

УДК 621.

В. Г. Шкурупий, Ф.В. Новиков, докт. техн. наук, Харьков, Украина

ОБОСНОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ РЕЖИМОВ АБРАЗИВНОЙ ОБРАБОТКИ ПРУЖИННЫХ ШТАНГ ИЗ ЛЕНТ ХРОМОНИКЕЛЕВЫХ И МЕДНО-БЕРИЛЛИЕВЫХ СПЛАВОВ

On the basis of methods of the theory of thin-walled cores torsion and longitudinal compression of tubular elements from tapes is considered at their machining.

Детали из тонких лент можно отнести к особо тонкостенным оболочкам.

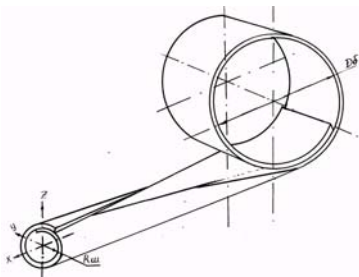


Рисунок 1 - Штанга трубчатая из ленты.

Штанга длиной 25 м, изготовленная из ленты толщиной 0,15 мм, относится к особо тонкостенным стержням независимо от конфигурации поперечного сечения, рис.1. К поверхностям таких деталей предъявляются очень высокие требования: максимальные значения излучательной способности при минимальных значениях поглощательной способности. При их механической обработке возникает необходимость регулирования и управления силовыми воздействиями в зоне обработки. В этих условиях наиболее приемлемой является абразивная обработка, которая может быть реализована при незначительных силовых воздействиях.

Известны работы [1, 2, 3] по расчету ленточных пружин на основе теории оболочек, однако в этих работах не рассматривается обоснование предельных значений параметров режимов их механической обработки. Обработка трубчатых заготовок штанг осуществляется по планетарной схеме, рис 2. Интервалы варьирования отношений окружных скоростей абразивных кругов при вращении вокруг собственной оси и оси изделия, собственно значений окружных скоростей, а также значения скорости подачи заготовки и давления инструмента будут ограничиваться потерей устойчивости пружинной ленты при действии возникающих в процессе обработки сил. В научно-технической литературе отсутствует методика с обоснованием крити-

ческих параметров режимов абразивной обработки тонкостенных оболочек. В этих работах не рассматривается обоснование предельных значений параметров режимов их механической обработки. Обработка трубчатых заготовок штанг осуществляется по планетарной схеме, рис 2. Интервалы варьирования отношений окружных скоростей абразивных кругов при вращении вокруг собственной оси и оси изделия, собственно значений окружных скоростей, а также значения скорости подачи заготовки и давления инструмента будут ограничиваться потерей устойчивости пружинной ленты при действии возникающих в процессе обработки сил. В научно-технической литературе отсутствует методика с обоснованием крити-

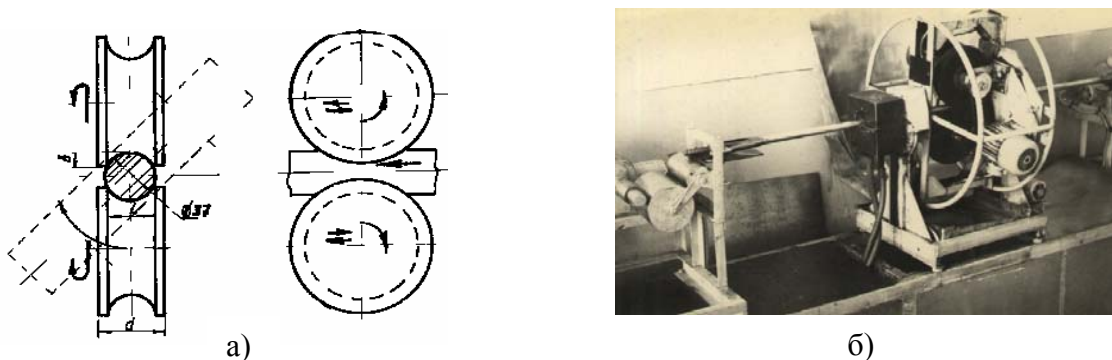


Рисунок 2 - Схема рабочей головки (а) и установка для абразивной обработки (б) трубчатых элементов из лент [4].

ческих значений параметров режимов для подобных условий обработки.

Особенность тонкостенных трубчатых заготовок с незамкнутым сечением состоит в том, что они могут при кручении испытывать деформации от продольных удлинений (действие нормальных продольных напряжений). Нормальные продольные напряжения, возникающие вследствие депланации сечения, могут достигать больших значений. Поэтому целью работы является разработка модели изгибно-крутильного состояния трубчатой заготовки из ленты для оценки предельных значений параметров режимов их абразивной обработки.

