вимірюється амплітуда коливань маятників.

Електродвигун, схема його управління, мілісекундомір і лічильник числа коливань розташовані в блоці управління і вимірювань 14.

На лицьовій панелі блоку 14 знаходяться наступні елементи управління:

«Мережа» – вимикач мережі;

«Вимкнення двигуна» – вимикач напруги живлення схеми управління швидкістю електродвигуна;

«Частота коливань» – дозволяє змінювати швидкість двигуна;

«Скидання» – скидання показань вимірника. Натиснення цієї клавіші готує вимірник до роботи;

«Стоп» – закінчення вимірювань. Натиснення цієї клавіші викликає генерування сигналу закінчення процесу підрахунку.

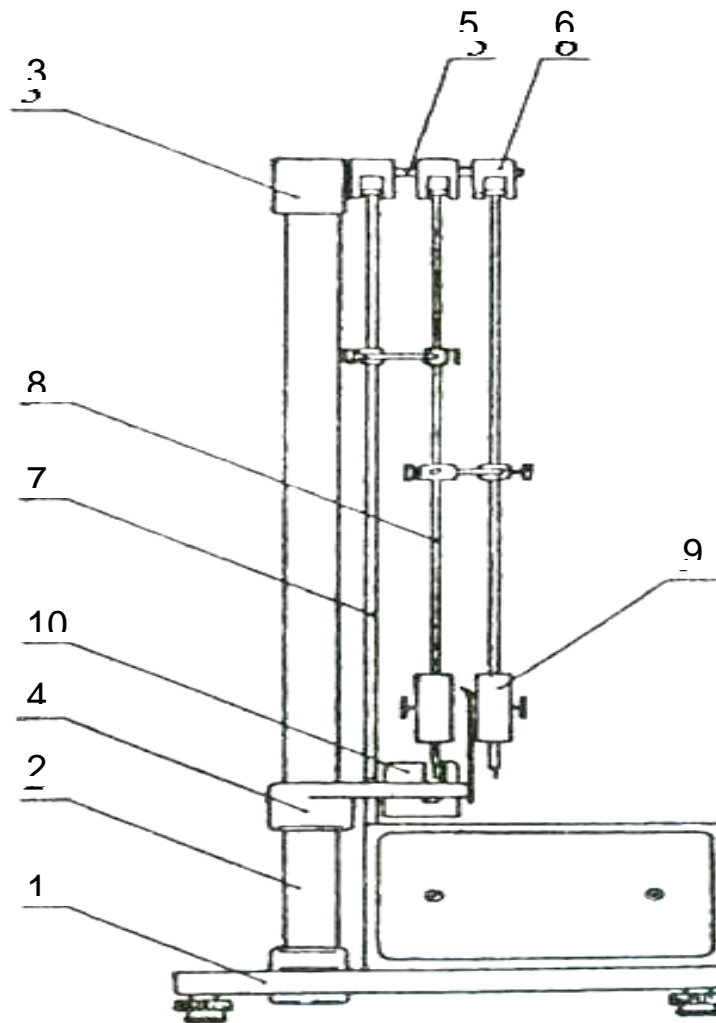


Рис. 6.7. Загальний вигляд установки

Порядок виконання роботи

1. Визначити частоту синфазних коливань маятників. Для цього необхідно:

переконатися, що обійми, які кріплять пружини, знаходяться на верхній частині стрижнів маятників, а вантажі – на нижній частині на однаковій відстані;

від'єднати пружини, що сполучають маятники зі стрижнем, який збуджує коливання;

натиснути клавішу «Мережа»;

відхилити маятники вбік на кут 6° і відпустити;

натиснути клавішу « Скидання»;

після підрахунку приладом $n = 10$ періодів коливань маятників натиснути клавішу «Стоп»;

використовуючи формулу $\nu = \frac{n}{t}$, обчислити частоту синфазних коливань зв'язаних маятників. Тут t – виміряна приладом тривалість десяти періодів коливань.

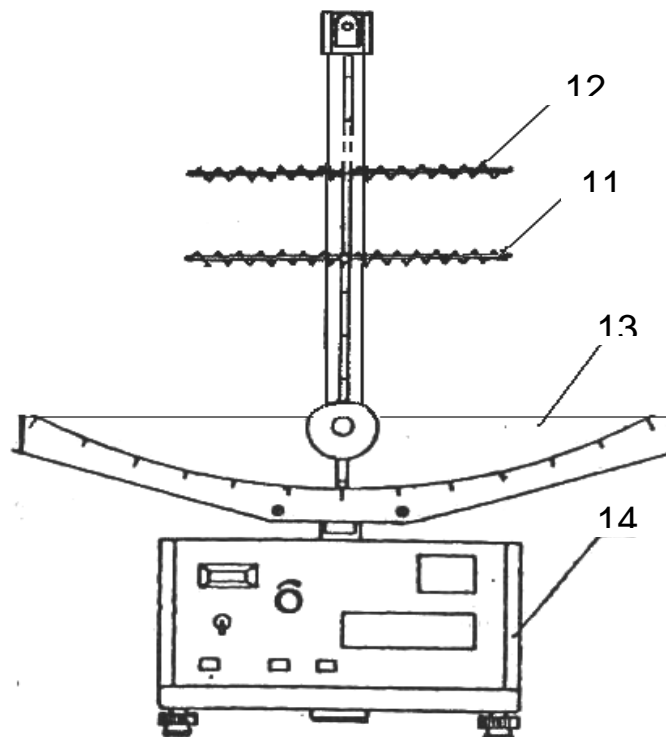


Рис. 6.8. Вид експериментального приладу спереду

2. Визначити частоту протифазних коливань маятників. Вимірювання проводити так само, як і для синфазних коливань, але маятники відхиляти в протилежні сторони на однаковий кут (близько 6°).

3. Порівняти отримані значення частот з їх значеннями, розрахованими за формулами (6.27) і (6.32).

4. Вивчити явище збудження зв'язаних маятників зовнішньою силою синусоїдального характеру. Для цього необхідно:

за допомогою пружин з'єднати маятники зі стрижнем, що викликає вимушені коливання;

ввімкнути живлення електродвигуна тумблером «Вимкнення двигуна»;

регулюючи обороти двигуна ручкою «Частота коливань», вести спостереження за амплітудою коливань маятників; збільшення амплітуди до $20 - 25^\circ$ свідчить про настання явища резонансу.

5. Простежити явище «биття» зв'язаних маятників. Для досягнення цієї мети:

від'єднати пружини від обойми, що сполучає маятники зі стрижнем, який викликає вимушені коливання;

закріпити вантаж на першому маятнику в довільному положенні;

відхилити перший маятник на будь-який кут і відпустити;

після декількох коливань спостерігати «биття» другого маятника; аналогічно спостерігати «биття» першого маятника.

Контрольні питання

1. Опишіть установки і послідовність виконання даної роботи.
2. Дайте визначення гармонійних коливань, амплітуди, частоти, періоду, фази коливань, початкової фази коливань.
3. Що таке гармонійний осцилятор, швидкість і прискорення гармонійного осцилятора?
4. Запишіть диференціальне рівняння гармонійного осцилятора.
5. Опишіть енергію гармонійного осцилятора.
6. Дайте визначення згасаючих коливань. Назвіть причини, що призводять до згасання коливань.
7. Запишіть диференціальне рівняння згасаючих коливань.
8. У чому полягає фізичний смисл коефіцієнта згасання?
9. Що таке декремент згасання?
10. Що таке логарифмічний декремент згасання? У чому його фізичний смисл?
11. Дайте визначення вимушених коливань. Запишіть вираз другого закону Ньютона для цих коливань.
12. Дайте характеристику амплітуди вимушених коливань.

13. Дайте визначення резонансу. Розкрийте роль резонансу в науці і техніці.
14. Розкрийте явище биття. Перерахуйте умови виникнення биття.
15. Виведіть формулу для розрахунку частоти синфазних коливань зв'язаних маятників.
16. Виведіть формулу для розрахунку частоти протифазних коливань зв'язаних маятників.

Лабораторна робота №7

Визначення швидкості польоту тіла методом балістичного крутильного маятника

Мета роботи – вивчення обертального та коливного рухів і отримання навиків визначення швидкості польоту тіла.

Загальні положення

1. Закони збереження в механіці. Закони збереження енергії, імпульсу та моменту імпульсу є найбільш загальними фізичними законами. Вони мають давнє походження, пов'язане з фундаментальними властивостями простору і часу – однорідністю та ізотропністю. А саме: закон збереження енергії пов'язаний із однорідністю часу, закон збереження імпульсу – з однорідністю простору, закон збереження моменту імпульсу – з ізотропністю простору. Внаслідок цього їх використання не обмежується рамками класичної механіки, вони виконуються під час опису всіх відомих явищ – від космічних до квантових.

Важливість законів збереження як інструменту дослідження обумовлена наступними обставинами:

1. Закони збереження не залежать ні від траєкторій частинок, ні від характеру діючих сил. Тому вони дозволяють одержати ряд цілком загальних та істотних висновків про властивості різних механічних процесів без їх детального розгляду за допомогою рівнянь руху. Якщо, наприклад, з'ясується, що певний процес, який аналізується, суперечить законам збереження, то можна стверджувати: цей процес неможливий і безглуздо намагатися його здійснити.

2. Незалежність законів збереження від характеру діючих сил дозволяє застосовувати їх навіть у тому випадку, коли сили невідомі. Так мова йде, наприклад, про область мікросвіту, де поняття матеріальної точки, а отже, й сили, безглузді. Така ж ситуація має місце під час аналізу систем великої кількості частинок, коли технічно неможливо визначити координати всіх частинок, а отже, й розрахувати сили, які

діють між частинками. Закони збереження є в цих випадках єдиним інструментом дослідження.

3. Навіть у випадку, якщо всі сили відомі, використання законів збереження не дає нової порівняно з рівнянням руху (другим законом Ньютона) інформації, їх застосування може істотно спростити теоретичні викладення.

Сформулюємо закони збереження імпульсу, механічної енергії та моменту імпульсу.

Закон збереження імпульсу. В інерціальній системі відліку імпульс замкнутої системи залишається постійним. Математично це твердження можна виразити одним із наступних способів:

$$\vec{P} = \sum \vec{P}_i = \text{const} \quad (\text{для замкнутої системи}) \quad (7.1)$$

або

$$d\vec{P} = d\sum \vec{P}_i = \sum \vec{f}_i dt = \vec{F}_{out} dt = 0, \quad (7.2)$$

де \vec{P} – повний імпульс системи матеріальних точок, кожна з яких має певний імпульс;

\vec{f}_i – рівнодійні всіх сил, прикладених до i -ї точки;

\vec{F}_{out} – сума всіх зовнішніх сил, що діють на всі матеріальні точки системи.

При цьому вважають, що і \vec{P}_i і \vec{F}_{out} є вектори, прикладені до центра мас (центру інерції) системи.

Закон збереження механічної енергії. В інерціальній системі відліку повна механічна енергія замкнутої консервативної системи матеріальних точок залишається постійною:

$$E = U + T = \text{const} \quad (\text{для замкнутої консервативної системи}) \quad (7.3)$$

або

$$dE = d(T + U) = \delta A_{out} + \delta A_{in.dis} = 0, \quad (7.4)$$

де $T = \sum_{i=1} \frac{m_i v_i^2}{2}$ – кінетична енергія системи;

U – потенційна енергія системи;

δA_{out} – робота всіх зовнішніх сил;

$\delta A_{in,dis}$ – робота внутрішніх дисипативних сил.

Закон збереження моменту імпульсу. В інерціальній системі відліку момент імпульсу замкненої системи матеріальних точок залишається постійним:

$$\vec{L} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = const \quad (\text{для замкненої системи}) \quad (7.5)$$

або

$$d\vec{L} = d \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{f}_i dt = \vec{M}_{out} dt = 0, \quad (7.6)$$

де \vec{M}_{out} – сумарний момент тільки зовнішніх сил.

Закони збереження стосуються фізичних систем: для окремих складових цих систем вони можуть і не мати місця.

Нагадаємо, що:

замкненою називається механічна система, на жодне тіло якої не діють зовнішні сили;

консервативною називається механічна система, в якій всі внутрішні сили консервативні, а зовнішні – консервативні та стаціонарні.

Ці поняття є ідеалізаціями, але майстерність фізика-дослідника якраз і полягає в умінні побачити причини, за якими ту чи іншу реальну систему можна вважати замкненою, або консервативною.

2. Основні характеристики обертального руху твердих тіл. При обертанні твердого тіла навколо нерухомої осі всі його точки мають однакову кутову швидкість ω , а положення точок тіла повністю

визначається кутом повороту φ , який відлічується від початкового положення.

Кутовою швидкістю обертання ω називається перша похідна від кута повороту за часом (зміна кута повороту за одиницю часу):

$$|\vec{\omega}| = \frac{d\varphi}{dt}. \quad (7.7)$$

Кутовим прискоренням ε називається перша похідна від кутової швидкості за часом (зміна кутової швидкості за одиницю часу):

$$|\vec{\varepsilon}| = \frac{d|\vec{\omega}|}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2}. \quad (7.8)$$

Динамічною характеристикою в обертальному русі є момент сили. Моментом сили щодо осі обертання називається векторне множення радіуса-вектора \vec{r} дії сили на вектор сили \vec{F} :

$$\vec{M} = [\vec{r} \times \vec{F}]. \quad (7.9)$$

При цьому вектор \vec{M} перпендикулярний до площини, в якій лежать вектори \vec{r} і \vec{F} , і спрямований так, щоб три вектори $\vec{r}, \vec{F}, \vec{M}$ утворили правогвинтову систему. Напрямок вектора моменту сили \vec{M} співпадає за напрямом з векторами $\vec{\omega}$ і $\vec{\varepsilon}$ при рівноприскореному обертальному русі. При рівносповільненому русі результувний вектор моментів сил $\vec{M} = \sum_{i=1}^n \vec{M}_i$ і вектор кутового прискорення $\vec{\varepsilon}$ спрямований у протилежний бік відносно вектора кутової швидкості $\vec{\omega}$.

Хай вісь обертання твердого тіла проходить через точку O перпендикулярно до креслення, тоді під дією сили \vec{F} , прикладеної на відстані радіуса вектора \vec{r} від осі обертання і яка лежить у площині креслення, тіло обертатиметься за годинниковою стрілкою. Момент сили дорівнює:

$$\vec{M} = [\vec{r}' \times \vec{F}]; \quad M = rF \sin \alpha, \quad (7.10)$$

де α – кут між напрямками векторів \vec{r} і \vec{F} .

Величину моменту сили можна обчислити за формулою $M = b F$; $b = r \sin \alpha$, де b – найкоротша відстань від осі обертання до напрямку сили \vec{F} . Отже, якщо $\vec{r} \perp \vec{F}$, то момент сили дорівнює їх добутку ($\sin \alpha = 1$), і спрямований по осі обертання, співпадаючи за напрямком з кутовим прискоренням.

Основний закон динаміки обертального руху встановлює прямо пропорційний зв'язок між кутовим прискоренням і геометричною сумою моментів усіх сил, прикладених до твердого тіла:

$$\varepsilon = \frac{\sum_{i=1}^n M_i}{J}. \quad (7.11)$$

Тут J – момент інерції твердого тіла щодо осі обертання. Момент інерції при обертальному русі характеризує інерційні властивості тіл при обертальному русі, подібно до того, як маса є характеристикою інерційних властивостей тіла при поступальному русі. Момент інерції тіл визначається не тільки масою тіл, що обертаються, але й розподілом її та окремих її частин щодо осі обертання.

Так, момент інерції dJ матеріальної точки масою dm , яка знаходиться на відстані r від осі обертання, є:

$$dJ = dm r^2. \quad (7.12)$$

Для обчислення моменту інерції всього тіла, що обертається, тіло розбивають на елементарні об'єми dV з масою dm , вважаючи їх матеріальними точками, і алгебраїчно підсумовують моменти інерції всіх матеріальних точок, з яких складене тіло, тобто момент інерції всього тіла буде дорівнювати:

$$J = \int r^2 dm = \int_V r^2 \rho dV, \quad (7.13)$$

де $r = dm/dv$ – густина речовини тіла.

Оскільки радіус-вектор \vec{r} є функцією координат точок, з яких складене тіло, то формули для розрахунку моментів інерції тіл різної форми, які мають однакові маси, будуть різними. Так, момент інерції суцільного циліндра щодо поздовжньої осі симетрії дорівнює $(mR^2)/2$, де m – маса циліндра, R – його радіус; момент інерції порожнистого тонкостінного циліндра дорівнює mR^2 , а момент інерції кулі щодо осі, що проходить через її центр, дорівнює $(2mR^2)/5$.

Момент інерції даного тіла щодо осі, яка не проходить через центр мас, пов'язаний не тільки з масою, формою і розмірами тіла, але також з положенням цієї осі відносно осі, що проходить через центр мас. Згідно з теоремою про перенесення осей інерції (теоремою Штейнера) моменти інерції щодо паралельних осей пов'язані співвідношенням:

$$J = J_0 + md^2, \quad (7.14)$$

де J_0 – момент інерції тіла щодо осі, що проходить через центр мас тіла;
 m – маса тіла;
 d – відстань між осями.

Моменти інерції тіл складної конфігурації зазвичай визначають експериментальним шляхом.

Оскільки в лабораторній роботі використовується балістичний маятник, то стисло розглянемо його влаштування і спосіб визначення швидкості польоту кулі.

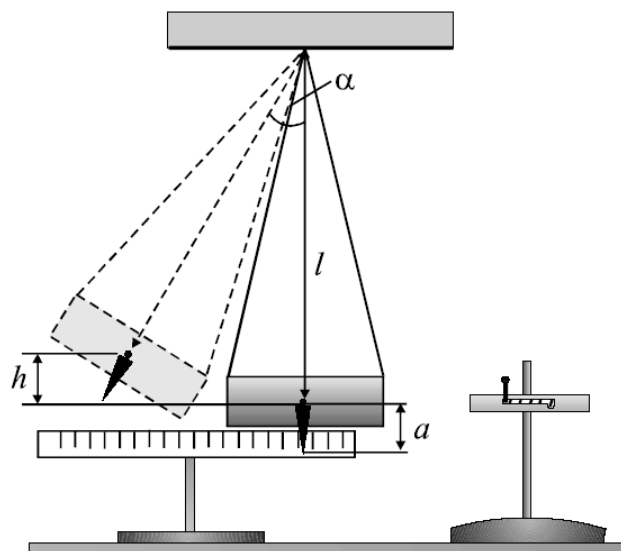


Рис. 7.1. Балістичний маятник

Балістичний маятник (рис. 7.1) є вантажем великої маси M , підвішеним на довгих нитках. У маятник стріляють в горизонтальному напрямі кулею масою m .

Якщо час зіткнення кулі з маятником незначний порівняно з періодом його коливань, то систему «куля – маятник» під час удару можна вважати замкненою і застосовувати закон збереження імпульсу.

$$(M + m)u = mv, \quad (7.15)$$

де v – швидкість кулі безпосередньо перед ударом у маятник;

u – швидкість системи «куля – маятник» відразу після удару.

Якщо виміряти експериментально маси і швидкість u , то швидкість v може бути знайдена з рівняння (7.15).

Маси можна знайти зважуванням, а швидкість u визначити з аналізу руху системи після удару.

Після удару маятник обернеться навколо горизонтальної осі, що проходить через точку підвісу, і його центр ваги підніметься на висоту h . Якщо нехтувати силами тертя, то закон збереження механічної енергії можна записати у вигляді:

$$\frac{(M + m)u^2}{2} = (M + m)gh, \quad (7.16)$$

звідки:

$$u = \sqrt{2gh}. \quad (7.17)$$

Величину h можна знайти з вимірювань кута α відхилення маятника від положення рівноваги (рис. 7.1). Якщо l – відстань від центра ваги маятника до точки підвісу, то:

$$h = l(1 - \cos \alpha) = 2l \sin^2 \frac{\alpha}{2} \approx \frac{l\alpha^2}{2}. \quad (7.18)$$

Кут α можна знайти за формулою:

$$\alpha = s / (l+a), \quad (7.19)$$

де s – зсув за шкалою відліку в горизонтальному напрямі;

a – відстань від кінця стрілки до центра ваги маятника.

Тоді з формул (7.15) – (7.19) одержимо робочий вираз для швидкості польоту кулі:

$$v = \frac{m+M}{m} \frac{s}{l+a} \sqrt{gl}. \quad (7.20)$$

Опис лабораторної установки

У лабораторній роботі вимірюється швидкість польоту циліндра діаметром 8 мм завдовжки 7 мм. Умовно його можна назвати снарядом. Для визначення швидкості польоту снаряда використовується балістичний маятник, загальний вигляд якого показаний на рис. 7.2. Підставка 1 оснащена регульованими ніжками 2, які дозволяють вирівнювати прилад. У підставці закріплена колонка 3, на якій встановлений верхній кронштейн 4, нижній кронштейн 5 і середній кронштейн 6.

До середнього кронштейна прикріплений стріляючий пристрій 7, а також прозорий екран з нанесеною на нього кутовою шкалою і фотоелектричний датчик 9. Кронштейни 4 і 6 мають затиски, які слугують для кріплення сталевого дроту 10, на який підвішений маятник. Останній складається з двох чаш, наповнених пластиліном 11 (для того, щоб куля в ньому застрявала і її удар об мішень можна було вважати абсолютно непружним), двох переміщуваних вантажів 12, двох стрижнів 13 і вказівника 14. Вказівник при коливальному русі маятника перетинає світловий промінь фотоелектричного датчика. Імпульси напруги, які виникають при цьому, подаються на універсальний мілісекундомір 15, що вимірює кількість коливань і час їх існування.

Виліт снаряда відбувається з пристрою, що стріляє, внаслідок чого снаряд прилипає до пластиліну, який знаходиться в чашах крутильного маятника, і викликає відхилення маятника на деякий кут.

Розглядаючи цей процес як непружний удар і нехтуючи моментами сил тертя, можна на підставі закону збереження моменту імпульсу записати:

$$mvr = J\omega_0, \quad (7.21)$$

де m – маса снаряда;

v – його швидкість;

r – відстань від осі обертання маятника до центра снаряда, застряглого в пластині;

J – сумарний момент інерції маятника і снаряда щодо осі обертання;

ω_0 – кутова швидкість обертання маятника.

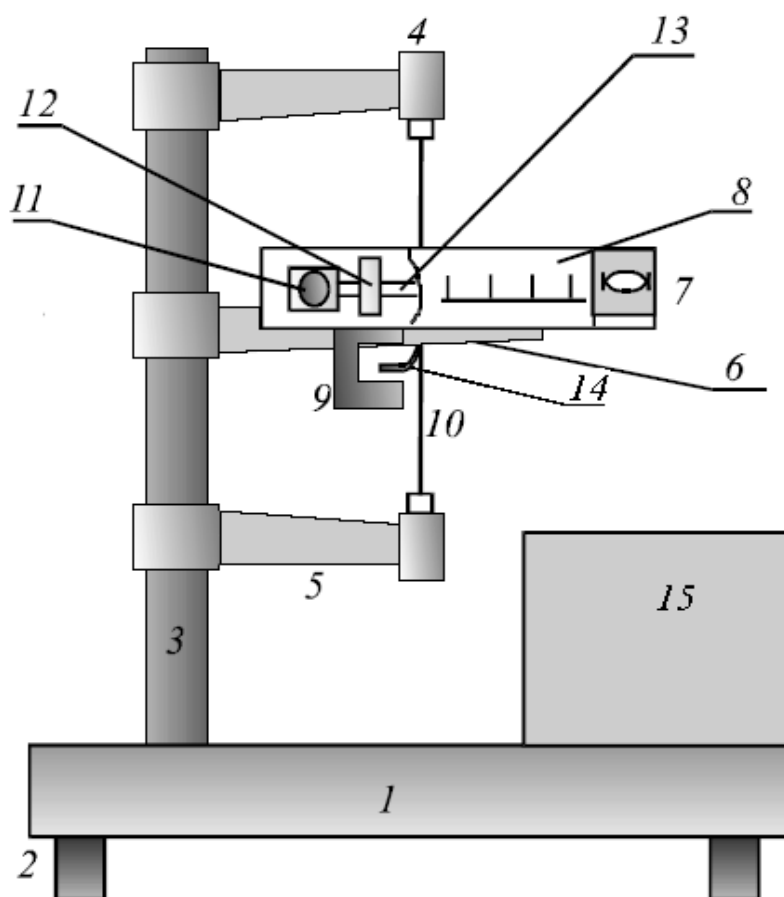


Рис. 7.2. Лабораторний балістичний маятник

Закон збереження енергії запишемо у вигляді:

$$\frac{J\omega_0^2}{2} = \frac{k\varphi^2}{2}. \quad (7.22)$$

Ліва частина рівняння позначає кінетичну енергію обертального руху снаряда в маятнику, яка переходить у потенційну енергію пружно закрученої нитки $\frac{k\varphi^2}{2}$, де k – модуль кручення нитки, φ – максимальний кут повороту маятника.

У результаті спільного розв'язання (7.21) і (7.22) одержуємо вираз для швидкості:

$$v = \frac{\varphi}{mr} \sqrt{kJ}. \quad (7.23)$$

Для визначення k і J скористаємося другим законом Ньютона для обертального руху:

$$J\varepsilon = k\varphi, \quad (7.24)$$

де ε – кутове прискорення;
 φ – кут повороту маятника.

Перетворюючи останнє рівняння, одержуємо:

$$\varepsilon + \frac{k}{J}\varphi = 0. \quad (7.25)$$

Величина $\frac{k}{J} = \omega_0^2$, $\omega_0 = (2\pi/T)$ називається циклічною частотою коливань. Звідси період T дорівнює:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{k}}. \quad (7.26)$$

Отже, період коливань маятника залежить від моменту інерції J і модуля кручення k .

Змінюючи момент інерції маятника переміщенням вантажів з положення R_1 , для якого момент інерції J_1 , в положення R_2 , для якого момент інерції J_2 і, визначаючи експериментально відповідні періоди T_1 і T_2 , складаємо систему рівнянь:

$$\begin{aligned} T_1^2 &= 4\pi^2 \frac{J_1}{k} = 4\pi^2 \frac{(J_0 + 2MR_1^2)}{k}; \\ T_2^2 &= 4\pi^2 \frac{J_2}{k} = 4\pi^2 \frac{(J_0 + 2MR_2^2)}{k}, \end{aligned} \quad (7.27)$$

де J_0 – момент інерції маятника без вантажів;

M – маса вантажу і снаряда.

Розв'язуючи систему рівнянь (7.27), знаходимо модуль кручення:

$$k = \frac{8\pi^2 M(R_2^2 - R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2} \quad (7.28)$$

і момент інерції:

$$J_1 = \frac{2MT_1^2(R_2^2 - R_1^2)}{T_2^2 - T_1^2}. \quad (7.29)$$

Підставляючи отримані значення k і J_1 в рівняння (7.23), знаходимо швидкість снаряда:

$$v = \frac{4\pi M\varphi T_1(R_2^2 - R_1^2)}{mr(T_2^2 - T_1^2)}. \quad (7.30)$$

Параметри маятника:

значення мінімального ділення кутової шкали – 1° ;

маса снаряда вказана на установці;

маса кожного з вантажів, які переміщують уздовж стрижнів, вказана безпосередньо на вантажах.

Порядок виконання роботи

1. Ввімкнути установку в мережу 220 В, натиснути перемикач «Мережа» і перевірити, чи всі індикатори установки висвічують цифру «нуль» і чи світяться лампочки фотоелектричних датчиків. Якщо на індикаторах відсутній «0», то необхідно натиснути клавішу «Скидання».
 2. Наблизити вантажі один до одного на відстань 4 – 5 см.
 3. Встановити маятник у такому положенні, щоб межа на чаші з пластиліном співпала з діленням «0» кутової шкали.
 4. Зробити постріл снарядом із пристрою, що стріляє.
 5. Виміряти максимальний кут φ відхилень маятника.
 6. Ввімкнути лічильник часу і встановити на ньому нульові показники.
 7. Відхилити маятник рукою на той же кут. Натисненням клавіші «Скидання» підготувати до роботи вимірник часу і пустити маятник.
 8. Виміряти час десяти коливань і обчислити період.
 9. Розвести рухомі вантажі на відстань 9 – 10 см і повторити дії згідно з пп. 3, 6, 7, 8.
 10. За формулою (7.30) обчислити швидкість польоту снаряда.
- Дослід визначення швидкості снаряда повторити не менше трьох разів і обчислити середнє значення швидкості.
11. Для закінчення вимірювань натиснути клавішу «Стоп».
 12. Скласти звіт і зробити висновки.

Контрольні питання

1. Які закони механіки використовуються при виведенні формули для швидкості кулі?
2. Дайте визначення імпульсу і моменту імпульсу тіла.
3. Сформулюйте другий закон динаміки обертального руху.
4. Дайте визначення моменту інерції матеріальної точки.
5. Напишіть формулу кінетичної енергії обертального руху.
6. Розкрийте фізичний сенс модуля кручення нитки.
7. Виведіть формулу для потенційної енергії пружно закрученої нитки.
8. Напишіть диференціальне рівняння гармонійних коливань крутильного маятника.

9. Проаналізуйте формулу для періоду коливань крутильного маятника.

10. Поясніть вираз другого закону Ньютона для обертального руху крутильного маятника.

Лабораторна робота №8

Дослідження прецесії гіроскопа і визначення кутової швидкості його обертання

Мета роботи – вивчення прецесії гіроскопа, визначення кутової швидкості його обертання.

Загальні положення

Гіроскоп – добре відцентроване тверде тіло, що дуже швидко обертається навколо своєї осі й може змінювати свій напрям у просторі. Основна властивість гіроскопа – здатність зберігати незмінним напрям осі обертання за відсутності моменту зовнішніх сил: через закон збереження моменту напрям і величина вектора \vec{L} залишаються незмінними. Якщо ж прикласти до гіроскопа зовнішні сили, його вісь почне відхилятися. Цей рух гіроскопа називається **прецесією**.

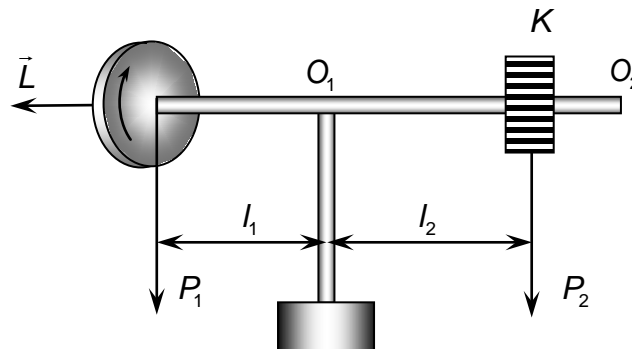


Рис. 8.1. Схема елементарного гіроскопа

Головною проблемою в теорії гіроскопа є встановлення залежностей між діючими силами і зміною положення осі гіроскопа. Найважливішу з цих залежностей виражає **гіроскопічний ефект**.

Слід навести елементарну теорію гіроскопа. Розгляд показує, що гіроскопічний ефект повністю відповідає рівнянню динаміки обертального руху твердого тіла. Саме за цим законом треба визначати зміну моменту імпульсу гіроскопа під дією зовнішнього моменту сил. Розглянемо гіроскоп, що складається з диска, який може обертатися навколо горизонтальної осі O_1O_2 (рис. 8.1), і противаги K .

Вісь гіроскопа O_1O_2 шарнірно закріплена в точці O_1 вертикальної підставки. Противагу K можна переміщувати вздовж осі.

Якщо противага K розташована таким чином, що точка O_1 є центром ваги, тобто:

$$P_1 l_1 = P_2 l_2,$$

де P_1 – вага диска гіроскопа;

P_2 – вага противаги (вагою стрижня нехтуємо),

то результативний момент сил, що діють на систему, дорівнює нулю ($M = 0$). Інакше система відхилилася б від положення рівноваги.

