МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Методичні рекомендації і завдання для самостійної роботи за темою "Наближене обчислення визначеного інтеграла" з навчальної дисципліни

"МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТА ЛІНІЙНА АЛГЕБРА"

для студентів галузей знань 0305 "Економіка та підприємництво", 0306 "Менеджмент і адміністрування" денної форми навчання

Харків. ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.

Протокол № 2 від 09.09.2015 р.

Укладач Т. В. Сілічова

М 54 Методичні рекомендації і завдання для самостійної роботи за темою "Наближене обчислення визначеного інтеграла" із навчальної дисципліни "Математичний аналіз та лінійна алгебра" для студентів галузей знань 0305 "Економіка та підприємництво", 0306 "Менеджмент і адміністрування" денної форми навчання / уклад. Т. В. Сілічова. – Х. : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 48 с. (Укр. мов.)

Подано методичні рекомендації і завдання для самостійної роботи за темою "Наближене обчислення визначеного інтеграла", що є складовою частиною дисципліни "Математичний аналіз та лінійна алгебра". Викладено необхідний теоретичний матеріал та наведено типові приклади розв'язання задач.

Структурування наданого матеріалу та значна різноманітність типових вправ сприяють найбільш повному засвоєнню зазначеної теми. Теоретичні запитання, наведені в кінці кожного розділу, і завдання для самостійної роботи підвищують якість перевірки та закріплення здобутих знань.

Рекомендовано для студентів галузей знань 0305 "Економіка та підприємництво", 0306 "Менеджмент і адміністрування" денної форми навчання.

Вступ

Матеріал, що є викладеним у наданих методичних рекомендаціях "Наближене обчислення визначеного інтеграла" є складовою частиною дисципліни "Математичний аналіз", що належить до циклу базових дисциплін для студентів галузей знань 0305 "Економіка та підприємництво", 0306 "Менеджмент і адміністрування", та є частиною самостійної роботи студентів за темами "Визначений інтеграл та його застосування", "Ряди" зазначеної дисципліни.

Ураховуючи характер та специфіку позааудиторної самостійної роботи, спрямованої на формування певного обсягу знань студентів, надані методичні рекомендації, згідно з навчальною робочою програмою та планом-графіком самостійної роботи студентів із дисципліни "Математичний аналіз" за темами "Визначений інтеграл та його застосування", "Ряди" уміщують стисло викладений основний теоретичний матеріал, значну кількість прикладів із детальним розв'язанням, теоретичні питання та завдання для самостійної роботи.

Метою методичних рекомендацій є допомога в засвоєнні основного теоретичного матеріалу та формуванні вмінь щодо самостійного розв'язання типових задач за темою "Наближене обчислення визначеного інтеграла".

Матеріал, наведений у цих методичних рекомендаціях, структурований за двома розділами.

У першому розділі теми "Визначений інтеграл, основні властивості визначеного інтеграла" надано стислий огляд основного теоретичного матеріалу за темою "Визначений інтеграл та його застосування", наведено приклади обчислень визначеного інтеграла за формулою Ньютона – Лейбніца, що значним чином допомагає сприймати матеріал наступного розділу, присвяченого наближеним обчисленням визначеного інтеграла за темою методичних рекомендацій.

Другий розділ уміщує численну кількість різноманітних прикладів із теоретичними поясненнями, графічним ілюструванням та розв'язанням як за допомогою звичайних алгебраїчних обчислень, так і з використанням програмних методів (*MatLab*). Саме такий підхід сприяє найкращому засвоєнню матеріалу, надає можливість порівняти результати обчислень, оцінити похибки та перевагу того чи іншого методу.

Структуру і зміст методичних рекомендацій спрямовано на допомогу студентові з мінімальним використанням додаткової літератури як удосконалити вже наявні практичні та теоретичні знання за відповідною темою дисципліни "Математичний аналіз", так і набути нових.

У результаті самостійного вивчення теми "Наближене обчислення визначеного інтеграла" з дисципліни "Математичний аналіз" студент повинен **знати**:

- основний теоретичний матеріал із теми: "Визначений інтеграл та його застосування";
- засоби та методи обчислення визначеного інтеграла;
- основні прикладні напрями застосування визначеного інтегралу у задачах механіки, математики, економіки та ін.;
- суть та структуру основних методів наближених обчислень визначених інтегралів: метод оцінювання; числові методи (прямокутників, трапецій, Сімпсона);
- основний теоретичний матеріал із теми "Ряди";
- як розкладувати функції у ряди Тейлора та Маклорена;
- основний механізм застосування рядів до наближених обчислень визначених інтегралів;

уміти:

- обчислювати визначені інтеграли за формулою Ньютона – Лейбніца;
- застосовувати визначений інтеграл для розв'язання основних прикладних задач із економіки, математики та інших галузей знань;
- ілюструвати виконані обчислення (за допомогою графіків, рисунків);
- оцінювати значення визначеного інтеграла за допомогою методів диференціального числення;
- обчислювати наближене значення визначеного інтегралу, користуючись методами чисельного інтегрування (методи прямокутників, трапецій, Сімпсона); та відповідними програмними засобами (*MatLab*), знаходити похибку обчислень, аналізувати визначені результати;
- застосовувати ряди до наближених обчислень;
- самостійно використовувати під час розв'язання задач додаткову літературу;
- відповідати на контрольні запитання, які наведені в кінці кожного розділу;
- виконувати завдання для самостійного розв'язання;
- застосовувати здобуті знання у подальшому навчанні та розв'язанні практичних задач.

1. Визначений інтеграл.
Основні властивості визначеного інтеграла

До поняття визначеного інтеграла та необхідності у його обчисленні приводять декотрі математичні, економічні та фізичні задачі. Наприклад, це може бути обчислення площини плоскої фігури, визначення роботи змінної сили, знаходження шляху за вже відомою змінною швидкістю або обчислення капіталовкладень підприємства.

Слід зазначити, що *визначеним інтегралом* від функції $f(x)$ на інтервалі $[a,b]$ названо границю інтегральної суми за умови, що довжина найбільшого часткового інтервалу прямує до нуля, або $I = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$ (за умови що границя існує).

Процедуру пошуку цієї границі названо інтегруванням, а числове значення границі є визначеним інтегралом. Тоді буде отримано математичний запис визначеного інтеграла:

$$I = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx.$$

Як уже було зазначено, наслідком обчислення визначеного інтеграла є число. Причому алгебраїчне значення самого числа залежить тільки від вигляду підінтегральної функції та значень меж інтегрування (чисел a, b). Числове значення інтеграла не зміниться, якщо замість змінної x буде будь-яка інша змінна, тобто виконується така тотожність:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(t)dt = \int_a^b f(u)du.$$

Для обчислення визначених інтегралів використовуються такі теореми та властивості:

Формула Ньютона – Лейбніца.

Числове значення визначеного інтеграла дорівнює різниці значень будь-якої первісної від підінтегральної функції, обчисленої за верхньою та нижньою межами.

Або: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, *де* $F'(x) = f(x)$.

Формула Ньютона – Лейбніца є основним засобом обчислення визначеного інтеграла.

Теорема 1.1 *(про інтеграл суми)*

Інтеграл від суми кінцевого числа функцій дорівнює сумі інтегралів від складових цих функцій:

$$\int_a^b (u+v+...+w)dx = \int_a^b udx + \int_a^b vdx + ... + \int_a^b wdx,$$

де u, v, w*– функції незалежної змінної* x.

Теорема 1.2 *(про винесення постійного множника)*

Постійний множник можна виносити за знак інтеграла:

$$\int_a^b cudx = c\int_a^b udx,$$

де u *– функція аргументу;* c *– константа.*

Теорема 1.3 *(про перестановку меж інтегрування)*

Якщо верхню та нижню межі інтегрування поміняти місцями, то інтеграл змінить тільки знак:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx,$$

як наслідок цієї теореми можна визначити таке:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

Теорема 1.4 *(про розподіл інтервалу інтегрування)*

Якщо інтервал інтегрування $[a,b]$ *розподілити на дві частини* $[a,c]$ *та* $[c,b]$*, то виконується рівність:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Теорема 1.5 *(теорема про середнє)*

Середнім арифметичним значенням y_{cp} *неперервної функції* $y = f(x)$ *на інтервалі* $[a,b]$ *називають відношення визначеного інтеграла від цієї функції до довжини інтервалу:*

$$y_{cp} = \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a}.$$

Слід зазначити, що теорему про середнє широко використовують під час вирішення різноманітних задач у будь-яких професійних галузях (технічних, природничих та економічних науках).

Теорема 1.6 *(про знак інтеграла)*

Якщо підінтегральна функція в межах інтегрування $[a,b]$ *не змінює знак, то інтегралом є число того ж знака, що й підінтегральна функція.*

За допомогою визначених інтегралів обчислюється багато математичних, фізичних та економічних понять. Слід визначити декотрі з них:

- $s=\int_{t_1}^{t_2} v(t)dt$ – шлях, який пройшло тіло за період часу $\Delta t=t_2-t_1$,

якщо його швидкість змінювалась за законом $v(t)$;

- $s=\int_{a}^{b} f(x)dx$ – площа криволінійної трапеції, що є обмеженою

графіком функції , де $f(x)$ – графік функції, і $x_1=a$; $x_2=b$;

- $A=\int_{0}^{s} f(s)ds$ – робота, виконана тілом, де s – шлях, $f(s)$–

рівняння сили;

- $V=\int_{t_1}^{t_2} f(t)dt$ – обсяг виробництва за період часу $\Delta t=t_2-t_1$,

якщо $f(t)$ – виробнича функція.

1.1. Основні засоби обчислення визначених інтегралів

Слід зазначити, що в курсі математичного аналізу існують численні засоби обчислення визначених інтегралів. Усі вони ґрунтуються на основному теоретичному матеріалі у вигляді викладених основних теорем.