Рассмотрим два возможных в процессе обработки состояния: кручение и продольное сжатие. При кручении обрабатываемые заготовки характеризуются небольшой жёсткостью. Свободное кручение имеет место при нестеснённой депланации сечений. В этом случае распределение касательных напряжений во всех сечениях остаётся одинаковым. Расстояние между сечениями вдоль любой образующей при свободном кручении не изменяется и, следовательно, в сечениях не возникает нормальных напряжений. Касательные напряжения чистого кручения τ_k приводят к парам, складывающимся в сумму моментов внутренних сил [6]:

$$\sum M_{\text{ч}} = M_k; \quad \tau_k = \frac{M_k}{I_k} \cdot t = \frac{M_k}{W_k}, \quad (1)$$

где M_k – момент чистого кручения; I_k – момент инерции при кручении $\sim 0,3BS^3$; W_k – момент сопротивления при кручении $\sim 0,3BS^2$; t – толщина стенки сечения в рассматриваемой точке; B – ширина развертки; S – толщина штанги.

При свободном кручении касательные напряжения в пределах толщины стенки направлены в противоположные стороны вдоль средней линии поперечного сечения. Максимальные касательные напряжения будут возникать в более толстых местах сечения. Если свободная депланация сечений заготовки невозможна, такой вид кручения (стеснённый) сопровождается изгибом отдельных элементов заготовки. При этом расстояния между отдельными точками сечений изменяются, т. е. изменяются длины продольных волокон, возникают нормальные продольные напряжения. При стеснённом кручении появляются дополнительные касательные напряжения от действия поперечных сил (секторальные касательные напряжения τ_{ω}). В соответствии с гипотезой теории тонкостенных оболочек, материал на срединных поверхностях заготовки при стеснённом кручении не претерпевает сдвигов, контуры сечений не изменяются. Возникающие при этом напряжения τ_k , τ_{ω} и σ_{ω} вычисляются по формулам:

$$\tau_k = \frac{M_k}{I_k} \cdot S; \quad \tau_{\omega} = \frac{M_{\omega} \cdot S_{\omega}}{t \cdot I_{\omega}}; \quad \sigma_{\omega} = \frac{B \cdot \omega}{I_{\omega}}, \quad (2)$$

где M_K – момент чистого кручения; M_ω – изгибно-крутящий момент; S_ω – секторальный статический момент отсечённой части; I_ω – секторальный момент инерции; ω – секторальная площадь; B – изгибно-крутящий бимомент;

$$M_K = G \cdot I_K \cdot \varphi'; \quad B = -E \cdot I_\omega \cdot \varphi''; \quad M_\omega = -E \cdot I_\omega \cdot \varphi'''; \quad (3)$$

$$\omega = \int_s r \cdot ds; \quad S_\omega^0 = \int_{\text{Фотсеч}} \omega \cdot dF; \quad I_\omega = \int_F \omega^2 \cdot dF.$$

Дифференциальное уравнение углов закручивания φ для изгибного кручения:

$$E \cdot I_\omega \cdot \varphi^{IV} - G \cdot I_K \cdot \varphi^{II} + m = 0, \quad (4)$$

где m – интенсивность изменения внешнего крутящего момента.

Общий интеграл неоднородного дифференциального уравнения описывается:

$$\varphi = C_1 + C_2 \cdot z + C_3 \cdot \text{shk} \cdot z + C_4 \cdot \text{chk} \cdot z + \varphi_A(z), \quad (5)$$

где z – ось аппликата, направленная вдоль заготовки; $k = \sqrt{\frac{G \cdot I_K}{E \cdot I_\omega}}$ – изгибно-кру-

тильная характеристика заготовки; C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные постоянные, определяемые из граничных условий; $\varphi_A(z)$ – частное решение неоднородного уравнения, подбираемое в зависимости от вида нагрузки.

Зависимостями (1)-(5) определяется напряжённо-деформированное состояние металла при изгибном кручении тонкостенной трубки [7]. Рассмотрим кручение тонкостенной заготовки с незамкнутым сечением при нагрузке крутящим моментом $M_{кр}$ на одном торце и следующих условиях закрепления: 1) в закреплении возможна депланация и невозможен поворот сечения; 2) в закреплении невозможны депланация и поворот сечения; 3) в заделке депланация невозможна, в закреплении невозможны депланация и поворот сечения.