Хай диск обертається з кутовою швидкістю ω . У цьому випадку на основі другого закону динаміки для обертального руху одержимо:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad (8.1)$$

де $\vec{L} = J\vec{\omega}$ – момент кількості руху диска.

З рівняння (8.1) випливає, що в цьому випадку $\vec{L} = J\vec{\omega} = const$.

Оскільки момент інерції диска є величиною постійною, то кутова швидкість обертання диска також постійна. Кутова швидкість є величиною векторною, її напрям знаходиться за правилом буравчика: якщо обертання ручки буравчика співпадає з напрямом обертання диска, то напрям його поступальної ходи співпадає з напрямом вектора кутової швидкості.

Гіроскоп володіє постійним моментом кількості руху L , який співпадає за напрямом з кутовою швидкістю (рис. 8.2). Таким чином, за відсутності моменту зовнішніх сил гіроскоп зберігає положення своєї осі в просторі. Пересунемо противагу K на невелику відстань вправо. Центр ваги системи переміститься в точку O' . Рівновага порушиться, вісь гіроскопа нахилиться на кут φ . Другий закон динаміки для обертального руху в цьому випадку запишеться у вигляді:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}, \quad (8.2)$$

де \vec{M} – момент сили, обумовлений зсувом центра ваги.

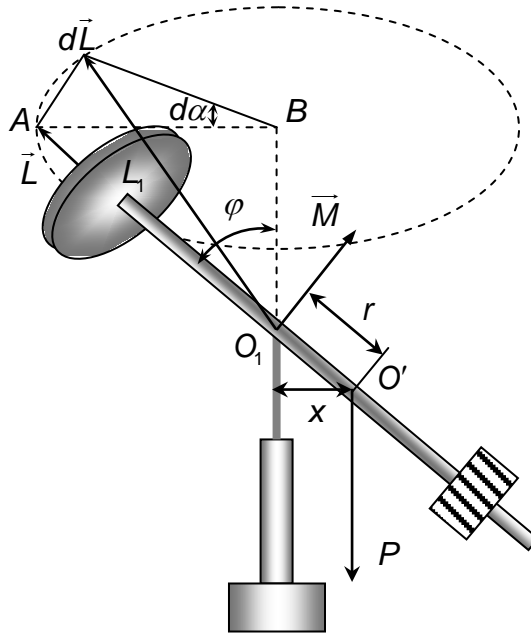


Рис. 8.2. Прецесія гіроскопа під дією моменту зовнішніх сил

Нагадаємо, що моментом сили \vec{F} щодо точки O_1 (або обертальним моментом цієї сили) називається вектор:

$$\vec{M} = \vec{F} \times \vec{r},$$

де \vec{r} – радіус-вектор, проведений з точки O_1 до точки застосування сили \vec{F} .

Напрямок \vec{M} знаходиться за правилами знаходження векторного добутку. У даному випадку: $F = P = P_1 + P_2$ (див. рис. 8.2).

Момент сили чисельно дорівнює $M = Fr \sin \varphi$ або:

$$M = (P_1 + P_2) r \sin \varphi. \quad (8.3)$$

Він прикладений до точки O_1 і спрямований перпендикулярно до вертикальної площини, що проходить через штангу гіроскопа (рис. 8.2).

З рівняння (8.2) випливає, що зміна моменту кількості руху за час dt співпадає за напрямом з вектором \vec{M} :

$$d\vec{L} = \vec{M} dt. \quad (8.4)$$

Результівний момент дорівнює:

$$\vec{L}_1 = \vec{L} + d\vec{L}.$$

Це означає, що вісь гіроскопа змінить своє положення в просторі, обернувшись за час dt на кут $d\alpha$. За наступний проміжок часу dt знову відбудеться зміна моменту кількості руху на величину $d\vec{L}$ і т. д. У результаті вісь гіроскопа безперервно обертатиметься з певною кутовою швидкістю Ω , описуючи в просторі конус. Такий рух називається прецесією. Величина:

$$\Omega = \frac{d\alpha}{dt} \quad (8.5)$$

називається кутовою швидкістю прецесії. Обчислимо її значення.

З формул (8.3) і (8.4) випливає, що:

$$dt = \frac{dL}{(P_1 + P_2)r \sin \varphi}. \quad (8.6)$$

Але $dL = ABd\alpha$. З $\triangle ABO_1$ виходить, що $AB = L \sin \varphi$, тоді:

$$dL = L \sin \varphi d\alpha. \quad (8.7)$$

З рівнянь (8.6) і (8.7) випливає, що:

$$dt = \frac{L d\alpha}{(P_1 + P_2)r}. \quad (8.8)$$

Підставляючи (8.8) в (8.5), одержимо:

$$\Omega = \frac{(P_1 + P_2)r}{L},$$

або

$$\Omega = \frac{(P_1 + P_2)r}{J\omega}. \quad (8.9)$$

З рівняння (8.9) виходить, що зі збільшенням кутової швидкості обертання гіроскопа ω кутова швидкість прецесії Ω зменшується. Якщо швидкість обертання диска постійна ($\omega = \text{const}$), то відношення $\frac{(P_1 + P_2)r}{\Omega}$ є величиною постійною. Завдання полягає у визначенні швидкості прецесії Ω і перевірці співвідношення:

$$\frac{(P_1 + P_2)r_1}{\Omega_1} = \frac{(P_1 + P_2)r_2}{\Omega_2} = \dots = \text{const}. \quad (8.10)$$

Гіроскопи знаходять широке застосування в техніці. Під гіроскопом в техніці звичайно розуміють симетричну дзигу, яка обертається таким чином, що її центр ваги залишається нерухомим, а її вісь обертання може займати будь-яке положення в просторі. Якщо такому гіроскопу пові-домити кутову швидкість навколо власної осі і ця вісь буде спочатку нерухомою, то надалі вона зберігатиме весь час своє положення в просторі. Тому такий гіроскоп можна використовувати як показчик незмінного напрямку при русі суден, літаків і т. д.

Одне з перших застосувань властивості гіроскопа знайшли в нарізній зброї. Гвинтовий наріз у стовбурі зброї повідомляє снаряду, що вилітає, швидке обертання навколо осі і перетворює його на гіроскоп з великим власним моментом імпульсу. Після вильоту зі ствола центр ваги снаряда рухається по параболі і дотична до траєкторії поступово опускається вниз. Опір повітря, який діє на снаряд, створює момент, що повинен був би перекинути снаряд. Тому якби снаряд не обертався навколо своєї осі, то напрям цієї осі міг би змінюватися найдовільнішим чином. У разі ж швидкого обертання навколо осі снаряд перетворюється на гіроскоп і зовнішній момент викликає лише прецесію осі снаряда навколо напрямку дотичної до траєкторії. У цьому відношенні снаряд подібний до дзиги і так само, як у разі дзиги, щоб прецесія була стійкою, власний момент імпульсу снаряда повинен перевищувати деяку критичну величину. Для цього гвинтовий наріз у стволі гармати повинен бути достатньо крутим. У разі настільних траєкторій, коли дотична до

траєкторії мало змінює свій напрям у просторі, момент імпульсу снаряда може бути достатньо великим. У разі ж навісних траєкторій вимога ускладнюється, оскільки вісь снаряда повинна бути близькою до напрямку дотичної і разом з нею змінювати свій напрям у просторі. Це можливо тільки у випадку, якщо момент імпульсу снаряда не дуже великий. Таким чином, для того, щоб вісь снаряда у всіх випадках залишалася близькою до напрямку дотичної до траєкторії, величина власного моменту імпульсу снаряда повинна міститися між певними досить вузькими межами.

Опис лабораторної установки

Принцип дії гіроскопа розглянемо на простому приладі. Гіроскоп складається з наступних основних частин (рис. 8.3): електромотора M з диском, штанги з поділками, протизваги P_2 і лімба D . Мотор поміщений усередині металевого кожуха, який скріплений зі штангою. Кожух і штанга можуть обертатися у вертикальній площині щодо осі, що проходить через точку O . Поворот у горизонтальній площині досягається завдяки обертанню вилки B . Кут повороту відлічується за лімбом D . Електромотор живиться змінним струмом, який підводиться за допомогою системи контактних кілець, не показаних на рис. 8.3. Точка O_1 – центр ваги системи, що складається з мотора, кожуха і штанги, O_2 – центр ваги протизваги P_2 .

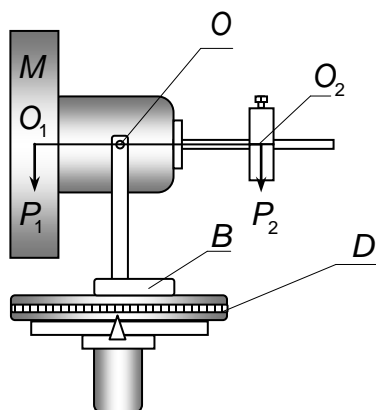


Рис. 8.3. Гіроскоп

Умова рівноваги може бути записана у вигляді:

$$P_1 l_1 = P_2 l_2, \quad (8.11)$$

де $l_1 = OO_1$ і $l_2 = OO_2$.

Пересунемо протизвагу вправо так, щоб відстань її від точки O дорівнювала l'_2 . Рівновага системи порушиться, центр ваги переміститься в точку, яка знаходиться від точки O на відстані r . Умова рівноваги запишеться так:

$$P_1(l_1 + r) = P_2(l'_2 - r),$$

звідки:

$$r = \frac{P_2 l'_2 - P_1 l_1}{P_1 + P_2}.$$

Або, беручи до уваги (8.11), одержимо:

$$r = \frac{P_2(l'_2 - l_2)}{P_1 + P_2}.$$

Підставляючи останній вираз в (8.9), маємо:

$$\Omega = \frac{P_2(l'_2 - l_2)}{J\omega} = \frac{P_2 \Delta l}{J\omega}. \quad (8.12)$$

Якщо $\omega = \text{const}$, то для різних положень протизваги:

$$\frac{\Delta l_1}{\Omega_1} = \frac{\Delta l_2}{\Omega_2} = \dots = \frac{\Delta l_i}{\Omega_i} = \frac{J\omega}{P_2} = \text{const}, \quad (8.13)$$

де Δl_i – зсув протизваги від положення рівноваги.

Для виконання лабораторної роботи використовується гіроскоп FPM-10, схема якого зображена на рис. 8.4. На підставці (1), яка дозволяє вирівнювати прилад, закріплена колонка (2). На ній знаходяться кронштейн (3) з фотоелектричним датчиком №1 (4) і зовнішня втулка обертального з'єднання (5).

Обертальний з'єднувач дозволяє гіроскопу обертатися навколо вертикальної осі і забезпечує живлення електричним струмом фотоелектричного датчика №2 (6) і електричного двигуна (7).

Електричний двигун змонтований на кронштейні (8) таким чином, що дозволяє необмежений оборот у вертикальній площині. На валу двигуна закріплений вантаж (9), захищений екраном (10). Важіль (11) має нанесену метричну шкалу. На важелі закріплений вантаж (12). За допомогою переміщення вантажу по важелю можна зрівноважити гіроскоп, переміщуючи центр мас системи поза упорами.

Оборот гіроскопа навколо вертикальної осі можна зчитати за допомогою покажчика (14) з диска (13), на який нанесена кутова шкала. Диск (13) має на колі отвори через кожні 5° , які підраховуються фотоелектричним датчиком №1 і передають у блок управління й вимірювань гіроскопа (15) інформацію про кут обороту гіроскопа.

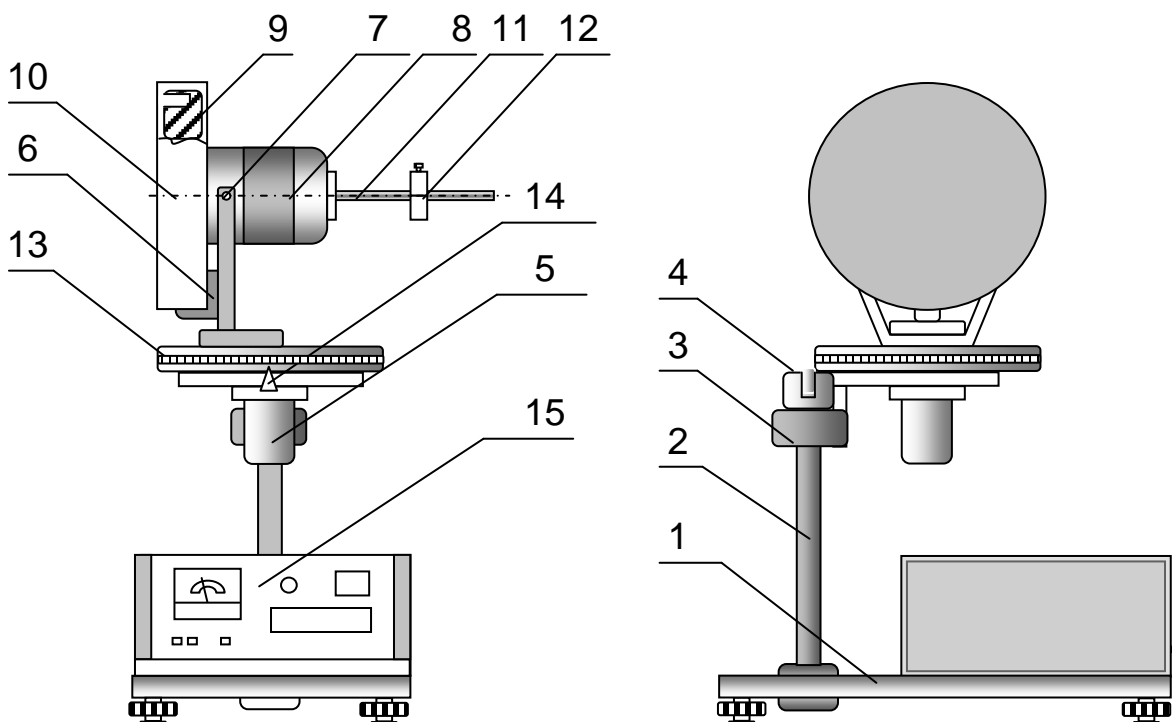


Рис. 8.4. Схема експериментального гіроскопа

Вантаж (9) має на колі нарізування, які, підраховувані фотоелектричним датчиком №2, передають в блок управління й вимірювань інформацію про швидкість обороту електричного двигуна.

Порядок виконання роботи

1. Пересуваючи противагу (12), досягти того, щоб система знаходилася в положенні рівноваги.
2. Ввімкнути електромотор і переконатися у відсутності прецесії.
3. Потім вимкнути електромотор і відсунути противагу на декілька поділок (2 – 3 см) від точки опори і визначити Δl_1 .
4. Ввімкнути мотор електродвигуна. Встановити оберти двигуна приблизно 2 500 – 3 000 об/хв.
5. Після обернення гіроскопа приблизно на 30° натиснути «Стоп».
6. Зчитати з показників значення кута α і часу t прецесії.
7. Обчислити кутову швидкість прецесії:

$$\Omega_1 = \frac{\alpha_1}{t}.$$

8. Повторити пп. 3 – 8, відсуваючи противагу на іншу кількість поділок (2 – 3 см) від точки опори.
9. Для відомої кутової швидкості прецесії Ω і заданого моменту зовнішньої сили M розрахувати кінетичний момент H гіроскопа за формулою: $H\Omega = M$. Маса диска гіроскопа – 0,6 кг.
10. Виміряти момент інерції ротора двигуна і диска. Для цього використати наступну формулу $H = J\omega$, де ω – кутова швидкість двигуна, J – момент інерції ротора двигуна і диска.
11. Зробити висновки, оформити звіт.

Контрольні питання

1. Що називається гіроскопом?
2. Сформулюйте другий закон динаміки для обертального руху.
3. Запишіть умову рівноваги системи.
4. Як визначити напрям моменту сили?
5. Виведіть вираз (8.10).
6. Чи зміниться напрям прецесії гіроскопа (див. рис. 8.3), якщо центр ваги знаходиться лівіше від точки опору?
7. Як зміниться швидкість прецесії зі зміною кутової швидкості обертання?
8. Наведіть приклади застосування гіроскопічного ефекту.

Модуль 2. Молекулярна фізика та термодинаміка

Лабораторна робота №9

Вивчення руху тіл у рідинах і газах. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя рідини методом Стокса

Мета роботи – вивчити поле швидкості, тиску й густини рідини, що рухається під дією заданих зовнішніх сил; виявити закономірності руху тіл, які мають форму кулі, в рідинах; виміряти коефіцієнт внутрішнього тертя (в'язкості) рідини.

Загальні положення

1. Стаціонарний потік рідин і газів. Вивченню законів руху рідин і газів присвячені розділи фізики, які називаються гідродинамікою й аеродинамікою. Закони руху для рідин справджуються й для газів, якщо їхня швидкість менша від швидкості звуку. У цьому випадку гази, як і рідини, можна вважати практично нестисливими. У зв'язку зі значною практичною важливістю питань про фізичну природу й закономірності сил, що діють на тіло, яке рухається в середовищі, вони вивчаються надзвичайно докладно й становлять головний предмет самостійної науки – гідроаеродинаміки.

У гідроаеродинаміці звичайно розглядають рух не окремої молекули рідини, а цілого елемента об'єму, що містить багато молекул. При цьому такий елементарний об'єм розглядається як частка рідини або її точка. Простір, заповнений частками рідини, що рухається, називається потоком. Швидкість кожної частки, як векторна величина, у потоці рідини в кожен момент часу має певну величину й напрямок. За аналогією, можна говорити про те, що тиск і густина рідини також залежить від часу й від координати точки в тривимірному просторі. Але при цьому варто враховувати, що тиск і густина рідини – скалярні величини.

Для повного опису стану рідини досить задати п'ять величин: три компоненти швидкості $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t)$, тиск $P = P(x, y, z, t)$ і густину $\rho = \rho(x, y, z, t)$.

При фіксованому часі $t = t_0$ векторна функція $\vec{V} = \vec{V}(x, y, z, t_0)$ описує так зване поле швидкостей, тобто дає миттєву картину швидкостей рідини в кожній точці простору. При цьому кожній точці простору рідини відповідає вектор швидкості тієї частки рідини, що проходить через неї в момент часу $t = t_0$.

Можливо, в дитинстві ви пускали по струмочку паперові кораблики. Це був перший досвід дослідження потоків води. У фізиці використовують подібний підхід – тільки замість корабликів у струмись воді «запускають» маленькі конуси. Їхній рух дозволяє досліджувати рух потоків рідини. Конуси наочно моделюють струмись воді, тому що є специфічним поданням вектора швидкості, що має в кожен момент часу певну величину й напрямок. Приклад потоку рідини (водяного струменя), що наочно демонструє, як у тривимірному просторі, заповненому частками рідини, відбувається її рух, а також які особливості має струмись, показаний на рис. 9.1, де конусами зображені вектори швидкості.

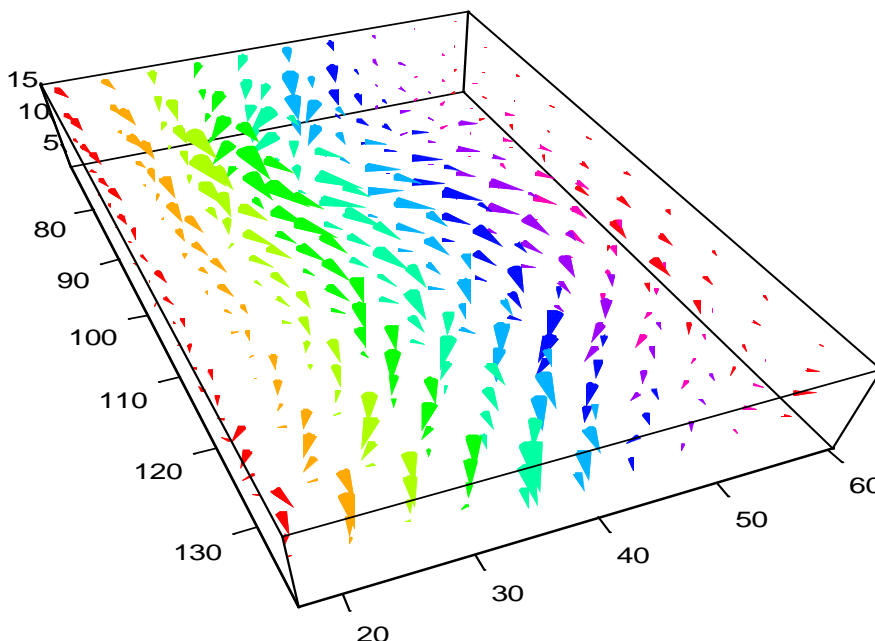


Рис. 9.1. Фрагмент потоку рідини (водяного струменя) у тривимірному просторі

Якщо поле швидкостей не змінюється із часом, то такий рух рідини називають сталим, або стаціонарним. У протилежному випадку рух рідини називається несталим (нестаціонарним). При стаціонарному русі не залежать від часу також поля тиску й густини рідини.

Лінія, дотична до якої в будь-якій точці простору в цей момент часу збігається з вектором швидкості рідини в цій точці, називається лінією струму. У випадку сталого руху лінії струму збігаються з траєкторіями часток рідини. Графічно поле швидкостей зображують за допомогою ліній струму. При цьому лінії струму проводять так, щоб дотичні до них у кожній точці збігалися з напрямком вектора швидкості, а їхня густина (тобто кількість ліній струму ΔN , що припадають на одиницю перпендикулярної до них площини ΔS , яку вони перетинають) була пропорційна до величини швидкості в даному місці. Приклад ліній струму для випадку, коли траєкторія часток збігається з лініями струму, показаний на рис. 9.2 для водяного струменя, що показаний на рис. 9.1. Слід зазначити, що у випадку стаціонарного потоку лінії струму зберігають свою конфігурацію протягом тривалого часу.

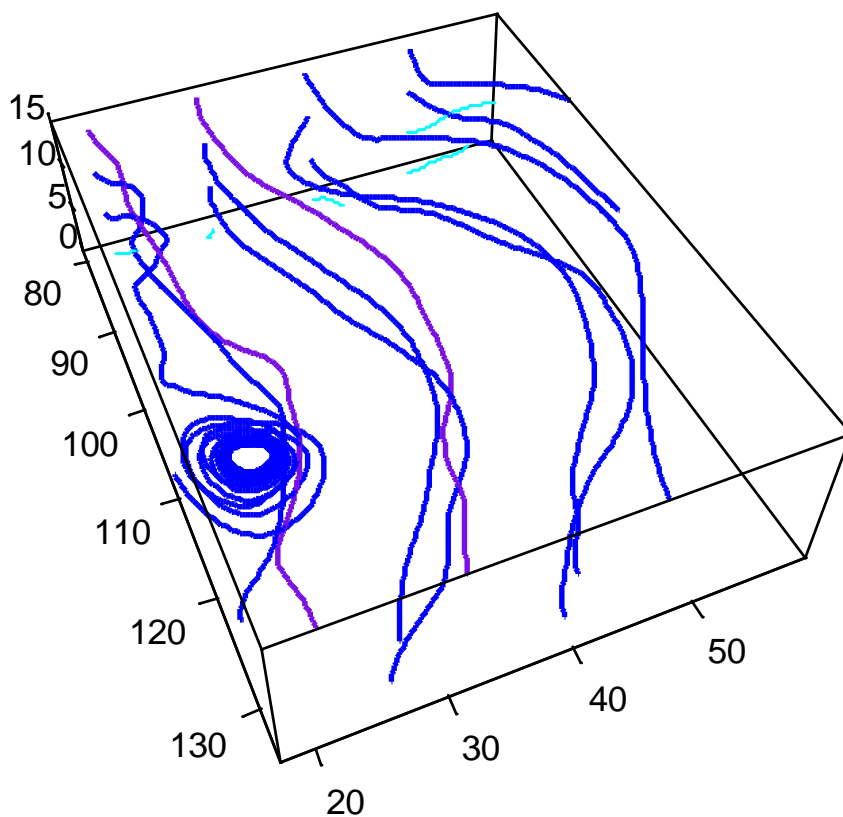


Рис. 9.2. Лінії струму потоку рідини у тривимірному просторі

Частина рідини, обмежена з усіх боків лініями струму (у найпростішому випадку поверхня якогось циліндра, утворена лініями струму), називається трубкою струму (або струмком). Вважається, що частки рідини при своєму русі не перетинають бічної поверхні (стінки) трубки струму. Якщо трубка струму має нескінченно малий поперечний переріз, то можна вважати, що швидкість рідини у всіх точках цієї трубки та ж сама й спрямована уздовж її осі. Весь простір, займаний рідиною (потік), можна розбити на трубки струму.

При стаціонарному плині рідини через будь-який поперечний переріз трубки за рівні проміжки часу $\Delta t_1 = \Delta t_2$ переносяться однакові об'єми рідини $V_1(\Delta t_1) = V_2(\Delta t_2)$. Також варто мати на увазі, що через властивість нестисливості рідини добуток її швидкості та поперечного перерізу, через який протікає рідина, є величиною постійною. Для двох довільних поперечних перерізів dS_1 і dS_2 елементарного струменя виконується умова $v_1 dS_1 = v_2 dS_2$. Це твердження називається теоремою про нерозривність струменя.

У будь-якому потоці рідини, наприклад, усередині труби, присутній тиск. Повний тиск складається зі статичного й динамічного тиску. Статичний тиск обумовлений потенційною енергією рідини, що перебуває під тиском. Динамічний тиск (тиск напору) обумовлений кінетичною енергією рідини, що рухається. У рідині в стані спокою динамічний тиск дорівнює нулю, а повний тиск дорівнює статичному. При збільшенні швидкості потоку рідини динамічна складова тиску зростає. У стаціонарному потоці сума статичного й динамічного тисків залишається постійною (закон Бернуллі). Ця сума відповідає гідростатичному тиску в рідині у стані спокою.

Варто мати на увазі, що якщо труба (трубопровід, по якому протікає потік) має в різних місцях неоднаковий перетин, то при постійному потоці рідини у звужених місцях труби статичний тиск менший, ніж у широких. Кількість рідини, що протікає за однакові проміжки часу, однакова для всіх перетинів труби, тому в широких частинах труби рідина тече повільніше, ніж у вузьких. Відповідно, при переході із широкої частини труби у вузьку швидкість рідини збільшується.

2. В'язкість рідин і газів. В ідеальної рідини відсутні так звані сили внутрішнього тертя, або в'язкість. У реальних рідин це не так. Через взаємодію молекул різних шарів реальної рідини в ній може виникати

внутрішнє тертя. На відміну від так званого зовнішнього тертя, що виникає в місці зіткнення двох різнорідних тіл, внутрішнє тертя має місце всередині однорідної рідини, що рухається, між шарами з різними швидкостями руху.

В'язкість, або внутрішнє тертя – властивість газоподібних, рідких і твердих тіл чинити опір їхньому плину, тобто переміщенню різних шарів один щодо одного. У результаті такого переміщення виникає сила, спрямована в бік, протилежний до швидкості руху.

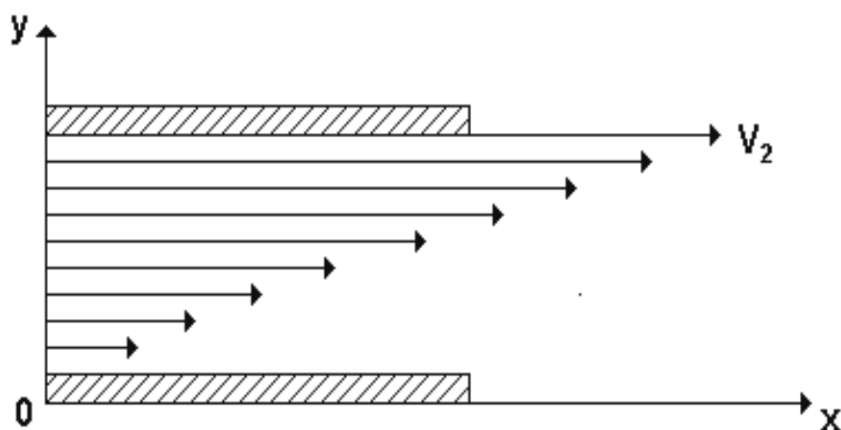


Рис. 9.3. Розподіл швидкостей у шарі рідини

Виникнення цієї сили можна пояснити в такий спосіб. Візьмемо дві розташовані одна над одною горизонтальні скляні знежирені пластинки із шаром рідини або газу між ними (рис. 9.3).

Верхній пластинці надамо руху зі швидкістю v_2 . Шар рідини, який прилягає безпосередньо до верхньої пластинки, завдяки силам молекулярної взаємодії, прилипає до неї й рухається теж зі швидкістю v_2 . Шар рідини, що прилипає до нижньої пластинки, залишається разом із нею в спокої $v_1 = 0$. Усю товщину рідини між пластинками можна розглядати як систему шарів, швидкості яких змінюються від нуля до максимального значення.

Проміжні шари рухаються так, що кожен вищий має більшу швидкість, ніж той, що під ним. Кожен верхній шар має щодо нижнього швидкість, спрямовану в бік руху пластинки, в той час як нижній шар відносно верхнього – швидкість протилежного напрямку.

Отже, з боку нижнього шару на верхній діє **сила тертя**, що сповільнює його рух, і навпаки, з боку верхнього на нижній – сила, яка прискорює його рух.

Сили, що виникають між шарами газу або рідини, що зазнають відносного переміщення, називають силами внутрішнього тертя, а саме явище виникнення таких сил – **в'язкістю**. Спрямуємо вісь ОХ уздовж руху рідини або газу, а вісь ОУ – перпендикулярно до нього (див. рис. 9.3). Уздовж осі ОУ швидкості шарів будуть збільшуватися в міру віддалення від нижньої пластини до верхнього. Сила внутрішнього тертя, як уперше показав Ньютон, пропорційна до площі шарів S і до градієнта швидкості (точніше кажучи, модуля швидкості) уздовж осі ОУ, тобто уздовж напрямку, перпендикулярного до руху шарів:

$$F = \eta S \frac{dV}{dy}, \quad (9.1)$$

де $\frac{dV}{dy}$ – градієнт швидкості, що характеризує швидкість зміни модуля швидкості в напрямку нормалі до поверхні тертьових шарів;

η – коефіцієнт пропорційності, який називається коефіцієнтом динамічної в'язкості.

Фізичний зміст коефіцієнта в'язкості зрозумілий із формули (9.1).

Якщо вважати, що градієнт швидкості $\frac{dV}{dy} = 1$ й $S = 1$, то $\eta = F$, тобто коефіцієнт динамічної в'язкості чисельно дорівнює силі внутрішнього тертя, що діє на одиницю площі зіткнення шарів при градієнті швидкості, що дорівнює одиниці. З рівняння (9.1) маємо, що коефіцієнт в'язкості в одиницях СІ вимірюється в паскаль-секундах ($1 \text{ Па}\cdot\text{с} = 1 \text{ Н}\cdot\text{с}/\text{м}^2$). На практиці використовують також частку одиниці – $1 \text{ мПа}\cdot\text{с}$, яка називається сантипуазом, і частку одиниці $0,1 \text{ Па}\cdot\text{с}$, яка називається пуазом (названу на честь Пуазеля).

Виникнення в'язкості у газів обумовлене перенесенням імпульсу спрямованого руху молекул газу із шару в шар під час їхнього теплового руху. Інший механізм внутрішнього тертя в рідині. Він визначається, головним чином, силами молекулярної взаємодії. Оскільки молекули рідини розташовані на близькій відстані одна від одної, то сили тяжіння між ними значні, вони й спричиняють більшу в'язкість рідини. Крім сил тяжіння, між молекулами існують і сили відштовхування, що перешкоджають зближенню молекул. Спільна дія цих сил приводить до

того, що для кожної молекули існує стан рівноваги, біля якого вона коливається протягом певного часу ($\sim 10^{-10}$ с), який називають часом осілості. Після закінчення цього часу молекула переміщується в новий стан рівноваги на відстані порядку 10^{-10} м.