Обчислення визначених інтегралів відрізняється від обчислення невизначених лише необхідністю в підстановці верхньої та нижньої меж інтегрування в кінцеву функцію та обчислення їх різниці (формула Ньютона – Лейбніца).

Для кращого сприйняття матеріалу наведено декотрі приклади, щодо обчислення визначених інтегралів:

Обчислити такі визначені інтеграли:

1) $\int_1^2 x^2 dx$;

2) $\int_1^2 x \cdot e^x dx$;

3) $\int_0^{1/2} x^2 \sqrt{1-x^2} dx$.

Приклад 1.1

$\int_1^2 x^2 dx$. Інтеграл обчислюють за допомогою безпосереднього використання таблиці інтегралів (додаток А):

$$\int_1^2 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right|_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Приклад 1.2

$\int_1^2 x \cdot e^x dx$. Відповідний цьому невизначений інтеграл обчислюють за методом інтегрування частинами. Однакураховуючи, що інтеграл є визначеним та ураховуючи наявність меж інтегрування, отримано таку формулу інтегрування частинами для визначеного інтеграла:

$$\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

Позначивши $x = u, dx = du; e^x dx = dv, e^x = v$, отримано:

$$\int_1^2 x \cdot e^x dx = x \cdot e^x\Big|_1^2 - \int_1^2 e^x dx = 2e^2 - e^1 - e^x\Big|_1^2 = e^2.$$

Приклад 1.3

$\int_0^{1/2} x^2 \sqrt{1-x^2} dx$. У цьому разі слід використати заміну: $x = \sin u$. Нові межі інтегрування знайдено із рівнянь $0 = \sin u$; $\frac{1}{2} = \sin u$.

Отримано:

$$\int_0^{1/2} x^2\sqrt{1-x^2}dx = \int_0^{\pi/6} \sin^2 u \cdot \cos^2 u du = \frac{1}{4}\int_0^{\pi/6} \sin^2 2u du =$$

$$= \frac{1}{8}(u - \frac{\sin 4u}{4})\Big|_0^{\pi/6} = \frac{\pi}{48} - \frac{\sqrt{3}}{64}.$$

Очевидно, що дії з обчислення визначеного інтегралу є аналогічними як і у випадку невизначеного, різниця лише в підстановці меж інтегрування в отриманий результат. Під час обчислення визначеного інтеграла, слід пам'ятати, що коли сама процедура інтегрування містить заміну змінної, не переходять знову до старої змінної, а в ході обчислення із заміною змінної в підінтегральної функції змінюють також і межі інтегрування.

Слід зазначити, що до класу визначених інтегралів належать і інтеграли які дістали назву невласних та є охарактеризованими наявністю однієї (верхньої або нижньої) або двох нескінченних меж інтегрування. Також невласними вважають інтеграли, у котрих межі інтегрування є скінченними, але підінтегральна функція має розрив або на кінцях інтервалу, або в його середині.

Арифметичні обчислення в цьому разі нічим не відрізняються від обчислення звичайних визначених інтегралів, однак інтегральна сума існує не завжди. Тому під час обчислення невласних інтегралів основним є питання про збіжність або розбіжність інтеграла.

У разі, якщо наслідком обчислення є будь-яке числове значення, інтеграл уважають збіжним; якщо ж результатом є нескінченність, то інтеграл вважається розбіжним.

Обчислити невласні інтеграли:

1) $\int_0^{\infty} e^{-x}dx$;

2) $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x}dx$;

3) $\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3}dx$.

Приклад 1.4

$$\int_{0}^{\infty} e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_{0}^{\infty} = 0+1=1.$$

Числове значення існує і дорівнює одиниці. Даний невласний інтеграл збігається.

Приклад 1.5

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{x}dx = e^{x}\Big|_{-\infty}^{\infty} = \infty - 0 = \infty.$$

Числове значення не існує, інтеграл є розбіжним.

Із наведених прикладів очевидно, що процедура обчислення невласних інтегралів є тотожною щодо обчислення звичайних визначених інтегралів, однак ураховуючи, що завжди обчислення будь-яких визначених інтегралів зведено до формули Ньютона – Лейбніца, де завжди нижня та верхня межа інтегрування є скінченними величинами, математичний запис має такий вигляд.

Приклад 1.6

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b}\frac{1}{x^3}dx = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{2x^2}\right)\Bigg|_{0}^{b} = \lim_{b\to\infty}\left(\frac{-1}{2b^2}+\frac{1}{2\cdot 0}\right)=\infty.$$

Числового значення не існує, інтеграл є розбіжним.

Приклад 1.7

$$\int_{0}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Незважаючи, що цей інтеграл має кінцеві межі інтегрування, він є невласним, тому що підінтегральна функція на нижній межі має розрив ($x=0,\ \dfrac{1}{x\sqrt{x}}=\infty$).

$$\int_{0}^{4}\frac{dx}{x\sqrt{x}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\varepsilon}^{b}\frac{1}{x\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\frac{2}{\sqrt{x}}\right)\Bigg|_{\varepsilon}^{4} = \infty.$$

Інтеграл є розбіжним.

Приклад 1.8

$$\int_{0}^{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}}dx.$$

Цей інтеграл є також невласним, тому що на проміжку $x\in[0;9]$ у точці $x=1$ підінтегральна функція має розрив. Тоді цей інтеграл доцільно поділити на два за межами інтегрування, на проміжку $x \in [0;1) \cup (1;9]$ (теорема 1.4).

Слід виконати такі обчислення:

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} dx = \lim_{\varepsilon \to +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} + \lim_{\eta \to +0} \int_{1+\eta}^{9} \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-1)^2}} =$$

$$3 \lim_{\varepsilon \to +0} (\sqrt[3]{-\varepsilon} - \sqrt[3]{-1}) + 3 \lim_{\eta \to +0} (\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{\eta}) = 9.$$

Числове значення існує, інтеграл є збіжним.

Контрольні запитання

1. Дайте визначення визначеного інтеграла.

2. Як ви розумієте поняття " інтегральна сума" ?

3. На вашу думку, чому необхідно дотримуватись умови "довжина найбільшого часткового інтервалу прямує до нуля" в обчисленні значення інтегральної суми?

4. Назвіть основні теореми та властивості визначеного інтеграла. Які з них є однаковими для визначеного і невизначеного, а які існують тільки для визначеного інтеграла?

5. Як ви вважаєте, якщо під час обчислення визначеного інтеграла, за отримання результату в разі заміни звернутись до старої функції, та не змінювати межі інтегрування, чи буде результат помилковим?

6. Наведіть основні приклади застосування визначених інтегралів щодо обчислення деяких величин та значень у математиці, фізиці, економіці.

7. Як ви розумієте поняття невласного інтеграла? Наведіть основні типи та приклади невласних інтегралів.

8. Як ви розумієте поняття "збіжність" та "розбіжність" невласного інтеграла?

2. Наближені методи обчислення визначеного інтеграла

2.1. Оцінювання значення визначеного інтеграла за допомогою використання методів диференціального числення

Під час обчислення визначеного інтеграла часто виникають численні труднощі зі складними арифметичними підрахунками, замінами, декотрі інтеграли взагалі не можуть бути обчисленими із застосуванням звичайних математичних підстановок та елементарних функцій. Іноді за умовою задачі не є необхідним виконувати досить складні математичні обчислення, достатньо лише приблизно обчислити та оцінити проміжок у якому перебуває значення інтеграла. У цьому разі використовують методи наближеного обчислення визначених інтегралів.

Теорема 2.1. (*оцінювання значення визначеного інтеграла*)

Значення визначеного інтеграла належить інтервалу

$$[m(b-a);\, M(b-a)],$$

де m *– найменше значення підінтегральної функції* $f(x)$*,*

M *– найбільше значення на проміжку інтегрування* $[a;\, b]$*.*

Математичний запис теореми є таким:

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)\,; \qquad a<b\,.$$

Приклад 2.1. Обчислити визначений інтеграл $\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx$ за допомогою теореми про оцінювання та формули Ньютона – Лейбніца.

Порівняти визначені результати:

а) Обчислити значення цього інтеграла за допомогою теореми про оцінювання. Записати підінтегральну функцію: $y=\frac{5-x}{9-x^2}$.

Знайти її найбільше та найменше значення на інтервалі $a=0, b=2$ із застосуванням методів диференціального числення.

Обчислити похідну підінтегральної функції (додаток Б, додаток В):

$$y'=\frac{-1(9-x^2)-2x(5-x)}{(9-x^2)^2}\,.$$

За умови існування критичних точок: $y'=0$,

тоді: $y'=-9+x^2-10x+2x^2$; $y'=3x^2-10x-9$; $3x^2-10x-9=0$.

Розв'язавши квадратне рівняння, отримано:

корні рівняння $x_1=0{,}5$ та $x_2=0{,}6$ є критичними точками першого роду для відповідної підінтегральної функції $y=\dfrac{5-x}{9-x^2}$.

Слід скористатися правилом пошуку найбільшого та найменшого значення функції на заданому інтервалі. Для цього потрібно обчислити значення функції у критичних точках першого роду за умовою, що вони належать наданому інтервалу $[a,b]$, у нашому випадку $[0{,}2]$, та значення функції на кінцях інтервалу. Тобто обчислити $y(2)$; $y(0)$; $y(0{,}6)$; $y(0{,}5)$.

У наслідок виконаних обчислень визначити, що найбільшого значення функція досягає за $x=0{,}6$; найменшого – за $x=0{,}5$. За теоремою про оцінювання значення визначеного інтеграла (теорема 2.1) отримано:

$$0{,}5\cdot(2-0)<\int_0^2\frac{5-x}{9-x^2}dx<0{,}6\cdot(2-0)$$

$$1<\int_0^2\frac{5-x}{9-x^2}dx<1{,}2.$$

Таким чином, отримано межі, у яких перебуває числове значення цього інтеграла. Обчислити середнє арифметичне отриманих результатів: $\dfrac{1+1{,}2}{2}=1{,}1$.