Жёсткость при кручении [7] равна отношению внешнего крутящего момента $M_{кр}$ к относительному углу закручивания $d\varphi/dz$. При стеснённом кручении относительный угол закручивания $d\varphi/dz$ зависит от аппликаты z , поэтому необходимо пользоваться усреднённым по длине относительным углом закручивания:

$$\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{cp} = \frac{1}{\ell} \int_0^\ell \frac{d\varphi}{dz} dz = \frac{\varphi(\ell)}{\ell}, \quad \text{где } \varphi(\ell) \text{ - угол закручивания торцового сечения тонко-$$

стенной заготовки. Жесткость G при стеснённом кручении равна:

$$G = \frac{M}{\left(\frac{d\varphi}{dz}\right)_{cp}} = \frac{M \cdot \ell}{\varphi(\ell)}. \quad (6)$$

При нагрузке заготовки сосредоточенным внешним крутящим моментом $M_{кр}$ его интенсивность изменения m равна нулю, дифференциальное уравнение углов закручивания (4) является однородным, тогда $\varphi_A(z) = 0$.

При закреплении 1) краевые условия имеют вид:

$$\text{при } z = 0, \varphi = 0, \varphi^I = 0; \quad \text{при } z = \ell, \varphi'' = 0, \varphi''' - k^2 \varphi^I = -\frac{M}{E I_\omega}. \quad (7)$$

Из зависимостей (5) и (7) имеем: $C_1 = C_3 = C_4 = 0$; $C_2 = \frac{M}{G \cdot I_k}$. Тогда из зависимостей (3), (5), (6), (7) следует:

$$\varphi = \frac{Mz}{GI_k}, M_k = M, B=0, M_\omega = 0, G I = \frac{M \ell}{\varphi(\ell)} = GI_k. \quad (8)$$

При закреплении 2) краевые условия имеют вид:

$$\text{при } z = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi^I = 0; \quad \text{при } z = \ell, \quad \varphi^{II} = 0, \quad \varphi^{III} - k^2 \varphi^I = -\frac{M}{EI_\omega}. \quad (9)$$

Значения постоянных C_i определяются:

$$C_1 = \frac{M \cdot thk \cdot \ell}{k^3 EI_\omega}; \quad C_2 = -\frac{M}{k^2 EI_\omega}; \quad C_3 = \frac{M}{k^2 \cdot E \cdot I_\omega}; \quad C_4 = -\frac{M \cdot thk \cdot \ell}{k^2 \cdot E \cdot I_\omega}.$$

$$\text{Угол закручивания } \varphi = \frac{M}{k^2 \cdot E \cdot I_\omega chkl} [k \cdot z \cdot chk \cdot \ell - Shk \cdot \ell + Shk(\ell - z)];$$

$$M_k = \left[1 - \frac{chk(\ell - z)}{chk \cdot \ell} \right]; \quad B = -\frac{M}{k} \cdot \frac{Shk(\ell - z)}{chk \cdot \ell};$$

$$M_\omega = M \frac{chk(\ell - z)}{chk \cdot \ell}; \quad G_2 = \frac{M\ell}{\varphi(\ell)} = \frac{G \cdot I_k}{1 - \frac{thkl}{kl}}. \quad (10)$$

При закреплении 3) краевые условия имеют вид:

$$\text{при } z = 0, \quad \varphi = 0, \quad \varphi^I = 0; \quad \text{при } z = \ell, \quad \varphi'' = 0, \quad \varphi''' = \frac{M}{E \cdot I_\omega}. \quad \text{Тогда}$$

$$C_1 = \frac{M \cdot (1 - chkl)}{k^3 EI_\omega \cdot shk\ell}; \quad C_2 = \frac{M}{k^2 EI_\omega}; \quad C_3 = -\frac{M}{k^3 EI_\omega}; \quad C_4 = \frac{M(chkl - 1)}{k^3 EI_\omega \cdot shk\ell}. \quad (11)$$

$$\text{Угол закручивания } \varphi = \frac{M}{k^3 EI_\omega} \left[kz - shkz + \frac{1 - chkl}{shkl} (1 - chkz) \right];$$

$$M_k = \left[1 - chkz - \frac{(1 - chkl)}{shkl} shkz \right]; \quad B = \frac{M}{k} \left[shkz + \frac{1 - chkl}{shkl} chkz \right]; \quad (12)$$

$$M_\omega = M \left[chkz + \frac{(1 - chkl)}{shkl} shkz \right]; \quad G_3 = \frac{M \cdot \ell}{\varphi(\ell)} = \frac{G \cdot I_k}{\left(1 - \frac{2}{kl} th \frac{kl}{2} \right)}.$$

Учитывая, что th при положительных значениях аргумента близок к единице, должно выполняться неравенство $G_3 > G_2 > G_1$ (сопоставление зависимостей (8), (10), (12)). Поэтому с ужесточением условий закрепления жесткость заготовки на кручение возрастает.