Можливість зміни положення молекул приводить до їхньої рухливості, а отже, до плинності рідини φ , що є величиною, оберненою до в'язкості:

$$\varphi = \frac{1}{\eta}.$$

При підвищенні температури енергія коливального руху молекул зростає, зменшується час осілості й коефіцієнт в'язкості різко зменшується. Залежність η від T для рідини виражається законом:

$$\eta = A e^{\frac{\Delta W}{kT}}, \quad (9.2)$$

де A – коефіцієнт, що залежить від роду рідини;

k – постійна Больцмана;

T – абсолютна температура;

ΔW – енергія активації, тобто та енергія, яку необхідно передати молекулі, щоб вона могла перебороти зв'язок із сусідніми молекулами й переміститися в новий стан рівноваги.

З формули (9.2) видно, що зі зростанням температури рідини коефіцієнт в'язкості зменшується за експонентним законом. Залежність в'язкості води від температури показана на рис. 9.4.

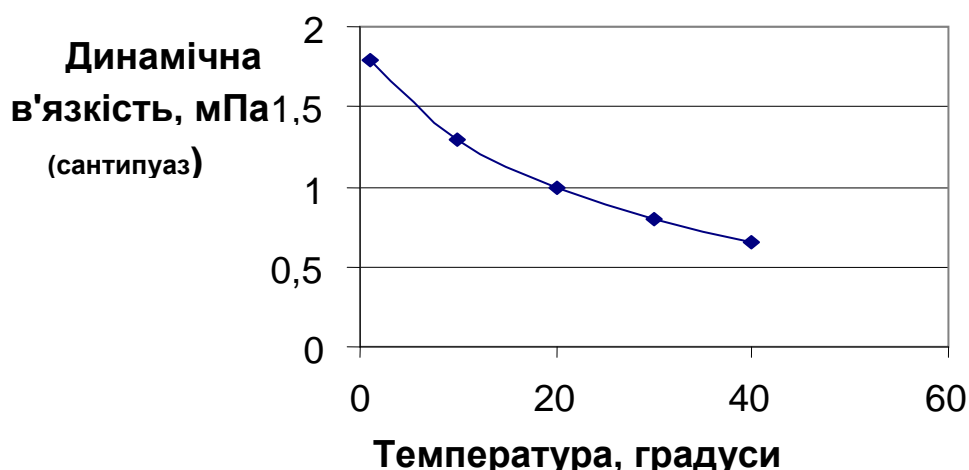


Рис. 9.4. **Графік залежності динамічної в'язкості води від температури**

Динамічна в'язкість може розглядатися і як «опір» руху рідини. Що вища в'язкість, тим рідині «важче» протікати через трубопроводи (труби) і тим «менша» її плинність по поверхні. Слід зауважити, що через те, що в'язкій рідині важче розтікатися по поверхні, вона утворить більш рівномірну плівку на поверхні.

Значення динамічної в'язкості для деяких рідин і фарб наведені в табл. 9.1.

Таблиця 9.1

Динамічна в'язкість для деяких рідин і фарб

Вид рідини	η , мПа·с	Фарба для друку	η , Па·с
Ацетон	0,322	Для офсетного друку	40 – 100
Бензин	0,649	Для глибокого друку	0,05 – 0,2
Вода	1,009	Для флексографічного друку	0,05 – 0,2
Масло технічне	30 – 5 000	Для високого друку	50 – 150
Гліцерин	830 – 1 480	Для струминного друку	$(1 – 20)10^{-3}$

За наявності в'язкості плин рідини може бути ламінарним (шаруватим) і вихровим.

Ламінарним (шаруватим) називається такий стаціонарний плин рідини, за якого частки рідини рухаються уздовж прямолінійних траєкторій з різною швидкістю, не перемішуючись. У цьому випадку, як зазначалося вище, сама рідина може бути подана у вигляді шарів, які ніби «ковзають» один щодо іншого. Через те що шари рідини рухаються з різними швидкостями, між ними виникають дотичні сили – сили внутрішнього тертя або сили в'язкості.

Використання введених понять дозволяє проаналізувати деякі параметри процесу ламінарного плину реальної рідини з певною динамічною в'язкістю по трубі із гладенькими стінками. У подібній ситуації вважають, що в трубі при ламінарному плинні окремі шари рідини

рухаються з різними швидкостями: безпосередньо біля стінки швидкість плинину рідини дорівнює нулю, а на осі труби – вона максимальна.

Для труби довжиною l , радіусом R і різницею тиску на кінцях труби ΔP Пуазейлем в 1842 році була отримана формула для обчислення об'єму рідини Q_v , що протікає по трубі за час τ :

$$Q_v = \frac{\pi \Delta P \tau R^4}{8 \eta l}. \quad (9.3)$$

Формула (9.3) свідчить про те, що об'єм рідини, яка протікає по трубі, можна збільшити, в першу чергу, за рахунок збільшення перетину (радіуса) труби. При постійному перетині труби швидкість витікання рідини $\frac{Q_v}{\tau} = \frac{\pi \Delta P R^4}{8 \eta l}$ прямо пропорційна різниці тисків на кінці труби й обернено пропорційна довжині труби й динамічній в'язкості. Нарешті, формула свідчить, що рідини з великою в'язкістю мають малу швидкість витікання із труби $\frac{Q_v}{\tau}$.

Як приклад застосування формули Пуазейля й висновків, що випливають з неї, можна розглянути пристрій струминного друку. Вищенаведена формула Пуазейля дозволяє осмислити й частково оцінити параметри використовуваних на сьогодні технічних рішень формування безперервного струменя або краплі при технології струминного друку (Ink Jet). Технічні пристрої струминного друку є відносно простою й компактною технікою перенесення інформації з оригіналу на звичайний папір, оскільки на основі сигналу зображення необхідно лише сформувати послідовність крапель фарби. Спрощене зображення «друкарської» голівки в процесі струминної (краплинної) технології друку показано на рис. 9.5.

Пристрій управління подачею фарби відповідно до необхідного зображення в певні моменти часу створює всередині «друкарської» голівки надлишковий тиск, у результаті якого тонкий струмок друкованої фарби викидається назовні й спрямовується на папір. Там вона швидко висихає. Управління переміщенням струмка фарби звичайно здійснюється електростатичним полем, що відхиляє струмінь фарби на

необхідний кут, подібно до того, як відхиляється промінь в електронно-променевих трубках.

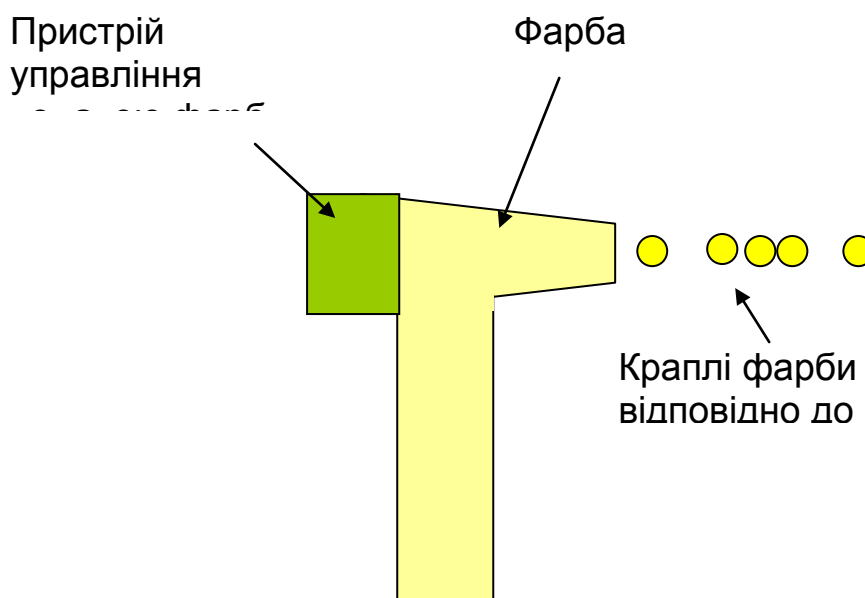


Рис. 9.5. Спрощена схема «друкарської» голівки у процесі струменевої (краплинної) технології друку

Для створення надлишкового тиску фарби в «друкарських» голівках за струменевої (краплинної) технології друку використовують або термоелементи, або п'єзоелементи. Формування «швидколетючих» до паперу крапель в «друкарських» голівках здійснюють спеціальним соплом (конусом) з діаметром у вузькій частині близько 10 мікрометрів. Якщо вважати фарбу нестисливою рідиною і враховувати ту обставину, що через будь-який перетин труби за рівні проміжки часу повинні протікати однакові об'єми рідини, то нескладно догадатися, що використання сопла з малим діаметром отвору на кінці дозволяє значно підвищити швидкість потоку фарби на виході «друкарської» голівки (через перетин з меншою площею рідина тече швидше).

Регулювання об'єму краплі фарби, що вилітає, можна здійснювати за допомогою зміни амплітуди керівного імпульсу, а також варіюванням частоти повторення імпульсів, що впливають на окреме сопло. Звичайно середній об'єм краплі становить величину близько 4 пл. За рахунок зміни кількості краски, що викидається, можна одержувати елементи зображення різної оптичної густини або, як кажуть, змінювати кількість

градацій зображення. У процесі застосування технології струменевого друку можна одержати близько 30 градацій зображення.

Для більшої продуктивності застосовується система «друкарських» голівок, розташованих у лінію. Під час реалізації способу струменевого друку кількість сопел в одній голівці може становити 1 024, що дозволяє одержати близько 300 елементів зображення на один дюйм (1 дюйм = 0,0254 м). Нині ведуться роботи з поліпшення конструкції сопла з метою одержання діаметра струменя фарби, значно меншого від діаметра сопла. Зокрема, створені «друкарські», соплові пристрої на основі спеціальних методів (наприклад, на основі ефекту Тейлора), що дозволяють одержувати матриці з роздільною здатністю 600 елементів зображення на один дюйм.

Виходячи зі сказаного, важливо уявляти собі наступне.

По-перше, фарби для струменевого друку повинні мати низьку в'язкість (коефіцієнт динамічної в'язкості від 1 до 30 мПа·с).

По-друге, такі фарби, щоб не засмічувати вузькі канали сопла «друкарської» голівки, повинні у своєму складі мати пігменти (барвники) і сторонні домішки дуже малого розміру.

По-третє, через малу в'язкість фарби результат друку значно залежить від виду паперу. При цьому може мати місце «розтікання» й сильне «всмоктування» фарби на пористих паперах або, навпаки, відштовхування на невсмоктувальних поверхнях. Папір через високий вміст рідини може деформуватися. При кольоровому друку краплі різних колірних тонів можуть зливатися.

Нарешті, варто мати на увазі, що від в'язкості фарби й від здатності матеріалу, на якому друкують, її вбирати, залежить процес висихання фарби. У найпростішому випадку використовують, як під час друкування газет, «холодне», як кажуть, фізичне сушіння, при якому відбувається просто всмоктування фарби папером (за рахунок капілярів у папері). Такий процес висихання фарби починається відразу ж після перенесення фарби на папір і закінчується із закінченням процесу проникнення фарби в папір (всмоктування). Швидкість всмоктування залежить від кількості пор на одиницю поверхні й від середнього діаметра пор. За дуже великої всмоктувальної здатності фарба може втрачати багато сполучної речовини, втрачати таким чином глянець і навіть обсіпатися. Швидкість всмоктування тим вища, чим менша в'язкість фарби. Тому застосовувані

в газетній пресі фарби не містять масел, що мають велику в'язкість. Низьку в'язкість фарби, що дозволяє легко заповнювати друковані форми й переходити на папір, у процесі глибокого друку одержують додаванням у фарбу летючого розчинника, що в разі потрапляння на папір випаровується в тепловому сушильному пристрої. Відомо також, що в'язкість фарби знижується при високих температурах. Із цієї причини при проведенні друку з використанням олійних фарб у процес сушіння спочатку за рахунок дії тепла (наприклад, за допомогою джерела інфрачервоного опромінювання) знижують в'язкість фарби й тим самим досягають її швидкого всмоктування в папір, а потім здійснюють її «тверднення». Дія тепла призводить до так званого хімічного сушіння, коли за рахунок хімічних процесів відбувається полімеризація фарби і її «тверднення».

3. Вимірювання коефіцієнта в'язкості рідини за методом

Стокса. В'язкість рідини має велике значення для практичних цілей. Наприклад, без знання в'язкості не можна розрахувати енергію, необхідну для перекачування рідини по трубах (нафти в нафтопроводах, води у водопроводах), розрахувати змащення машин. В'язкість розплавленого металу й шлаків урахується в металургійних процесах. Іноді вимірювання в'язкості дозволяє судити про готовність деяких продуктів виробництва і т. д. Отже, вимірювання в'язкості рідини належить до числа дуже важливих вимірювань. Сьогодні існує багато методів визначення в'язкості. У цій роботі використовується один із найбільш простих способів – метод Стокса. Він заснований на вимірюванні швидкості кульки, що падає в досліджуваній рідині (рис. 9.6).

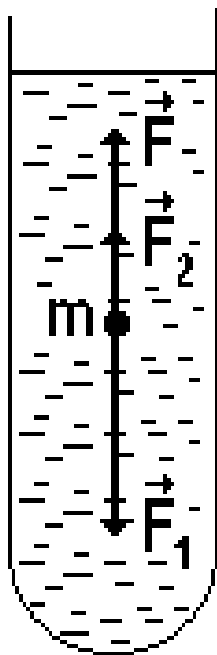


Рис. 9.6. Схеми методу Стокса

Кулька виготовлена з матеріалу, добре змочуваного рідиною, тому до його поверхні «прилипає» концентричний шар рідини, нерухомий щодо кульки. Між цим шаром, що рухається зі швидкістю кульки, та

іншою (нерухомою) рідиною виникає сила внутрішнього тертя, спрямована проти швидкості кульки.

Як показав Стокс, сила, що діє на кульку малого розміру, прямо пропорційна швидкості її падіння v , радіусу кульки r і залежить від динамічного коефіцієнта в'язкості η :

$$F = 6\pi r\eta v. \quad (9.4)$$

Крім того, на кульку, що рухається, діє ще дві сили: сила ваги $F_1 = mg = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho_1 g$, де $\frac{1}{6}\pi d^3$ – об'єм кульки, і виштовхувальна сила Архімеда $F_2 = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho_2 g$, спрямована нагору. В останніх виразах ρ_1 й ρ_2 – густина матеріалу кульки й рідини, відповідно.

На початку падіння швидкість кульки, а разом з нею й сила внутрішнього тертя, швидко зростають. Потім настає стан, коли рівнодійна всіх сил, що діють на кульку, буде дорівнювати нулю $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F} = 0$ й кулька буде падати рівномірно з постійною швидкістю v . Переходячи в останньому рівнянні від векторних величин до скалярних, одержуємо $F_1 = F_2 + F$ або:

$$\frac{1}{6}\pi d^3 \rho_1 g = \frac{1}{6}\pi d^3 \rho_2 g + 6\pi r\eta v. \quad (9.5)$$

Тоді:

$$\eta = \frac{d^2(\rho_1 - \rho_2)g}{18v}, \quad (9.6)$$

де d – діаметр кульки;

ρ_1 – густина матеріалу, з якого виготовлена кулька;

ρ_2 – густина рідини;

v – швидкість встановленого руху кульок у рідині;

g – прискорення вільного падіння.

Практично неможливо здійснити падіння кульки в безмежному середовищі, тому що рідина завжди перебуває в якійсь посудині, що

має стінки. Якщо кулька падає уздовж осі циліндричної посудини з радіусом R , то врахування наявності стінок приводить до наступного виразу для коефіцієнта в'язкості:

$$\eta = \frac{d^2(\rho_1 - \rho_2)g}{18\nu\left(1 + 1,2\frac{d}{R}\right)}. \quad (9.7)$$

Наявність таких меж для рідини, як дно посудини й верхня поверхня рідини, не враховується цією формулою. Вони також впливають на швидкість падіння, однак це помітно тільки поблизу меж; у середній частині посудини ними можна знехтувати.

Формула Стокса правильна тільки при повільному падінні кульки. Ця умова виконується лише для маленьких кульок, відносно яких рідину можна розглядати як безперервне середовище. У цьому випадку рух рідини має характер ламінарного руху, тому що шари рідини ніби ковзають один щодо одного.

Формула Стокса відіграє важливу роль у сучасній фізиці. За нею можна, наприклад, визначити швидкість осідання часток туману й диму, вона використовується в дослідках і розрахунках під час визначення заряду електрона, в процесі яких необхідно визначати радіус дуже малих крапель за швидкістю їхнього падіння. Визначаючи швидкість осідання часток, можна встановлювати розміри часток, з яких складається фарба. Така задача важлива для практики, особливо для пристроїв струменевого друку.

Складніше виглядає справа з розглядом фізичної картини обтікання великого тіла складної форми потоком великої швидкості. З опором середовища вже доводиться рахуватися, а спрощення, що пов'язані з відсутністю врахування гальмування струменя й виникнення тиску на поверхні, розбіжностей тисків у різних точках тіла, поблизу й за ним, неприпустимі. Взаємодія всіх сил істотно перебудовує потік, причому важливу роль відіграє сила в'язкості, навіть невелика.

Коли швидкість руху перевищить певне критичне значення, підвищений тиск на передній поверхні тіла (на яку набігає потік) не компенсується тиском за тілом (опір потоку, тобто сила, що діє на поміщене в потік тіло, складається з різниці тисків перед і за тілом, а також сили тертя на поверхні тіла), відбувається перебудова всього

потіку й рідина або газ за тілом починають рухатися турбулентно. При цьому поблизу й за тілом виникає хаотично змінний (як язички полум'я в багаття) рух рідини. Потік рідини, що відривається від поверхні обтічного тіла, розпадається на окремі вихори, що утворюються за тілом. Виникають вихори, а отже, й сили, які перешкоджають руху. Формула Стокса не враховує такого явища.

Опис лабораторної установки

Прилад (рис. 9.7) складається з вертикальної скляної трубочки 1, заповненої гліцерином. Зверху трубка закрита пробкою 2, в отвір якої вставлена тонка спрямована трубка 3. В останню опускають кульку, після чого вона потрапляє в гліцерин. Таке пристосування змушує кульку падати вздовж осі трубки. На трубіці 1 розташовані два кільця 4, які можна переміщувати уздовж трубки. Верхнє кільце необхідно встановити на кілька сантиметрів нижче від рівня рідини в трубіці.

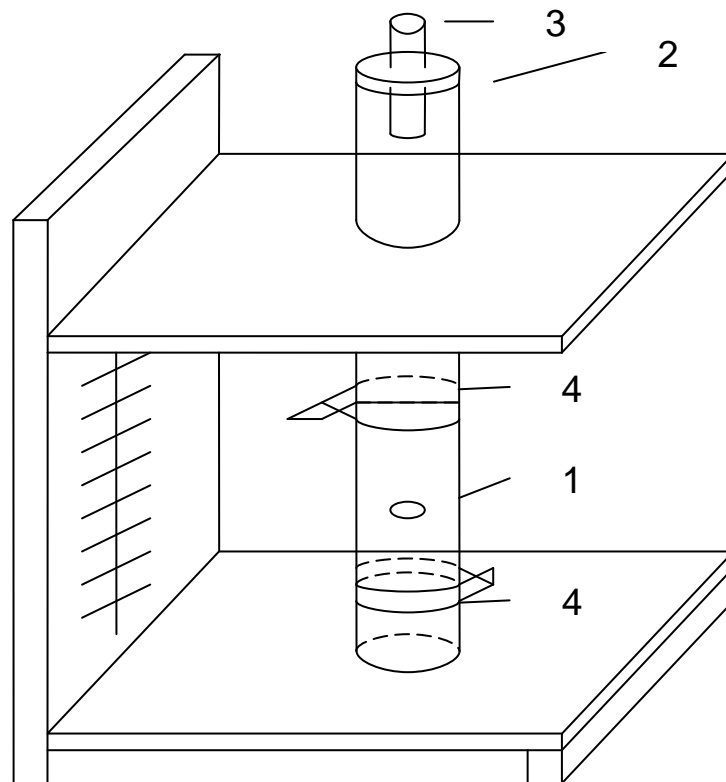


Рис. 9.7. Схема експериментального приладу

Установлюючи між кільцями відстань $L = 40 - 45$ см, секундоміром вимірюють час t , за який кулька проходить цей шлях. Швидкість

падіння кульки $v = \frac{L}{t}$ Секундомір необхідно запускати в той момент, коли кулька, опускаючись у рідині вниз, проходить повз верхнє кільце. Зупиняють секундомір у момент проходження кульки повз нижнє кільце. Якщо до кульки прилип пухирець повітря, результат досвіду враховувати не слід.

Обчисливши швидкість падіння кульки й знаючи інші величини, що входять у вираз (9.7), можна визначити коефіцієнт в'язкості гліцерину.

Значення величин, що входять у вираз (9.7) наступні:

$$g = 9,81 \text{ м/с}^2; R = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ м}; \rho_1 = 11 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3; \rho_2 = 1,26 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$$

Оскільки в'язкість рідин сильно залежить від температури, то необхідно відзначати температуру в приміщенні під час досліду.

Порядок виконання роботи

1. Вибрати 5 – 6 кульок.
2. Мікрометром виміряти їхні діаметри.
3. Для кожної кульки визначити швидкість падіння в гліцерині, для чого заміряти час польоту кульки між кільцями.
4. Обчислити для кожної кульки за формулою (9.7) коефіцієнт в'язкості; потім одержати його середнє арифметичне значення.
5. Порівняти отриманий результат з табличним значенням коефіцієнта в'язкості гліцерину.

Контрольні питання

1. Що називається в'язкістю?
2. У чому полягають розбіжності між механізмом в'язкості в рідині й газі?
3. Який фізичний зміст коефіцієнта в'язкості?
4. У яких одиницях вимірюється коефіцієнт в'язкості?
5. Як змінюється з температурою коефіцієнт в'язкості?
6. У чому сутність методу Стокса?
7. Як виводиться розрахункова формула для обчислення коефіцієнта в'язкості за методом Стокса?
8. Як визначити швидкість падіння кульки?

9. Які сили діють на кульку під час його руху в рідині?
10. Як визначається щільність рідини й матеріалу кульки?
11. Дайте визначення градієнта швидкості.
12. Сформулюйте закон Архімеда.
13. За яких умов справджується формула Стокса?
14. Виведіть формулу Пуазейля. Поясніть її.

Лабораторна робота №10

Вивчення властивостей та структури рідини і визначення коефіцієнта поверхневого натягу рідини

Мета роботи:

1. Експериментально визначити коефіцієнт поверхневого натягу води методами відриву кільця.
2. Вивчити взаємодію між молекулами рідини й твердого тіла і на цій основі спостерігати капілярні явища, а також змочування (незмочування).

Загальні положення

1. Характер теплового руху молекул у рідинах. Характер руху молекул у рідинах істотно відрізняється від руху молекул як у газах, так і в твердих тілах. У газах середня відстань між сусідніми молекулами значно більша від їх діаметра. Тому при тепловому русі молекули рухаються хаотично. У твердих кристалічних тілах молекули розташовані в правильному періодичному порядку і складають кристалічну решітку. Цей порядок зберігається на далекі відстані (мільйони і мільярди молекулярних відстаней). Такий порядок називається «далеким порядком». Оскільки густина твердих тіл значно більша від густини газів, молекули в кристалах прилягають одна до одної. Тепловий рух молекул зводиться до їх коливань біля положення рівноваги. У рідинах середня відстань між сусідніми молекулами дещо більша, ніж у кристалів. Тому молекули рідини можуть відходити від своїх правильних положень, порушуючи ідеальний порядок, властивий кристалам. Тепловий рух молекул у рідинах зводиться до наступного.

Молекули значну частину часу коливаються біля своїх положень рівноваги. Амплітуди коливань різних молекул різні. Унаслідок взаємодії молекул під час теплового руху енергія деяких із них може зрости. Оскільки збільшення енергії відповідає збільшенню амплітуди коливань, то амплітуда коливань цих молекул може зрости настільки, що вони за наявності вільного місця перескакують в інші положення рівноваги і починають коливатися біля них. Зі збільшенням температури амплітуда коливань і частота таких перескоків зростають. Оскільки відстані між

сусідніми молекулами в рідині все-таки малі, то в рідині зберігається так званий «*близький порядок*», тобто порядок в розташуванні найближчих сусідів якої-небудь молекули. Цей порядок розмивається в міру віддалення від даної молекули.

2. Поверхневий натяг. З точки зору молекулярної теорії потенційна енергія макроскопічних тіл складається з енергії взаємодії їх молекул (силами тяжіння нехтуємо). Сили міжмолекулярного зчеплення швидко зменшуються з відстанню, тобто їх дія практично припиняється на відстані близько 10^{-7} см. Потенційна енергія кожної молекули тому залежить тільки від її взаємодії з найближчими сусідами.

Молекули, з яких складається тіло, можна поділити на два класи: «внутрішні» молекули, тобто молекули, що мають повний набір сусідів, та молекули, які знаходяться «на поверхні», тобто молекули з неповним набором сусідів.

Молекули, розташовані в поверхневому шарі рідини, знаходяться в інших умовах порівняно з молекулами всередині рідини. Кожна з внутрішніх молекул оточена з усіх боків іншими молекулами і зазнає однакового тяжіння на всіх напрямках. Молекули, розташовані поблизу поверхні, зазнають з боку своїх сусідів тяжіння, спрямованого всередину і в сторони (рис. Б.1), але не зазнають зрівноважувального тяжіння з боку прилеглих шарів газоподібної фази, що містять в собі значно меншу кількість молекул. У результаті на поверхневу молекулу діє сила, яка спрямована всередину рідини перпендикулярно до її поверхні.

Під дією цієї сили молекули занурюються в рідину. Унаслідок теплового руху невелика частина молекул знову виходить на поверхню. Втягування молекул всередину відбувається з більшою швидкістю, ніж рух молекул до поверхні. Кількість молекул у поверхневому шарі безперервно зменшується. Поверхня рідини скорочуватиметься доти, поки не настане динамічна рівновага, тобто поки кількість молекул, що йдуть з поверхневого шару і що повертаються в нього за один і той же час, не буде однаковою. Таким чином, за відсутності зовнішніх сил поверхня рідини набуває найменшого можливого значення при даному об'ємі.

Як відомо, зі всіх тіл заданого об'єму найменшу поверхню має куля, тому рідина під дією тільки внутрішніх сил набуває форми кулі. Наявність зовнішніх сил приводить до зміни форми рідини. Для збільшення поверхні необхідно виконати роботу, яка витрачається на

виведення молекул з глибини на поверхню. Очевидно, для зміни поверхні рідини на величину ΔS потрібно виконати роботу:

$$\Delta A = \alpha n \Delta S, \quad (10.1)$$

де α – робота, яка необхідна для виведення однієї молекули на поверхню;
 n – кількість молекул в 1 м^2 поверхневого шару.

Величина $\alpha n = \sigma$ називається коефіцієнтом поверхневого натягу:

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}. \quad (10.2)$$

Коефіцієнт поверхневого натягу σ чисельно дорівнює роботі, яку потрібно виконати для збільшення поверхні рідини на одиницю площі.

Визначимо силу поверхневого натягу. Розглянемо дротяний каркас,

одна зі сторін якого MN може вільно переміщуватися (рис. 10.1). Якщо помістити цей каркас у мильний розчин, то на ньому утвориться мильна плівка, що є тонким шаром рідини з двома вільними поверхнями. Якщо відпустити рухому сторону, то поверхня плівки скоротиться. Сили, що виникають при скороченні поверхні рідини, називаються силами поверхневого натягу. Робота, яка витрачається проти сил поверхневого натягу при переміщенні рухомої сторони на величину Δh , дорівнює:

$$\Delta A = F\Delta h. \quad (10.3)$$

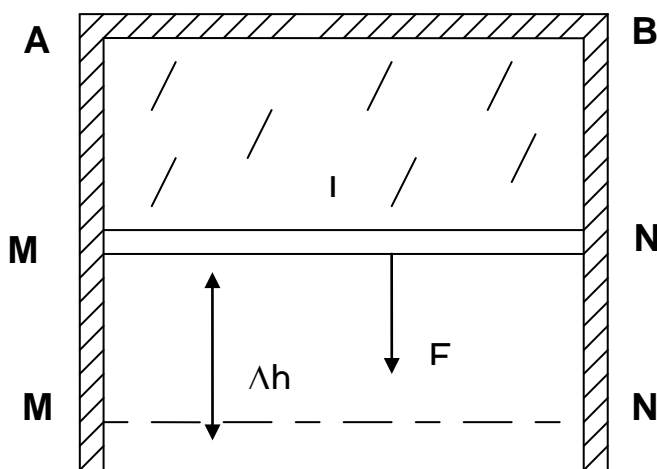


Рис. 10.1. Дротяний каркас, одна зі сторін якого MN вільно переміщується

з іншого боку:

$$\Delta A = \sigma\Delta S = \sigma 2l\Delta h, \quad (10.4)$$

де $\Delta S = 2l\Delta h$ – зміна поверхні плівки з обох боків.

Порівнюючи формули (10.3) і (10.4), одержимо $F = 2\sigma l$, звідки:

$$\sigma = \frac{F}{2l} = \frac{F/2}{l}, \quad (10.5)$$

де $F/2$ – сила, що діє з одного боку плівки.

Таким чином, коефіцієнт поверхневого натягу чисельно дорівнює силі, що діє на одиницю довжини лінії, яка є межею поверхні рідини. Ця сила спрямована перпендикулярно до будь-якого елемента довжини,

що розмежовує поверхню рідини, і дотичний до її поверхні. У системі СІ коефіцієнт поверхневого натягу вимірюється в н/м.

Визначення поверхневого натягу методом відриву кільця

Опис лабораторної установки та методики експерименту

Поверхневий натяг можна визначати шляхом вимірювання сили, яку потрібно прикласти перпендикулярно до поверхні рідини для відриву різних твердих тіл від цієї поверхні. Оскільки відривне тіло змочується рідиною, то разом з ним піднімається кількість рідини, тобто вільна поверхня рідини збільшуватиметься. Унаслідок прагнення цієї поверхні скоротитися виникає сила поверхневого натягу. Якщо сила, що діє на тіло, рівна за величиною силі поверхневого натягу, то тіло відірветься.

Найпростішим методом визначення коефіцієнта поверхневого натягу є метод відриву кільця. Суть методу полягає в наступному.

Розглянемо дротяне кільце із зовнішнім діаметром D і товщиною d (рис. 10.2). Кільце підвішене на спіральній пружині і занурене у випробовувану рідину так, що площина кільця набуде горизонтального положення. Верхній кінець пружини нерухомо закріплений на штативі з міліметровою шкалою. До нижнього кінця пружини прикріплена чаша 1 з покажчиком 2, за допомогою якого можна відлічити положення чаші щодо шкали. Під час піднімання кільця над поверхнею рідини між кільцем і поверхнею води утворюється плівка. Зовнішня поверхня цієї плівки тягне кільце вниз із силою $\sigma\pi D$. Внутрішня поверхня плівки також тягне вниз із силою $\sigma\pi(D - 2d)$.