Можна вважати, що: $\displaystyle\int_0^2\frac{5-x}{9-x^2}dx\approx1{,}1$;

б) знайти значення цього ж визначеного інтеграла із використанням звичайних засобів інтегрування. Підінтегральна функція є раціональним дробом. Тоді за методом інтегрування інтегралів від раціональних дробів отримано:

$$\frac{5-x}{9-x^2}=\frac{5-x}{(3-x)(3+x)}=\frac{A}{(3-x)}+\frac{B}{(3+x)};$$

$$A(x+3)+B(3-x)=5-x;$$

$$Ax - Bx + 3A + 3B = 5 - x;$$

$$\begin{cases} A - B = -1 \\ A + B = 5/3 \end{cases}.$$

Слід додати та відняти ці два рівняння системи, тоді буде отримано такі значення коефіцієнтів:

$$2A = 2/3; \quad A = 1/3;$$

$$-2B = -8/3; \quad B = 4/3.$$

За правилами обчислення інтегралів від раціональних дробів:

$$\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx = \int_0^2 \frac{A}{3-x}dx + \int_0^2 \frac{B}{3+x}dx;$$

$$\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx = A\ln(3-x)\Big|_0^2 + B\ln(3+x)\Big|_0^2 = \frac{1}{3}\ln 1 - \frac{1}{3}\ln 3 + \frac{4}{3}\ln 5 - \frac{4}{3}\ln 3.$$

Отримано відповідь: $\int_0^2 \frac{5-x}{9-x^2}dx \approx 1{,}047$.

Якщо умова задачі не потребує значної точності, результати обчислення за допомогою теореми про оцінювання значення інтеграла можна вважати цілком задовільними.

Так, абсолютна похибка досягає $\approx 0{,}1$.

Відносна похибка – $\frac{0{,}1 \cdot 100}{1{,}1} \approx 9\,\%$.

Приклад 2.2. Обчислити значення визначеного інтеграла, якщо:

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx \quad x \in \left[\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}\right].$$

Якщо відома поведінка функції на зазначеному інтервалі, то функцію можна не досліджувати на найбільше та найменше значення.

Задана функція є спадною на інтервалі, тому вона досягає свого найбільшого значення за $x = \frac{\pi}{4}$, найменшого за $x = \frac{\pi}{2}$.

За теоремою 2.1 отримано:

$$\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\pi/2} \cdot \frac{\pi}{4} < \int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}dx < \frac{\sin\frac{\pi}{4}}{\pi/4} \cdot \frac{\pi}{4}.$$

Значення визначеного інтеграла є заключним у межах:

$$\frac{1}{2} < \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx < \frac{1}{2}\sqrt{2}\,.$$

Нарешті, слід зазначити, що під час оцінювання значення визначеного інтеграла можна також користуватися такою теоремою (теорема 2.2) та її наслідком.

Теорема 2.2. *Якщо у кожній точці інтервала* $[a,b]$ *для кожній із наданих функцій є правильною нерівність* $\varphi(x) \le f(x) \le \psi(x)$, де $a < b$, *то* $\int\limits_a^b \varphi(x)dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b \psi(x)$.

Наслідком цієї теореми є таке ствердження: $\left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$, *а саме: модуль визначеного інтеграла не перевищує значення інтеграла від модуля функції.*

2.2. Чисельне інтегрування

У разі, коли обчислення визначеного інтеграла за допомогою замін та різноманітних перетворень є дуже складними, а іноді навіть неможливими, використовують наближені методи інтегрування, які дістали назву *чисельних*.

Сутність цих методів є в тому, що криволінійну трапецію, площею якої є значення визначеного інтеграла, розбито на численні дрібні геометричні фігури, площу кожної із котрих обчислено окремо.

Ці методи дістали назву *методу прямокутників, трапецій та методу Сімпсона*. Слід зазначити, що розрахунки, які є виконаними за цими методами не є складними за процедурою обчислення. Сама технологія ґрунтується на тому, що значення визначеного інтеграла за ознакою є границею підінтегральної суми, тобто

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i,$$

за умови, що $\Delta x \to 0$, та що *геометричним змістом визначеного інтеграла* $\int\limits_a^b f(x)dx$ є площа криволінійної трапеції з основою $[a,b]$, яка є обмеженою функцією $y = f(x)$.

Однак у багатьох випадках процедура обчислення за численністю арифметичних дій є достатньо громіздкою, і досить часто розрахунки виконують за допомогою програмних засобів.

Для більш детального розуміння методів, які безпосередньо ґрунтуються на обчисленні площ фігур, слід нагадати декотрі засоби обчислення площ криволінійних трапецій.

Так, у найпростішому випадку, якщо фігура є криволінійною трапецією з основою $[a,b]$, яка є обмеженою функцією $y = f(x)$, то її площу обчислено за формулою: $s = \int_a^b f(x)dx$ (рис. 2.1).

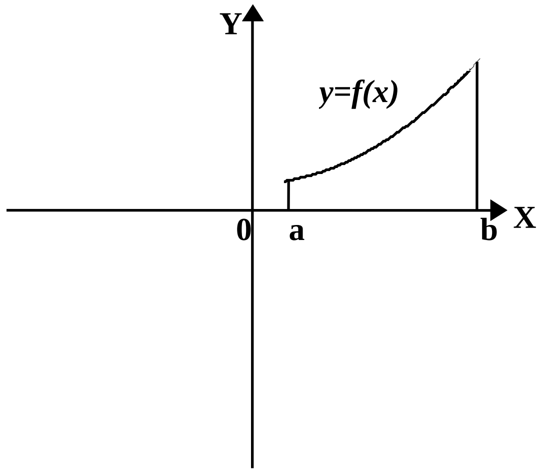

Рис. 2.1. **Площа криволінійної трапеції, обмежена функцією** $y = f(x)$

Під час розрахунків слід ураховувати, що за самою ознакою площа є завжди додатною величиною, тому у разі, якщо графік функції є розташованим під віссю Ox, площу обчислюють як абсолютну величину: $S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|$. Аналогічний випадок (від'ємна площа) може бути, якщо переплутати межі інтегрування.

У більш складному випадку, якщо фігуру розташовано між двома функціями $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$ та $y_2 > y_1$ площу знаходять за формулою: $s = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$, де a, b – точки перетину y_1 та y_2.

Слід навести приклади, що пояснюють застосування теоретичного матеріалу.

Приклад 2.3. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями: $xy = 6,\ x = 1,\ x = e,\ y = 0$.

Відповідно до графіка функції (рис. 2.2) отримано:

$$S = \int_a^b f(x)dx = \int_1^e \frac{6}{x}dx = 6\ln x\Big|_1^e = 6\cdot(\ln e - \ln 1) = 6 \text{ од.}$$

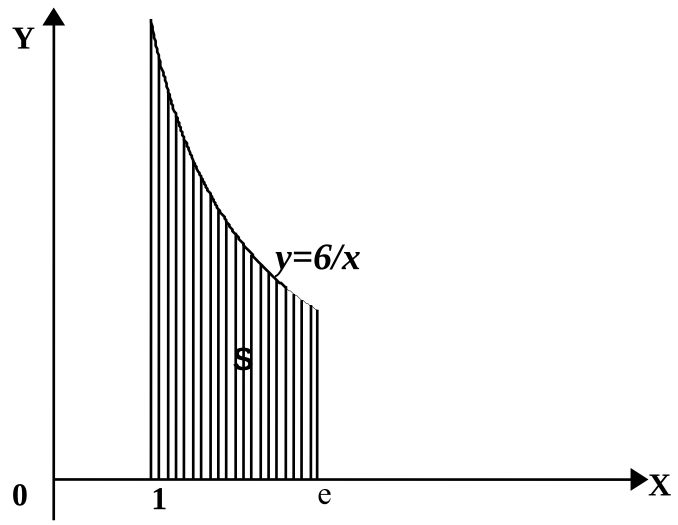

Рис. 2.2. **Площа криволінійної трапеції, обмежена функцією** $\boldsymbol{y = \frac{6}{x}}$

Приклад 2.4. Обчислити площу фігури, обмеженої лініями:

$$y_1(x) = \frac{27}{x^2+9},\ y_2(x) = \frac{x^2}{6}.$$

Слід побудувати графіки функцій y_2 та y_1 (рис. 2.3) та, розв'язуючи рівняння $y_1 = y_2$, знайти точки перетину $-3, 3$ двох функцій. Тоді за формулою $s = \int_a^b (f_2(x) - f_1(x))dx$ маємо $s = \int_{-3}^{3}\left(\frac{27}{x^2+9} - \frac{x^2}{6}\right)dx$.

