Дискретная версия модели динамики капитала М. Калецкого

Классическая модель динамики капитала М. Калецкого [1] была представлена еще в 1935 г. и в дальнейшем претерпевала целый ряд модификаций. Механизм действия модели базируется на предположении о непрерывном изменении времени и являет собой с математической точки зрения дифференциально-разностное уравнение запаздывающего типа. В том же 1935 г. Р. Фришем и Г. Хольмом [2] была представлена схема решения смешанных дифференциально-разностных уравнений, основанная на применении графических методов нахождения корней трансцендентных алгебраических уравнений на комплексной плоскости.

В современной экономико-математической литературе, в частности, А.В. Прасоловым [3] выполнен предметный анализ качественных свойств дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, где фактор запаздывания имеет смысл экономически значимого временного шага и приведен ряд примеров с обоснованием выбора этой величины для различных видов хозяйственной деятельности.

В настоящей работе нами предпринят альтернативный подход к построению модели динамики капитала с учетом известных постулатов М Калецкого и предположений о дискретном характере временных изменений.

Для удобства сравнения с исходной традиционной моделью М Калецкого мы в основном будем придерживаться терминологии и символьных обозначений, представленных в изложении Р. Аллена [4].

Функционирование модели реализуется посредством известного стуктуирования дохода Y на потребление C, инвестиции I и независимые расходы A, где $C = cY$

$$Y = C + I + A \tag{1}$$

и A заданная функция в дискретном времени. При этом $0 < c < 1$ так называемая предельная склонность к потреблению, не зависящая от времени.. Не нарушая общности, будем полагать время $t = 0,1,\ldots,n,\ldots$заданным на множестве натуральных чисел.

Ключевой переменной является величина $B = B(n)$, определяющая решения об объеме инвестирования в момент времени n. При этом предполагается, что руководствуясь принятыми решениями об инвестициях через фиксированный интервал времени N происходят действия, направленные на выполнение инвестиционной программы. Величина N (натуральное число) называется временным лагом. Очевидно, что временные лаги характеризуют реальные запаздывания, определяемые различными технологическими циклами. Гипотеза о наличии запаздываний при преобразовании планируемых капиталовложений $B(n)$в фактические инвестиции $I(n)$ приводит к следующему соотношению

$$I(n) = \sum_{i=n-N}^{n-1} \varphi(n,i) \cdot B(i) \tag{2}$$

где $\varphi(n,i)$- функция двух целочисленных переменных. Формула (2) иллюстрирует факт того, что реальные инвестиции $I(n)$ являются взвешенной суммой планируемых инвестиций $B = B(n)$. Далее учитываем то обстоятельство, что планируемые инвестиции с учетом временного лага N определяются приращением основного капитала $\Delta K(n)$ без амортизации:

$$\Delta K(n) = K(n+1) - K(n) = B(n-N) \tag{3}$$

Также будем предполагать существование статической связи между величиной B и объемом сбережений $S = (1-c)\cdot Y$ и капиталом K. Допуская вышеуказанную связь линейной, будем иметь

$$B = a\cdot S - r\cdot K \tag{4}$$

где a, r положительные константы. Постоянная a является безразмерной величиной. Обычно считают [4], что a невелико, т.е. $0 < a < 1$, что объясняется малой долей внутренних сбережений предприятий, направленных на инвестирование. Постоянная r имеет размерность. Её принято называть нормой инвестиционных решений по отношению к основному капиталу.

Можно утверждать согласно формуле (4), что величину B в положительную сторону влияет объем сбережений S, а в отрицательную сторону наличный запас основного капитала K. Система полностью описывается уравнениями (1)-(4). Она включает 4 переменных величины $Y(n), I(n), B(n), K(n)$. Удобно исключить из рассмотрения величины $Y(n), I(n)$.