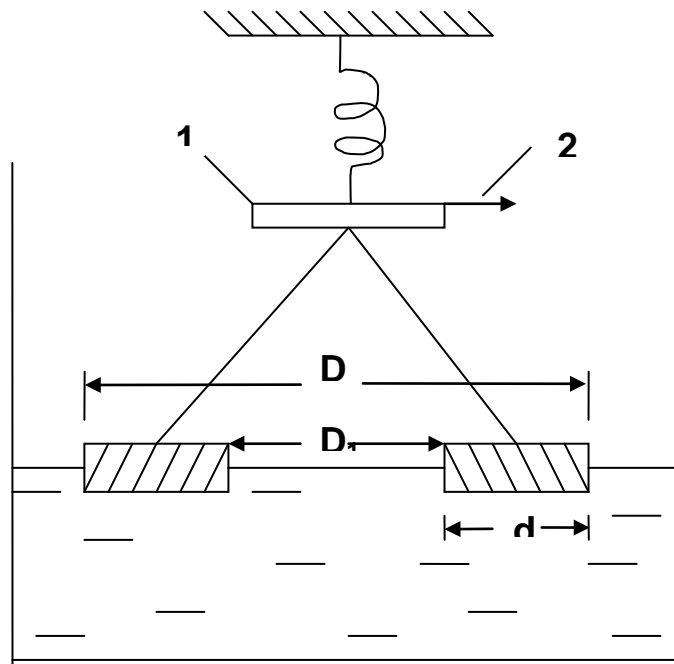


Рис. 10.2. Схема експерименту

Для відриву кільця від рідини потрібно прикласти певну силу F . Ця сила необхідна для розриву плівки, що стикається із зовнішньою і внутрішньою межами кільця:

$$F = \sigma\pi(D - 2d) + \sigma\pi D = 2\pi\sigma(D - d), \quad (10.6)$$

звідки:

$$\sigma = \frac{F}{2\pi(D - d)}. \quad (10.7)$$

Додавання до води незначної кількості деяких органічних речовин (мила, спиртів, жирних кислот) викликає значне зменшення поверхневого натягу одержаної суміші порівняно з водою. Такі речовини називаються *поверхнево активними*. Зниження коефіцієнта поверхневого натягу σ в розчинах *поверхнево активних* речовин супроводжується підвищенням їх концентрації в поверхневому шарі розчину. Це пов'язано з тим, що в поверхневому шарі знаходяться як молекули розчинника, так і молекули розчиненої речовини. У загальному випадку робота, що витрачається на виведення молекул з поверхневого шару розчиненої речовини і розчинника, неоднакова. Тому поверхневий натяг розчинів

залежить від їх концентрації. Значення коефіцієнта поверхневого натягу розчинів займає проміжне положення між коефіцієнтами поверхневого натягу розчиненої речовини і розчинника. Якщо коефіцієнт поверхневого натягу розчинника σ_1 менший, ніж речовини σ_2 , що розчиняються, то $\sigma_1 < \sigma < \sigma_2$. Якщо $\sigma_2 < \sigma_1$, то $\sigma_2 < \sigma < \sigma_1$.

Підвищення концентрації розчиненої речовини в поверхневому шарі розчину називається адсорбцією.

Порядок виконання роботи

1. Виміряти штангенциркулем зовнішній і внутрішній діаметри кільця.

2. Проградуювати шкалу пружинних вагів в одиницях сили.

Для цього потрібно виконати наступне. Як відомо, за законом Гука, сила, яка необхідна для розтягування пружини, пропорційна до її видовження: $F = k\Delta l$, де Δl – видовження пружини, k – коефіцієнт пружності. Для визначення коефіцієнта пружності пружини необхідно побудувати графік залежності видовження пружини від навантаження. Для цього спочатку треба визначити положення покажчика 2 без навантаження. Потім, поступово збільшуючи навантаження на чашку 1 (0,5 г, 1 г, 1,5 г, 2 г), необхідно записувати положення покажчика 2 на шкалі, тобто визначити відповідне розтягування пружини. Далі слід заповнити табл. 10.1. За одержаними даними побудувати графік залежності видовження пружини від навантаження. По осі абсцис відкладати видовження, а по осі ординат – навантаження. Оскільки графік є прямою, то відношення $\frac{F}{\Delta l}$ дорівнює $\operatorname{tg}\varphi$ і дає величину k .

3. Визначити силу, яка необхідна для відриву кільця від поверхні води. Для цього підняти посудину з водою до зіткнення води з кільцем, заздалегідь визначивши положення покажчика 2. Поступово опускати посудину стежачи за положенням покажчика. Відзначити ту поділку шкали, навпроти якої знаходиться покажчик у момент відриву кільця від поверхні води. Треба виконати ці вимірювання 5 разів і отримати середні значення величин. Знаючи видовження пружини, яке викликане силою поверхневого натягу, визначити за графіком силу відриву кільця. Можна також отримати значення сили, помноживши одержане видовження пружини на величину k .

**Результати вимірювань залежності видовження
пружини від навантаження**

Навантаження	Сила	Показники шкали	Видовження пружини	
			см	м
г	Н	см	см	м
0				
0,5				
1				
1,5				
2				

4. За формулою (10.7) обчислити величину σ .
5. Визначити відносну похибку вимірювання за формулою:

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \frac{\Delta L_1}{L_1} + \frac{\Delta D}{D+d} + \frac{\Delta d}{D+d}. \quad (10.8)$$

де L_1 – довжина пружини при відриві кільця.

Які причини цієї похибки?

6. Дослідити вплив домішок на поверхневий натяг води. Експеримент слід виконувати в наступному порядку.

Однією з речовин, що особливо сильно впливають на поверхневий натяг, є мило. Вам видано три розчини мила у воді. Перший розчин одержаний шляхом розчинення 1 мл рідкого мила в 1 л води. Другий – шляхом розчинення 1 мл одержаного розчину в 1 л води. Третій – при додаванні в 1 л води 1 мл другого розчину. Оцініть концентрацію мила у всіх трьох розчинах.

У посудину з водою додати 1 мл найслабкішого розчину і виміряти поверхневий натяг одержаної рідини (виконати пп. 3 і 4). Потім додати туди 1 мл другого, а потім і першого розчину. Виміряти щоразу силу поверхневого натягу, тобто виконати пп. 3 і 4.

Поясніть отримані результати.

Визначення поверхневого натягу методом відліку крапель

Опис лабораторної установки та методики експерименту

У разі повільного витікання рідини з вертикальної трубки у її нижньому кінці утворюються краплі, які, досягаючи деякої ваги P , постійної для однієї й тієї ж рідини, і температури, відриваються і падають.

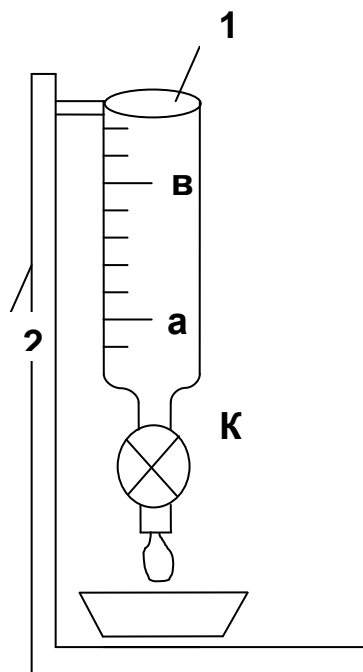
В останню мить перед відривом крапля має форму, подібну до тієї, що зображена на рис. 10.3, і утримується натягом уздовж периметра звуження. Позначаючи діаметр звуження через $2r$, одержимо:

$$P = 2\pi r\sigma,$$

звідки:

$$\sigma = \frac{P}{2\pi r}. \quad (10.9)$$

Суть методу полягає в наступному. Скляна трубка 1 має у своїй нижній частині капіляр, через який протікає вода, утворюючи краплі на його кінці. Трубка закріплена в штативі 2. Вода поступово капає доти, поки не витече певний об'єм V , який знаходиться між двома мітками «а» і «в». Якщо позначити через ρ густину води, n – кількість крапель в об'ємі V ($V = h\pi R^2$, де R – внутрішній радіус трубки, h – відстань між мітками «а» і «в») і m – масу однієї краплі, то одержимо:



$$nmg = \rho Vg = n2\pi rd, \quad (10.10)$$

Рис. 10.3. Схема експерименту

звідки:

$$\sigma = \frac{\rho Vg}{2\pi rn}, \quad (10.11)$$

де радіус капіляра $r = 7,5 \times 10^{-4}$ м.

Таким чином, у цьому методі потрібно підрахувати кількість крапель води n за час опускання рівня води в трубці 1 на відстань між мітками «а» і «в». Використовуючи формулу (10.11), можна обчислити значення коефіцієнта поверхневого натягу води.

Контрольні питання

1. Опишіть характер теплового руху молекул у рідинах.
2. Поясніть, що означає «близький порядок».
3. Чому за відсутності зовнішніх сил крапля рідини набуває форми кулі?
4. На що витрачається робота при збільшенні поверхні рідини?
5. Чому робота зі збільшення поверхні пропорційна зміні поверхні?
6. Який фізичний сенс має величина $F/2$ у формулі (10.5)?
7. Що називається коефіцієнтом поверхневого натягу? У яких одиницях він вимірюється?
8. Чому коефіцієнт поверхневого натягу залежить від концентрації розчину?
9. Які ще методи визначення коефіцієнта поверхневого натягу ви знаєте?
10. Назвіть причини виникнення і напрям лапласівського тиску.
11. У чому полягає явище капілярності?
12. Чому меніск рідини в одних випадках увігнутий, а в інших – опуклий?
13. Що називається крайовим кутом? Яка його величина для повністю змочуваних поверхонь, для незмочуваних поверхонь?
14. Опишіть роль капілярних явищ у природі та техніці.

Лабораторна робота №11

Визначення відношення теплоємностей газу c_p/c_v методом стоячих звукових хвиль

Мета роботи – визначити відношення c_p/c_v шляхом вимірювання довжини стоячої звукової хвилі; вивчити особливості поширення поздовжніх хвиль у пружному середовищі і явище акустичного резонансу.

Загальні положення

1. Теплоємність газів. Стан газу може бути охарактеризований трьома величинами – параметрами стану: тиском p , об'ємом V і температурою T . Рівняння, що зв'язує ці величини, називається рівнянням стану речовини. Рівнянням стану ідеального газу є рівняння Менделєєва –Клапейрона, яке для одного моля газу має вигляд:

$$pV = RT, \quad (11.1)$$

де R – універсальна газова постійна.

Величина теплоємності газів залежить від умов нагрівання. З'ясуємо цю залежність, скориставшись рівнянням стану (11.1) і першим законом термодинаміки, який можна сформулювати таким чином:

кількість теплоти dQ , передане системі, витрачається на збільшення її внутрішньої енергії dU і на роботу dA , що здійснюється системою проти зовнішніх сил:

$$dQ = dU + dA. \quad (11.2)$$

За визначенням, теплоємність є:

$$c = \frac{dQ}{dT} = \frac{dU}{dT} + \frac{dA}{dT}. \quad (11.3)$$

З рівняння (11.3) видно, що теплоємність може мати різні значення залежно від способів нагрівання газу, оскільки одному й тому ж значенню

dT можуть відповідати різні значення dU і dA . Елементарна робота dA дорівнює: $dA = pdV$.

Розглянемо **основні процеси**, що відбуваються в ідеальному газі при зміні температури, коли маса газу залишається незмінною і дорівнює одному молю. Кількість теплоти, необхідної для нагрівання одного моля газу на 1°C , визначається молярною теплоємністю.

Ізохоричний процес. Процес називається ізохоричним, якщо об'єм тіла при зміні температури залишається постійним, тобто $V = \text{const}$. У цьому випадку: $dV = 0$. Отже, і $dA = 0$, тобто при цьому вся теплота, що підводиться до газу, йде на збільшення його внутрішньої енергії. Тоді з рівняння (11.3) випливає, що молярна теплоємність газу при постійному об'ємі дорівнює:

$$c_v = \frac{dU}{dT}. \quad (11.4)$$

Ізобаричний процес. Процес, що здійснюється при постійному тиску ($p = \text{const}$), називається ізобаричним. Для цього випадку формула (11.3) перепишеться у вигляді:

$$c_p = \frac{dU}{dT} + p \frac{dV}{dT} \quad (11.5)$$

З рівняння газового стану (11.1) одержуємо:

$$pdV + Vdp = RDT \quad (11.6)$$

Але $p = \text{const}$ і $dp = 0$. Отже, $pdV = RdT$. Підставляючи цей вираз в рівняння (11.5) і замінюючи dU через $c_v dT$, одержимо остаточно:

$$c_p = c_v + R. \quad (11.7)$$

Ізотермічний процес – процес, що відбувається при постійній температурі ($T = \text{const}$). У цьому випадку $dT = 0$ і $dQ = dA$, тобто внутрішня енергія газу залишається постійною і все тепло, що підводиться, витрачається на роботу.

Адіабатичний процес – процес, що відбувається без теплообміну з навколишнім середовищем. Перший закон термодинаміки матиме вигляд ($dQ = 0, dU + dA = 0$):

$$dA = -dU = -c_v dT, \quad (11.8)$$

тобто під час адіабатичного процесу розширення або стиснення робота здійснюється газом тільки за рахунок зміни запасу внутрішньої енергії.

Виведемо рівняння адіабатичного процесу (рівняння Пуассона). $dA = pdV$, тоді з (11.8) випливає:

$$pdV = -c_v dT. \quad (11.9)$$

Розділивши рівняння (11.6) на (11.9) і враховуючи (11.7), одержимо:

$$1 + \frac{V}{p} \frac{dp}{dV} = -\frac{c_p - c_v}{c_v}, \quad \text{або} \quad \frac{dp}{p} = -\gamma \frac{dV}{V},$$

$$\text{де } \gamma = \frac{c_p}{c_v}.$$

Інтегруючи і потенціюючи, одержимо рівняння Пуассона:

$$pV^\gamma = \text{const}. \quad (11.10)$$

Відношення питомих теплоємностей при постійному тиску і при постійному об'ємі $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ відіграє в термодинаміці вельми важливу роль.

Величину $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$ можна визначити різними методами. У даній роботі показник адіабати визначається методом вимірювання швидкості звуку.

2. Швидкість поширення звукових хвиль. Звукові хвилі є поздовжніми хвилями стиснення і розтягування. Отже, швидкість поширення звукової біжучої хвилі залежить від пружності середовища. Розглянемо поширення хвилі в пружному стрижні. Хай на поперечний

перетин стрижня S діє деформаційна сила F (рис. 11.1). За час t під дією цієї сили лівий кінець стрижня зміститься на величину l , а хвиля стиснення пройшла за цей час відстань l . Тоді швидкість руху частинки стрижня дорівнюватиме

швидкість розповсюдження хвилі:

$$v = \frac{l}{\Delta t}.$$

$$v_v = \frac{\Delta l}{\Delta t},$$

$$(11.11)$$

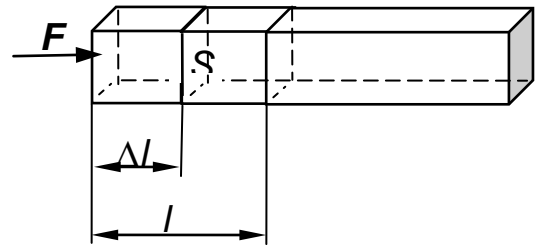


Рис. 11.1. Стрижень

Оскільки за час Δt деформувалася тільки частина стрижня, що дорівнює l , то, застосовуючи до цієї частини закон Гука, одержимо:

$$F = ES \frac{\Delta l}{l}, \quad (11.12)$$

де E – модуль Юнга.

Імпульс деформаційної сили за час t дорівнює:

$$F \Delta t = ES \frac{\Delta l}{l} \Delta t = ES \frac{\Delta l}{v}. \quad (11.13)$$

Деформована частина стрижня одержала за рахунок цього імпульсу кількість руху mv_v . Маса частинок, що прийшли в рух за час t , дорівнює $m = \rho S l$, де ρ – первинна густина стрижня. Тоді:

$$mv_v = \rho S l \frac{\Delta l}{\Delta t} = \rho S v \Delta l. \quad (11.14)$$

Оскільки $F \Delta t = mv_v$, то, порівнюючи праві частини рівнянь (11.13) і (11.14), одержимо:

$$v = \sqrt{\frac{E}{\rho}}. \quad (11.15)$$

Таким чином, швидкість звуку пропорційна кореню квадратному з модуля пружності середовища. Запишемо закон Гука у вигляді:

$$\frac{F}{S} = E \frac{\Delta l}{l}.$$

Величина $\frac{F}{S} = p$ є тиском на поперечний перетин стрижня.

Якщо стрижень стискається так, що зміною поперечного перетину можна нехтувати, то відносна зміна його довжини дорівнює відносній зміні його об'єму:

$$\frac{\Delta l}{l} = \frac{S \Delta l}{S l} = \frac{\Delta V}{V}.$$

Тоді:

$$E = \frac{p}{\Delta V/V}. \quad (11.16)$$

Розглянемо поширення звукової хвилі в газі, що знаходиться в закритій судині постійного перетину. Вважаючи зміни об'єму і тиску нескінченно малими і беручи до уваги, що збільшенню тиску відповідає зменшення об'єму, перепишемо вираз (11.16) у вигляді:

$$E = -\frac{p}{\Delta V/V} = -V \frac{p}{\Delta V}. \quad (11.17)$$

У процесі розгляду хвиль у газовому середовищі внаслідок стиснень і розріджень відбувається зміна температури різних ділянок. Для хвиль високої частоти, наприклад, звукових, температури окремих ділянок не встигатимуть вирівнюватися за час одного коливання. Тому короточасні процеси стиснення і розрідження можна вважати такими, що відбуваються без теплообміну, тобто адіабатичними. Адіабатичний процес описується рівнянням Пуассона.

Диференціюючи рівняння Пуассона, одержимо:

$$V^\gamma dp + \gamma V^{\gamma-1} p dV = 0,$$

звідки:

$$\frac{dp}{dV} = -\gamma \frac{p}{V}. \quad (11.18)$$

Підставляючи вираз (11.18) у формулу (11.17), маємо:

$$E = \gamma p. \quad (11.19)$$

Густина газу ρ можна отримати з рівняння Менделєєва – Клапейрона:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT,$$

звідки:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}, \quad (11.20)$$

де μ – молекулярна вага.

Підставляючи рівняння (11.19) і (11.20) у формулу (11.15), одержимо:

$$v = \sqrt{\frac{\gamma RT}{\mu}},$$

звідки:

$$\gamma = \frac{v^2 \mu}{RT}. \quad (11.21)$$

Таким чином, визначення γ зводиться до вимірювання швидкості звуку й абсолютної температури повітря. У даній роботі швидкість звуку визначається методом стоячих хвиль. (Детальніше про хвильові процеси див. додатки А1, А2).

Стояча хвиля є результатом інтерференції двох однакових біжучих хвиль, що поширюються назустріч одна одній. Такі хвилі найчастіше утворюються при накладанні хвиль, які падають на яке-небудь тіло, і хвиль, що відбиваються від нього (див. додаток А3).

Звичайно стоячі хвилі виникають під час поширення пружних коливань в тілах обмежених розмірів. Унаслідок багатократних віддзеркалень від меж тіла з навколишнім середовищем падаюча хвиля викликає безліч відбитих хвиль. У результаті взаємодії падаючих і відбитих хвиль в тілі виникає коливання дуже складної форми. Якщо розміри тіла такі, що відбиті хвилі, взаємодіючи, підсилюють одна одну, то амплітуда результівного коливання зростає – настає резонанс.

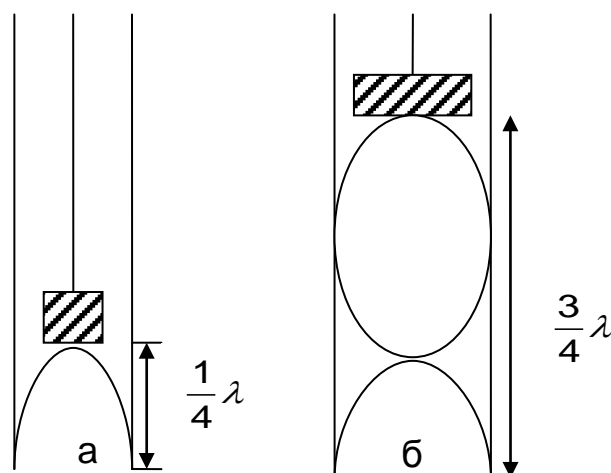


Рис. 11.2. **Схема утворення стоячої хвилі в трубці з повітрям**

Розглянемо умову резонансу коливань в трубці з повітрям, яка закрита з обох боків. Якщо в кінці вузької скляної трубки з розташованим всередині поршнем помістити джерело звуку, то при плавній зміні висоти повітряного стовпа в даній системі спостерігатиметься періодична зміна сили звуку. Пояснюється це таким чином. Джерело звуку порушує поздовжні коливання стовпа повітря в трубці, які поширюються уздовж трубки, відбиваються від поршня і йдуть у зворотному напрямі. Ці дві зустрічні хвилі інтерферують і утворюють у трубці стоячі хвилі, що відповідають граничним умовам. На межі «повітря – поршень» утворюється вузол коливань частинок повітря. Поблизу відкритого кінця трубки, де частинки рухаються повільніше, буде пучність (рис. 11.2). Остання має місце, якщо діаметр трубки значно менший від довжини хвилі. Цим граничним умовам відповідає набір довжин хвиль λ_k , пов'язаних із довжиною повітряного стовпа l_k наступними співвідношеннями:

$$l = \lambda_{1/4}; l = 3\lambda_2 / 4; l = 5\lambda_3 / 4 \dots l = (2k-1)\lambda_k / 4$$

або:

$$\lambda_k = \frac{4l}{2k-1}, \quad (11.22)$$

де $k = 1, 2, 3, 4 \dots$

Відповідні цим стоячим хвилям власні частоти коливань повітряного стовпа можна визначити з відомого співвідношення:

$$v = \frac{v}{\lambda}, \quad (11.23)$$

підставляючи в нього значення $\lambda = \lambda_k$ з формули (11.22) і швидкість звуку в повітрі за даної температури $v = v_t$.

При зміні довжини повітряного стовпа можливий ряд її значень, за яких частота коливань джерела звуку співпадає з однією з власних частот коливань повітряного стовпа. При цьому настає явище резонансу: амплітуда власних коливань даної частоти досягає максимуму, що приводить до збільшення гучності звуку. Довжину повітряного стовпа легко виміряти, визначаючи положення h поршня у момент найбільшої гучності звуку.

Якщо джерело звуку монохроматичне (строго певної частоти), то при значеннях довжини повітряного стовпа, вказаних раніше, повинна виникнути стояча хвиля однієї і тієї ж частоти і відповідної їй довжини хвилі.

Зі співвідношення (11.22) видно, що найменша величина довжини l_1 при резонансі дорівнює чверті довжини хвилі λ (рис. 11.2 а), наступне значення $l_2 = \frac{3}{4}\lambda$ і т. д. У загальному випадку резонанс спостерігається, якщо на довжині l укладається непарне число $\frac{\lambda}{4}$. При $l_1 = \lambda / 4$ відбувається резонанс на частоті основного тону, а при $l_2 = \frac{3}{4}\lambda$, $l_3 = \frac{5}{4}\lambda$ і т. д. – на частотах обертонів повітряного стовпа відповідної довжини (рис. 11.2 б).

Вимірюючи відстань між двома послідовними положеннями поверхні поршня при резонансі $h_2 - h_1 = l_2 - l_1 = \lambda/2$, можна визначити довжину хвилі λ .

Знаючи величину λ і частоту генератора ν (у нашому випадку 1 000 Гц), можна за формулою (11.23) обчислити фазову швидкість звукових хвиль:

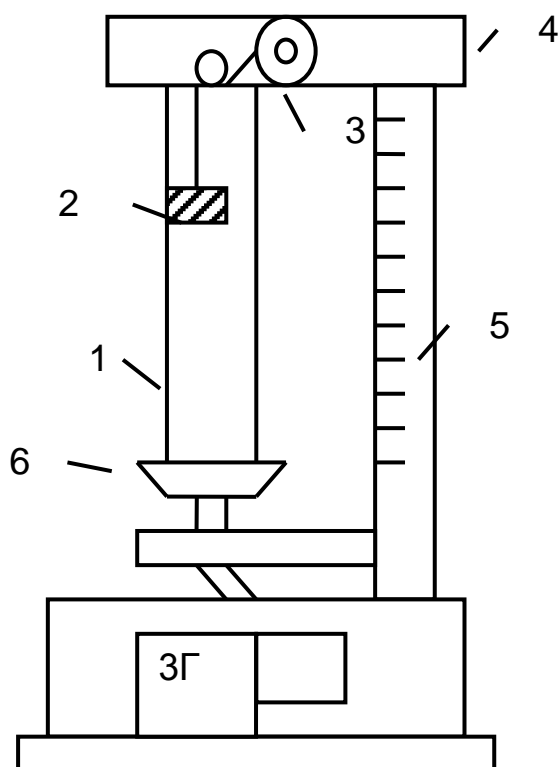
$$v = \lambda \nu. \quad (11.24)$$

Опис лабораторної установки

Установка для вимірювань складається з циліндричної скляної трубки 1 (рис. 11.3) довжиною 0,5 м і діаметром 2,5 см. У середині трубки знаходиться поршень 2, який за допомогою ручки 3 можна переміщувати вздовж трубки. Трубка прикріплена до штатива 4 зі шкалою 5. У нижньому кінці трубки розташоване джерело звукових коливань 6, приєднане до звукового генератора ЗГ.

Джерело звуку розташоване так, що звукові коливання поширюються вздовж осі трубки.

Термометр для вимірювання температури повітря знаходиться поряд із лабораторною установкою.



Порядок виконання роботи

1. За допомогою термометра виміряти температуру повітря в приміщенні.
2. Опустити поршень в трубці до відстані 4 см від нижнього кінця трубки.
3. Ввімкнути звуковий генератор, встановити необхідну гучність звуку.
4. Плавню піднімаючи вгору поршень, відзначати ті його положення, за яких гучність звуку різко зростає, тобто настає резонанс. Відлік проводити з точністю до 1 мм.
5. Вимірювання повторити 5 – 6 разів. Відстань між двома сусідніми положеннями поршня, відповідними резонансу, дорівнює $\lambda/2$. За отриманими результатами визначити середнє значення $\lambda/2$, а потім λ .
6. За формулою (11.24) визначити фазову швидкість звукових хвиль, заздалегідь зробивши відлік частоти ν за шкалою генератора З Г.
7. Визначити γ , користуючись виразом (11.21). Для повітря $\mu = 29$ кг/кмоль.

Контрольні питання

1. У чому полягає явище акустичного резонансу?
2. Охарактеризуйте поздовжні й поперечні хвилі, звукові хвилі.
3. Яка зв'язана швидкість поширення хвиль з пружністю середовища?
4. Чому можна застосувати рівняння адіабатичного процесу до газу, в якому поширюється звукова хвиля?
5. Поясніть виникнення стоячих хвиль.
6. Чому стояча хвиля не переносить енергію?
7. Розкрийте залежність швидкості звуку від температури.
8. Дайте визначення адіабатичного процесу.
9. Охарактеризуйте зв'язок тиску і об'єму газу при адіабатичному процесі.
10. Чому теплоємність газу при постійному об'ємі не дорівнює теплоємності газу при постійному тиску?
11. Від чого залежить швидкість поширення звукових хвиль у газі?
12. Дайте визначення молярної теплоємності газу при постійному об'ємі і постійному тиску.
13. Охарактеризуйте величину γ для одноатомного, двоатомного і багатоатомного газів.

14. Що відбувається з внутрішньою енергією газу при адіабатичному процесі?

Лабораторна робота №12

Визначення коефіцієнта в'язкості, довжини вільного пробігу й ефективного діаметра молекул повітря

Мета роботи – вивчення основних закономірностей молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу і закону течії газу вздовж трубок, а також експериментальне визначення коефіцієнта в'язкості, середньої довжини вільного пробігу й ефективного діаметра молекул повітря.

Загальні положення

1. Середня довжина вільного пробігу молекул. Молекули газу, перебуваючи у стані хаотичного руху, безперервно стикаються одна з одною. Зіткненням молекул називається процес взаємодії між молекулами, внаслідок якого молекули змінюють напрям свого руху. Між двома послідовними зіткненнями молекули проходять деякий шлях, який називається *довжиною вільного пробігу*. У загальному випадку довжина шляху між послідовними зіткненнями різна, але оскільки ми маємо справу з величезною кількістю молекул і вони знаходяться в безладному русі, то можна говорити про *середню довжину вільного пробігу молекул* $\langle \lambda \rangle$.

Мінімальна відстань, на яку зближаються при зіткненні центри двох молекул, називається *ефективним діаметром молекули* d (рис. 12.1).

Величина $\sigma = \pi d^2$ є *ефективним перерізом молекули*.

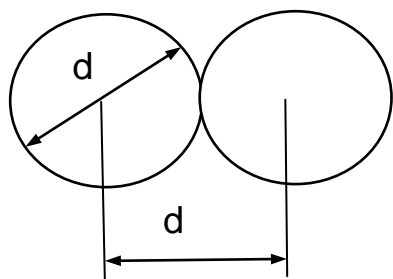


Рис. 12.1. Відстань, на яку зближуються центри двох молекул

Ефективний діаметр молекули залежить від її енергії, а отже, й від температури. Із підвищенням температури ефективний діаметр молекул зменшується. Середня довжина вільного пробігу може бути знайдена за формулою:

$$\langle \lambda \rangle = 1 / \sqrt{2} \pi d^2 n, \quad (12.1)$$

де n – концентрація молекул.

Відношення середньої арифметичної швидкості до середньої довжини вільного пробігу є середньою кількістю зіткнень, що зазнаються однією молекулою газу за одну секунду:

$$\langle z \rangle = \frac{\langle v \rangle}{\langle \lambda \rangle} = \sqrt{2} \pi d^2 n \langle v \rangle. \quad (12.2)$$

2. Внутрішнє тертя в газах. Молекулярні хаотичні рухи зумовлюють зіткнення молекул газу зі стінками посудини і тиск газу на стінки. Проте молекулярні рухи зумовлюють і зіткнення молекул між собою, і низку інших явищ. Зокрема, внаслідок хаотичного руху молекули газу переходять з одних місць на інші й переносять із собою певну масу, імпульс, енергію. За певних умов перенесення згаданих величин може мати спрямований характер. Усі ці процеси називаються явищами переносу. До них належать дифузія, теплопровідність, внутрішнє тертя.

Явища переносу виникають у тих випадках, коли система неврівноважена і в ній існують градієнти¹ швидкості, густини, температури, потенціалу. У результаті явищ переносу система переходить у рівноважний стан. При цьому в різних частинах системи порівнюються величини, градієнти яких раніше існували.

Явище внутрішнього тертя пов'язане з виникненням сил тертя між шарами газу або рідини, що переміщуються паралельно один до одного з різними за величиною швидкостями. З боку шару, що рухається швидше, на шар, який рухається повільніше, діє прискорювальна сила. Навпаки, шар, що повільно рухається, гальмує шари газу, які рухаються швидше. Сили тертя, які при цьому виникають, спрямовані по дотичній до поверхні зіткнення шарів.

З макроскопічної точки зору, за законом Ньютона, сила внутрішнього тертя пропорційна градієнту швидкості і площині шарів, між якими визначається сила тертя:

¹Градієнт скалярної величини – це вектор, спрямований у бік найбільш швидкого її зростання і який чисельно дорівнює зміні величини на одиницю довжини в цьому напрямі.

$$F = \eta \frac{du}{dx} S. \quad (12.3)$$

З погляду молекулярно-кінетичної теорії газів причиною внутрішнього тертя є накладання впорядкованого руху шарів газу з різними швидкостями на хаотичний тепловий рух молекул, інтенсивність якого залежить від температури. Завдяки тепловому руху молекули переходять з шару, що рухається зі швидкістю \vec{u}_2 , у шар, який рухався зі швидкістю \vec{u}_1 . При цьому молекули переносять імпульс mu свого впорядкованого руху.

Якщо різниця швидкостей руху різних шарів газу зовнішніми силами підтримується сталою, то й потік імпульсу від шару до шару буде сталим (стаціонарним), причому цей потік буде спрямований уздовж спадання швидкості. З таким випадком зустрічаємось при повільній течії газу (або рідини) між двома пластинами або в трубі під впливом сталої зовнішньої різниці тисків, спрямованої вздовж руху.

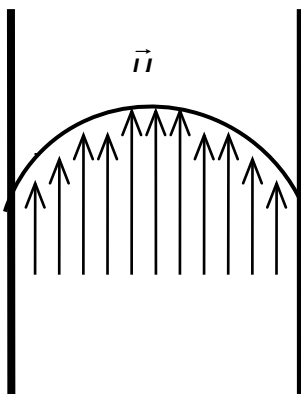


Рис. 12.2. Картина розподілу швидкостей шарів газу, що протікає в трубі

Коли газ тече вздовж труби, то швидкості різних шарів розподілені так, як показано на рис. 12.2. Найбільша швидкість спостерігається в середній частині труби, що прилягає до осі, у міру наближення до стінок швидкість зменшується, а шар, що безпосередньо прилягає до стінок труби, перебуває у спокої. При такій течії імпульс переноситься від центрального шару, де швидкість найбільша, до шарів, які рухаються з меншою швидкістю.