Ураховуючи, що отримана фігура є симетричною відносно осі абсцис:

$$S = \int_{-3}^{3}\left(\frac{27}{x^2+9} - \frac{x^2}{6}\right)dx = 2\int_0^3\left(\frac{27}{x^2+9} - \frac{x^2}{6}\right)dx =$$

$$= 2\cdot\left(27\cdot\frac{1}{3}arctg\,\frac{x}{3}\Big|_0^3 - \frac{x^3}{18}\Big|_0^3\right) = \frac{9\cdot\pi}{2} - 3 \text{ од. кв.}$$

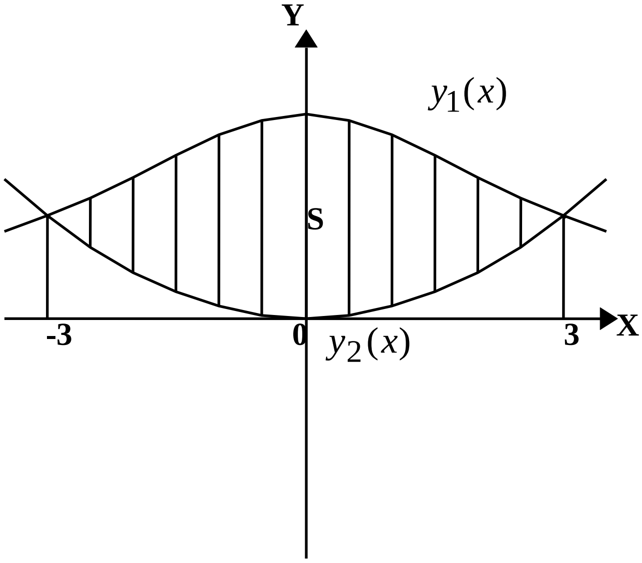

Рис. 2.3. **Площа криволінійної трапеції, обмежена функціями**

$$y_1(x)=\frac{27}{x^2+9}; \quad y_2(x)=\frac{x^2}{6}$$

Якщо визначені інтеграли використовують для обчислення об'ємів тіл обертання, то розрахунки виконують за формулами:

$V_x=\pi\cdot\int\limits_a^b y^2dx$ – об'єм тіла обертання навколо осі Ox;

$V_y=\pi\cdot\int\limits_a^b x^2dy$ – об'єм тіла обертання навколо осі Oy.

Приклад 2.5. Обчислити об'єм тіла, утвореного внаслідок обертання параболи $y=x^2$ та прямими $x=0; \quad x=2$.

Внаслідок обертання функції $y=x^2$ навколо осі Ox об'єм обчислюється за формулою:

$$V_x=\pi\cdot\int\limits_a^b y^2dx=\pi\cdot\int\limits_0^2 x^4dx=\left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2=\frac{32}{5}.$$

Якщо тіло обертається навколо осі Oy, визначається нова підінтегральна функція та нові межі інтегрування: якщо $y=x^2$, то $x=\sqrt{y}$; якщо $x=0$, $x=2$, то $y=0$, $y=4$ відповідно. Обчислити об'єм:

$$V_y=\pi\cdot\int\limits_a^b x^2dy=\pi\cdot\int\limits_0^4 ydy=\left.\frac{y^2}{2}\right|_0^4=8$$

2.2.1. Метод прямокутників

Як було зазначено, само значення визначеного інтеграла за ознакою є границею підінтегральної суми, тобто:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim \sum_{i=1}^{n} f(\zeta_i)\Delta x_i .$$

Слід розподілити інтервал інтегрування $[a, b]$ на n інтервалів та замінити криволінійну трапецію фігурою, яка є сукупністю n прямокутників таким чином, що висоти цих прямокутників дорівнюють значенням функції $y = f(x)$ в початкових або кінцевих точках цих інтервалів (*метод прямокутників*). Чим більша кількість даних інтервалів (кількість n), тим точніше результат (рис. 2.4).

Площа отриманої фігури може бути обчислена за формулами, що дістали назву *формули прямокутників*:

$$I_1 = \Delta x \cdot (y_0 + y_1 + ... + y_{n-1});$$

$$I_2 = \Delta x \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_n),$$

де Δx – довжина кожного інтервалу;

y_i – висота (ордината точки, що відповідає кожній x_i).

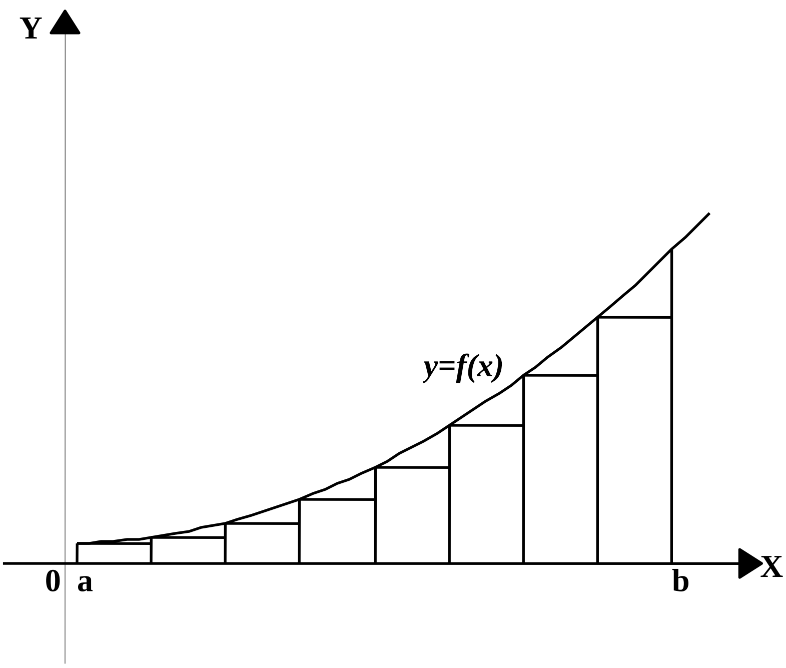

Рис. 2. 4. **Обчислення площі за методом прямокутників**

2.2.2. Метод трапецій

У разі заміни кожної частки дуги кривої $y = f(x)$ хордою площа отриманої фігури буде більш точнішою. Оскільки в цьому разі кожна з маленьких фігур, отримана внаслідок такого розподілу, є трапецією, то цей метод називається *методом трапецій.*

Відповідно до цього, формулою трапецій для обчислення значення визначеного інтеграла є:

$$I = \Delta x \cdot \left(\frac{y_0 + y_1}{2} + y_1 + ... + y_{n-1}\right).$$

Слід зазначити що між формулами трапецій та прямокутників є зв'язок:

$$I \approx \frac{I_1 + I_2}{2}.$$

Це не випадково, тому що під час обчислення площі за формулами прямокутників необхідно враховувати, що справжня площа фігури I належить інтервалу $[I_1;\ I_2]$. В цьому разі абсолютна похибка обчислень не перевищує $\Delta I \le \left|\frac{I_1 + I_2}{2}\right|$.

2.2.3. Метод Сімпсона

Метод Сімпсона є найточнішим і найскладнішим методом щодо обчислень. Суть методу в тому що кожна дуга інтервалу є заміненою дугою параболи, та в цьому разі значення інтеграла обчислено за формулами, що отримали назву формули Сімпсона:

$$I_s = \frac{\Delta x}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_{n-1} ... + y_n).$$

Як було зазначено, виконувати такі обчислення із використанням звичайних арифметичних розрахунків досить важко. Тому здебільшого реалізацію використання чисельних методів у обчисленні невизначених інтегралів доцільно здійснювати із використанням будь-яких програмно-обчислювальних засобів.

Однією з таких програм, що використовують для математичних обчислень різноманітного рівня складнощів є програмне середовище *MatLab*.

Для більшої візуалізації слід обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2}$ за методом прямокутників, трапецій та методом Сімпсона як звичайним арифметичним способом, так і за допомогою використання середовища *MatLab*. Реалізіція цих обчислень здійснена за допомогою вбудованих функцій `cumtrapz`, `trapz`.

Приклад 2.6. Обчислити $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$ як аналітично – зведенням до табличного, за допомогою методів чисельного інтегрування (прямокутників, трапецій та Сімпсона), так і за допомогою *MatLab*:

1) інтеграл є дуже простим і його обчислення може бути зведеним до безпосереднього використання табличних інтегралів та формули Ньютона – Лейбніца:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2} = arctg1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785\,398.$$

Для подальшого порівняння отриманих результатів слід обчислити даний визначений інтеграл за допомогою функції *`int.`* (використання *MatLab*).

Програма має такий вигляд:

```
>>syms x
>>y=1/(1+x*x);
>>int(y,'x',0, 1)

ans =

1/4*pi

>>format long
>> 1/4*pi

ans =

   0.78539816339745
```

Таким чином, результати обчислень є практично однаковими.

Пояснення до програми:

`syms x` – опис символьної змінної x;

`y=1/(1+x*x)` – значення (запис) підінтегральної функції;

`>>int(y,'x',0, 1)` – команда обчислення інтеграла за заданими межами інтегрування (0; 1).

2) обчислити значення цього інтеграла аналітично, використовуючи відомі методи наближених обчислень, а саме прямокутників, трапецій та метод Сімпсона.

Нехай $n = 10$, тоді $\Delta x = 0{,}1$.

Слід обчислити відповідні значення функції: $y_0 = 1$; (крок 0,1):

$$y_1 = \frac{1}{1 + (0{,}1)^2} \approx 0{,}99;$$

$$y_2 = \frac{1}{1 + (0{,}2)^2} \approx 0{,}962;$$

$$y_3 \approx 0{,}917; y_4 \approx 0{,}862;$$

$$y_5 = 0{,}8\ ; y_6 \approx 0{,}735;$$

$$y_7 \approx 0{,}671;$$

$$y_8 \approx 0{,}61; y_9 \approx 0{,}552;$$

$$y_{10} \approx 0{,}5.$$

За формулами прямокутників отримано такі значення: $I_1 \approx 0{,}760$, $I_2 \approx 0{,}810$. Якщо враховувати, що $I = \frac{I_1 + I_2}{2}$, то $I = 0{,}785$.

За формулою трапецій: $I \approx 0{,}785$.

За формулою Сімпсона: $I_s \approx 0{,}785\,3$. (Результати слід порівняти із відповіддю: $\int_0^1 \frac{dx}{1 + x^2} = arctg1 = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785\,398$.

Таким чином, похибка обчислень у цьому випадку є незначною, та метод Сімпсона дає найточніші результати.

Реалізацію наближених обчислень визначених інтегралів за методом трапецій здійснено за допомогою функцій `cumtrapz` або `trapz. Quad.`

Для обчислення визначеного інтеграла від функції $f(x)$ за межами інтегрування a та b (наприклад $\int_a^b f(x)dx$) за допомогою функції `cumtrapz` необхідно послідовно виконати такі дії:

1) задати значення аргументу (вектор x) ;

2) задати функцію;

3) викликати функцію `cumtrapz`.