Для определения жесткостей при кручении по зависимостям (8), (10) и (12) необходимо вычислить момент инерции при кручении I_k , секторальный момент инерции I_ω и изгибно-крутильную характеристику трубчатой заготовки k . Рас-

смотрим на примере сектора кругового кольца. (При обработке заготовки на оправке ленту разворачивают до соприкосновения кромок). Площадь поперечного сечения $F = bS = 2R\alpha S$. Координаты условного центра тяжести сектора кругового кольца с внешним r_1 и внутренним r_2 радиусом равны:

$$b_x = 0; \quad b_y = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sin \alpha}{\alpha} \cdot \frac{(r_1^3 - r_2^3)}{(r_1^2 - r_2^2)}; \quad (13)$$

$$\text{где } r_1 = R + \frac{S}{2}; \quad r_2 = R - \frac{S}{2}.$$

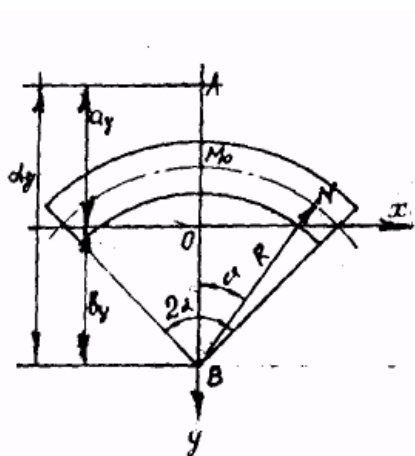


Рисунок 3 - Схема расположения координатных осей по сечению заготовки: R - радиус дуги срединной линии сечения заготовки; S - толщина стенки сечения заготовки; α - половина центрального угла.

После преобразований значений координат:

$$b_x = 0; \quad b_y \approx R \frac{\sin \alpha}{\alpha}. \quad (14)$$

$$\text{Полярный момент инерции: } I_p = \frac{\alpha}{2} (r_1^4 - r_2^4). \quad (15)$$

С учётом зависимости (13), получим: $I_p \approx 2R^3\alpha S$.

$$\text{Элемент } dF = RSdv, \quad x = R \sin v. \quad (16)$$

Пренебрегая моментом инерции элемента $dF = tdS$ относительно касательной к дуге контура сечения по сравнению с моментом инерции всего сечения, можно записать: $I_y = \int_F x^2 dF$. С учётом

зависимости (16) получим:

$$I_y = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^3 t \sin^2 v dv = R^3 S (\alpha - \sin \alpha \cos \alpha). \quad (17)$$

Момент инерции I_x' относительно оси, проходящей через геометрический центр сечения B параллельно оси X , найдём из зависимостей (16) и (17):

$$I_x^1 = I_p - I_y = R^3 S (\alpha + \sin \alpha \cos \alpha). \quad (18)$$

Главный центральный момент инерции сечения определяется:

$$I_x = I_x' - b_y^2 F = R^3 S \left(\alpha + \sin \alpha \cos \alpha - \frac{2 \sin^2 \alpha}{\alpha} \right). \quad (19)$$

Определим координаты центра изгиба А. Выберем полюс В вспомогательной секторальной площади в геометрическом центре сечения. Начало отсчёта секторальной площади ω_B возьмём в точке M_0 пересечения оси симметрии с линией контура. Обозначая через V центральный угол, определяющий на контуре точку M с текущей координатой S , имеем: $S = RV$; $y = b_y - R \cos V$; $\omega_B = R^2 V$.

Тогда секторально-линейные статистические моменты определяются:

$$S_{W_{Bx}} = \int_F x w_B dF = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^4 t V \sin V dV = R^4 t [\sin V - V \cos V] /_{-\alpha}^{\alpha} = 2R^4 t (\sin \alpha - \alpha \cos \alpha),$$

$$S_{W_{By}} = \int_F y w_B dF = \int_{-\alpha}^{\alpha} R^3 t (b_y - R \cos V) V dV = R^3 t \left[\frac{b_y}{2} V^2 - R (\cos V - V \sin V) \right] /_{-\alpha}^{\alpha} = 0. \quad (20)$$

Координаты α_x и α_y центра изгиба при начале координат в геометрическом

центре сечения равны: $\alpha_x = a_x - b_x = \frac{S_{W_{By}}}{I_x}$; $\alpha_y = a_y - b_y = -\frac{S_{W_{Bx}}}{I_y}$. (21)

Из (17), (19)-(21) следует: $\alpha_x = 0$; $\alpha_y = -2R \frac{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)}$. (22)

Из зависимости (22) следует, что центр изгиба находится на оси симметрии. Расстояние по оси симметрии от центра изгиба до геометрического центра сечения, совпадающего с полюсом В, определяется зависимостью (22). С учетом (14), (21),

(22) получим: $a_x = b_x + \alpha_x = 0$; $a_y = \alpha_y + b_y = R \left[\frac{\sin \alpha}{\alpha} - 2 \frac{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right]$.