Через те, що цей процес пов'язаний зі зміною кількості руху, газ поводить себе так, як коли б на нього діяла якась сила (сила внутрішнього тертя).

Результівний імпульс, що переноситься через поверхню S за час $\Delta\tau$, можна описати наступним виразом:

$$\Delta p = \frac{1}{6} nm\bar{v}(u_1 - u_2) S \Delta\tau, \quad (12.4)$$

де mu_1 і mu_2 – кількість зорієнтованого руху молекули, відповідно у верхньому і нижньому шарах потоку газу. Зрозуміло, що $(u_1 - u_2)$ є різницею швидкостей шарів газу на відстані $2\langle\lambda\rangle$. Через градієнт швидкості її можна записати так:

$$u_1 - u_2 = \frac{\Delta u}{\Delta x} 2\langle\lambda\rangle.$$

Зробивши відповідно до цього рівняння заміну у виразі (12.4), маємо:

$$\Delta p = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \langle\lambda\rangle \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) S \Delta \tau, \quad (12.5)$$

де ρ – густина газу;

\bar{v} – середня арифметична швидкість руху молекул;

$\langle\lambda\rangle$ – середня довжина вільного пробігу молекул газу.

Оскільки зміна імпульсу за одиницю часу визначає силу, що діє на поверхню S , тобто силу внутрішнього тертя, то:

$$F = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \langle\lambda\rangle \left(\frac{\Delta u}{\Delta x} \right) S. \quad (12.6)$$

З виразів (12.3) і (12.6) знайдемо коефіцієнт в'язкості:

$$\eta = \frac{1}{3} \rho \bar{v} \langle\lambda\rangle. \quad (12.7)$$

З дослідів відомо, що з підвищенням температури в'язкість газів зростає. Цей факт узгоджується з теоретичним виразом коефіцієнта в'язкості (12.7). Дійсно, з підвищенням температури збільшується середня швидкість молекул \bar{v} , тому збільшується і коефіцієнт в'язкості.

3. Вимірювання основних параметрів газу. Розглянемо, які досліди та вимірювання треба зробити, щоб визначити основні

параметри газу, а саме: коефіцієнт в'язкості, середню довжину вільного пробігу молекул газу, ефективний діаметр молекул повітря.

Для газів, так само, як і для рідин, коефіцієнт в'язкості можна обчислити, користуючись законом Пуазейля:

$$\eta = \frac{\pi R^4 (\rho_1 - \rho_2) t}{8VI}. \quad (12.8)$$

Для цього потрібно експериментально виміряти об'єм газу V , що пройшов через капіляр радіусом R і завдовжки l за час t під дією різниці тисків $\Delta p = (\rho_1 - \rho_2)$.

Використовуючи вираз (12.7), можна визначити середню довжину вільного пробігу молекул повітря, якщо відома решта величин, що входять у цей вираз.

Густина газу ρ для даних тиску і температури може бути знайдена з рівняння стану ідеального газу:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT, \quad (12.9)$$

звідки:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{p\mu}{RT}, \quad (12.10)$$

де p – тиск газу;

V – його об'єм;

m – маса газу;

μ – молярна маса, тобто маса 1 кмоля газу;

R – універсальна газова постійна;

T – абсолютна температура.

Як відомо, середня арифметична швидкість руху молекул газу визначається виразом:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8RT}{\pi\mu}}. \quad (12.11)$$

Тоді з виразів (12.7), (12.8), (12.10) і (12.11) маємо:

$$\langle \lambda \rangle = \frac{3\eta}{\rho \bar{v}} = \frac{3R^4 (\rho_1 - \rho_2) t}{8IV\rho} \sqrt{\frac{\pi\mu}{8RT}}. \quad (12.12)$$

Оскільки ефективний діаметр молекул газу d входить у формулу для середньої довжини вільного пробігу (12.1) то, знаючи $\langle \lambda \rangle$, легко визначити d :

$$d = \sqrt{\frac{1}{\sqrt{2\pi n} \langle \lambda \rangle}}. \quad (12.13)$$

Концентрацію молекул газу n при даному тиску і температурі можна знайти, знаючи концентрацію молекул n_0 за нормальних умов.

Оскільки $p = nkT$ і $p_0 = n_0kT_0$, то звідси маємо:

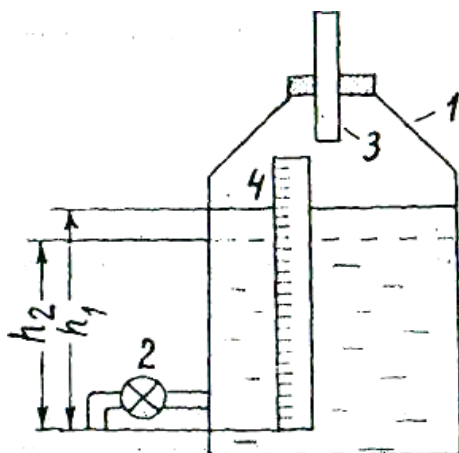
$$\frac{p}{p_0} = \frac{nT}{n_0T_0},$$

звідки:

$$n = n_0 \frac{pT_0}{p_0T} \quad (12.14)$$

Опис лабораторної установки та методики експерименту

Скляна посудина 1 (рис. 12.3) з краном 2 в нижній частині і капіляром 3 у верхній заповнена водою так, щоб рівень води не виходив за межі шкали 4.



При відкритому крані 2 тиск повітря p_1 у верхньому кінці капіляра дорівнює атмосферному, а тиск p_2 у нижньому – менший за атмосферний на величину тиску, що створюється стовпом води h у випускного отвору крана. Під дією цієї різниці тиску $p_1 - p_2$, яка визначається висотою стовпа води h ,

Рис. 12.3. Експериментальний прилад

повітря засмоктуватиметься в посудину 1 через капіляр 3. Вимірявши об'єм V води, що витікає за час t з посудини, і знаючи висоту стовпа води, а також довжину і радіус капіляра, можна обчислити величину коефіцієнта в'язкості повітря η , а потім $\langle \lambda \rangle$ і d .

Величини радіуса капіляра і його довжини зазначає викладач.

Якщо після того, як в посудину з водою вставлена пробка з капіляром, пройшло небагато часу, то в разі відкриття крана вода з нього спочатку вилитиметься безперервним струменем. Це відбувається внаслідок наявності надмірного тиску над поверхнею води в посудині. Починати вимірювання можна з того моменту часу, коли вода почне витікати з крана 2 серіями крапель унаслідок того, що через вузький капіляр повітря в посудину просочується дуже поволі. До цього моменту тиск в посудині на рівні крана стає рівним атмосферному тиску, а гідростатичний тиск стовпа води в посудині компенсується тим розрідженням повітря над водою, яке утворилося в результаті витікання частини води.

Порядок виконання роботи

1. Порожню склянку, маса якої заздалегідь визначається за допомогою лабораторних вагів, підставити під кран після чергової серії крапель. Одночасно пустити секундомір і за шкалою 4 виміряти висоту рівня води h_1 .

2. Коли в склянці буде приблизно 100 см^3 води, склянку прибрати і одночасно зупинити секундомір, вимірюючи при цьому висоту рівня води в посудині h_2 .

3. За допомогою вагів визначити масу склянки з водою, потім, знаючи масу склянки, обчислити масу води. Це дозволить визначити об'єм повітря, що увійшло до посудини через капіляр.

4. Обчислити середню різницю тиску, під дією якої повітря всмоктується в посудину:

$$p_1 - p_2 = \frac{h_1 - h_2}{2} 9,8 \cdot 10^3 \text{ Н/м}^2. \quad (12.15)$$

5. За допомогою формули (12.8) обчислити η .

6. Вимірявши кімнатну температуру і тиск атмосферного повітря, за

формулою (12.10) визначити густину повітря, а за формулою (12.12) – середню довжину вільного пробігу молекул $\langle \lambda \rangle$.

7. За формулою (12.14) визначити концентрацію молекул повітря, потім за формулою (12.13) – ефективний діаметр молекул d .

Контрольні питання

1. Які існують фізичні причини виникнення явищ переносу?
2. Який фізичний сенс коефіцієнта в'язкості газу?
3. Яка величина переноситься від шару до шару при в'язкому терті?
4. Запишіть основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії ідеального газу і поясніть його фізичний сенс.
5. Поясніть молекулярно-кінетичний механізм в'язкості.
6. Дайте визначення ефективного діаметра молекул газу.
7. Дайте визначення середньої довжини вільного пробігу молекул газу.
8. Для розрахунку якого явища перенесення необхідно знати величину коефіцієнта в'язкості газу?
9. Чим визначається величина середньої швидкості хаотичного руху молекул даного газу?
10. Як визначити густину ідеального газу?
11. Як розподіляється швидкість течії рідини чи газу по перетину трубки?
12. Чому дорівнює сила тертя між шарами?
13. Як залежить коефіцієнт внутрішнього тертя газу від тиску?
14. Наведіть формулу Пуазейля і поясніть фізичний сенс величин, які в неї входять.
15. У чому суть методу Пуазейля для визначення в'язкості рідин і газів?
16. Чому коефіцієнт внутрішнього тертя рідин зменшується з підвищенням температури, а у газів – зростає?

Рекомендована література

Белоус В. В. Методические рекомендации к выполнению лабораторных работ по разделу «Механика и молекулярная физика» курса «Физика» для студентов специальности 7.080401 дневной и заочной форм обучения. – Харьков: Изд. ХГЭУ, 2000. – 80 с.

Бушок Г. Ф. Курс фізики. Кн. 1. Фізичні основи механіки. Електрика і магнетизм / Г. Ф. Бушок, В. В. Левандовський, Г. Ф. Півень. – К.: Либідь, 2001. – 448 с.

Бушок Г. Ф. Курс фізики. Кн. 2. Оптика. Фізика атома і атомного ядра. Молекулярна фізика і термодинаміка / Г. Ф. Бушок, Є. Ф. Венгер. – К.: Либідь, 2001. – 424 с.

Грабовский Р. И. Курс физики. – М.: Высшая школа, 1980. – 608 с.

Детлаф А. А. Курс физики / А. А. Детлаф, Б. М. Яворский. – М.: Высшая школа, 1989. – 608 с.

Зисман Г. А. Курс общей физики. В 3-х томах / Г. А. Зисман, О. М. Тодес. – М.: Наука, 1974. – Т. 1. – 512 с.

Китайгородский А. И. Введение в физику – М.: Наука, 1973. – 688 с.

Кучерук І. М. Загальний курс фізики. В 3-х томах / І. М. Кучерук, І. Т. Горбачук. – К.: Техніка, 1999. – Т. 1. – 375 с.

Руководство к лабораторным занятиям по физике / Под ред. Л. Л. Гольдина. – М.: Наука, 1973. – 688 с.

Савельев И. В. Курс общей физики. – М.: Наука, 1989. – Т. 1. – 350 с.

Трофимова Т.И. Краткий курс физики. – М.: Высшая школа, 2000. – 492 с.

Додатки

Короткі відомості про хвилі

Фізичні явища, що стосуються хвильових процесів або просто хвиль, ми спостерігаємо повсякденно, і приклади таких процесів нам добре відомі. Камінь, кинутий у воду, викликає на її поверхні коливання часточок води, їхній підйом й опускання. Напевно, кожному доводилося бачити некошене поле у вітряну погоду, коли, за словами поета, «хвилюється нива, що жовкне». Дивлячись на таке поле, ми бачимо, що, залишаючись на місці, стеблинки злаків увесь час коливаються: нахилиються, випрямляються, знову нахилиються і т. д. і, що найдивніше, при цьому уздовж поля щось переміщується. Кажуть, що це поширюються хвилі. Ми чуємо голоси людей, звуки музичних інструментів, грім під час грози і т. д. Це теж явища, пов'язані із хвильовими процесами.

Неважко помітити, що у всіх прикладах, пов'язаних із хвилями, мали місце якісь коливання, які якимось передавалися від точки до точки простору. Це, звичайно, підказує нам підхід до вивчення хвильових процесів і вказує на те, що вивчення хвиль доцільно почати з короткого нагадування положень фізики, які стосуються коливань.

Рух, при якому стан (положення) тіла, що рухається, із часом повторюється (наприклад, як у маятнику, тіло переміщується між двома крайніми своїми положеннями), був названий механічним коливним рухом. При цьому якщо досліджувана фізична величина, що характеризує положення, мала постійний ступінь повторюваності в часі (наприклад, крайнє положення коливного тіла повторювалося через рівні проміжки часу протягом значного часу), то коливання такого роду називаються періодичними. Для системи, здатної здійснювати періодичні вільні коливання, були введені поняття періоду, частоти й амплітуди коливань.

Період коливань T – час здійснення одного повного коливання, тобто найменший проміжок часу, після закінчення якого повторюються стани коливної системи, значення всіх величин, що характеризують коливний рух (наприклад, крайнє положення коливного тіла). Одиниця вимірювання періоду – секунда (с).

Величина, обернена до періоду коливань, – кількість повних коливань, здійснених за одиницю часу, – називається частотою коливань

(одиниця вимірювання частоти – герц (Гц) – частота періодичного процесу, при якому за 1 секунду відбувається один цикл коливань).

Продовження додатка А.1

Амплітуда коливань – фізична величина, що дорівнює найбільшому абсолютному значенню коливної фізичної величини (наприклад, найбільше відхилення від положення рівноваги, якого досягає маятник).

Було також встановлено, що коливний рух завжди пов'язаний із поперемінним перетворенням енергії одного виду в енергію іншого виду. Так, при коливаннях математичного маятника, коли він рухається до положення рівноваги, потенційна енергія перетворюється в кінетичну, а коли він рухається від положення рівноваги, його кінетична енергія перетворюється в потенційну.

Як будь-який фізичний процес, що змінюється в часі, що має періодичний характер, коливний рух з погляду його математичного подання зручно характеризувати найпростішими, часто використовуваними в математиці періодичними функціями – косинусоїдою або синусоїдою або, інакше кажучи, гармонійною функцією. Гармонійне коливання як особливий вид періодичного коливання дуже часто зустрічається на практиці у всіляких коливних системах (коливання пружної пластинки, затиснутої в лещатах, камертона, натягнутої струни, маятника годинника, коливання кульки, підвішеної між двома пружними пружинами, тощо).

Гармонійне коливання величини $x(t)$ описується рівнянням типу:

$$x(t) = A \cos(2\pi t/T + \varphi), \quad (\text{A.1})$$

де $x(t)$ – значення коливної величини в цей момент часу (наприклад, зсув для маятника);

A – амплітуда коливань (найбільше за модулем відхилення коливної величини від її середнього значення, наприклад, від положення рівноваги);

$(2\pi t/T + \varphi) = \theta$ – аргумент функції $x(t)$, який називається фазою коливань у момент часу t . Фаза коливань є лінійною функцією часу й збільшується із часом, відображаючи той факт, що стосовно початку має місце запізнювання процесу;

φ – початкова фаза (ступінь відхилення від положення рівноваги в момент часу $t = 0$).

Слід зауважити, що оскільки $\cos(\alpha + 2\pi) = \cos\alpha$, то у випадку гармонійних коливань збільшення (приріст) фази коливання на 2π приводить

Продовження додатка А.1

до того, що всі величини, які характеризують коливання, набувають вихідних значень.

Гармонійне коливання величини $x(t)$ подають також у вигляді:

$$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi), \quad (\text{A.2})$$

де $\omega(t) = 2\pi\nu$ – кругова частота.

Оскільки одне повне коливання відбувається за період, коли фаза коливання одержує приріст 2π , тобто $\omega(t + T) + \varphi = (\omega t + \varphi) + 2\pi$, то нескладно одержати:

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi\nu. \quad (\text{A.3})$$

Слід зауважити, що величина, яка змінюється, є гармонійною лише за умови, що її миттєві значення визначені для $t \in (-\infty, \infty)$ часу.

Гармонійні коливання наочно зображують за допомогою графіка $x = f(t)$. На горизонтальній осі відкладають величину t , тобто час, а на вертикальній осі – зсув точки в цей момент часу. У результаті такого візуального відображення процесу гармонійного коливання виходить графік помноженої на величину амплітуди косинусоїди, зміщеної відносно початку координат на величину φ .

Необхідно звернути увагу на той факт, що з математичної точки зору (А.2) – це функція однієї змінної; аргументом гармонійної функції є час. Амплітуда, період коливань, початкова фаза залишаються незмінними. Важливо також розуміти й ту обставину, що коливна система не змінює свого положення в просторі (наприклад, маятник, що коливається, увесь час перебуває в тому самому місці, не переміщується), а отже, координати кожної точки такої системи (x, y, z) не входять у залежність (А.2).

Об'єкт природи, що здійснює гармонійні коливання, часто називають гармонійним осцилятором.

Після цих попередніх зауважень перейдемо до основного предмета вивчення – до змісту понять хвиля, хвильовий процес, до наявних у при-

Продовження додатка А.1

роді механічних хвиль, у яких пов'язані між собою осцилятори роблять не тільки коливні рухи в часі, але й здійснюють передачу енергії коливань із одних місць простору до інших.

Необхідно відзначити відразу ж, що характеризувати хвильові явища, які змінюються в часі й переміщуються в просторі, складніше, ніж просто коливання. Це пов'язано, по-перше, з тим, що місцезнаходження кожної частки середовища в кожній точці $O(x_0, y_0, z_0)$ простору, що відповідає положенню рівноваги в момент часу t , необхідно описувати тривимірними векторами. Відповідно до цього, хвильові явища характеризуються векторними величинами (векторними полями). По-друге, характеристики хвильових полів, що змінюються як у часі, так і в просторі, є функціями чотирьох змінних (часу й трьох просторових координат точки). З цієї причини в процесі опису векторних полів замість простого диференціального рівняння для гармонійного коливання потрібно розв'язувати диференціальні рівняння в частинних похідних. Нарешті, істотно й те, що під час руху (як часто кажуть, поширення) будь-якої хвилі саме середовище залучається до певного фізичного процесу, в результаті чого відбувається передача енергії в просторі.

Слід додати до сказаного, що з фізичної точки зору послідовна передача механічних коливань у середовищі i , відповідно, поширення хвилі від однієї точки простору до іншої можливі тільки в тому випадку, коли між суміжними часточками середовища або цілих об'ємів середовища існує взаємозв'язок. Взаємозв'язок часточок виникає тоді, коли середовище має пружні властивості або, інакше кажучи, в ньому мають місце сили пружності. Сили пружності, як відомо, з одного боку, перешкоджають деформації середовища, а з іншого боку – після припинення дії зовнішніх сил (зникнення деформації), повертають частки середовища у вихідний стан, оскільки вони врівноважують зовнішні сили, прикладені до тіла.

Важливо уявляти собі й те, що через сили пружності середовища збурювання середовища, що мають характер певних коливань, можуть поширюватися (рухатися поступально) у цьому середовищі в будь-якому

напрямку. Якщо в пружному середовищі під дією зовнішньої сили яка-небудь часточка (назвемо її осцилятором) здійснює коливання, то вона через пружні сили буде впливати на інші частки середовища, що прилягають до неї, і змушувати їх робити вимушені коливання. Згадайте систему з двох взаємозв'язаних за допомогою пружних пружин маятників, і

Продовження додатка А.1

ви зрозумієте, як коливання однієї часточки породжують навколо себе коливання сусіднього осцилятора. Діючи на все більш віддалені від осцилятора частки середовища, виводячи їх зі стану рівноваги й викликаючи механічні коливання, пружні сили поступово залучають до коливного руху всі часточки середовища. Інакше кажучи, через наявність пружних зв'язків коливання часточок середовища, що виникли якимось чином в одному місці, спричиняють послідовне виникнення коливань часточок в інших місцях, все більш віддалених від первинного. Середовище поблизу осцилятора поступово втягується в певний фізичний процес. Зміни стану середовища (збурювання середовища, що мають характер коливань) поширюються (рухаються поступально) у цьому середовищі в певному напрямку, передаючи енергію в просторі.

Напрямок поширення збурювань середовища (змін стану середовища, хвилі) називають променем. Промінь є вектором (стрілкою), що вказує, куди спрямоване перенесення енергії. За тим, як напрямок коливань частки середовища співвідноситься з напрямком променя, розрізняють поздовжні й поперечні хвилі.

Поздовжніми хвилями (рис. А.1а) називають хвилі, в яких частки середовища коливаються в напрямку поширення хвилі й напрямок вектора швидкості коливань часток і променя збігаються (розташовані на одній лінії).

Поперечними хвилями (рис. А.1б) називаються хвилі, в яких частки середовища коливаються в площинах, перпендикулярних до напрямку поширення хвилі і напрямок вектора швидкості руху коливних часток перпендикулярний до напрямку променя.

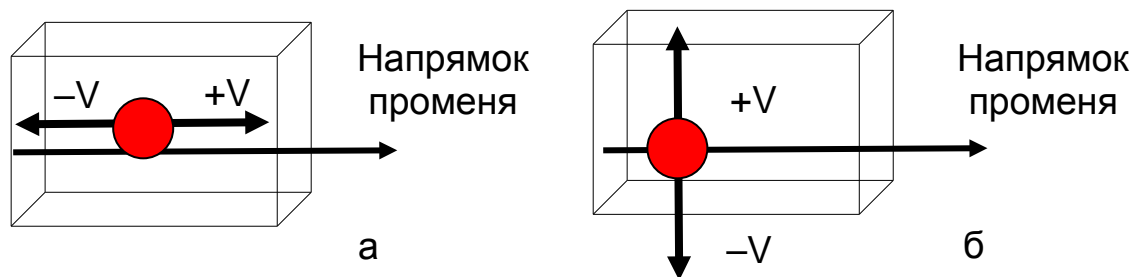


Рис. А.1. Розташування вектора швидкості коливної частки й напрямку променя в поздовжній (а) і поперечній (б) хвилях

Закінчення додатка А.1

Пружні хвилі (пружні збурювання) можуть існувати у твердому, рідкому й газоподібному середовищі. У твердих середовищах виникають механічні деформації стискання й зрушення, які переміщуються хвилями з однієї точки середовища в іншу. У рідинах і газах, що володіють пружністю об'єму, але майже не володіють пружністю зрушення (шари легко «ковзають» один щодо одного), можуть поширюватися тільки поздовжні збурювання типу «розрядження – стискання», де коливання часток відбувається в напрямку поширення хвилі. При цьому, і це важливо розуміти, відбувається перенесення енергії пружної деформації, а не перенесення речовини (часточки середовища, що коливаються навколо середнього положення, залишаються на місці положення рівноваги й не переміщуються в просторі).

Додаток А.2

Звукова хвиля

Для сучасного життя, особливо з появою такого поняття, як мультимедіа, серед поздовжніх механічних хвиль особливе значення має звук, під яким у широкому розумінні мають на увазі механічні хвильові явища, пов'язані з поширенням від джерела в різних середовищах звукових хвиль. Звук – це коливний рух часток пружного середовища і поширення збурювань середовища. Тому, з огляду на сказане, надалі зосередимо свою увагу на вивченні звукових хвиль як різновиду поздовжніх механічних хвиль.

Слід докладно розглянути механізм передачі звукових коливань на моделі (рис. А.2), що становить ланцюжок кульок (коливних часточок середовища), пов'язаних між собою пружними пружинками, які моделюють пружні сили середовища.

Нехай у початковий момент джерело звуку не створює звукових коливань й, відповідно, середовище не збурене. Верхній ряд часточок (рис. А.2, праворуч) демонструє розподіл у просторі часточок у вихідному положенні, які пружно пов'язані між собою. З метою спрощення картинку на рис. А.2 наявність пружних зв'язків у вигляді пружинок між часточками-кульками не показана. У початковий момент часу ($t = 0$) всі часточки середовища перебувають у стані спокою й рівномірно (еквідистантно) розподілені в просторі.

Продовження додатка А.2

Припустимо, що з крайньою лівою часточкою пов'язане джерело зовнішньої сили, що втягує цю частку в процес гармонійних коливань. Щоб наочно можна було уявити процес гармонійних коливань, на рис. А.2 ліворуч показана часточка, що здійснює під впливом зовнішньої сили періодичні коливання щодо положення рівноваги. Будемо вважати, що коливання відбуваються в напрямку осі OX . Нижче від неї побудований повернений на 90 градусів за годинниковою стрілкою графік залежності від часу величини відхилення частки від положення рівноваги (зсуву частки).

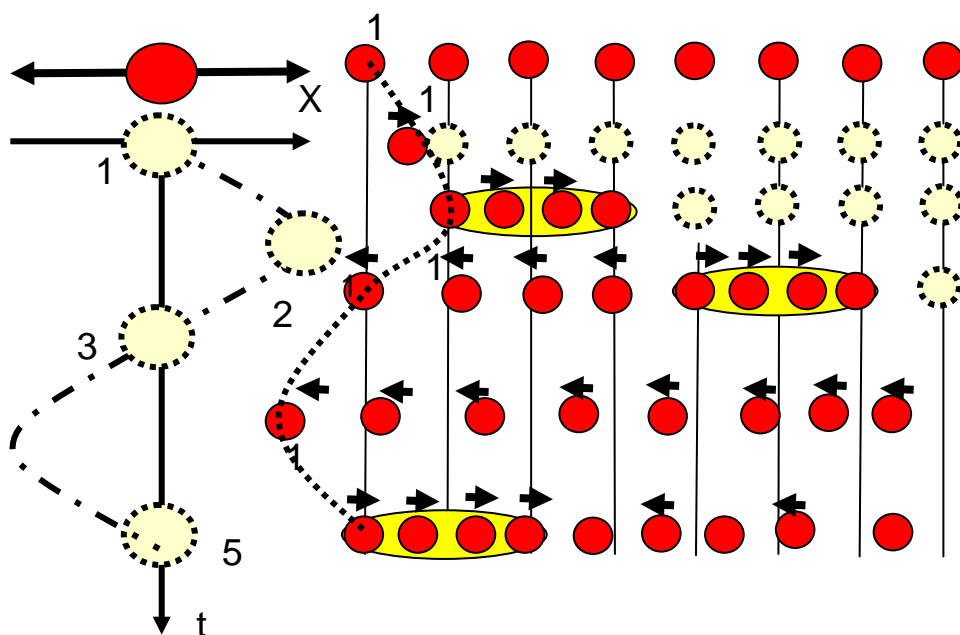


Рис. А.2. Спрощена схема механізму утворення поздовжніх пружних хвиль

Для спрощення прийнято, що часточка розташована в положенні рівноваги x_{01} і здійснює коливання щодо положення рівноваги за синусоїдальним законом $\xi(x_{01}, t) = A \sin[\omega t] = A \cos[\omega t + \pi/2]$.

Припустимо тепер, що в наступний момент часу першій часточці за рахунок енергії джерела коливань передають імпульс, що спрямований зліва направо і який приводить її в коливний рух у напрямку поширення хвилі. Відхилення часточки з номером 1 від свого положення рівноваги x_{01} в момент t буде $\xi(x_{01}, t) = A \sin[\omega t] = A \cos[\omega t + \pi/2]$.

Продовження додатка А.2

Другий ряд зверху рис. А.2 показує, як часточка з номером 1 починає рух, відхиляючись від положення рівноваги вправо. На розглянутому рисунку і надалі стрілка вгорі часточки вказує напрям вектора швидкості часточки в цей момент часу.

Подумки уявляємо, що між часточками знаходяться пружинки, які відображають пружні сили. Оскільки всі часточки середовища пружно пов'язані між собою, то слідом за першою часточкою почне коливатися друга, за нею – третя і т. д. Можна припустити, що закон коливань часточок у часі не буде перекручений при передачі імпульсу, тобто він залишиться гармонійним. Отже, коливання всіх інших часточок середовища будуть також гармонійними, причому з однаковими частотами. Однак при цьому варто врахувати, що коливання не можуть миттєво поширюватися на всі точки середовища. Тому, чим далі стоїть часточка від джерела коливань, тим пізніше вона почне коливатися. Інакше кажучи, при передачі коливань буде мати місце запізнювання процесу гармонійних коливань щодо того, який відбувався із крайньою лівою часточкою середовища.

Значення відхилення N -ї часточки від положення рівноваги в момент t на відстані x від джерела збурювання буде визначатися як коливним процесом, так і часом запізнювання x/v :

$$\xi(x_{0N}, t) = f\left(t - \frac{x}{v}\right) = A \cos\left[\omega\left(t - \frac{x}{v}\right) + \varphi\right] = A \cos[\omega t - kx + \varphi], \quad (\text{A.4})$$

де x/v – час, на який відбувається запізнювання в одержанні імпульсу від крайньої лівої в ряді часточки;

$k = \frac{\omega}{v}$ – фазова постійна, визначальна різниця фаз коливань у двох

перетинах середовища, що стоять на одиницю довжини одна від одної. Частіше k називають хвильовим числом;

v – швидкість, з якою передаються коливання від однієї часточки до іншої (швидкість поширення коливань) у даному середовищі.

У певний момент часу, що залежить від швидкості поширення коливань, перша частка максимально зміщується вправо (на значення амплітуди), а імпульс від джерела (першої часточки) доходить до п'ятої

Продовження додатка А.2 часточки (яка поки що нерухома). Відповідно до цього випадку третій зверху ряд рис. А.2 свідчить про те, що між першою і п'ятою точками середовища відбувається «групування» часточок разом, за рахунок чого утворюється зона стискання середовища, яка називається згущенням. У цій зоні часточки, за винятком першої, рухаються зліва направо, повторюючи рух попередніх часточок. Даній ситуації відповідає час, який дорівнює одній чверті періоду від моменту початку коливань першої часточки середовища.

За наступну чверть періоду, починаючи від початку коливань, енергія джерела доходить до дев'ятої часточки, яка ще нерухома (на рис. А.2 це четвертий зверху ряд), а перша часточка, а за нею й інші три, повертаються в положення рівноваги. Часточки між п'ятою і дев'ятою рухаються вправо, «згущаються» і створюють у пружному середовищі зону стискання середовища. Часточки між першою і п'ятою, повторюючи рух пов'язаних з ними попередніх часточок, рухаються вліво й опиняються в зоні середовища, яка називається розрядженням, де відстань між частками велика.

Проводячи аналогічні міркування, можна уявити, що відбувається в середовищі на наступних етапах, показаних на рис. А.2.

Таким чином, звукова хвиля – це коливні рухи часток пружного середовища, які супроводжуються виникненням і поширенням у середовищі пружних деформацій типу «стискання – розрядження». При

цьому звукова хвиля в середовищі утворює її згущення й розрядження, які створюють у просторі додаткові зміни тиску стосовно його середніх значень у середовищі.

У кожній точці простору в декартовій системі координат (x, y, z) визначене «збурювання» середовища $\xi(x, t)$, описуване формулою:

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega t - kx + \varphi]. \quad (\text{A.5})$$

Кажуть, що дана залежність є моделлю плоскої однорідної хвилі.

Назва «плоска», як нескладно помітити, розглядаючи функціональну залежність $\xi(x, t)$ у просторі й у часі, випливає з того, що значення $\xi(x, t)$ постійні в будь-якій площині, перпендикулярній до осі x . Інакше кажучи, миттєві значення однорідної плоскої хвилі не залежать від поперечних координат (y, z) .