Програма обчислення інтеграла за допомогою функції `cumtrapz` має вигляд:

```
>>x=0:0.1:1;
>>y=1./(1+x.*x);
>>cumtrapz(y)

ans =

  Columns 1 through 7

                 0    0.99504950495050    1.97086824067022
2.91035306776973    3.80010314685862    4.63113762961724
5.39878468844077

  Columns 8 through 11

   6.10200221706296    6.74245073564211    7.32357187834524
7.84981497226790
```

Функція `cumtrapz(y)` виконує процедуру накопичення отриманих розрахунків, тому кінцеве значення і буде відповіддю, тобто в цьому випадку це: `7.84981497226790`.

Окрім того, за замовчуванням, тобто, якщо не задавати крок інтервалу, то розрахунки виконують за умови $h=1$.

У даному випадку $h=0.1$, тому кінцевий результат згідно з формулою трапецій $I \;= \Delta x \cdot (\frac{y_0 + y_1}{2} + y_1 + ... + y_{n-1})$

або

$$I = h \cdot 7{,}849 = 0{,}784\,9.$$

За потреби більш точних даних слід збільшити кількість інтервалів. Так, у випадку $h = 0{,}01$ та $I = 0{,}7853$.

Якщо замість `cumtrapz(y)` використати функцію `cumtrapz(x,y)`, то сама функція враховує крок інтервалу і додаткових математичних розрахунків виконувати не треба.

```
>>x=0:0.1:1;
>>y=1./(1+x.*x);
>>cumtrapz(x,y)

ans =

  Columns 1 through 7
```

```
                    0      0.09950495049505     0.19708682406702
0.29103530677697        0.38001031468586          0.46311376296172
0.53987846884408

     Columns 8 through 11

     0.61020022170630      0.67424507356421      0.73235718783452
0.78498149722679
```

За умови використання функції `trapz` розрахунки є більш компактними, та немає необхідності у додаткових математичних діях.

Програма обчислення інтеграла за допомогою функції `trapz` має вигляд:

```
>>x=0:0.1:1;
>>y=1./(1+x.*x);
>>S=trapz(x,y)

S =

   0.78498149722679
```

Обчислення інтегралів за методом парабол (методом Сімпсона) виконують за допомогою функції `quad`. Програма з обчислення інтегралів за методом Сімпсона є достатньо простою в такому вигляді:

`quad('fun',a,b),`

де `fun` – підінтегральна функція;

`a,b` – межі інтегрування.

Програму з обчислення можна записати у вигляді:

```
>>y='1./(1+x.*x)';
>>quad(y,0,1)

ans =

   0.78539814924326
```

або в більш спрощеному вигляді:

```
>> quad('1./(1+x.*x)',0,1)

ans =

   0.78539814924326
```

Таким чином, очевидно, що в разі використання програмних методів обчислень метод Сімпсона дає найкращі результати.

Крім безпосереднього обчислення визначених інтегралів за допомогою чисельних методів, можна розв'язувати декотрі задачі, зміст яких зведено до обчислення інтеграла.

Приклад 2.7. Ширина річки дорівнює 20 м, а вимір глибини через кожні 2 метри є таким (табл. 2.1):

Таблиця 2.1

Данні розподілу глибини річки Y(m) залежно від її ширини X(m)

X(m)	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
Y(m)	0,2	0,5	0,9	1,1	1,3	1,7	2,1	1,5	1,1	0,6	0,2

Необхідно знайти площу перерізу річки.

За формулою трапецій:

$$S = 2\cdot(\frac{0{,}2+0{,}2}{2} + 0{,}5 + 0{,}9 + 1{,}1 + 1{,}3 + 1{,}7 + 2{,}1 + 1{,}5 + 1{,}1 + 0{,}6) = 22\ м^2.$$

За формулою Сімпсона:

$$S = \frac{2}{3}\cdot(0{,}2 + 4\cdot 0{,}5 + 2\cdot 0{,}9 + \ldots 4\cdot 0{,}6 + 0{,}2) = 21{,}9\ м^2.$$

В цьому разі оцінити похибку обчислень неможливо, тому що точне значення перерізу річки невідомо.

Обчислити дану задачу у *MatLab.*

У цьому разі, незалежно від використання функції `trapz` чи `cumtrapz`, необхідно задати вектор аргумента x та вектор функції y.

Програма має вигляд:

```
>>x=[0,2,4,6,8,10,12,14,16,18,20];
>>y=[0.2,0.5,0.9,1.1,1.3,1.7,2.1,1.5,1.1,0.6,0.2];
>>cumtrapz(x,y)

ans =

  Columns 1 through 7

                  0    0.70000000000000    2.10000000000000
4.10000000000000    6.50000000000000    9.50000000000000
13.30000000000000
```

```
   Columns 8 through 11
   16.90000000000000    19.50000000000000    21.20000000000000
22.00000000000000

>> S=trapz(x,y)

S =

   22.00000000000000
```

Приклад 2.8. Обчислити значення визначеного інтеграла $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$ за допомогою заміни змінної та методів чисельного інтегрування (Сімпсона, прямокутників, трапецій) із кроком $0{,}1$. Порівняти отримані результати.

Обчислити значення інтегралу за допомогою заміни змінної, а саме: $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$.

Заміна: $x = \sin t;\ dx = \cos t dt$.

Тоді отримано :

$$\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1+\cos 2t}{2} dt =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2} dt + \int_0^{\pi/2} \frac{\cos 2t}{2} dt = \frac{\pi}{4} + \frac{\sin 2t}{4}\Bigg|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} \approx 0{,}785713\,.$$

Обчислити інтеграл за допомогою методів чисельного інтегрування, за умовою прикладу: $\Delta x = h = \frac{1-0}{10} = 0{,}1.$

Для зручності обчислити кожне із значень аргументу та функції у вигляді таблиці даних (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Данні розподілу значення аргументу функції X та її значення У для інтеграла $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$, обчислені із кроком 0,1

№	x	y
1	2	3
$(x_0;\,y_0)$	0	1

Закінчення табл. 2.2

1	2	3
$(x_1; y_1)$	0,1	0,994 990
$(x_2; y_2)$	0,2	0,979 796
$(x_3; y_3)$	0,3	0,953 940
$(x_4; y_4)$	0,4	0,916 520
$(x_5; y_5)$	0,5	0,866 030
$(x_6; y_6)$	0,6	0,800 000
$(x_7; y_7)$	0,7	0,714 140
$(x_8; y_8)$	0,8	0,600 00
$(x_9; y_9)$	0,9	0,435 890
	1,0	0

Тоді ураховуючи формули прямокутників:

$I_1 = \Delta x \cdot (y_0 + y_1 + ... + y_{n-1})$

та $I_2 = \Delta x \cdot (y_1 + y_2 + ... + y_n)$, отримано:

$I_1 = \Delta x \cdot (y_0 + y_1 + y_2 . + y_3 . + y_4 . + y_5 + ... + y_9) \approx 0{,}825\,540$;

$I_2 = \Delta x \cdot (y_1 + y_2 . + y_3 . + y_4 . + y_5 + ... + y_{10}) \approx 0{,}725\,541\,6$,

де $\Delta x = 0{,}1$.

Таким чином значення інтеграла належить проміжку $[0{,}77572\ 0{,}82554]$.

За формулою трапеції $I \ = \Delta x \cdot (\frac{y_0 + y_1}{2} + y_1 + ... + y_{n-1})$ отримано:

$I \ = \Delta x \cdot (\frac{y_0 + y_1}{2} + y_1 + ... + y_9) \approx 0{,}775\,42$.

Перевірити наявний зв'язок між формулою трикутників та формулою трапецій: $I \approx \frac{I_1 + I_2}{2} \approx 0{,}775542$.

Обчислити наближене значення інтеграла за формулою Сімпсона:

$$I_s = \frac{\Delta x}{3} \cdot (y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + 4y_{n-1} ... + y_n).$$

Отримано: $I_s \approx 0{,}779$.

Отримані результати порівняти із результатами звичайних обчислень. Найбільш точні результати дає метод Сімпсона.

2.3. Застосування рядів до наближених обчислень визначених інтегралів

Наступним методом наближеного обчислення визначеного інтегралу є використання твердження, що за деяких умов декотру функцію (яка в нашому випадку є підінтегральною) може бути задано, як суму декотрого степеневого ряду. Тобто, за допомогою таких дій, а саме розкладення підінтегральної функції в декотрий ряд, відбувається значне спрощення підінтегрального виразу, і той інтеграл, який неможливо було обчислити за допомогою звичайних методів інтегрування, може бути обчисленим за допомогою інтегрування відповідного ряду.

Так, наприклад, інтеграл $\int e^{\frac{-x^2}{2}} dx$ неможливо обчислити за допомогою звичайних перетворень (інтеграл Лапласа: $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_a^x e^{\frac{-x^2}{2}} dx$, який не обчислюється за допомогою звичайної заміни), однак за допомогою розкладення підінтегральної функції $e^{\frac{-x^2}{2}}$ в степеневий ряд значення інтеграла може бути обчисленим.

У загальному випадку, вважають, якщо функція може бути розкладеною в декотрий степеневий ряд в околі точки $x = x_0$, то її вигляд (вигляд розкладу) є таким:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots + a_n(x - x_0)^n + \ldots,$$

де a_0; a_1; a_2 – декотрі коефіцієнти розкладу.

Якщо $x_0 = 0$, то формула розкладу може бути записаною в такому вигляді:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots.$$

Для подальшого використання степеневих рядів у наближених обчисленнях визначених інтегралів слід визначити основні властивості степеневих рядів:

Лема 1

Степеневий ряд $a_0 + a_1 x + a_2 \cdot x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$збігається у будь-якому інтервалі $[-b; b]$, що належить радіусу збіжності $(-R; R)$.