Координаты центра изгиба a_x и a_y определяются как функции угла α . Центр изгиба находится вне дуги срединной линии сечения, т.е. $a_y < 0$. Для построения эпюры главных секторальных площадей необходимо знать положения главных секторальных точек: главного секторального полюса и главной нулевой секторальной точки. Главным секторальным полюсом будем считать центр изгиба А. Главная нулевая секторальная точка находится в кратчайшем расстоянии от центра изгиба А. Если сечение имеет ось симметрии, то главная нулевая секторальная точка лежит на пересечении этой оси со срединной линией сечения, а это точка (M_0).

Эпюру главных секторальных площадей ω определим по формуле перехода при перенесении полюса из точки В в точку А: $\omega = \omega_B = \alpha_y x - \alpha_x y + c$, где ω_B - секторальная площадь, полученная из полюса В; c - произвольная постоянная, зависящая от выбора начала отсчёта дуги S . С учетом (16) и (22), получим:

$$\omega = R^2 \left[V - 2 \frac{(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)}{(\alpha - \sin \alpha \cos \alpha)} \sin V \right] + c.$$

Из условия $\omega = 0$ при $V = 0$ определяем произвольную постоянную $c=0$. Значения главной секторальной площади ω (мм²) для трубчатой заготовки радиусом 20 мм приведены в табл. 1.

Таблица 1 - Главная секторальная площадь ω , мм².

№ п/п	1	2	3	4	5	6	7	8	9
V,град	0	10	20	30	40	50	60	70	71°37'11"
R=20мм, $\alpha = 71^\circ 37' 11''$	0	-11,3	-20,0	-24,0	-20,8	-8,56	14,6	50,0	57,0

Определим параметры I_ω , I_k , k :

$$I_\omega = \int_F \omega^2 dF = R^5 \int_{-\alpha}^{\alpha} \left[V - 2 \frac{\sin \alpha - \alpha \cos \alpha}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \sin V \right] dV = \quad (23)$$

$$= \frac{2}{3} R^5 S \left[\alpha^3 - \frac{6(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha} \right],$$

$$I_k = \frac{1}{3} b S^3 = \frac{2}{3} R \alpha S^3, \quad (24)$$

$$k = \sqrt{\frac{GI_k}{EI_\omega}} = \sqrt{\frac{G}{E}} \cdot \frac{S}{R^2} \cdot \sqrt{\frac{\alpha}{\alpha^3 - \frac{6(\sin \alpha - \alpha \cos \alpha)^2}{\alpha - \sin \alpha \cos \alpha}}}. \quad (25)$$

Подставляя (23) и (24) в зависимость (11), представим жесткость в виде:

$$G_1 = \frac{2}{3} GR \alpha S^3 = \frac{1}{3} GbS^3; \quad G_2 = \frac{0,3 \cdot GbS^3}{1 - \frac{thkl}{kl}}; \quad G_3 = \frac{0,3 \cdot GbS^3}{1 - \frac{2}{kl} th \frac{kl}{2}}.$$

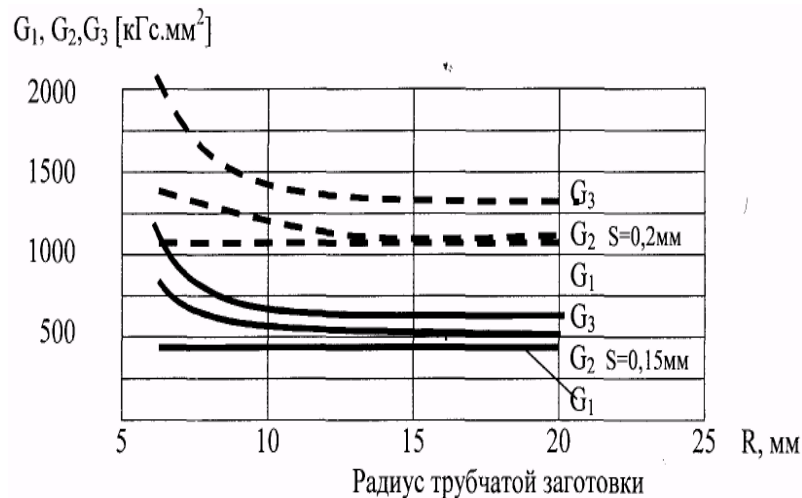


Рисунок 4 - Влияние радиуса трубчатой заготовки и ее толщины на значение жесткости (ширина развертки 50 мм).

При чистовом кручении (G_1) жесткость пропорциональна кубу толщины и не зависит от радиуса R . При стесненном кручении (G_2 и G_3) изгибно-крутильная характеристика k входит под знак th , что затрудняет анализ аналитических зависимостей. Результаты вычислений жёсткости трубчатых заготовок G_1, G_2 и G_3 , которые приведены на графике (рис. 4.), показывают, что жёсткость при кручении уменьшается с увеличением радиуса R и увеличивается с возрастанием толщины ленты S .