Продовження додатка А.2

Якщо в процесі коливань будь-які дві часточки середовища рухаються в одному напрямку, одночасно проходять через положення рівноваги й одночасно досягають однакових за модулем і знаком амплітудних відхилень, то можна стверджувати, що ці дві часточки середовища коливаються з однаковими фазами. У розглянутому прикладі такій умові відповідають точки 1 і 9, 2 і 10 і т. д. Умові коливань із однакою фазою відповідають також коливання часточок, які перебувають у центрах зон згущення або розріджування. Зрушення фаз між будь-якими двома часточками середовища, що коливаються в однакових фазах, дорівнює $\varphi_2 - \varphi_1 = 2k\pi$ (де $k = 0, 1, 2, \dots$)

З іншого боку, можна також говорити про те, що дві часточки середовища коливаються в протилежних фазах, якщо вони, рухаючись у протилежних напрямках, одночасно проходять через положення рівноваги й одночасно досягають рівних за модулем, але протилежних за знаком амплітудних відхилень. Зрушення фаз між будь-якими двома часточками середовища, що коливаються в протилежних фазах, дорівнює $\varphi_2 - \varphi_1 = (2k + 1)\pi$ (де $k = 0, 1, 2, \dots$).

Геометричне місце точок середовища, в яких у розглянутий момент часу фаза хвилі має те саме значення, називається хвильовою поверхнею (поверхнею рівної фази) або фронтом хвилі. В однорідному й ізотропному середовищі для так званої плоскої хвилі, хвильова поверхня

є площиною, перпендикулярною до напрямку поширення хвилі – променя. Оскільки фаза повторюється через 2π , то в загальному випадку кожній хвилі відповідає сімейство хвильових поверхонь із однакою фазою.

Як свідчить рис. А.2, у поздовжній хвилі кожна часточка середовища коливається біля свого положення рівноваги, зміщуючись не більше ніж на амплітуду. Інакше кажучи, у пружній хвилі, оскільки середня за період швидкість дорівнює нулю, часточка, що коливається, не рухається поступально, а отже, відсутнє перенесення речовини (маси середовища). У той же час можна помітити, що при хвильовому процесі має місце поступальний рух точок поверхні, фаза коливань часточок яких та сама. Інакше кажучи, у середовищі переміщується поступально хвильова поверхня. Швидкість переміщення хвильової поверхні, фаза коливань часточок якої залишається незмінною, називається фазовою швидкістю хвилі.

Продовження додатка А.2

Для спостерігача, що перебуває на хвильовій поверхні й переміщується з фазовою швидкістю, збурювання середовища незмінне, що відповідає умові:

$$\xi(x, t) = A \cos[\omega t - kx + \varphi] = \text{const} \quad (\text{A.6})$$

або:

$$\omega t - kx + \varphi = \text{const}. \quad (\text{A.7})$$

Хвильова поверхня (хвильовий фронт) хвилі рухається поступально уздовж координати x з так званою фазовою швидкістю.

Очевидно, що для обчислення фазової швидкості хвилі $v = \frac{dx}{dt}$ необхідно

з (А.7) знайти похідну $\frac{dx}{dt}$. Не важко одержати фазову швидкість, яка дорівнює:

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d\left[\frac{\omega t}{k} + \frac{\varphi}{k} - \frac{\text{const}}{k}\right]}{dt} = \frac{\omega}{k}. \quad (\text{A.8})$$

Оскільки умові коливань із однаковою фазою відповідають коливання часточок зон, що перебувають у центрах згущення або розрідження, то можна стверджувати, що в поздовжній хвилі в напрямку поширення хвилі має місце поступальний рух з фазовою швидкістю v зон згущення (у рідинах і газах – зон підвищеного тиску) і розрядження.

Таким чином, можна говорити про те, що швидкість поступального руху хвилі (звукова швидкість) – це фізична величина, що дорівнює фазовій швидкості поширення звукових коливань у пружному середовищі. Розмірність звукової швидкості, як і швидкості механічного поступального переміщення тіл, – 1 м/с.

Розглянемо тепер «миттєву фотографію» хвильового процесу. Припустивши, що у формулі (A.6) $t=0$, не складно встановити, що збурювання середовища, наприклад, тиск у середовищі, описується гармонійною функцією:

Продовження додатка А.2

$$\xi(x) = A \cos[-kx + \varphi], \quad (\text{A.9})$$

$$p(x) = P_0 \cos[-kx + \varphi]. \quad (\text{A.10})$$

Можна було припустити заздалегідь, що косинусоїдальному закону коливань часточок середовища в часі при хвилеподібному процесі відповідає косинусоїдальний закон розподілу збурювання в просторі. При цьому коефіцієнт k відіграє роль певної «просторової частоти» гармонійного процесу.

Якщо позначити зсув у часток середовища через $\xi = \xi(x, t)$, то для даного фіксованого моменту часу t_N залежність між зсувом часток середовища й відстанню x цих часток від джерела коливань O можна подати у вигляді просторового графіка хвилі. Такий графік буде зображувати зсув часток середовища щодо положення рівноваги залежно від відстані до джерела коливань у цей момент часу.

Аналогічною буде залежність змінної частини тиску від координати простору. На рис. А.3 показано, як змінюється положення зон згущення й розрядження і змінна частина тиску, що виникає в процесі проходження поздовжньої хвилі в середовищі через певні проміжки часу t_N .

Якщо зафіксувати яке-небудь миттєве значення або фазу процесу кілька разів (розглянути декілька «миттєвих фотографій» хвилі), то можна помітити, що за час $\tau = T_2 - T_1$ точка $x = \text{const}$, що відповідає фіксованій фазі, переміститься на відстань $L = v\tau$. Відповідно, поширення гармонійної хвилі в просторі буде відображатися зсувом графіка косинуса уздовж осі x зі швидкістю v . Інакше кажучи, зі зростанням t фазове зрушення збільшується на величину ωt , тому вихідна крива $\xi = \xi(x, 0)$ зрушується уздовж осі вправо на величину $\omega t / k$, тобто в бік збільшення координати x .

Як свідчить рис. А.3, кожен новий просторовий графік відрізняється від вихідного тільки певним зрушенням у напрямку просторової осі x . Амплітуда й частота залишаються незмінними. Зони згущення й розрядження в середовищі мають виражену просторову періодичність, отже, пружна хвиля має періодичність властивостей не тільки в часі, але й у

Продовження додатка А.2

просторі. Найкоротша відстань між двома найближчими точками хвилі, що коливаються в однаковій фазі, називається довжиною хвилі λ . Довжина хвилі становить також найменшу відстань між двома хвильовими поверхнями, фази яких збігаються. Для гармонійної хвилі (джерело створює гармонійні коливання) довжина хвилі – це найкоротша відстань між двома сусідніми максимумами або мінімумами переміщень середовища (для поздовжньої хвилі – між найближчими центрами розряджень або згущень).

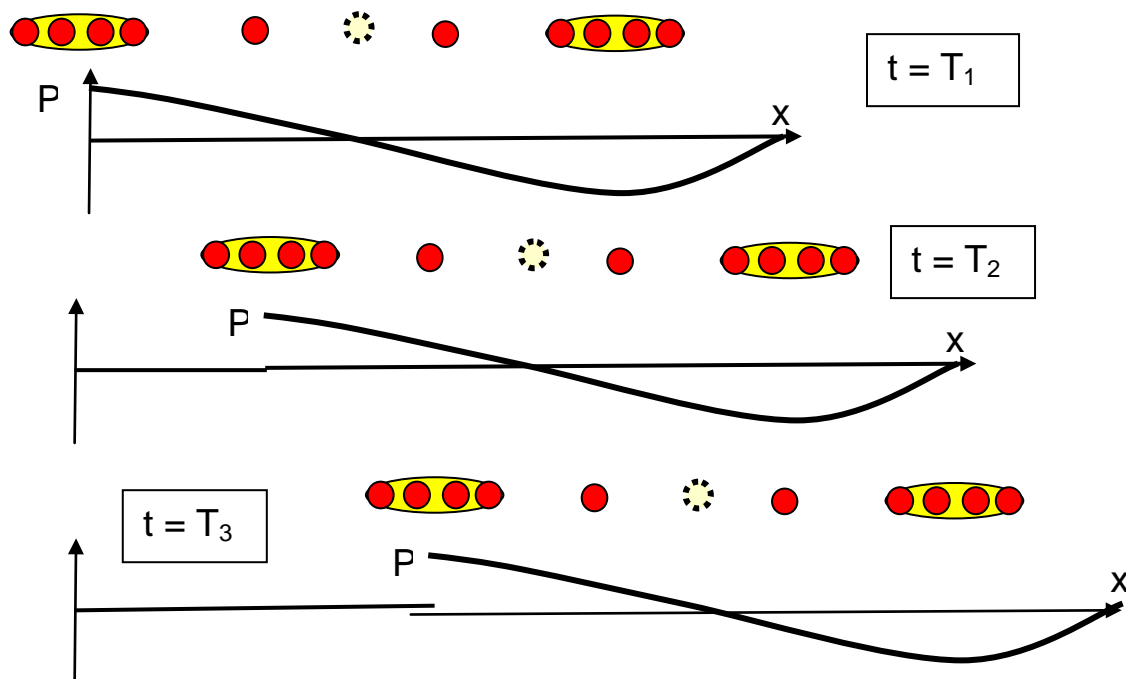


Рис. А.3. Спрощена схема переміщення зон згущення й розрідження в поздовжніх пружних хвилях

Оскільки насправді фази хвилі в точках визначення λ відрізняються на 2π , то:

$$\omega t - kx + \varphi = \omega t - k(x + \lambda) + \varphi + 2\pi, \quad (\text{A.11})$$

звідки випливає, що

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (\text{A.12})$$

Продовження додатка А.2

З виразів (А.3), (А.8) і (А.12) можна одержати співвідношення між частотою коливань ν , довжиною хвилі λ й фазовою швидкістю v :

$$v = \nu\lambda, \quad \nu = \frac{v}{\lambda}. \quad (\text{A.13})$$

Слід зауважити, що отримані співвідношення відображають ту обставину, що після закінчення одного періоду коливань частки просторовий графік зміщується на відстань, що дорівнює довжині хвилі.

З іншого боку, співвідношення свідчать, що при поширенні хвильового процесу в кожному фіксованому перетині $x = const$ відбуваються коливання часточок середовища за гармонійним законом.

Варто звернути увагу й на наступне. Що більша частота коливань звучного тіла, тим коротша довжина хвилі. Відстань, яку проходять хвилі в повітрі протягом однієї секунди, становить близько 340 метрів (при 16°C). Припускаючи, приміром, що музичні тони фортепіано перебувають між $271\frac{1}{2}$ й 3500 Гц, визначаємо, що довжина відповідних звукових хвиль потрапляє в інтервал між 1,2 м й 97 мм. Довжина хвилі найнижчої басової ноти людського голосу, коли-небудь чутої на театральній сцені, становить 5,573 м, а найвищого сопрано – 260 мм і навіть 170 мм.

Прийнято за формою хвильового фронту або хвильової поверхні розрізняти наступні види хвиль.

Якщо джерело хвиль малих розмірів перебуває в центрі пружного середовища досить великого об'єму, то хвилі від цього джерела можуть поширюватися не тільки в напрямку осі Ox , але й у всіх інших напрямках. Хвильові поверхні таких хвиль будуть мати форму концентричних сфер. Такі хвилі називають сферичними. Хвилю називають сферичною також у тому випадку, якщо фронт хвилі має форму сфери. Сферичні хвилі створюються точковими джерелами хвиль в однорідному середовищі. Якщо фронт хвилі становить площину, то хвилю називають плоскою. Плоску хвилю можна збудити, якщо помістити в пружне середовище плоску пластинку більших розмірів і викликати її зворотно-поступальний рух. Зі збільшенням відстані від точкового джерела кривизна поверхні сферичної хвилі зменшується, тому на достатній відстані від такого джерела створювану ним сферичну хвилю також можна вважати плоскою.

Продовження додатка А.2

Зауважимо, що швидкість переміщення в просторі якої-небудь фази хвилі, наприклад центрів згущення й розрідження, є фазовою швидкістю хвилі. Однак часто термін «фазова» опускають, оперуючи просто поняттям швидкості.

Швидкість поширення поздовжніх пружних хвиль у рідинах і твердих тілах пов'язана із густиною середовища ρ й модулем пружності середовища E (модулем Юнга) наступним співвідношенням:

$$v_{\delta} = \sqrt{\frac{E}{\rho}}, \quad (\text{A.14})$$

Швидкість поширення пружних звукових хвиль у газах залежить від термодинамічної температури газу. Для ідеальних газів швидкість звуку:

$$V = \sqrt{\gamma \frac{R}{\mu} T}, \quad (\text{A.15})$$

де R – універсальна газова постійна;

μ – молярна маса;

γ – постійна для даного газу величина, що залежить від будови молекули газу.

Деяка частина звукової енергії витрачається в середовищі на внутрішнє тертя й перетворюється в теплоту. Через це неоднакова звукопровідність різних речовин. У порожньому (безповітряному) просторі звук зовсім не поширюється. У воді він поширюється досить слабо. Рідини й тверді тіла набагато краще проводять звук, ніж гази. До кращих провідників звуку належать скло, сталь, дерево. Серед металів найгірший провідник – свинець. Дерево значно краще проводить звук уздовж волокон, ніж поперек. М'яка гума, серцевина бузини відносяться до самих найгірших провідників звуку. Досвідами доведено, що можна вважати звукопровідність (подібно до електропровідності) прямо пропорційною площі поперечного перерізу тіла й обернено пропорційною його довжині.

Джерело, що створює коливання часточок середовища, має енергію. Кожна часточка середовища, що починає здійснювати коливання, також одержує енергію. При поширенні поздовжньої хвилі за рахунок пере-

Продовження додатка А.2

дачі енергії від однієї частки до іншої має місце перенесення енергії. У деякому об'ємі V_C пружного середовища, в якому поширюється хвиля з амплітудою A и частотою ω , є середня енергія:

$$\bar{W} = \frac{m\omega^2 A^2}{2}, \quad (\text{A.16})$$

де m – маса виділеного об'єму середовища.

Як і будь-який інший вид енергії, звукова енергія виражається в джоулях.

Якщо середовище характеризується густиною середовища $\rho = dm/dV_C$, то середня густина (середня об'ємна густина – кількість енергії, що припадає на одиницю об'єму), зосереджена в об'ємі середовища, дорівнює:

$$\bar{w} = \frac{\bar{W}}{V_C} = \frac{\rho\omega^2 A^2}{2}. \quad (\text{A.17})$$

Якщо плоска хвиля змінюється за гармонійним законом $\xi(x, t) = A\cos[\omega t - kx + \varphi]$, то об'ємна густина енергії такої хвилі оцінюється формулою:

$$w = \rho\omega^2 A^2 \cos^2[\omega t - kx + \varphi]. \quad (\text{A.18})$$

Хвиля переносить потік енергії W (енергію, що проходить через поверхню площею S за час t), який дорівнює:

$$W = wStV = \frac{\rho\omega^2 A^2 StV}{2}, \quad (\text{A.19})$$

потужність якого дорівнює:

$$P = \frac{W}{t} = wSV = \frac{\rho\omega^2 A^2 SV}{2}. \quad (\text{A.20})$$

Продовження додатка А.2

Поширюючись у середовищі, поздовжня хвиля утворює згущення й розрідження, які створюють додаткові зміни тиску стосовно його середніх значень у середовищі. Звуковий тиск є однією з найважливіших

характеристик звуку, оскільки людське вухо сприймає саме звуковий тиск.

Звуковим тиском p називається фізична величина, що характеризує додатковий тиск, який виникає в пружному середовищі під час поширення в ньому звукових хвиль. У кожній точці звукового поля (зони в пружному середовищі, де є звукові хвилі) звуковий тиск виражається співвідношенням:

$$p(x_{0N}, t) = P_0 \cos[\omega t + \varphi], \quad (\text{A.21})$$

де $P_0 = \rho \omega A V$ – амплітуда звукового тиску.

Одиниця вимірювання звукового тиску – Паскаль.

Важливою характеристикою хвилі є її інтенсивність – величина, яка дорівнює енергії, що в середньому переносить хвиля за одиницю часу через одиницю площі поверхні, перпендикулярної до напрямку поширення хвилі:

$$I = \bar{w}v = \frac{\rho \omega^2 A^2 v}{2}. \quad (\text{A.22})$$

Формула свідчить, що інтенсивність звуку (механічних коливань із частотою від 16 Гц до 20 кГц) пропорційна квадрату амплітуди коливань і квадрату частоти коливань, а також залежить від швидкості поширення звуку.

Інтенсивність, частота, довжина хвилі є об'єктивними фізичними характеристиками. Однак вони не завжди придатні для опису слухового відчуття, викликаного звуком. З цієї причини часто використовують спеціальні суб'єктивні аналоги розглянутих величин.

Людське вухо чує звук тільки тоді, коли інтенсивність його досить велика. Для гармонійного сигналу із частотою ν існує поріг звукового тиску, нижче якого цей сигнал не чутний навіть за найсприятливіших умов прослуховування. Найменшу інтенсивність звукових хвиль (оцінювану за звуковим тиском), що викликає в людини відчуття звуку, називають порогом чутності. Звуковому тиску $P_0 = 2 \cdot 10^{-4}$ мкбар, за якого більшість звуків

Продовження додатка А.2

уже не чутні, часто ставлять у відповідність логарифмічний рівень – 0 дБ. Тоді інтенсивність звуку (діапазон тисків, що відчують вухом) виражають у логарифмічних одиницях стосовно цього рівня. Такою одиницею є децибел:

$$N = 10 \lg \frac{I}{I_0}. \quad (\text{A.23})$$

Слід звернути увагу на те, що з формули (A.23) випливає, що для досягнення необхідного порога чутності за малих частот потрібна значно більша інтенсивність звукових хвиль.

Точно кажучи, поріг чутності людського вуха залежить від багатьох факторів, у тому числі й від частоти, за складним законом. Вуха має найбільшу чутливість до чистих тонів у частотному діапазоні 200 – 250 Гц. Для звуку із частотою, приміром, 2 кГц поріг чутності дорівнює $2 \cdot 10^{-12}$ Вт/м². Поріг чутності вуха зростає також на частотах вище 5 – 6 кГц. Слухова чутливість на високих частотах має тенденцію зменшуватися з віком, особливо в чоловіків.

Слухові відчуття від даного звуку характеризує поняття «гучність». Як і поріг чутності, гучність має суб'єктивний характер, тобто той самий звук може по-різному оцінюватися різними людьми. Гучність звуку складним чином залежить від звукового тиску (інтенсивності звуку), від амплітуди, частоти й форми звукових коливань. За незмінної частоти й форми коливань гучність звуку зростає зі збільшенням звукового тиску. Гучність звуку гармонійного джерела даної частоти оцінюють порівнюючи її з гучністю гармонійних коливань частотою 1 000 Гц, уводячи логарифмічну величину «рівень гучності». Рівень гучності звуку, що вимірюється у фонах, являє собою величину, що чисельно дорівнює рівню звукового тиску (у децибелах), створеного джерелом гармонійних коливань частотою 1 000 Гц, настільки ж голосного, як і вимірюваний звук.

Рівень гучності G оцінюють формулою:

$$L = 10 \lg \frac{G}{G_0}, \quad (\text{A.24})$$

де G_0 – стандартний рівень гучності.

Продовження додатка А.2

Рівню гучності 25 – 30 сон відповідає гучність тихого шепоту на відстані 1 м. Для вимірювання суб'єктивного відчуття гучності прийнята стандартизована одиниця виміру – сон. Гучність звукового гармонійного сигналу із частотою 1 кГц і рівнем 40 дБ вважається такою, що дорівнює 1 сону. Суб'єктивному збільшенню гучності в 2 рази відповідає подвоєння гучності в сонах. Таким чином, вимірювана в сонах гучність відповідає реакції людського слуху й тому має важливе значення.

Для розуміння питань позиціювання звуку в просторі й технологій тривимірного звуку, які останнім часом набули застосування в комп'ютерних системах обробки звуку, необхідно мати на увазі наступне.

При додаванні (інтерференції) звукових хвиль правильні наступні закономірності.

1. При поширенні в одному напрямку звукових хвиль із однаковими частотами й амплітудами можливе ослаблення звуку або провалля звуку взагалі. Якщо різниця ходу для хвиль дорівнює:

$$PX = (2m + 1) \frac{\lambda}{2}, \quad (\text{A.25})$$

то хвилі, віднімаючись, дають «нульовий» результат, або, як кажуть, «гасять одна одну». При відмінності амплітуд хвиль за тих самих умов має місце істотне ослаблення звуку.

2. Дві звукові хвилі, що поширюються в одному напрямку, з однаковими частотами й амплітудами можуть підсилювати одна одну, якщо різниця ходу буде дорівнювати:

$$PX = m\lambda. \quad (\text{A.26})$$

При цьому амплітуда результативної хвилі буде вдвічі більшою від амплітуди кожної із хвиль.

3. При додаванні двох звукових хвиль, що поширюються в одному напрямку, з частотами, що мало відрізняються, виникають биття. При цьому амплітуда результативної хвилі буде періодично змінюватися. Зауважимо, що при частоті биттів, меншій ніж 16 Гц, людське вухо не буде сприймати коливань амплітуди (гучності).

Звукові хвилі, що становлять послідовні згущення й розрідження середовища, зустрічаючи на шляху свого поширення інше середовище, частково від нього відбиваються, частково ж входять у нього, переломлюються в ньому (тобто змінюють напрямок поширення).

Характер явищ, спостережуваних при зустрічі звукових хвиль із перешкодою, залежить від співвідношення між розмірами перешкоди й довжиною звукової хвилі. Якщо розміри перешкоди, яка зустрічається звуку, значно більші від довжини звукової хвилі, звук відбивається за законом дзеркального відбиття (тобто кут відбиття звукової хвилі дорівнює куту її падіння). Якщо ж розміри перешкоди співпадають з довжиною звукової хвилі, спостерігається явище дифракції, тобто обгинання звуком перешкоди. При частоті звуку $\nu = 20$ кГц і температурі 15°C довжина хвилі складе 17 мм. Оскільки більшість звичайних перешкод (стіни будинків, перегородки, різні предмети) мають значно більші розміри, ніж ця довжина хвилі, то при зустрічі такої звукової хвилі з перешкодою буде спостерігатися дзеркальне відбиття звуку. Якщо ж частота звуку $\nu = 20$ Гц, то довжина хвилі складе 17 м. Такі хвилі обгинають багато перешкод, тобто спостерігається дифракція звукових хвиль.

Слід зауважити, що із цього погляду форма корпусу акустичної системи майже не відіграє ролі на низьких частотах, оскільки лінійні розміри колонок менші від довжини хвилі. На середніх і на високих частотах форма корпусу відіграє істотну роль.

Для того щоб обмежити можливість поширення звукової хвилі в сторони, іноді застосовуються спрямовані системи, наприклад рупори. Рупор концентрує енергію хвилі в певному тілесному куті й таким чином створює спрямоване випромінювання. Треба, однак, мати на увазі, що поза рупором поширення хвилі в сторони вже не обмежене.

Відголос й реверберація становлять особливі випадки відбиття звуку. Якщо поверхня, що відбиває, перпендикулярна до напрямку поширення хвиль, то звукова хвиля після відбиття повертається назад до джерела звуку. Такий випадок називається відлунням. Оскільки людське вухо має здатність зберігати звукові відчуття протягом 0,1 секунди після припинення дії звуку на барабанну перетинку, то для того, щоб вухо могло «почути» відлуння, час, який витрачає хвиля на проходження відстані від перешкоди й назад, повинен бути не менший

від 0,1 секунди, що можливо, коли розміри, наприклад приміщення досить великі. Мінімальна

Закінчення додатка А.2

відстань до перешкоди, починаючи з якої можна почути в повітрі відлуння, становить приблизно 17 метрів.

У великих закритих приміщеннях відбувається багаторазове відбиття звуку від стін і стелі, що збільшує тривалість сприйняття звуку після припинення коливальних джерел звуку. Таке залишкове звучання у великих закритих приміщеннях називається реверберацією. Часом реверберацією (тобто післязвучанням) називається проміжок часу, протягом якого звук ще чутний після того, як його джерело перестало коливатися.

Варто мати на увазі, що на сьогодні розроблено кілька комп'ютерних технологій, які дозволяють позиціювати звук у просторі, моделювати відбиття звуку від різних поверхонь (можна відрізнити звук кроків по металевій поверхні від звуку по брущатці або кам'яній підлозі). Є цифрові технології, що дозволяють «прорахувати» звук відбиттів і таким чином створити за допомогою комп'ютера звукове оточення високого ступеня реалістичності. На сьогодні за допомогою комп'ютера можна забезпечити тривимірне звучання в навушниках.

Додаток А.3

Стояча хвиля

Звукові хвилі, як ми бачили, переносять енергію в напрямку свого поширення. Із цієї причини їх часто називають біжучими хвилями. Існують також інші різновиди хвиль – стоячі.

Стоячою хвилею називається хвиля, що виникає в результаті накладення двох хвиль, що поширюються в одному й тому ж середовищі у взаємно протилежних напрямках і які задовольняють наступні умови: частоти хвиль однакові; амплітуди є однаковими функціями координат; напрямки коливання повинні бути однаковими.

Плоска поздовжня стояча хвиля виникає, наприклад, у процесі накладення падаючої і відбитої плоских хвиль, якщо кут падіння дорівнює нулю, а коефіцієнт відбиття хвилі дорівнює одиниці. Стояча хвиля може утворитися в стовпі газу, що перебуває в трубі певної довжини.

Якщо рівняння падаючої хвилі має вигляд:

$$\xi_{ПАД}(x, t) = A \cos[\omega t - kx + \varphi_1],$$

Продовження додатка А.3

а відбитої:

$$\xi_{ОТ}(x, t) = A \cos[\omega t + kx + \varphi_2],$$

то результівна хвиля буде мати вигляд:

$$\begin{aligned} \xi_{РЕЗ}(x, t) &= \xi_{ПАД}(x, t) + \xi_{ОТ}(x, t) = \\ &= \left[2A \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - kx\right) \right] \sin\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right). \end{aligned} \quad (\text{A.27})$$

Перший множник у виразі, взятий у квадратні дужки, називають амплітудою стоячої хвилі. Амплітуда плоскої стоячої хвилі $A_{НО}$ не залежить від часу і є періодичною функцією координати x :

$$A_{НО} = \left[2A \cos\left(\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - kx\right) \right]. \quad (\text{A.28})$$

За певних значень x , тобто в деяких точках простору амплітуда $A_{НО}$ досягає максимального значення $A_{НО} = 2A$, за інших значень x амплітуда дорівнює нулю $A_{НО} = 0$.

Точки простору, в яких $A_{НО} = 0$, називаються вузлами стоячої хвилі.

Для вузлів виконується співвідношення $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - kx = (2m + 1)\frac{\pi}{2}$.

Точки простору, в яких амплітуда має максимальне значення $A_{НО} = 2A$, називаються пучностями стоячої хвилі. Для пучностей виконується співвідношення $\frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} - kx = 2m\frac{\pi}{2}$, де $m = 1, 2, \dots$ – цілі числа.

Відстань між двома сусідніми вузлами або пучностями називається довжиною стоячої хвилі:

$$\lambda_{CT} = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}, \quad (\text{A.29})$$

де λ – довжина біжучих хвиль.

Закінчення додатка А.3

Відстань між двома сусідніми вузлами або пучностями дорівнює половині довжини біжучої хвилі. Відстань між сусідніми вузлом і пучністю стоячої хвилі дорівнює $\frac{\lambda}{4}$.

На відміну від біжучих хвиль, у стоячій хвилі відсутнє перенесення енергії. Це, зокрема, виявляється в тому, що положення в просторі вузлів і пучностей не змінюється із часом (звідси й назва – стоячі). Відсутність перенесення енергії стоячою хвилею є наслідком того, що пряма, яка утворює цю хвилю, й зворотна хвиля переносять енергію в рівних кількостях, але в протилежних напрямках.

Стоячі хвилі виникають при відбитті від так званих меж. Вони можуть утворюватися при відбитті як від середовища з меншою густиною, так і від середовища, що має більшу густину. У середовищі, що заповнює якусь частину простору, може виникати складна система стоячих хвиль, структура якої залежить від форми й розмірів середовища. Причому стоячі хвилі в обмежених середовищах утворюються лише за певних частот, які називають частотами власних коливань. У довідниках з фізики можна знайти, чим визначаються частоти власних коливань стовпа повітря, використовуваного в трубах духових музичних інструментів, у мундштуках інструментів.

Додаток А.4

Акустичний резонанс

У процесі використання звукових хвиль, як і під час механічних явищ, може мати місце акустичний резонанс. Акустичний резонанс можна спостерігати за допомогою двох камертонів, що мають однакову власну частоту коливань й укріплених на ящиках-резонаторах, призначених для збільшення гучності звуку. Якщо вдарити по одному камертону молоточком, то можна визначити, що почне звучати й інший камертон. Струни рояля утворюють великий набір звукових резонаторів з

різними власними частотами. Якщо, відкривши рояль, відтворити складний звук, то інструмент «відгукнеться» коливаннями струн і схожим звуком.

Акустичний резонанс може спостерігатися за рахунок «резонування» корпусів акустичних систем. Резонансні частоти внутрішнього об'єму корпуса можуть надавати звучанню акустичної системи особливо непри-

Продовження додатка А.4
ємного забарвлення. З цієї причини для демпфірування (усунення) внутрішніх акустичних резонансів застосовують різні методи. Звичайно корпуси акустичних систем заповнюють тонковолокнистими пружно-пористими матеріалами (мінеральною ватою, вовною, супертонкими синтетичними волокнами, склеєними різними смолами). Для зниження амплітуд вібрацій стінок акустичних систем на їхніх резонансних частотах, а отже, й для зменшення їхнього внеску у звуковипромінювання від корпусів застосовують різні методи вібропоглинання. Збільшити значення резонансних частот (високі резонансні частоти легше послабити, ніж низькочастотні) можна за рахунок збільшення твердості корпусів акустичних систем. З цієї причини корпуси сучасних акустичних систем роблять нерозбірними, використовуючи до того ж шипові з'єднання стінок, склеювання їх клеєм, посилення корпусів ребрами жорсткості. На виникнення акустичних резонансів впливають форма акустичної системи, наявність у її корпусі виступів і западин, характер округлень кутів, ступінь демпфірування його передньої стінки. Більш сприятливими з цього погляду є акустичні системи із обтічною формою, наприклад, у вигляді сфери.

З того, що до цього розглядалися гармонійні хвильові процеси, зовсім не впливає, що звук – це тільки гармонійні хвилі. Джерела звуку – коливні тіла – створюють інші, більш складні види хвиль. В акустиці розрізняють наступні звуки.

1. Чистий звук (чистий тон) – звукова хвиля, створювана джерелом, що коливається за гармонійним законом. У першому наближенні чистий тон (або, як кажуть, звук певної висоти) можна одержати, якщо до високоякісного генератора гармонійних коливань підключити сконструйований для цієї частоти акустичний випромінювач, наприклад динамік. Висота тону визначається частотою його гармонійних коливань.

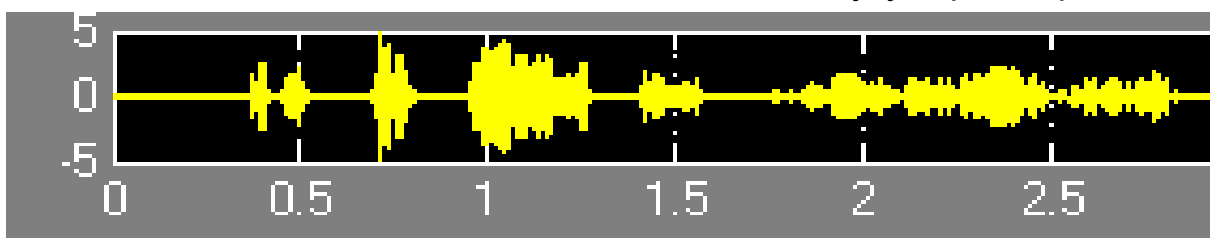
2. Звук, частота якого періодично змінюється біля середнього значення, називається виючим тоном.