Лема 2

Степеневий ряд, зіставлений із похідних елементів декотрого (першопочаткового) ряду, має той же радіус збіжності, що й першопочатковий ряд.

Тобто, якщо ряд $a_0 + a_1 x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n x^n + ...$ має радіус збіжності $(-R; R)$, то й ряд, отриманий диференціюванням кожного елемента, а саме ряд :

$$a_1 + 2a_2 \cdot x^2 + ... + na_n x^{n-1} + (n+1)a_{n+1} x^n + ...$$

має той же радіус збіжності $(-R; R)$.

Лема 3

Два степеневих ряди можна додавати та віднімати у проміжку їх збіжності.

Лема 4

Степеневий ряд можна помножити на один (однаковий) спільний множник.

Лема 5

Степеневий ряд можна інтегрувати. Ряд отриманий таким чином має той же радіус збіжності, що й першопочатковий ряд.

Тобто, якщо: $a_0 + a_1 x + a_2 \cdot x^2 + ... + a_n x^n + ... (-R; R)$, то ряд отриманий унаслідок інтегрування :

$$\int_0^x S(x)dx = \int_0^x a_0 dx + \int_0^x a_1 x dx + \int_0^x a_2 x^2 dx + ... + \int_0^x a_n x^n dx =$$

$$= a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \frac{a_2}{3} x^3 + ... + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + ...$$

має такий же ряд збіжності $(-R; R)$.

Таким чином, будь-який степеневий ряд можливо інтегрувати або диференціювати будь-яку кількість разів. До того ж інтервали збіжності відповідних рядів є сталою величиною та не змінюються.

Одним із основних питань щодо наближеного обчислення визначених інтегралів за допомогою рядів є питання умов розкладення підінтегральної функції в степеневий ряд із метою її подальшого інтегрування та отримання результату.

Якщо наявна функція $f(x)$ може бути диференційованою нескінченну кількість разів в околі деякої точки $x = x_0$, то цю функцію можна подати як суму декотрого степеневого ряду, який збігається в цьому інтервалі та вміщує точку $x = x_0$. Цей ряд має вигляд:

$$f(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + ... + a_n(x - x_0)^n + ...,$$

де a_0 a_1 a_2 – декотрі коефіцієнти розкладу.

Або:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)}{2!} + ... \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n + ...,$$

де: $a_0 = f(x_0)$; $a_1 = f'(x_0)$; $a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!}$; $a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}$ є відповідними коефіцієнтами розкладу. Такий ряд дістав назву *ряду Тейлора.*

Якщо в якості точки $x = x_0$ обрати точку $x = x_0 = 0$, то відповідна формула ряду Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)(x - x_0)}{2!} + ... \frac{f^{(n)}(x)}{n!}(x - x_0)^n + ...$$

набуде такого вигляду і буде називатися рядом *Маклорена:*

$$f(x) = f(0) + f'(0)(x) + \frac{f''(0)(x)}{2!} + ... \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(x)^n + ...$$

Саме розклад підінтегральних функцій у ряди Тейлора та Маклорена із подальшим їх інтегруванням є основою одного з методів обчислення визначених інтегралів.

Приклад 2.9. Розкласти функцію $f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3$ за степенями різниці $x - 1$ в ряд Тейлора.

Якщо функція має бути розкладеною за степенями різниці $x - 1$, це означає, що $x_0 = 1$.

Слід знайти за формулою ряду Тейлора відповідні коефіцієнти, а саме:

$$a_0 = f(x_0);$$

$$a_1 = f'(x_0);$$

$$a_2 = \frac{f''(x_0)}{2!};$$

$$a_n = \frac{f^n(x_0)}{n!}.$$

Отримано:

$$f(1) = -1;$$

$$f'(1) = (1 - 2x + 6x^2)_{x=1} = 5;$$

$$f''(1) = (-2 + 12x^2)_{x=1} = 10;$$

$$f'''(1) = 12.$$

Відшукувати наступні коефіцієнти не має сенсу, тому що всі похідні починаючи із четвертого порядку, дорівнюють нулю.

Підставивши отримані коефіцієнти до формули Тейлора, отримано такий розклад заданої функції:

$$f(x) = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3.$$

Для перевірки отриманих результатів слід прирівняти саму функцію $f(x) = -3 + x - x^2 + 2x^3$ та її розклад:

$$-3 + x - x^2 + 2x^3 = -1 + 5(x-1) + 5(x-1)^2 + 2(x-1)^3.$$

Отриманий вираз є рівністю.

Тобто сама функція та її розклад є тотожними. Важливо зазначити, що не всі функції можливо розкласти в ряд Тейлора.

Для спрощення подальших обчислень та уникнення застосування додаткових теоретичних пояснень слід навести розклад декотрих основних елементарних функцій у ряди Тейлора або Маклорена, які найчастіше використовують у наближених обчисленнях визначених інтегралів за допомогою рядів:

1) *показникова функція:* $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^n}{n!} + ..\quad (-\infty; \infty).$

Радіус збіжності дорівнює $(-\infty; \infty)$, тобто розклад у степеневий ряд є вірним для будь-якого значення x на осі абсцис Ox.

Обчисливши, наприклад, значення експоненти за умовою $x = 1$, отримано:

$$e^1 = e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{n!} + ..;$$

2) *тригонометричні функції* $\sin x$ і $\cos x$ також мають радіус збіжності $(-\infty; \infty)$ та мають вигляд:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - (1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + .. (-\infty; \infty);$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - (1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + .. (-\infty; \infty).$$

Слід зазначити, що додатну функцію $\cos x$ може бути розкладено лише по додатним ступеням, а недодатну $\sin x$ лише за недодатними степенями. Цю властивість зручно пам'ятати для полегшення обчислень;

3) відзначимо, що *біноміальна функція* виду $(1+x)^m$ збігається лише на інтервалі $(-1; 1)$, та її розклад у ряд має такий вигляд:

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!} x^2 + \ldots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n-1)}{n!} x^n + \ldots. (-1; 1)$$

Якщо $m > 0$, то ряд збіжний на інтервалі $[-1; 1]$.

Для подальшого використання доцільно навести декотрі ряди у вигляді біноміального розкладення, що дуже часто зустрічають:

а) $m = -1$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots\ldots (-1; 1)$$

б) $m = \frac{1}{2}$

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n} x^n + \ldots\ldots$$

$$[-1; 1]$$

в) $m = -\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2} x + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} x^2 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} x^3 - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8} x^4 + \ldots..$$

$$\ldots\ldots + (-1)^{n-1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot \ldots \cdot 2n} x^n + \ldots.$$

$$(-1 < x \le 1).$$

Слід зауважити, що розклад окремих функцій у ряд Тейлора (Маклорена) можна отримати, якщо вже відомі розкладення інших.

Приклад 2.10. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\ln(1-2x)$.

Враховуючи формулу розкладу логарифма:

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+..,$$

та проміжок збіжності: $(-1;1)$, замінивши x на $-2x$, буде отримано:

$$\ln(1-2x)=(-2x)-\frac{(-2x)^2}{2}+\frac{(-2x)^3}{3}+..+(-1)^{n-1}\frac{(-2x)^n}{n}+\ldots$$

Тоді в інтервалі збіжності $-1<x\le 1$ замінимо x на $-2x$, новий інтервал збіжності є $-1<-2x\le 1$; або $-1/2\le x<1/2$.

Приклад 2.11. Розкласти в ряд Маклорена функцію $f(x)=\cos^2 x$.

Слід використати відому формулу:

$$\cos^2 x=\frac{1+\cos 2x}{2},$$

тоді, якщо замінити у $\cos 2x$ значення аргументу x на $2x$, та використати формулу розкладу косинуса в ряд Маклорена:

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-(1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+..(-\infty;\infty)$$

за допомогою заміни буде отримано:

$$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-(1)^n\frac{(2x)^{2n}}{(2n)!}+..,$$

радіус збіжності $(-\infty;\infty)$.

Далі, помноживши кожний елемент ряду з лівого та правого боку тотожності на $\frac{1}{2}$, буде отримано:

$$\frac{1}{2}\cos 2x=1-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots.$$

Кінцевий результат:

$$\cos^2 x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos 2x=\frac{3}{2}-\frac{2}{2!}x^2+\frac{2^3}{4!}x^4-\ldots+(-1)^n\cdot\frac{2^{2n-1}}{(2n)!}x^{2n}+\ldots.$$

Декотрі розклади функцій можливо отримати безпосереднім інтегруванням.

Так, наприклад, знаючи, що

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots\ldots,$$

та враховуючи, що

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$$

буде отримано ряд розкладу логарифма, як інтеграла від відповідного степеневого ряду. Слід зазначити, що радіус збіжності в цьому разі є незмінним:

$$\ln(x+1) = \int \frac{1}{1+x} dx = \int (1 - x + x^2 - x^3 + \ldots + (-1)^n x^n + \ldots\ldots) dx$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + \ldots (-1;1)$$

Аналогічним чином отримано розклад $arctgx$ у ряд Тейлора. Для цього слід проінтегрувати відповідний ряд, ураховуючи, що за формулою інтеграла:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = arctgx + C$$

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots + (-1)^n x^{2n} + \ldots\ldots (-1;1),$$

отримано відповідний розклад:

$$arctgx = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \ldots\ldots (-1;1).$$

Аналогічно знайдено наступний ряд:

$$\arcsin x = x + \frac{1}{2}\frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \ldots (-1;1).$$

Під час обчислення враховано, що $y = \arcsin x = \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, та значення функції $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ як ряду знайдено за формулою біноміального розкладу.

У декотрих випадках складну функцію може бути знайдено потім як добуток відповідних рядів. За умови виконання таких дій необхідно дотримуватися того, щоб відповідні дії відбувалися в межах інтервалу збіжності обох рядів.

Приклад 2.12. Розкласти в ряд Маклорена функцію $y = e^x \cdot \sin x$.