Рассмотрим продольное сжатие трубчатой заготовки.

В случае действия продольных сил при встречном шлифовании (полировании) может возникнуть явление закручивания. Вследствие этого становится возможным особый вид потери устойчивости, выражающийся в появлении закрученных или изогнуто-закрученных форм равновесия. Возмущённая форма равновесия характеризуется тремя функциями $U(z)$, $V(z)$ и $\varphi(z)$ и описывается системой трёх дифференциальных уравнений, которая для тонкостенной заготовки незамкнутого сечения, находящегося в условиях сложного сопротивления при центральном поперечном изгибе совместно со сжатием, имеет вид [5]:

$$\begin{cases} EI_Y \frac{d^4 u}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left[N \left(\frac{du}{dz} + a_y \frac{d\varphi}{dz} \right) \right] + \frac{d^2}{dz^2} (M_x \varphi) = 0, \\ \{ EI_x \frac{d^4 V}{dz^4} - \frac{d}{dz} \left[N \frac{dV}{dz} - a_x \frac{du}{dz} \right] + \frac{d^2}{dz^2} (M_y \varphi) = 0, \\ EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} - GI_k \frac{d^2 \varphi}{dz^2} - \frac{d}{dz} \left(r_p^2 N + 2\beta_y M_x - 2\beta_x M_y \right) \frac{d\varphi}{dz} - a_y \frac{d}{dz} \left(N \frac{du}{dz} \right) + a_x \frac{d}{dz} \left(N \frac{dV}{dz} \right) + \\ \left[q_x^0 (\ell_x - a_x) + q_y^0 (\ell_y - a_y) \right] \varphi + M_x \frac{d^2 u}{dz^2} + M_y \frac{d^2 V}{dz^2} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

где x, y – главные центральные оси поперечного сечения; z – продольная ось заготовки, которая проходит через центры тяжести её поперечных сечений; a_x, a_y – координаты центра изгиба поперечного сечения в системе осей X, Y ; ℓ_x, ℓ_y – координаты точки приложения продольной силы в системе главных центральных осей; u, V – перемещения центра изгиба сечения в направлениях осей X и Y , возникающие вследствие потери устойчивости плоской формы изгиба; φ – угол закручивания сечения; I_x, I_y – главные центральные моменты инерции поперечного сечения; EI_x, EI_y – главные жесткости при изгибе; GI_k – жесткость при свободном кручении; I_ω – секторальный момент инерции; EI_ω – секторальная жесткость;

$$r_p = \sqrt{\frac{I_k + I_y}{F} + a_x^2 + a_y^2} - \text{полярный радиус инерции поперечного сечения; } N(z) - \text{ нормальная сила; } M(x), M_y - \text{ изгибающие моменты; } q_x^0, q_y^0 - \text{ компоненты нагрузки, приходящейся на поперечную полосу; } \beta_x = \frac{T_y}{2I_y} - a_x; \quad \beta_y = \frac{T_x}{2I_x} - a_y;$$

$$T_x = \int_F y(x^2 + y^2) dF; \quad T_y = \int_F x(x^2 + y^2) dF.$$

В случае устойчивости заготовки, нагруженной продольной сжимающей силой, система уравнений (26) упрощается. Так как обработка заготовки осуществляется на оправке, то продольные силы от двух абразивных кругов (противоположно расположенных) передаются на трубчатую заготовку и проходят через нулевые секторальные точки. В этом случае внешняя бимоментная нагрузка отсутствует и опорные сечения заготовки, плоские до деформации, остаются плоскими и после деформации. Действие продольных сил выражается в передаче на заготовку осевой силы и изгибающих моментов. В поперечных сечениях действуют только нормальные напряжения, постоянные по длине (до начала потери устойчивости). При внецентренном сжатии заготовки ее упругое равновесие можно описать системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 V}{dz^2} - P(a_x - l_x) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \\ EI_x \frac{d^4 V}{dz^4} + P \frac{d^2 V}{dz^2} - P(a_x - l_x) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \\ EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + [P(r_p^2 + 2\beta_x l_x + 2\beta_y l_y) - GI_k] \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + P(a_y - l_y) \frac{d^2 u}{dz^2} - P(a_y - l_y) \frac{d^2 V}{dz^2} = 0, \end{cases} \quad (27)$$

где P – сжимающая сила, приложенная на концах заготовки.