3. Співзвуччя – результат одночасного звучання декількох музичних тонів. Це негармонійний хвильовий процес, що в першому наближенні можна вважати таким, який виникає за рахунок додавання декількох гармонійних коливань із певними амплітудами й початковими фазами. Цей складний звук не є чистим тоном. Звукове співзвуччя можна характеризувати спектром звуку – залежністю амплітуд і фаз від частоти

Продовження додатка А.4 тону. Спектр звуку може бути суцільним і лінійчатим. У суцільного спектра складові безупинно розподілені в певному діапазоні частот. При такому спектрі енергія звукових коливань безупинно розподілена в смузі частот. У випадку лінійчатого спектра звук має коливання простих тонів, частоти яких співвідносяться як 1 : 2 : 3 і т. д. У складному звуці тон найнижчої частоти визначає загальну висоту звуку. Він називається основним. Інші тони, що мають частоти вдвічі, утричі й т. д. разів більші, ніж основний, називають гармоніками або обертонами. Обертони як складові складного коливання, виділені при його аналізі, які мають більш високі частоти, ніж основна частота, визначають «забарвлення» звуку (тембр). Тембр дозволяє розрізняти звуки однакової висоти, виконані на різних музичних інструментах або різними голосами. Тембр залежить від того, в якій смузі частот які обертони «підсилюються», а які «приглушаються».

4. Шум – нерегулярні звукові коливання (суміш численних коливань приблизно однакової амплітуди) з найрізноманітнішими частотами. Особливо виділяють так званий «білий шум» – звук, що містить всі чутні частоти.

5. Людська мова. Мова є одним з ефективних засобів передачі інформації. Вона є чергуванням сигналів різної форми (рис. А.4), розташованих у випадковому порядку, і пауз. Мова людини є комбінацією складних звуків, що змінюються за частотою й інтенсивністю, і становить послідовність звуків тривалістю 20 – 100 мс. Найбільш високою інтенсивністю характеризуються голосні звуки. Приголосні – менш інтенсивні. Інтенсивність звуку при переході від



найбільш гучного голосного до найтихішого приголосного змінюється на 30 – 40 дБ.

Рис. А.4. Сигнал людської мови

У формуванні мови беруть участь органи людини, показані схематично на рис. А.5. При цьому формування дзвінких і глухих фрикативних звуків дещо відрізняється.

Продовження додатка А.4

Дзвінкі звуки генеруються в процесі проходження повітря через щілину між голосовими зв'язками.

Коливними голосовими зв'язками формуються широкополосні квазіперіодичні порції повітря.

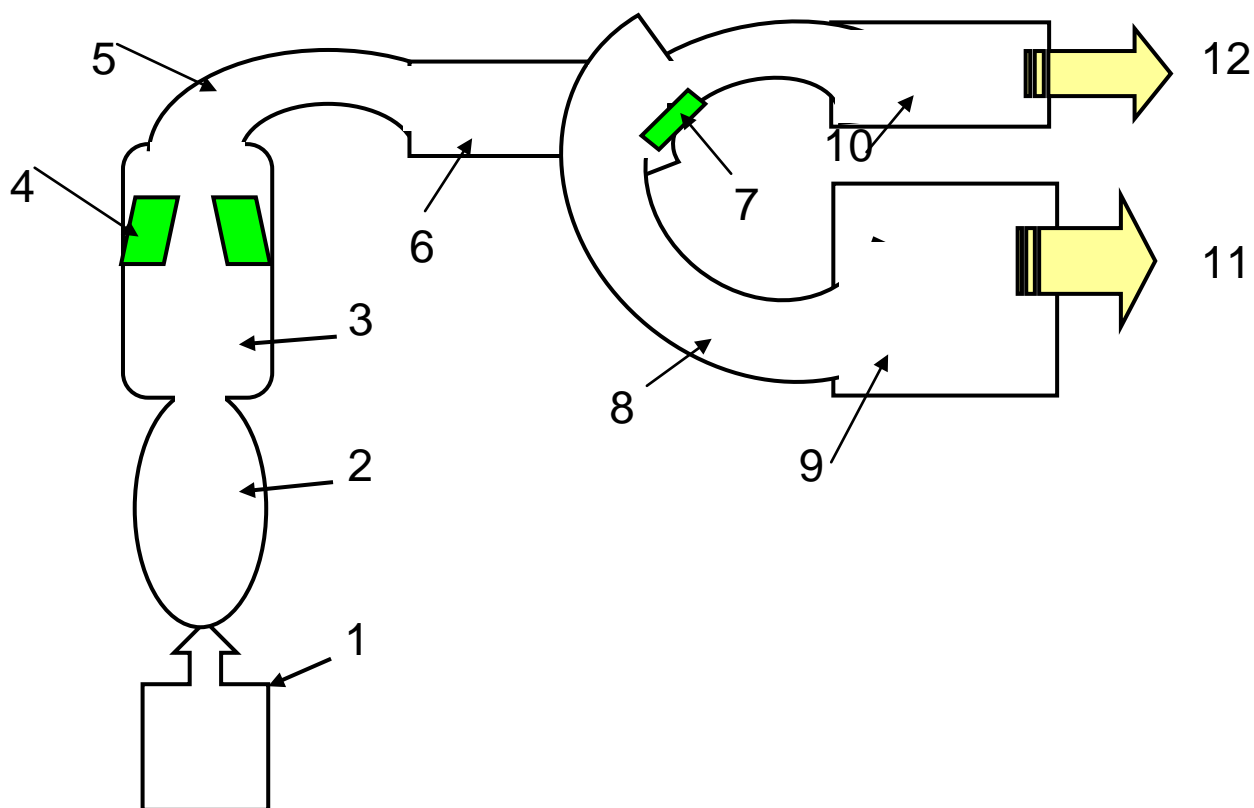


Рис. А.5. Схематичне зображення органів мовлення людини

Умовні позначення:

- 1 – м'язи;
- 2 – легені;
- 3 – трахея й бронхи;
- 4 – голосові зв'язки;

- 5 – гортанна трубка;
- 6 – гортанна порожнина;
- 7 – м'яке піднебіння;
- 8 – спинка язика;
- 9 – порожнина рота;
- 10– носова порожнина;
- 11 – ротовий звук;
- 12 – носовий звук.

Продовження додатка А.4

Під час вимови голосних і деяких дзвінких приголосних голосові зв'язки створюють квазіперіодичні послідовності звукових імпульсів, які збуджують резонансні порожнини органів мови.

Мовні коливання під час вимови одного з голосних звуків показані на рис. А.6.

Під час вимови кожного дзвінкого звука характеристика голосового тракту визначається власними резонансними частотами, або формантами.

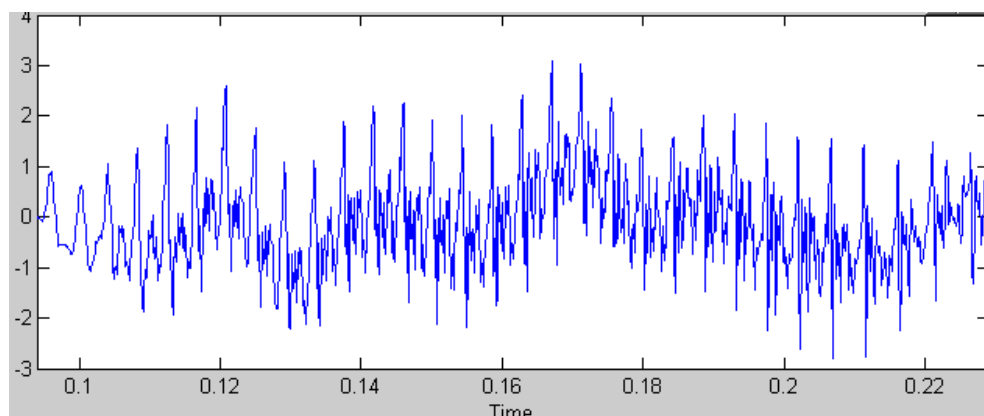


Рис. А.6. Мовні коливання під час вимови одного з голосних звуків

Резонансні порожнини визначають резонансні зони в спектрі мови. Резонанси в таких зонах особливо виражені на трьох частотах порядку 500, 1 500 й 2 500 Гц.

Для добре поставлених співочих голосів характерні зони посилення обертонів (співочі форманти), що лежать у діапазоні близько 500 Гц і в межах 2 800 – 3 200 Гц. Поєднання формантів різне для різних звуків.

У процесі передачі мови частоти основних тонів і смуги формантів безупинно змінюються. У процесі вимови голосних звуків голосові зв'язки створюють сигнал з лінійчатим спектром.

Спектральні компоненти цього сигналу при взаємодії з формантними зонами змінюються за амплітудою. Якщо мати на увазі сприйняття мови людини, то вже перші три або чотири форманти є визначальними. На рис А.7 показані спектри двох різних голосних звуків.

На спектр також накладає відбиток положення губ і язика, форма порожнини рота й глотки.

Продовження додатка А.4

Частота основного тону (частота першої гармоніки) у процесі створення мови змінюється в межах 200 – 400 Гц. Змінюється також залежно від вимовленого голосного й смуга формантів. Таким чином формується звук голосного з характерним для даної людини тембром.

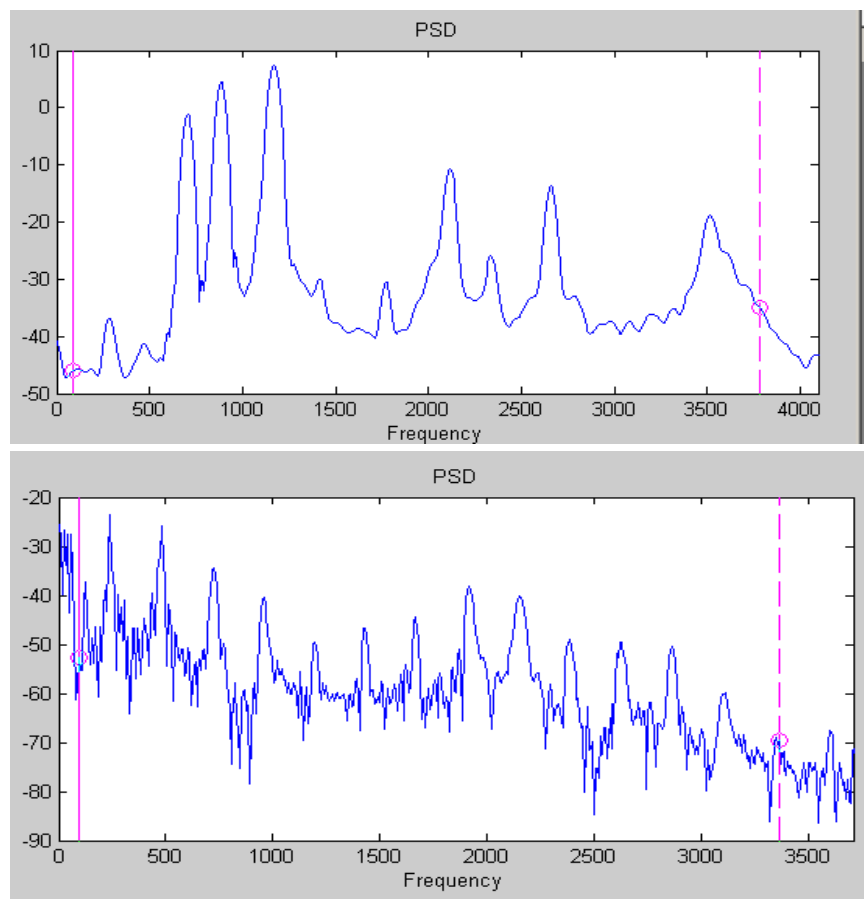


Рис. А.7. Спектри двох різних голосних звуків

Глухі звуки виходять під час проходження повітря через звужений голосовий тракт. При цьому потік повітря стає турбулентним і квазівипадковим.

У процесі вимови приголосних звуків резонансні порожнини збуджуються шумовим сигналом. Мовні коливання під час вимови одного з приголосних звуків показані на рис. А.8.

Таким чином, голосовий тракт, що становить систему з відносно повільно змінних параметрів, може в першому наближенні розглядатися як акустична трубка, що перебуває під впливом періодичного або шумового коливання. При цьому різні звуки виникають завдяки зміні форми голосового тракту.

Продовження додатка А.4

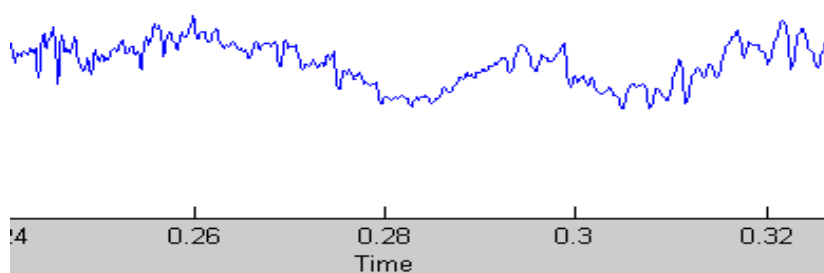


Рис. А.8. Мовні коливання під час вимови одного з приголосних звуків

Викладені ідеї на сьогодні використовуються для так званого формантного синтезу мовних сигналів за допомогою електронних цифрових пристроїв. З цим можна докладно ознайомитися в спеціальних курсах, де розглядаються формантні синтезатори – вокодери (від слів voice – голос, coder – кодувальний пристрій).

Слід враховувати, що для звукових сигналів характерні швидкі наростання й відносно повільні спадання рівня. Звичайно мінімальний час наростання рівня сигналу дорівнює 3 – 5 мс, мінімальний час спадання – близько 0,5 с.

Час наростання в більшості музичних інструментів коливається від 20 до 100 мс; для більшості органних труб, внаслідок їх інерційності цей час може досягати 1 с. Час спадання залежить від властивостей не тільки джерела звуку, але й приміщення, і може досягати декількох секунд.

Процес наростання («атака») і спаду звукового тиску в музичних і мовних сигналів відіграє істотну роль в ідентифікації музичних інструментів і розпізнавання мови. Тому варто стежити, щоб величина перекручувань цих процесів під час відтворення не перевищувала припустимих. У протилежному випадку можуть погіршуватися такі характеристики звуку, які описують словами «прозорість», «соковитість», і т. д.

З огляду на те, що реальний звуковий сигнал містить у своєму складі частотні компоненти широкого спектра, відтворити які одним акустичним випромінювачем практично неможливо, на практиці звуковий сигнал «ділять» на піддіапазони, які «обробляють» окремо «своїми» (низькочастотними (НЧ), середньочастотними (СЧ) й високочастотними (ВЧ)) акустичними системами.

Закінчення додатка А.4

Практично всі сучасні високоякісні акустичні системи складаються з декількох гучномовців (найчастіше трьох – НЧ, СЧ, ВЧ), кожний із яких працює у своєму діапазоні частот. При цьому енергія звукового сигналу ділиться між цими гучномовцями.

Низькочастотний канал зараз часто називають сабвуфером.

При цьому треба мати на увазі наступне. Акустичні системи такого класу звичайно мають розділювальні фільтри. Ці фільтри послаблюють сигнал за межами робочої смуги частот гучномовців. Крім того, вони «коректують» необхідним чином характеристики випромінювачів звуку, забезпечуючи максимальний звуковий тиск, що розвивається гучномовцем.

Низькочастотний розділювальний фільтр (кроссовер) поділяє сигнал на декілька частин, згідно з частотою коливань сигналу.

Низькочастотний розділювальний фільтр (кроссовер) пропускає на сабвуфер низькочастотні («басові») складові. Під час цього вони не впливають на локалізацію віртуальних джерел звуку. З іншого боку, кроссовер звільняє СЧ- і ВЧ-гучномовці від «обов'язку» відтворювати найнижчі частоти, на що вони не розраховані. У результаті ці гучномовці можуть відтворювати «свій» звук голосніше і з меншою кількістю перекручувань.

З іншого боку, низькочастотний розділювальний фільтр (кроссовер) не пропускає на сабвуфер високочастотні складові.

Для найбільш якісного відтворення звуку використовують розділювальні фільтри, які здатні поділити сигнал на більшу кількість діапазонів, найчастіше трьох – НЧ, СЧ, ВЧ.

У розділювальних фільтрах доцільно передбачати можливість зміни частоти зрізу. За рахунок цього можна приглушати «піки звуку», обумовлені виникненням резонансів в акустичному приміщенні.

Якщо в акустичній системі є сабвуфер, то в ній повинен бути «підсилювач підйому басів».

Суть цього в наступному. Якщо на СЧ- і ВЧ-динаміки подається потужність, приміром, 50 Вт, то для того щоб одержати збалансоване звучання, необхідно на сабвуфер подати потужність, що перевищує сумарну потужність всіх інших каналів. За наявності чотирьох каналів по 50 Вт потужність сабвуферного підсилювача повинна скласти не менше 200 Вт.

Додаток Б

Властивості й структура рідини. Поверхневий натяг. Капілярні явища

Молекулярна теорія подає, у першому наближенні, газ як сукупність молекул, що хаотично рухаються в усіх напрямках незалежно одна від одної, а тверде тіло – як відносно невелике коливання молекул біля положення рівноваги.

Для газоподібного стану речовини характерне рівномірне заповнення молекулами газу всього наданого їм обсягу. Якщо газ перебуває в рівноважному стані, молекули рухаються хаотично; будь-які напрямки їхнього руху рівноймовірні. Швидкості молекул під час цього можуть бути різними за розмірами. Зміна швидкостей молекул під час зіткненнях відбувається випадковим чином: швидкості можуть зменшуватися й зростати з рівною ймовірністю, але середня швидкість молекул, а отже, і їхня енергія будуть визначатися температурою газу.

Рідкий стан займає проміжне положення між газоподібним і твердим. Для рідин характерна наявність певного об'єму, але разом з тим рідина набуває форми тієї посудини, в яку вона поміщена. У розташуванні часток рідини спостерігається так званий близький порядок. Це означає, що стосовно будь-якої частки розташування найближчих до неї сусідніх часток є впорядкованим, однак у міру віддалення даної частки розташування стосовно неї інших часток стає

все менш упорядкованим і досить швидко загальний порядок у розташуванні часток повністю зникає. Через відсутність у рідинах далекого порядку вони ізотропні, тобто властивості їх однакові у всіх напрямках. Це пояснює й основну властивість рідини – її плинність.

Разом з тим варто розуміти, що через близький порядок молекули рідини розташовуються настільки близько одна до одної, що сили тяжіння між ними мають значну величину. У рідині молекули між собою сильно взаємодіють, утримуючи одна одну, але рухаються вони, порівняно з твердим тілом, набагато вільніше, хоча й не так вільно, як молекули газу. Крім переміщень, що нагадують коливання молекул твердого тіла біля положення рівноваги, час від часу молекули рідини «вириваються» зі свого оточення й переходять на інше місце, потрапляючи в нове оточення, де знову протягом деякого часу здійснюють періодичні коливання. Інакше кажучи, рух молекул рідини є чимось подібним до суміші рухів у твердому тілі й газі: «коливний» рух на одному місці змінюється «вільним» переходом на інше місце.

Продовження додатка Б

Між газом і рідиною, а також між твердим тілом і рідиною, як відомо, завжди існує чітка межа. Така межа розділяє два стани, або, як кажуть, дві фази речовин, що характеризуються різною густиною (різними середніми відстанями між молекулами) і міжмолекулярними силами зчеплення. Як виявилось, існування такої межі пов'язане з тим, що на поверхні розподілу двох фаз є шар молекул, що значно відрізняється за своїми властивостями від інших шарів фаз, що межують. Цілком природно, що поблизу межі виникає ряд нових фізичних явищ, обумовлених взаємодією між молекулами як усередині тіла, так і між молекулами різних фаз. Вивчення цих явищ ми зараз і розпочнемо.

Розглянемо спочатку зіткнення двох фаз – рідини й газу (наприклад, повітря, у якого в кожному кубічному сантиметрі перебуває $2,7 \times 10^{19}$ молекул кисню – O_2 , азоту – N_2 , водяних парів – H_2O та інших газів). Межа такого зіткнення (поверхня розподілу рідкої й газоподібної фази) – це поверхневий шар рідини. Молекули рідини при цьому можна умовно розмежувати на ті, що перебувають поблизу рідини й газу, й на ті, що розташовані всередині рідини (далеко від межі).

Усередині рідини молекула оточена іншими подібними молекулами з усіх боків і при цьому зазнає рівномірного тяжіння з боку навколишніх молекул (рис. Б.1а). Між ними діють сили взаємодії (міжмолекулярні сили зчеплення), які утримують молекули одну біля одної. Тяжіння, якого

зазнає будь-яка молекула з боку сусідніх молекул, взаємно врівноважуються, тому рівнодійна цих молекулярних сил дорівнює нулю (рис. Б.16).

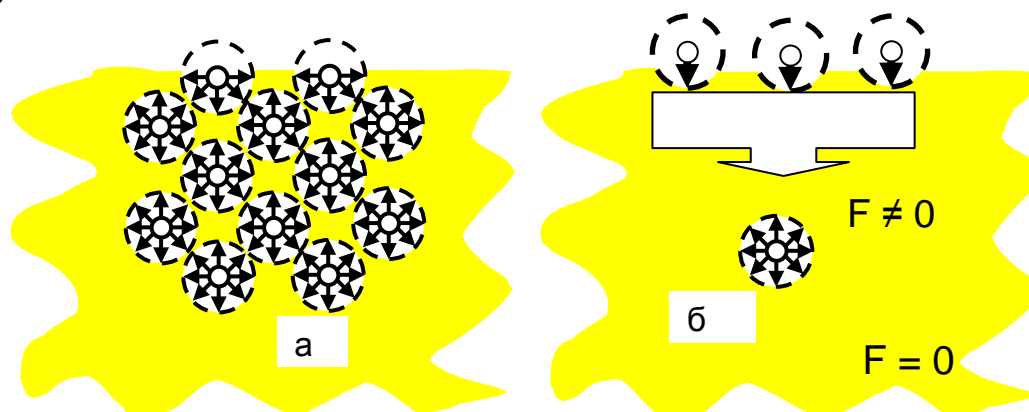


Рис. Б.1. Розташування молекул у рідині (стрілками зображені міжмолекулярні сили):
а – спрощена схема міжмолекулярних притягань;
б – сили, що виникають на межі розподілу фаз “газ – рідина”.

Продовження додатка Б

На молекули, розташовані в площині розподілу, міжмолекулярні сили справляють зовсім інший вплив. Такі молекули рідини оточені собі подібними тільки з боку рідини; з боку газу молекул дуже мало й вони розташовані далеко одна від одної. Тому якщо молекула перебуває на поверхні, то тяжіння з боку молекул приповерхневого газу значно слабкіше від тяжіння з боку молекул самої рідини й, у цьому випадку, сили вже не спрямовані рівномірно в усі сторони. Якщо для молекул, розташованих у поверхні, знехтувати силами тяжіння в газову фазу, і врахувати тільки сили, які спрямовані всередину рідкої фази й уздовж поверхні розподілу, то додавання всіх сил дає рівнодійну, спрямовану всередину рідкої фази (рис. Б.16).

У результаті різної міжмолекулярної взаємодії на межі, на поверхні розподілу двох фаз виникає якесь силове поле рівнодійних сил, яке спрямоване всередину рідкої фази, перпендикулярно до поверхні. Якщо цю рівнодійну силу, що втягує молекули усередину рідини й спрямовану перпендикулярно до поверхні розподілу, віднести до одиниці поверхні, то можна вважати, що має місце якийсь тиск, що дорівнює внутрішньому тиску рідини. Визначено, що подібний внутрішній тиск залежить від хімічної формули рідини й становить, приміром, для води 11 000 атмосфер, для спирту – 2 400 ат., для ефіру – внутрішній тиск 1 400 ат.

Сила внутрішнього тиску, спрямована на поверхневі молекули перпендикулярно до поверхні рідини, перешкоджає їхньому видаленню з поверхні й переходу в газоподібну фазу.

Усі молекули площини розподілу утворюють поверхневий шар, глибина якого близька до поперечника сфери дії молекули. У такому шарі, як показали дослідження, має місце особливе, звичайно орієнтоване розташування молекул, у той час як молекули усередині рідини розташовані без особливого порядку. Поверхневий шар, відмінний від внутрішніх шарів рідини, зручно називати поверхневою плівкою. Подібність із пружною плівкою досить велика, тому в першому наближенні можна говорити про те, що поверхневий шар поводить себе подібно до пружної розтягнутої гумової плівки, тобто весь час прагне скоротити площу своєї поверхні до мінімальних розмірів, можливих при даному обсязі. Однак при цьому треба мати на увазі, що під час «розтягування гумової плівки» в міру збільшення її поверхні потрібна все більша й більша сила, що розтягує. При збільшенні ж поверхні рідини такого явища не спостерігається. Власти-

Продовження додатка Б
вості поверхневого шару рідини обумовлені природою рідини й визначаються її температурою і, як виявилось, не залежать від того, велика поверхня рідини чи мала й чи піддавалася поверхня рідини попередньому розтягуванню. І в цьому значенні поверхневий шар рідини не можна уподібнювати тонкій пружній плівці.

Подібність із пружною плівкою дозволяє ввести ще ряд фізичних параметрів, які характеризують поверхневий шар.

Уявимо собі такий досвід: на дротовій квадратній рамці $ABCD$ із мильного розчину ми одержали плівку. Одна дротова сторона квадрата AB має можливість переміщуватися. Плівка складається з двох поверхневих шарів, кожний із яких має поверхневий натяг F , що прагне притягти сторону AB до сторони рамки CD . Щоб зберегти вихідні розміри квадрата й тримати дротик у рівновазі, треба до сторони CD прикласти силу F_0 , що врівноважує натяг плівки $2F$. У момент розриву плівки сила дорівнює якійсь граничній величині, що визначає опірність плівки й характеризує силу поверхневого натягу. Якщо, приміром, ширину плівки CD зробити рівною 1 м, то сила в ньотонах $F_0 = 1/2 F$ буде певним чином характеризувати поверхневий натяг плівки, що у системі СІ вимірюється в Н/м.

Якщо говорити про загальний випадок, то за аналогією з мильною плівкою можна стверджувати, що з боку молекул поверхневого шару рідини на кожен елемент довжини довільної лінії, розташований у цьому шарі, діє сила, перпендикулярна до цього елемента довжини й спрямована по дотичній до поверхні рідини. Якщо поверхня рідини обмежена периметром l , то сила, що діє на поверхню, пропорційна довжині периметра:

$$F = \sigma l, \quad (\text{Б.1})$$

де σ – коефіцієнт поверхневого натягу.

Величина коефіцієнта поверхневого натягу σ дорівнює силі, вектор якої лежить у площині, дотичній до поверхні рідини, що діє на одиницю довжини периметра змочування й спрямованої перпендикулярно до неї.

Величина поверхневого натягу різна для різних рідин і становить характерну для них константу. У таблиці наведені величини поверхневого натягу для деяких «ідеально чистих» або, як кажуть, бездомішкових рідин.

Продовження додатка Б

Таблиця Б.1

Поверхневі натяги деяких рідин

Речовина	Коефіцієнт поверхневого натягу при $T = 20^\circ\text{C}$, Н/м
Вода	0,073
Спирт	0,022
Ефір	0,016

Порівнюючи дані таблиці з чисельними значеннями величин внутрішнього тиску для води, спирту й ефіру, наведеними вище, не складно помітити, що має місце приблизно пропорційне співвідношення між внутрішнім тиском рідини і її поверхневим натягом.

Процеси на межі розподілу фаз можна тлумачити й з енергетичної точки зору.

Так, щоб перенести молекулу із внутрішніх шарів рідини до поверхні (з об'єму фази в поверхневий шар), треба виконати роботу, спрямовану проти зазначеної вище рівнодійної сили. Ця робота йде на

збільшення поверхневої енергії, тобто на створення надлишку енергії молекул у поверхневому шарі порівняно з їхньою енергією всередині іншого об'єму фази. Інакше кажучи, кожна молекула, що перебуває поблизу поверхні рідини, має деякий надлишок потенційної енергії порівняно з молекулами, що перебувають усередині рідини. Збільшення потенційної енергії поверхневого шару пов'язане з кінетичною енергією молекул рідини. Не складно здогадатися, що чим більша поверхня рідини, тим більша кількість молекул має цю надлишкову потенційну енергію і що при збільшенні поверхні даної маси рідини поверхнева енергія збільшується. Оскільки в цьому випадку внутрішня енергія тіла пропорційна до розмірів поверхні, її й називають поверхневою енергією.

Якщо на тіло не діють зовнішні сили, то значення поверхневої енергії виявляється мінімальним; при цьому мінімальна й площа самої поверхні. Добре відомо, що внаслідок прагнення молекул потрапити всередину рідини з її поверхні рідина набуває такої форми, під час якої її вільна поверхня має найменшу можливу величину. Краплі рідини в невагомості мають форму кульок. Як відомо, куляста форма тіла відповідає найменшій поверхні.

Продовження додатка Б

Уже зазначалося, що при постійній температурі збільшення вільної поверхні рідини може бути отримане за рахунок роботи з «витягування» молекул зсередини на поверхню. Для проведення такої роботи зі збільшення поверхні повинна бути прикладена сила, під дією якої вільна поверхня рідини збільшується. Відношення роботи ізотермічного утворення площі поверхні до величини цього збільшення площі також називається коефіцієнтом поверхневого натягу σ даної рідини на межі з іншою фазою:

$$\sigma = \frac{\Delta A}{\Delta S}. \quad (\text{Б.2})$$

Якщо чисельник і знаменник скоротити на величину, рівну довжині шляху зі здійснення роботи проти зазначеної рівнодійної сили, то поверхневий натяг, виходячи з (Б.2), виражається вже отриманою формулою:

$$\sigma = \frac{\Delta F}{\Delta l}. \quad (\text{Б.3})$$

З формул (Б.2) і (Б.3) випливає, що поверхневий натяг виражається в системі СІ або в Дж/м², або в ньютонах на метр.

Значення поверхневого натягу в загальному випадку залежить від виду рідини (її хімічного складу, від будови молекули), від температури, а також від наявності в ній домішок. Варто мати на увазі, що для легко випаровуваних рідин (наприклад, для ефіру, що має $\sigma = 0,016$ Н/м, спирту) міжмолекулярні сили менші, ніж у рідин нелетких (наприклад, у води), а отже, у перших менший поверхневий натяг. У рідких металів поверхневий натяг дуже великий (для ртуті $\sigma = 0,465$ Н/м).

Якщо аналізувати перебіг процесу встановлення розподілу фаз у часі, то можна зазначити, що для рідин, які складаються з однакових молекул, величина поверхневого натягу встановлюється відносно швидко, слідом за утворенням поверхні розподілу. Наприклад, для бензолу час встановлення рівноваги становить приблизно одиниці мілісекунд. Інша справа з рідинами, що мають у своєму складі різні молекули. У цьому випадку потрібен певний помітний проміжок часу, щоб уся система прийшла в рівновагу. Для води час встановлення рівноваги становить сотні мілісекунд. У зв'язку з цим розрізняють поверхневий натяг статичний, що

Продовження додатка Б
відповідає стану рівноваги, і динамічний, отриманий у певний момент часу, коли система ще не прийшла в рівновагу. Поверхневий натяг води в початковий момент часу становить величину 0,082 Н/м, а потім він наближається до свого статичного значення: $\sigma = 0,073$ Н/м.

Величина поверхневого натягу лінійно залежить від температури, зменшуючись із її підвищенням:

$$\sigma(T) = \sigma(T_0) + \gamma\sigma(T_0)T, \quad (\text{Б.4})$$

де $\gamma = -\frac{d\sigma}{dT}$ – температурний коефіцієнт, що має від'ємне значення.

Треба при цьому мати на увазі, що під час збільшення температури поверхневий натяг зменшується і температурний коефіцієнт зберігає властивості константи тільки до певної, так званої критичної

температури. Після цього температурний коефіцієнт різко зменшується до нуля, оскільки утвориться одна фаза – газ.

Наявність домішок (адсорбувальних), що знаходяться на поверхні розподілу й змінюють вільну поверхневу енергію, також приводить до варіації поверхневого натягу рідини. Якщо замість чистої рідини є розчин, то в цьому випадку на межі розподілу фаз величина поверхневого натягу буде залежати не тільки від виду рідини, але й від концентрації розчиненої речовини домішки n . При цьому можливі наступні ситуації.