Знаючи окремо розклад кожного ряду та враховуючи їх абсолютну збіжність, можна знайти розклад в ряд функції $y = e^x \cdot \sin x$ як добуток функції експоненти та функції синуса окремо. У цьому разі слід користуватися такою важливою властивістю абсолютно збіжних рядів:

Якщо є два абсолютно збіжних ряди, $s_1 = u_1 + u_2 + ... + u_n + ...$ *та* $s_2 = v_1 + v_2 + ... + v_n + ...$*, на однаковому інтервалі збіжності, то ряд, що є добутком цих рядів, має такий вигляд:*

$$(u_1 v_1) + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + (u_1 v_3 + u_2 v_2 + u_3 v_1) + ...$$

Унаслідок нескладних арифметичних дій отримано:

$$y = e^x \cdot \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{30}.$$

Як було зазначено, ступеневі ряди можна інтегрувати, та декотрі з них отримано безпосереднім інтегруванням інших. Таким чином, за допомогою розкладу підінтегральних функцій у степеневі ряди можна обчислити ті значення інтегралів, які достатньо проблематично обчислити за допомогою простого інтегрування.

Приклад 2.13. Обчислити значення інтеграла:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx.$$

Ураховуючи, що

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - (1)^n \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + ..,$$

та поділивши кожний елемент ряду на x, буде отримано результат інтегралу.

Відповідь є такою:

$$\int_0^x \frac{\sin x}{x} dx = x - \frac{x^3}{3 \cdot 3!} + \frac{x^5}{5 \cdot 5!} - ....$$

Слід зазначити, що цей ряд не може бути вираженим через будь-яку елементарну функцію, він є заданням нової функції, його значення є табличними і він дістав назву "інтегральний синус", тому що його досить часто зустрічають у прикладних фізичних задачах.

Приклад 2.14. Обчислити значення інтеграла Лапласа:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^x e^{\frac{-x^2}{2}}dx.$$

Як було зауважено вище,

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^x e^{\frac{-x^2}{2}}dx$$

не може бути обчисленим в елементарних функціях, тому що саме інтеграл вигляду $\int e^{\frac{-x^2}{2}}dx$ не можливо виразити через елементарні функції.

Однак можливо використати такий розклад:

$$e^{\frac{-x^2}{2}}=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{2^2\cdot 2!}-\frac{x^6}{2^3\cdot 3!}+\ldots.$$

Тоді значення інтеграла Лапласа може бути обчисленим як сума нескінченного степеневого ряду:

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(x-\frac{x^3}{3\cdot 2}+\frac{x^5}{5\cdot 2^2\cdot 2!}-\frac{x^7}{7\cdot 2^3\cdot 3!}+\right).$$

Результат обчислень надано у вигляді таблиць інтегральної функції Лапласа.

Приклад 2.15. Обчислити значення інтеграла:

$$\int_a^{1/2}\frac{1}{1+x^4}dx.$$

Цей інтеграл можна розв'язати за допомогою звичайних замін у простих арифметичних функціях. Однак це не зовсім зручно. Зручніше визначити підінтегральну функцію як розклад деякого ряду та тоді буде отримано:

$$\frac{1}{1+x^4}=1-x^4+x^6-x^{12}+\ldots$$

$$\int_a^{1/2}\frac{1}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^5\cdot\frac{1}{5}+\left(\frac{1}{2}\right)^9\cdot\frac{1}{9}-.....$$

Якщо під час обчислення обмежитися двома першими елементами ряду, то відповідь є такою:

$$\int_a^{1/2}\frac{1}{1+x^4}dx\approx 0{,}493\,8.$$

Приклад 2.16. Обчислити значення інтеграла $\int_0^1\frac{\sin x}{x}dx$ із точністю $0{,}01$.

Для розв'язання треба скористатися прикладом 2.13, де доведено таке розкладення:

$$\int_0^x\frac{\sin x}{x}dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-..,$$

тоді: $\int_0^x\frac{\sin x}{x}dx=x-\frac{x^3}{3\cdot 3!}+\frac{x^5}{5\cdot 5!}-\frac{x^7}{7\cdot 7!}\Big|_0^1\approx 0{,}94$.

Щоб визначити необхідну точність (похибку обчислення), слід обчислити, яку величину додає кожен елемент ряду. Оскільки значення третього елементу буде меншим ніж $0{,}01$, то для обчислення з відповідною точністю достатньо обчислити два елементи.

Приклад 2.17. Обчислити значення інтеграла $\int_0^1\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx$ із точністю до 0,001.

Для подальшого розв'язання розкладено підінтегральний вираз до ряду Тейлора, отримано:

$$\sin\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{x}-\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^3}{3!}+\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^5}{5!}-\frac{\left(\sqrt[3]{x}\right)^7}{7!}+....$$

Тоді:

$$\frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}=x^{-\frac{2}{3}}-\frac{1}{3!}+\frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!}-\frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!}+...,$$

значення інтегралу буде таким:

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx = \int_0^1 \left(x^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{3!} + \frac{x^{\frac{2}{3}}}{5!} - \frac{x^{\frac{4}{3}}}{7!} + \ldots \right) dx =$$

$$= \left[3x^{\frac{1}{3}} - \frac{x}{3!} + \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5!\cdot 5} - \frac{3x^{\frac{7}{3}}}{7!\cdot 7} + \ldots \right]_0^1 = 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{200} - \frac{1}{11760} + \ldots .$$

Ураховуючи, що четвертий елемент цієї послідовності за абсолютною величиною є меншим ніж 0,001, то для забезпечення заданої точності достатньо обчислити перші три елементи.

Буде отримано:

$$\int_0^1 \frac{\sin\sqrt[3]{x}}{x}dx \approx 3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{200} \approx 2{,}834 .$$

Контрольні запитання

1. Сформуйте умову теореми про оцінювання значення визначеного інтегралу.

2. Поясність сутність методу прямокутників, трапецій, Сімпсона.

3. Наведіть основні команди та вбудовані функції *MatLab* за допомогою яких можливо наближене обчислення визначених інтегралів за методами прямокутників, трапецій, Сімпсона.

4. Визначте основний принцип розкладення будь-якої функції до ряду Тейлора (Маклорена). Наведіть загальну формулу розкладу функції до ряду. Надайте тлумачення значенню кожного коефіцієнта цієї формули.

5. Запишіть формули розкладу основних елементарних функцій до рядів Маклорена (Тейлора).

6. Поясніть сутність механізму застосування рядів до наближених обчислень визначених інтегралів на будь-якому прикладі.

7. Обчисліть значення визначеного інтеграла $\int_{1,2}^{1,6} \frac{1}{\sqrt{1+2x^2}}dx$ за допомогою метода трапецій із кроком $h = 0{,}1$; $h = 0{,}01$; $h = 0{,}05$. Порівняйте відповідь, результат поясніть.

8. Обчисліть визначений інтеграл $\int\limits_{0,4}^{0,5} \frac{1}{1+\sin(x)+x} dx$ за методом трапецій, за умови $n = 10,\ n = 100$. Результат поясніть.

9. За допомогою якої функції виконують обчислення визначеного інтеграла з накопиченням? Обчисліть наступний інтеграл із накопиченням: $\int\limits_{0,4}^{0,6} \sqrt{x} \cdot \cos(x^2) dx$.

10. Обчисліть за допомогою метода Сімпсона інтеграл: $\int\limits_{0,1}^{0,9} \frac{\sqrt{x+1}}{\cos^2(x)} dx$.

Точність обчислень $d = 0{,}0001;\quad d = 0{,}0000001$.

11. Обчисліть за допомогою метода Сімпсона: $\int\limits_{0,5}^{1,5} \frac{\sin(2x)}{x^2+1} dx$.

3. Завдання для самостійної роботи

Завдання 1. За допомогою звичайного інтегрування треба обчислити значення таких інтегралів за формулою Ньютона – Лейбніца та порівняти їх із значеннями обчисленими за методами прямокутників, трапецій, Сімпсона (обчислення виконувати без використання програмного забезпечення).

Кількість інтервалів уважати $n = 10$.

Зробити висновки. Обчислення проводити за прикладом 2.8. Умови завдання наведені в табл. 3.1

Таблиця 3.1

Умови до завдання 1

1	2	3	4
1	$\int\limits_{4}^{6} \frac{dx}{-x^2+8x-5}$	14	$\int\limits_{-2,5}^{-1,5} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-4x-3}}$
2	$\int\limits_{4}^{14} \frac{2dx}{x^2-4x+8}$	15	$\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{-x^2-2x+3}}$

1	2	3	4
3	$\int_{3,5}^{4,5}\frac{dx}{\sqrt{-x^2+8x-15}}$	16	$\int_{-1}^{3}\frac{dx}{\sqrt{-x^2+2x+8}}$
4	$\int_{0}^{2}\frac{xdx}{x^2-8}$	17	$\int_{2}^{4}\frac{(2x-1)dx}{x^2-x+4}$
5	$\int_{2}^{4}\frac{-6xdx}{8-3x^2}$	18	$\int_{0}^{4}\frac{(2x+3)dx}{2\sqrt{x^2+3x+7}}$
6	$\int_{1}^{5}\frac{(7-2x)dx}{2\sqrt{-x^2+7x+3}}$	19	$\int_{3}^{5}\frac{(3x^2-7)dx}{2\sqrt{x^3-7x}}$
7	$\int_{-3}^{1}\frac{(2x+4)dx}{2\sqrt{x^2+4x+8}}$	20	$\int_{1}^{3}\frac{(5-2x)dx}{2\sqrt{-x^2+5x}}$
8	$\int_{0}^{4}\frac{(4-2x)dx}{-x^2+4x+5}$	21	$\int_{-1}^{0}\frac{8xdx}{4x^2-7}$
9	$\int_{0}^{4}\frac{8dx}{x^2-6x-7}$	22	$\int_{0}^{4}\frac{dx}{\sqrt{-x^2+6x+7}}$
10	$\int_{-3}^{3}\frac{dx}{x^2+4x+5}$	23	$\int_{0}^{2}\frac{4dx}{-x^2+2x+3}$
11	$\int_{1}^{5}\frac{(7-2x)dx}{2\sqrt{-x^2+7x+3}}$	24	$\int_{3}^{5}\frac{4xdx}{3\sqrt[3]{x^3-1}}$
12	$\int_{2}^{4}3x\sqrt{x^2-2}dx$	25	$\int_{2}^{3}\frac{dx}{4\sqrt[4]{x^3-4}}$
13	$\int_{4}^{6}\frac{8x}{3}\sqrt[3]{\frac{x^2}{4}}-3dx$	26	$\int_{-1}^{0}\frac{8xdx}{4x^2-7}$

Завдання 2. За допомогою використання вбудованої функції `int` (*MatLab*) та чисельних методів інтегрування: методу прямокутників, трапецій та Сімпсона (використання вбудованих функцій *MatLab*) треба обчислити значення таких інтегралів.