Для центрально сжатой заготовки $l_x = l_y = 0$, тогда вместо (27) имеем:

$$\begin{cases} EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + Pa_y \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \\ EI_x \frac{d^4 V}{dz^4} + P \frac{d^2 V}{dz^2} - Pa_x \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \\ EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^4} + (Pr_p^2 - GI_k) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + P \left(a_y \frac{d^2 u}{dz^2} - a_x \frac{d^2 V}{dz^2} \right) = 0. \end{cases} \quad (28)$$

Из уравнений (26) - (28) видно, что если a_x и a_y не равны нулю, то во всех трех уравнениях члены, содержащие φ , не обращаются в нуль и потеря устойчивости таких заготовок сопровождается их закручиванием. Таким образом, тонкостенные заготовки несимметричного профиля, у которых центр изгиба не лежит ни на одной из главных осей инерции ($a_x \neq 0, a_y \neq 0$), всегда будут терять устойчивость в смешанной изгибно-крутильной форме, характеризующейся поворотом сечений относительно линии мгновенных центров вращения. Чисто изгибная форма потери устойчивости для таких заготовок вообще оказывается невозможной.

Рассмотрим устойчивость одной тонкостенной заготовки с поперечным сечением в виде кольцевого сектора (рис. 3). Пусть ось OY является осью симметрии поперечного сечения и главной центральной осью. Тогда $a_x = 0$ и для центрально сжатого стержня из (28) имеем:

$$\begin{cases} EI_y \frac{d^4 u}{dz^4} + P \frac{d^2 u}{dz^2} + Pa_y \frac{d^2 \varphi}{dz^2} = 0, \\ EI_x \frac{d^4 V}{dz^4} + P \frac{d^2 V}{dz^2} = 0, \\ EI_\omega \frac{d^4 \varphi}{dz^2} + (Pr_p^2 - GI_k) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + Pa_y \frac{d^2 u}{dz^2} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

Второе уравнение соответствует чисто изгибной форме потери устойчивости (изгиб в плоскости симметрии сечения), а два других уравнения – изгибно-крутильной форме потери устойчивости (изгиб из плоскости симметрии, сопровождаемый закручиванием сечений). Будем считать, что концевые сечения заготовки закреплены от поворотов относительно осей X и Y и свободны от крутящих моментов и сдвигающих сил. Граничные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} \text{при } z = 0, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dV}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \frac{d^3 u}{dz^3} = \frac{d^3 V}{dz^3} = \frac{d^3 \varphi}{dz^3} = 0; \\ \text{при } z = \ell, \quad \frac{du}{dz} = \frac{dV}{dz} = \frac{d\varphi}{dz} = 0, \quad \frac{d^3 u}{dz^3} = \frac{d^3 V}{dz^3} = 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Для граничных условий (30) фундаментальные решения (29) имеют вид:

$$u = A \cos \frac{n \pi z}{\ell}; V = B \cos \frac{n \pi z}{\ell}; \varphi = C \cos \frac{n \pi z}{\ell}, \quad (31)$$

где A, B, C – постоянные коэффициенты; n – целое положительное число (1, 2, 3...).

Подставляя значения (31) в уравнения (29) и вводя обозначение $\lambda = \frac{n\pi}{\ell}$, получим систему однородных уравнений для определения неизвестных A, B и C :

$$\begin{cases} \left(EI_y \lambda^2 - P \right) A - a_y PC = 0, \\ \left(EI_x \lambda^2 - P \right) B = 0, \\ \left(EI_\omega \lambda^2 + GI_k - r_p^2 P \right) C - a_y PA = 0 \end{cases} \quad (32)$$

Коэффициенты А, В и С отличны от нуля, поэтому из (32) следует:

$$EI_x \lambda^2 - P = 0, \quad (33)$$

$$\begin{vmatrix} EI_y \lambda - P & -Pa_y \\ -Pa_y & EI_\omega \lambda^2 + GI_k - r_p^2 P \end{vmatrix} = 0. \quad (34)$$

Тогда критическая сила равна: $P_k = \frac{n^2 \pi^2 EI_x}{\ell^2}$, что соответствует из-

гибу в плоскости симметрии, а решения $P = P_1$ и $P = P_2$ уравнения (32) определяют появление изгибно-крутильной формы потери устойчивости:

$$\begin{cases} P_1 = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{a_y^2}{r_p^2} \right)} \left[P_y + P_\omega - \sqrt{(P_y + P_\omega)^2 - 4P_y P_\omega \left(1 - \frac{a_y^2}{r_p^2} \right)} \right], \\ P_2 = \frac{1}{2 \left(1 - \frac{a_y^2}{r_p^2} \right)} \left[P_y + P_\omega + \sqrt{(P_y + P_\omega)^2 - 4P_y P_\omega \left(1 - \frac{a_y^2}{r_p^2} \right)} \right], \\ P_x = \frac{n^2 \pi^2 EI_x}{\ell^2}; P_y = \frac{n^2 \pi^2 EI_y}{\ell^2}; P_\omega = \frac{1}{r_p^2} \left(\frac{n^2 \pi^2 EI_\omega}{\ell^2} + GI_k \right). \end{cases}$$

Так как $P_1 < P_2$, то расчётное значение критической силы определяется как наименьшее значений P_x и P_1 . Если $P_x < P_1$, то раньше возникает изгибная форма потери устойчивости (изгиб в плоскости симметрии); если же $P_x > P_1$, то раньше наступает изгибно-крутильная форма потери устойчивости (изгиб из плоскости симметрии, сопровождаемый закручиванием сечений).