1. Розчинена речовина не змінює поверхневого натягу. Інакше кажучи, зміни σ від концентрації розчиненої речовини домішки n немає, і можна записати формулу:

$$-\frac{d\sigma}{dn} = 0. \quad (\text{Б.5})$$

Прикладом речовини, що мало впливає на зміни поверхневого натягу води, може слугувати цукор.

2. Розчинена речовина знижує поверхневий натяг σ зі збільшенням концентрації домішки n :

$$-\frac{d\sigma}{dn} > 0. \quad (\text{Б.6})$$

Продовження додатка Б

Інакше кажучи, наявність адсорбувальних домішок, на поверхні розподілу, які зменшують вільну поверхневу енергію, призводить до ослаблення поверхневого натягу рідини. Речовини, які знижують поверхневий натяг і здійснюють цю дію вже за невеликої концентрації домішки, називаються поверхнево-активними. Для води як рідини, що має великий поверхневий натяг, дуже багато речовин можуть бути поверхнево-активними, тому що величина їхнього поверхневого натягу менша, ніж у води. Наприклад, коефіцієнт поверхневого натягу мильного розчину дорівнює $\sigma = 50$ мН/м.

Перейдемо тепер до вивчення інших можливих варіантів зіткнення двох і більше фаз, фізичних явищ, що виникають при цьому, і використовуваних при цьому понять.

Взаємодія між поверхневими шарами двох однакових тіл називається когезією (зчепленням). Когезія спостерігається у твердих і рідких тіл, особливо за дуже низьких температур і великих тисків. Вона обумовлена зчепленням молекул того самого тіла між собою, що викликається їхнім взаємним тяжінням.

Взаємодія між поверхневими шарами різних тіл називається адгезією (прилипанням). Вона виникає між твердими, твердими й рідкими, а також між твердими й газоподібними тілами. В останньому випадку це явище називають адсорбцією. Адгезія обумовлена «прилипанням» молекул двох різних тіл, що викликається взаємним тяжінням.

Якщо налити рідину в посудину (рис. Б.2в, рис. Б.3в), то не складно помітити, що на межі зіткнення трьох фаз (рідина, газ, тверде тіло) виникає ряд нових явищ.

Одне з них полягає в тому, що якщо рідина перебуває всередині посудини (рис. Б.2в, рис. Б.3в), то поблизу стінок посудини, на межі розподілу фаз, форма поверхні рідини набуває дещо іншого, ніж на всій іншій поверхні, вигляду: виникає викривлення форми рідини, що одержало назву меніск. При цьому між стінками посудини й поверхнею рідини утворюється крайовий кут θ . На рис. Б.2а і рис. Б.3а показані фрагменти взаємодії трьох фаз поблизу стінок на прикладі занурення пластинки твердого тіла в рідину. Аналогічні явища мають місце, коли рідина перебуває на відкритій поверхні тіла, як показано на рис. Б.2б і рис. Б.3б.

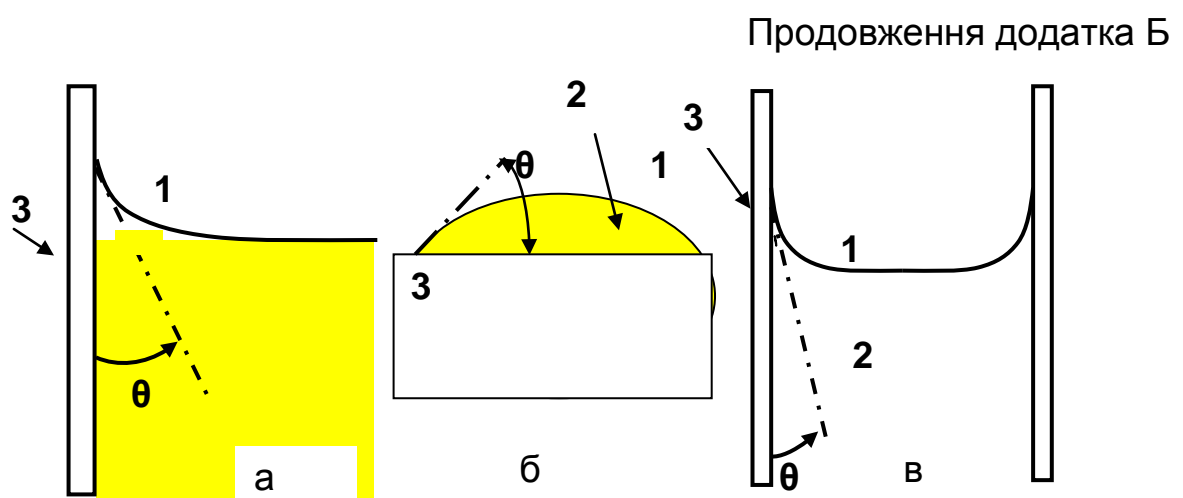


Рис. Б.2. Явища, що виникають на межі розподілу фаз для випадку змочування

Умовні позначення:

1 – газ;

2 – рідина;

3 – тверде тіло.

Залежно від матеріалу твердого тіла й виду рідини меніск може бути опуклим або ввігнутим, а крайовий кут θ – тупим або гострим відповідно. Для пояснення цього прийнято говорити про явище змочування (про змочувальну рідину) і незмочування (про рідину, що не змочує тверде тіло). Використовуваний при цьому термін «змочування» стає зрозумілим, якщо розглядати зіткнення рідини з відкритою горизонтальною поверхнею твердого тіла: крапля рідини, поміщена на поверхні такого тіла, розпливається по цій поверхні, інакше кажучи, «змочує» поверхню (рис. Б.2б). Слід зауважити, що коли крапля перебуває під дією сили тяжіння, то вона дещо сплющується тим сильніше, чим більший її об'єм. Лише дрібні краплі мають форму кулі, тому що при цьому сила внутрішнього тиску істотно переважає силу тяжіння. Кут θ , утворений поверхнею краплі, що розпливається, з поверхнею твердого тіла який називається крайовим кутом, виявляється гострим, меншим ніж 90° . На рис. Б.3б показаний поперечний перетин краплі рідини 2, поміщеної на поверхню твердого тіла 3 в атмосфері газу 1, для випадку, коли рідина є незмочуваною. Крапля рідини, поміщена на поверхні такого тіла, у цьому випадку не розпливається по цій поверхні і «не змочує» поверхню (рис. Б.3б). Крайовий кут θ , утворений поверхнею краплі, що розпливається, з поверхнею твердого тіла, виявляється тупим, більшим від 90° . При цьому площа зіткнення поверхні рідини тим менша, чим більше незмочування.

Продовження додатка Б

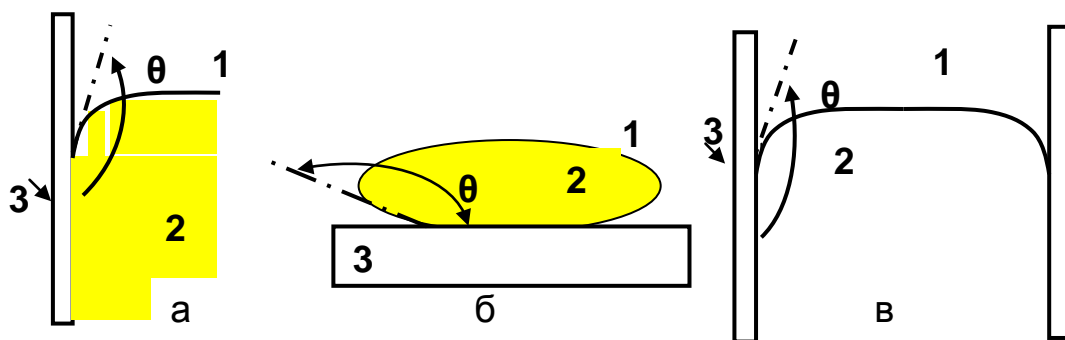


Рис. Б.3. Явища, що виникають на межі розподілу фаз
для випадку незмочування

Умовні позначення:

1 – газ;

2 – рідина;

3 – тверде тіло.

Слід зазначити, що те саме тверде тіло одні рідини змочують, а інші – не змочують. Наприклад, вода змочує скло, а ртуть скло не змочує.

Не складно припустити, що в першу чергу виникнення меніска, явища змочування й незмочування пов'язані з тим, що рідина 2 одночасно межує і з газом 1, і з твердим тілом 3. При цьому істотну роль починає відігравати взаємодія як сил адгезії (між поверхневими шарами рідини й твердим тілом), так і поверхневого натягу на поверхні, де рідина 2 стикається з повітрям 1.

Щоб глибше зрозуміти ці явища, розглянемо сили, які діють на межі розподілу фаз. У всіх розглянутих випадках, з одного боку, має місце взаємодія між молекулами стінок посудини й молекулами рідини. Відповідно, діють сили зчеплення між рідиною й тілом, які обумовлені адгезією – F_a . З іншого боку, має місце міжмолекулярна взаємодія всередині рідкої фази, за рахунок чого діють сили тяжіння молекул рідини одна до одної – F_k . Ці сили обумовлені когезією. Цілком природно, що існуюча форма меніска на межі розподілу фаз залежить від рівнодійних сил, тобто від співвідношення названих сил (рис. Б.4).

Продовження додатка Б

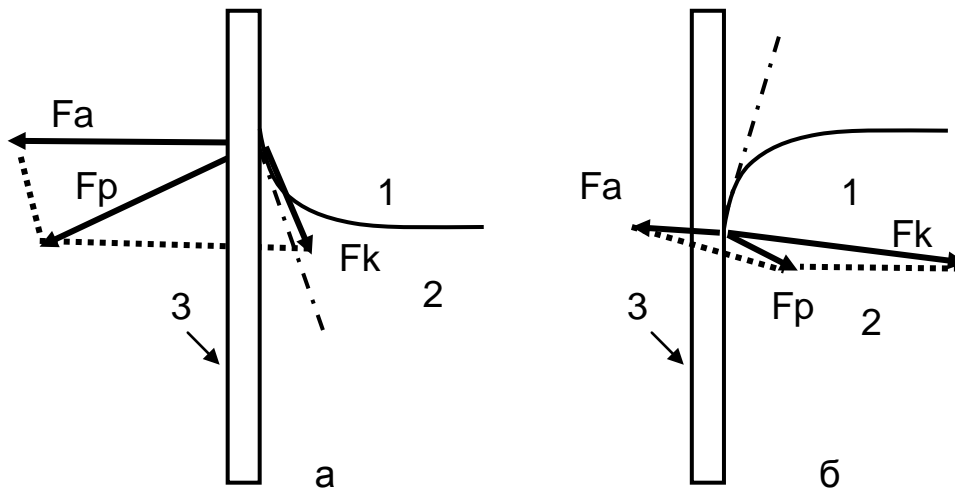


Рис. Б.4. Сил F_a F_p F_k виникають на межі рідина-газ і рідина-тверде тіло
для випадків змочування й незмочування

Умовні позначення:

- 1 – газ;
- 2 – рідина;
- 3 – тверде тіло.

Слід урахувати ту обставину, що рівнодійна сил F_p завжди перпендикулярна до поверхні рідини. Тоді, побудувавши вектори сил для випадку, коли сили тяжіння між молекулами твердого тіла й рідини – сили адгезії F_a – більші, ніж сили тяжіння молекул рідини одна до одної (когезії F_k), одержуємо, що рідина біля країв посудини або пластинки набуде форми ввігнутого меніска (рис. Б.4а). Інакше кажучи, через те, що тяжіння рідини стінками перевищує тяжіння молекул рідини одна до одної, рідина «підтягується» до стінки, прагнучи «розтектися» по ній. Для краплі рідини, поміщеної на поверхню твердого тіла і яка розпливається по цій поверхні, можна запропонувати наступне пояснення форми краплі і явище змочування. Коли молекули рідини зазнають сильного тяжіння до молекул твердого тіла (споконвіку вважалося, що існує тісний взаємозв'язок між рідиною і твердим тілом), крапля «розпливається» по поверхні й має місце явище змочування. І навпаки (рис. Б.4б), коли сили когезії F_k більші від сил адгезії F_a , рідина на межі набуде форми опуклого меніска. Це можна трактувати, начебто рідина частково «відходить» від стінок посудини, через те, що сили зчеплення між молекулами рідини перевищують сили взаємодії між стінкою й рідиною.

Продовження додатка Б

Характеризуючи подібні фізичні явища, дуже часто користуються ще й такими термінами. Якщо сили тяжіння між молекулами рідини й твердого тіла малі, набагато менші, ніж між молекулами рідини, тобто коли має місце явище незмочування, то тверде тіло стосовно рідини називають ліофобним (частина складного слова «фоб» – від грецького *phobos* – страх, страх підкреслює «ворожість» до чого-небудь). У випадку змочування кажуть, що тверде тіло ліофільне стосовно рідини. Стосовно води тверді тіла можна розділити на гідрофобні й гідрофільні. До гідрофобних речовин належать метали, парафін, вугілля, до гідрофільних – гідрати металів, оксиди, силікати.

При змочуванні поверхневі енергії на межах «тверде тіло – газ» і «рідина – газ» зникають і замінюються поверхневою енергією «тверде тіло – рідина». Результатом цього є виділення тепла. Оскільки поверхнева енергія відноситься до одиниці поверхні, то теплотою змочування називається кількість тепла, що виділилося під час змочування, приміром, 1 см^2 поверхні. Теплота змочування 1 см^2 поверхні оцінюється величинами від 10^{-5} до 10^{-3} калорій тепла. Оскільки теплота змочування визначається зміною поверхневого натягу на межі розподілу двох фаз, то можна стверджувати, що чим краще змочується тіло, чим більш ліофільна поверхня, тим більший тепловий ефект можна одержати. Теплота змочування змінюється також від додавання поверхнево-активних речовин.

Уже зазначалося, що сила внутрішнього тиску, спрямована на поверхневі молекули перпендикулярно до поверхні рідини, перешкоджає їхньому переходу з поверхні в газоподібну фазу. Цей висновок був зроблений для плоскої поверхні. Цілком природно виникають питання: яке значення має кривизна поверхні й чи залежить величина тиску від геометричного виду поверхні розподілу? Для одержання відповіді на ці питання розглянемо опуклу й увігнуту поверхні рідини (наприклад, опуклу й увігнуту форми меніска).

Для випадку опуклої поверхні рідини (рис. Б.5а) сили, пов'язані з наявністю поверхневого натягу $F_{\text{ПН}}$ і спрямовані по дотичній до поверхні рідини, дають результівну силу $F_{\text{РЕЗ}}$, спрямовану всередину рідини. Отже, зігнутість поверхні пов'язана з появою додаткового тиску, спрямованого в ту сторону поверхні, куди вона звернена своєю ввігнутістю. Причому не важко здогадатися, що чим менший радіус кривизни поверхні R , тим більший додатковий тиск. Інакше кажучи, під опуклою поверхнею сила, що втягує, більша, ніж під плоскою, яка еквівалентна додатковому тиску.

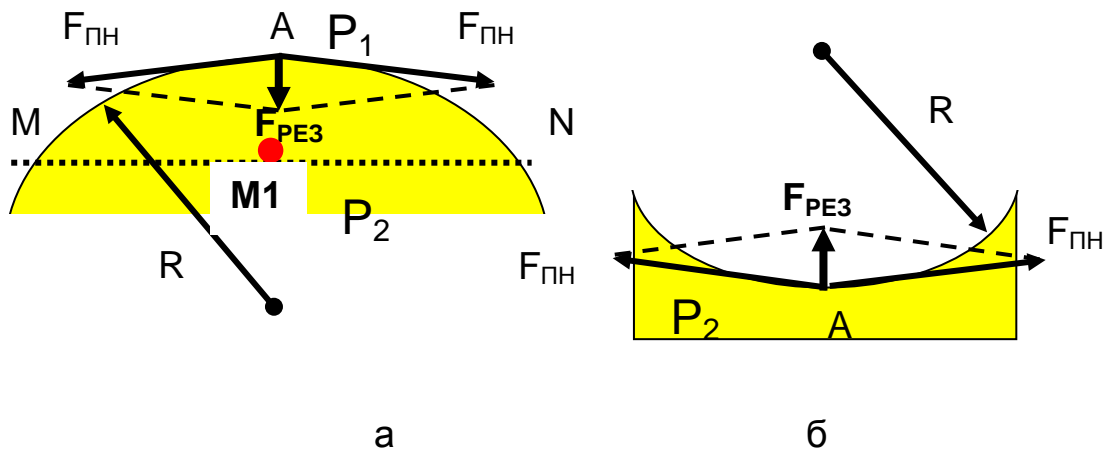


Рис. Б.5. Сили, що виникають на межі розподілу фаз «газ – рідина» для випадків опуклої й увігнутої поверхні рідини

Той же висновок можна також одержати і з наступних міркувань. Припустимо, що в самій поверхні лежить молекула $M1$. Проведемо через $M1$ горизонтальну площину MN , показану на рис. Б.5а. Тоді, молекули, які лежать нижче від площини MN , будуть прагнути втягнути молекулу всередину рідини, а ті, що лежать вище від MN , – виштовхнути її до поверхні рідини. Тиск у рідині буде залежати від співвідношення цих сил. Зрозуміло, що у випадку плоскої поверхні вони рівні й протилежно спрямовані. У випадку опуклої поверхні сила, що рухає молекулу до поверхні, буде меншою, ніж та, що втягує всередину, оскільки більший шар молекул, які лежать над нею. З рис. Б.5а видно, що у випадку опуклої поверхні над молекулою буде більш тонкий шар, ніж це було б для плоскої поверхні, і, відповідно, менша сила, яка «тягне» молекулу вгору. Знову ж з'являється додатковий тиск, спрямований у той бік поверхні, куди вона звернена своєю ввігнутістю. Отже, з цього погляду нормальний тиск усередині опуклої поверхні буде більшим, ніж на плоскій.

Для випадку ввігнутої поверхні рідини (рис. Б.5б) сили, пов'язані з наявністю поверхневого натягу $F_{ПН}$ і спрямовані по дотичній до поверхні рідини, дають результівну силу $F_{РЕЗ}$, спрямовану в бік газу, що межує з рідиною. На підставі цих міркувань можна чекати, що тиск рідини, яка обмежена ввігнутою поверхнею, менший від тиску навколишнього газу

ніж це було при плоскій поверхні. Причому знову ж чим менший радіус кривизни поверхні R , тим менший додатковий тиск.

Продовження додатка Б

Для вигнутої поверхні рідини Лапласом було отримано наступне співвідношення між внутрішнім тиском P_i і нормальним тиском для плоскої поверхні P_s :

$$P_i = P_s \pm \frac{2\sigma}{R}, \quad (\text{Б.7})$$

де P_i – внутрішній тиск;

P_s – нормальний тиск для плоскої поверхні;

R – радіус кривизни вигнутої поверхні;

σ – коефіцієнт поверхневого натягу.

Як бачимо з формули, додатковий тиск залежить від величини поверхневого натягу й від радіуса сферичної поверхні.

Для опуклої поверхні радіус кривизни додатний:

$$P_i = P_s + \frac{2\sigma}{R}, \quad (\text{Б.8})$$

для ввігнутої – від'ємний:

$$P_i = P_s - \frac{2\sigma}{R}. \quad (\text{Б.9})$$

При радіусі R , який прагне до нескінченності, величини тисків рівні. За наявності сферичної поверхні радіуса R між точкою поблизу поверхні і сферою, що перебуває в центрі, виникає різниця тисків. Варто пам'ятати, що при малих радіусах вона може досягати значних величин:

$$P_{\text{вн}} - P_{\text{зовн}} = \frac{2\sigma}{R}. \quad (\text{Б.10})$$

З явищем змочування й незмочування пов'язане явище капілярності: при капілярності рідина піднімається або опускається в трубках малого діаметра – капілярах (вузькі трубочки одержали назву від латинського слова «капілтус» – волосся). У своєму житті ми часто стикаємося з подібним явищем, коли маємо справу з тілами, пронизаними безліччю

дрібних каналів (папір, пряжа, будівельні матеріали, дерево і т. д.). Стикаючись із водою або іншими рідинами, такі тіла дуже часто всмоктують їх у себе.

Продовження додатка Б

На цьому явищі заснована дія рушника. Промокальний папір, як пористе тіло, «всмоктує» у себе, піднімаючи вгору, чорнило.

Розглянемо, що відбудеться, якщо капілярну трубочку радіусом R опустити в рідину (рис. Б.6). Якщо рідина змочує стінки трубки, то вона підніметься по стінках трубки над рівнем рідини в посудині й притому тим вище, чим вужча трубка. Якщо рідина не змочує стінки, то, навпаки, рівень рідини в трубці встановлюється нижче, ніж у широкій посудині.

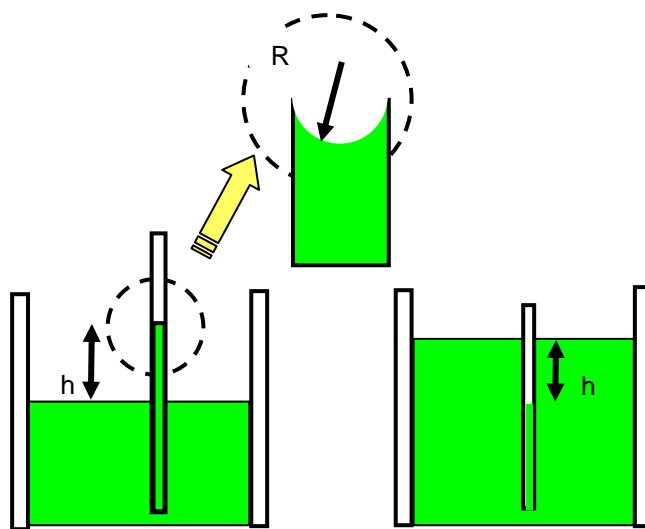


Рис. Б.6. Піднімання (опускання) рідини в капілярах для випадків змочування (незмочування)

Пояснення цього явища полягає в наступному. Під увігнутим меніском, як зазначалося раніше, тиск рідини менший, ніж під плоским. А це веде до того, що у випадку ввігнутого меніска рідина піднімається вгору доти, поки гідростатичний тиск не компенсує різниці тисків. Під опуклим меніском тиск більший, ніж під плоским, і це приводить до опускання рідини в капілярі.

Визначимо висоту h піднімання (або опускання) рідини в капілярі радіусом R . Відповідно до висновку Лапласа безпосередньо під увігнутим меніском тиск рідини менший від атмосферного на величину $\frac{2\sigma}{R}$, тобто дорівнює $P_i = P_{AT} - \frac{2\sigma}{R}$. На глибині h , що відповідає рівню рідини в широкій посудині, до цього тиску додається гідростатичний тиск стовпа рідини $P = \rho gh$. У широкій посудині, на тому ж рівні, тобто

безпосередньо під плоскою поверхнею рідини, тиск дорівнює атмосферному тиску P_{AT} . Рідина в капілярі перебуває в рівновазі, якщо її тиск дорівнює атмосферному. Отже:

Продовження додатка Б

$$P_{AT} - \frac{2\sigma}{R} + \rho gh = P_{AT}. \quad (\text{Б.11})$$

Звідси:

$$h = \frac{2\sigma}{\rho g R}. \quad (\text{Б.12})$$

Таким чином, висота підняття рідини в капілярі пропорційна її поверхневому натягу й обернено пропорційна радіусу каналу капіляра й густини рідини (закон Жюрена).

Для осіб, що вивчають традиційні технології й інноваційні рішення у всіх фазах поліграфічного виробництва, корисним може виявитися наступний додатковий матеріал.

За певних умов можна одержувати так звані гетеросистеми, аналогічні до розчинів, з речовин, практично нерозчинних у даній рідині. Відомі, наприклад, зовсім прозорі водяні розчини золота. Утворення таких гетерогенних систем звичайно пов'язане з дуже великим ступенем штучного роздрібнення – дисперсністю речовини. При дуже сильному подрібненні практично нерозчинні речовини (метали, оксиди важких металів) дають у рідинах системи, за зовнішнім виглядом аналогічні розчинам. Їх часто називають золями. Щоб показати, в якому розчиннику – дисперсійному середовищі – перебуває диспергирована речовина – дисперсійна фаза, часто перед словом «золь» ставлять назву середовища. Наприклад, водяний розчин гідроокису заліза називають гідрозолем (від грецького слова гідро – вода) гідрооксиду заліза. У загальному випадку можна мати справу з дисперсійними системами, що складаються з диспергированої речовини, що перебуває не тільки в рідкому середовищі, але й газоподібному, твердому. Із цієї причини домовимося надалі називати подрібнену фазу дисперсійною фазою, а середовище, де вона перебуває, дисперсійним середовищем. Тоді, у першому наближенні, дисперсні системи можна розбити на групи, згідно з табл. Б.2.

З метою спрощення вважають, що дисперсна фаза розбита на окремі частки, які за формою близькі до еквівалентних куль. Тоді ступенем дисперсності системи Δ (або простіше «дисперсністю») можна вважати величину, обернену діаметру умовної кулястої частки, вимірюваної в сантиметрах.

Продовження додатка Б

Наприклад, атомна й молекулярна дисперсність буде порядку 10^8 , тому що поперечник молекул – 10^{-8} см.

Таблиця Б.2

Дисперсні системи

Дисперсійне середовище (де перебуває)	Дисперсійна фаза (що подрібнено)	Назва системи
Газ	Рідина	Аерозоль, туман
Газ	Тверде тіло	Пил, аерозоль
Рідина	Рідина	Емульсії
Рідина	Газ	Піна
Рідина	Тверде тіло	Суспензії, ліозолі
Тверде тіло	Газ	Пористі тіла, тверді піни
Тверде тіло	Рідина	Тверді емульсії
Тверде тіло	Тверде тіло	Тверді суспензії, сідери

Дисперсність у межах $10^5 - 10^3$ належить до мікроскопічної (частки помітні під мікроскопом). Зона в межах від 10^7 до 10^5 належить до колоїдної дисперсності. Золі мають різноманітне забарвлення. Тому вони входять до складу багатьох друкованих фарб як барвники (у вигляді часток пігментів з розмірами від 0,1 мкм до 2 мкм або барвників).

При цьому треба мати на увазі наступне.

Якщо тверде тіло перетворити в тонкий порошок і внести в змочувальну рідину, то окремі частки будуть відділені одна від одної рідинними шарами, міцно з ними пов'язаними. Завдяки цьому ліофільні дисперсні системи будуть стійкими.

Ліофільні частки оточені рідинною сферою й злипнутися одна з одною не можуть. Подібна ситуація характерна для барвників, у яких майже кожна молекула оточена розчинником. Барвники при цьому безпосередньо пов'язуються з поверхнею матеріалу, на якому друкують.

У ліофобних системах цього спостерігатися не буде.

Закінчення додатка Б

Дисперсійні частки ліофобних систем легко мимовільно злипаються – коагулюють в агрегати (агломерують).

Подібна ситуація має місце в разі використання більш дешевих і світлостійких порівняно з барвниками пігментних фарб. Із цієї причини в пігментовані фарби повинні додаватися диспергатори для того, щоб частки не могли злипнутися. Використовують також зв'язувальні речовини, у яких пігменти тонко диспергують.

Оболонка з ліофільної зв'язувальної речовини, що оточує частки пігменту, захищає їх від контактів один з одним, що приводить до об'єднання в агломерати.

Зі зміною ступеня дисперсності Δ змінюються властивості гетерогенної системи. Для певних інтервалів дисперсності характерні свої властивості.

Бланк оформлення звіту

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

**Лабораторна робота №
з навчальної дисципліни «ФІЗИКА»**

(назва роботи)

Виконав студент _____ № гр.

(підпис, ініціали, прізвище)

Харків, ХНЕУ, 200_

РОБОТА

« _____ » _____ 200 р.
(дата виконання роботи)

Склад бригади

1. _____
2. _____
3. _____

Мета роботи

Програма роботи

Схема дослідження, параметри та теоретичні співвідношення

Вимірювання _____ та розрахунок параметрів

Таблиця 1.1

Найменування, умовне позначення, одиниці вимірювання досліджуваних фізичних величин	Числові значення досліджуваних величин						середнє

Розрахунок

Визначення

Висновки

« _____ » _____ 200 р.
(дата оформлення звіту)

(підпис студента)

Результати контрольного опитування

Робота зарахована

« _____ » _____ 200 р.

(підпис викладача)

Зміст

Вступ	3
Лабораторна робота №1. Вимірювання фізичних величин, математичні методи обробки й похибки результатів вимірювань	5
Модуль 1. Основи класичної механіки. Коливання механічних систем	22
Лабораторна робота №2. Вивчення законів кінематики й динаміки поступального руху на приладі Атвуда	22
Лабораторна робота №3. Вивчення процесу зіткнення тіл	36
Лабораторна робота №4. Вивчення законів коливного руху за допомогою математичного й фізичного маятників	44
Лабораторна робота №5. Визначення моменту інерції тіла	55
Лабораторна робота №6. Вивчення невільних коливань	75
Лабораторна робота №7. Визначення швидкості польоту тіла методом балістичного крутильного маятника	94
Лабораторна робота №8. Дослідження прецесії гіроскопа і визначення кутової швидкості його обертання	106
Модуль 2. Молекулярна фізика та термодинаміка	115
Лабораторна робота №9. Вивчення руху тіл у рідинах і газах. Визначення коефіцієнта внутрішнього тертя рідини методом Стокса	115
Лабораторна робота №10. Вивчення властивостей та структури рідини й визначення коефіцієнта поверхневого натягу рідини	131
Лабораторна робота №11. Визначення відношення теплоємностей газу c_p/c_v методом стоячих звукових хвиль	140
Лабораторна робота №12. Визначення коефіцієнта в'язкості, довжини вільного пробігу й ефективного діаметра молекул повітря	150
Рекомендована література	158
Додатки	159

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації
до виконання лабораторних робіт
з навчальної дисципліни
"ФІЗИКА"

для студентів напрямів підготовки "Комп'ютерні науки",
"Видавничо-поліграфічна справа"
денної форми навчання

Укладачі: **Бондаренко Олена Олексіївна**
Батрак Анатолій Григорович
Вдов'янков Володимир Юрійович
Гоков Олександр Михайлович
Жидко Євген Анатолійович

Відповідальний за випуск **Лапта С. І.**

Редактор **Новицька О. С.**

Коректор **Новицька О. С.**

План 2008 р. Поз. №253

Підп. до друку *45 44 444* Формат 60 × 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 13,25. Обл.-вид. арк. 16,56. Тираж *444* прим. Зам. № *444*

Видавець і виготівник — видавництво ХНЕУ, 61001, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк №481 від 13.06.2001 р.

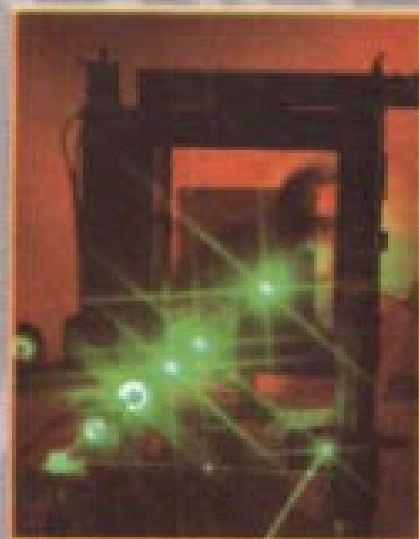
Бондаренко О.О.
Батрак А.Г.
Вдов'яков В.Ю.
Гоков О.М.
Жидко Є.А.

Методичні рекомендації
до виконання лабораторних робіт
з навчальної дисципліни

«ФІЗИКА»

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Подано опис лабораторних робіт з даної навчальної дисципліни та методичні рекомендації до кожної роботи, які містять: основні теоретичні відомості про явища, які вивчаються; основні фізичні закони, що їх описують; опис експериментальної установки та методики експерименту; контрольні запитання для самоконтролю. Наведено додатки, зразок оформлення звіту, а також перелік рекомендованої літератури.



ВИДАВНИЦТВО ХНЕУ

ХАРКІВ 2008