Кількість інтервалів уважати $n=10$. Зробити висновки.

Обчислення виконувати за прикладами 2.6, 2.7. Умови завдання наведені в табл. 3.2.

Таблиця 3.2

Умови до завдання 2

1	2	3	4
1	$\int_1^e \ln(x^2+1)dx$	14	$\int_0^{\pi/3} \sin\frac{2x^2}{5}dx$
2	$\int_8^{10} \sqrt{\frac{18-x}{x-6}}dx$	15	$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}dx$
3	$\int_0^3 \frac{\ln(x+3)}{x}dx$	16	$\int_0^{\pi/3} \sin\frac{2x^2}{5}dx$
4	$\int_0^4 \frac{2\cos x+3\sin x}{(2\sin x-3\cos x)^3}dx$	17	$\int_0^e \ln^2(x+4)dx$
5	$\int_0^{\pi/2} \cos\frac{3x^2}{5}dx$	18	$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}dx$
6	$\int_0^1 \frac{x^2+1}{(x^3+3x+1)^2}dx$	19	$\int_1^2 \lg\frac{2-x}{1+x}dx$
7	$\int_0^{1/2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}dx$	20	$\int_0^{\pi/4} tg\frac{(2-x)^2}{4}dx$
8	$\int_\pi^{2\pi} \frac{1-\cos x}{(x-\sin x)^2}dx$	21	$\int_0^e \frac{x^2+\ln x^2}{x}dx$
9	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x+\sin x}{(x\sin x)^2}dx$	22	$\int_0^{\pi/3} \sin\frac{2x^2}{5}dx$
10	$\int_e^{2e} \ln(x-1)^2dx$	23	$\int_1^5 \frac{5^x}{7x-1}dx$
11	$\int_0^1 \frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^5}dx$	24	$\int_0^1 \frac{\sin x-\cos x}{(\sin x+\cos x)^5}dx$

Закінчення табл. 3.2

1	2	3	4
12	$\int_{2}^{9} \frac{x}{\sqrt[3]{x-1}} dx$	25	$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{x\cos x + \sin x}{(x\sin x)^2} dx$
13	$\int_{-1}^{1} x \cdot e^{-(x+1)^2} dx$	26	$\int_{1}^{e} \ln(x^2+1) dx$

Завдання 3. За допомогою рядів обчислити значення наступних визначених інтегралів до 0,001 шляхом розкладення підінтегральної функції до ряду, та подальшим інтегруванням даного ряду.

Обчислення виконувати за прикладами 2.16, 2.17. Умови завдання наведені в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Умови до завдання 3

1	2	3	4
1	$\int_{0}^{2,5} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^3}}$	14	$\int_{0}^{0,6} (1+x^2)^{1/3} dx$
2	$\int_{0}^{1} x\cos\sqrt[3]{x} dx$	15	$\int_{0}^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx$
3	$\int_{0}^{0,5} \frac{\sin 4x}{x} dx$	16	$\int_{0}^{0,1} \cos(10x^2) dx$
4	$\int_{0}^{0,4} e^{-5x^2} dx$	17	$\int_{0}^{0,3} e^{-2x^2} dx$
5	$\int_{0}^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$	18	$\int_{0}^{0,5} \frac{\ln(1+x^2)}{x} dx$
6	$\int_{0}^{0,5} \cos(2x^2) dx$	19	$\int_{0}^{0,5} \frac{1+\cos x}{x^2} dx$
7	$\int_{0}^{0,5} \sqrt{1+x^3} dx$	20	$\int_{0}^{0,2} \sqrt{x} arctg \sqrt{x} dx$

Закінчення табл. 3.3

1	2	3	4
8	$\int_0^1 x\sin\sqrt{x}dx$	21	$\int_0^{1,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$
9	$\int_0^{0,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{1+x^2}}$	22	$\int_0^{1,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$
10	$\int_0^1 \cos\sqrt{x}dx$	23	$\int_0^{1,5}\frac{dx}{\sqrt[3]{27+x^3}}$
11	$\int_0^{0,25}\frac{\sin xdx}{x}$	24	$\int_0^{1/5}\sqrt{1+x^3}dx$
12	$\int_0^{0,2}\frac{e^{-x}-1}{x}dx$	25	$\int_0^1 x\cos\sqrt[3]{x}dx$
13	$\int_0^{0,5} e^{-4x^2}dx$	26	$\int_0^1\frac{\sin x}{\sqrt{x}}dx$

Рекомендована література

1. Алексеев Е. Р. MATLAB 7 / Е. Р. Алексеев, О. В. Чеснокова. – М. : НТ Пресс, 2006. – 464 с.

2. Бермант А. Ф. Краткий курс математического анализа для втузов / А. Ф. Бермант, И. Г. Араманович. – М. : [б. и.], 1973. – 720 с.

3. Бугров Я. С. Дифференциальное и интегральное исчисление / Я. С. Бугров, С. М. Никольский. – М. : Наука, 1980. – 432 с.

4. Вища математика : підручник / Л. М. Малярець, Л. М. Афанасьева, Т. В. Денисова та ін. ; заг. редакція д. е. н., проф. Малярець Л. М. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2012. – 772 с.

5. Ильин В. А. Основы математического анализа / В. А. Ильин, Э. Г. Позднясk. – Ч. 1. – М : Наука, 1982. – 616 с.

6. Малярець Л. М. Математика для економістів : практичний посібник до розв'язання задач економічних досліджень у MatLab / Л. М. Малярець, Є. В. Резник, О. Г. Тижненко. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2009. – 212 с.

7. Малярець Л. М. Математика для економістів : практичний посібник до розв'язання задач / Л. М. Малярець, Л. Д. Широкорад. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2008. – 476 с

8. Половко А. М. MATLAB для студента / А. М. Половко, П. Н. Бутусов. – СПб. : БХВ-Петербург, 2005. – 320 с.

Додатки

Додаток А

Таблиця невизначених інтегралів

1. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C,\ n \neq -1$	7. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
2. $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$	8. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C$
3. $\int e^x dx = e^x + C$	9. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln(x + \sqrt{x^2 \pm a^2}) + C$
4. $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$	10. $\int \frac{dx}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left\lvert \frac{x-a}{x+a} \right\rvert + C$
5. $\int \cos x dx = \sin x + C$	11. $\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} artg \frac{x}{a} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$	12. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$

Додаток Б

Таблиця похідних

1. $c' = 0$	9. $arcctgx' = -\frac{1}{1+x^2}$
2. $x' = 1$	10. $(\sin x)' = \cos x$
3. $(x^n)' = nx^{n-1}$	11. $tgx' = \frac{1}{\cos^2 x}$
4. $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$	12. $ctgx = -\frac{1}{\sin^2 x}$
5. $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	13. $\arcsin x' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
6. $(a^x)' = a^x \cdot \ln x$	14. $\arccos = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
7. $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	15. $arctgx = \frac{1}{1+x^2}$
8. $(\cos x)' = -\sin x$	

Правила диференціювання

1. $(u+v)' = u' + v'$;
2. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + v' \cdot u$;
3. $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u' \cdot v - v' \cdot u}{v^2}$;
4. $u(v(x))' = u'(v(x)) \cdot v'(x)$.

Зміст

Вступ ... 3
1. Визначений інтеграл. Основні властивості визначеного інтеграла ... 5
    1.1. Основні засоби обчислення визначених інтегралів ... 7
2. Наближені методи обчислення визначеного інтеграла ... 12
    2.1. Оцінювання значення визначеного інтеграла за допомогою використання методів диференціального числення ... 12
    2.2. Чисельне інтегрування ... 15
        2.2.1. Метод прямокутників ... 19
        2.2.2. Метод трапецій ... 20
        2.2.3. Метод Сімпсона ... 21
    2.3. Застосування рядів до наближених обчислень визначених інтегралів ... 29
3. Завдання для самостійної роботи ... 40
Рекомендована література ... 44
Додатки ... 45

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації і завдання для самостійної роботи за темою "Наближене обчислення визначеного інтеграла" з навчальної дисципліни

"МАТЕМАТИЧНИЙ АНАЛІЗ ТА ЛІНІЙНА АЛГЕБРА"

для студентів галузей знань
0305 "Економіка та підприємництво",
0306 "Менеджмент і адміністрування"
денної форми навчання

Укладач **Сілічова** Тетяна Василівна

Відповідальний за випуск *Л. М. Малярець*

Редактор *О. Г. Доценко*

Коректор *Т. А. Маркова*

План 2016 р. Поз. № 30.
Підп. до друку 13.06.2016 р. Формат 60 х 90 1/16. Папір офсетний. Друк цифровий.
Ум. друк. арк. 3,0. Обл.-вид. арк. 3,75. Тираж 100 пр. Зам. № 83.

Видавець і виготівник – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.