При изгибно-крутильной возмущенной форме равновесия заготовки центр поворота сечений не совпадает ни с условным центром тяжести сечения, ни с центром изгиба. Координата центра поворота сечения определяется зависимостью:

$$C_y = \frac{a_y}{1 - \frac{P}{P_y}}.$$

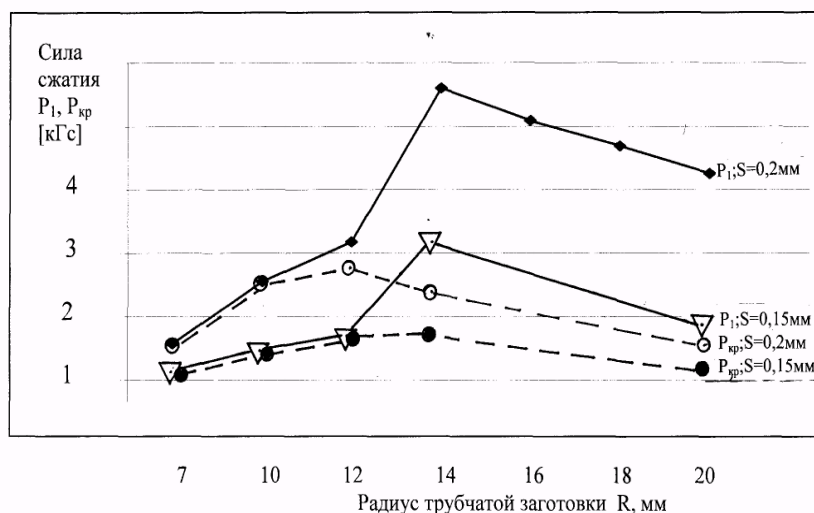


Рисунок 5 - Влияние радиуса трубчатой заготовки и ее толщины на значения критической силы сжатия (ширина развертки 50 мм).

Для проверки на устойчивость и определения интервалов варьирования значений окружных скоростей и давления инструмента были приняты геометрические размеры сечений заготовок из ленты 0,15x50 мм и 0,20x50 мм с радиусом кольцевого сечения 7, 12, 14 и 20 мм. Как видно из графика (рис. 5) при толщине ленты 0,15 мм величина силы сжатия не должна превышать для заготовки из сплава марки 36НХТЮ с размерами 0,15x50 мм значений 1,82 кГс (18Н) (для заготовки радиусом 14 мм) и 1,13 кГс (11Н) (для заготовки радиусом 20 мм). Потеря устойчивости для таких заготовок происходит в изгибной форме. Следовательно, как показывает расчет, изгибная форма потери устойчивости наступает при радиусе заготовки более 12 мм, т.е. для условий обработки на оправке радиусом 20 мм будет только изгибная форма. Сила сжатия сечения заготовки обработочными кругами не должна превышать 2 кГс (20Н) при радиусе заготовки 12 мм. С учетом этого, для абразивной обработки поверхностей трубчатых заготовок штанг из тонких пружинных лент хромоникелевых и медно-бериллиевых сплавов был рекомендован режим обработки: окружная скорость войлочных полировальников с алмазной пастой АСМ 2/1 – 20...100 м/с; удельное давление инструмента от 0 до 500 кПа.

Список литературы: 1. Бидерман В.Л. Механика тонкостенных конструкций // М.: Машиностроение. – 1977. – 488 с. 2. Бидерман В.Л. Винтовая пружина прямоугольного сечения как цилиндрическая оболочка // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. - 1963. - № 4. - С. 67-75. 3. Бидерман В.Л., Шитиков В.Н. Растяжение и кручение ленточных цилиндрических пружин при больших перемещениях // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1970. - №1. - С. 137-141. 4. Шкурупий В.Г. Особенности процессов финишной обработки светоотражательных поверхностей // Динамика элементов конструкций летательных аппаратов. Сборник научных трудов ХАИ. - 1985.- С.111-121. 5. Власов В.З. Тонкостенные упругие стержни // Избранные труды. т. 2. М., Изд-во АН СССР. - 1963. 6. Беляев Н.М. Сопротивление материалов // М.: «Наука» 1965. 7. Кан С.Н. Строительная механика оболочек // М.: Машиностроение. - 1966.