В результате тождественных преобразований получим систему относительно двух переменных $B(n)$ и $K(n)$ в предположении A - const:

$$\begin{cases} B(n) = a\cdot \sum\limits_{i=n-N}^{n-1}\varphi(n,i)\cdot B(i) - r\cdot K(n) + a\cdot A & (5)\\ K(n+1) - K(n) = B(n-N) & (6)\end{cases}$$

Система (5), (6) двух разностных уравнений может быть упрощена, если допустить, что весовая функция $\varphi(n,i)$ будет зависеть только от разности аргументов, т.е. $\varphi(n,i) = \varphi(n-i)$. В таком случае система (5),(6) имеет следующее представление:

$$\begin{cases} B(n) = a\cdot\left(\sum\limits_{i=0}^{n-1}\varphi(n-i)\cdot B(i) - \sum\limits_{i=0}^{n-1-N}\varphi(n-i)\cdot B(i)\right) - r\cdot K(n) + a\cdot A & (7)\\ K(n+N+1) - K(n+N) = B(n) & (8)\end{cases}$$

Предположим, что существуют функции

$$\tilde{K}(z) = \sum_{j=0}^{\infty} K(j)\cdot z^{-j},\quad B(z) = \sum_{j=0}^{\infty} B(j)\cdot z^{-j},\qquad \tilde{\varphi}(z) = \sum_{j=0}^{\infty}\varphi(j)\cdot z^{-j},$$

зависящие от комплекстнозначной переменной z и являющейся Z-преобразованием, соответственно, переменных $K(n), B(n), \varphi(n)$.

В таком случае система разностных уравнений (7), (8) преобразуется к виду двух алгебраических уравнений для определения $\tilde{K}(z)$ и $\tilde{B}(z)$.

Формальное применение Z-преобразования с учетом его свойств [5] к уравнениям (7) и (8) дает:

$$\begin{cases}\tilde{B}(z)=a\cdot\tilde{\varphi}(z)\left[\frac{1}{z}-\frac{1}{z^{N+1}}\right]\tilde{B}(z)-r\cdot\tilde{K}(z)+\frac{a\cdot A\cdot z}{z-1} & (9)\\ (z-1)\cdot\left(z^N\tilde{K}(z)-\sum\limits_{m=0}^{N-1}K(m)z^{N-m}\right)-zK(N)=\tilde{B}(z) & (10)\end{cases}$$

где $K(0), K(1), ..., K(m),..., K(N)$- заданные начальные значения капитала. Не умаляя общности во избежание громоздких преобразований допустим, что $K(0)=K(1)=...=K(n)=0$. В таком случае из (10) следует, что

$$\tilde{B}(z)=\left(z^{N+1}-z^N\right)\tilde{K}(z) \qquad (11)$$

Подставляя (11) в (9) будем иметь следующее уравнение для определения $\tilde{K}(z)$:

$$\left[z^{N+1}-\left(1+a\tilde{\psi}(z)\right)z^N+r+a\tilde{\psi}(z)\right]\tilde{K}(z)=aA\frac{z}{z+1} \qquad (12)$$

Из (12) очевидно следует, что

$$\tilde{K}(z)=aA\frac{z}{z-1}\left(z^{N+1}-(1+a\tilde{\psi}(z))z^N+r+a\tilde{\psi}(z)\right)^{-1} \qquad (13)$$

где

$$\tilde{\psi}(z)=\frac{z-1}{z}\tilde{\varphi}(z) \qquad (14)$$

Выражение (13) дает формулу для нахождения капитала как функции комплексной перемиенной $\tilde{K}(z)$. Для перехода к оригиналу $K(n)$, т.е. значению капитала в дискретном времени, необходимо реализовать процедуру обратного *Z*-преобразования, что не представляется возможным без задания явного вида функций $\tilde{\varphi}(z)$ или $\tilde{\psi}(z)$. Интересно отметить, что из (14) легко обнаружить связь

$$\varphi(n+1)-\varphi(n)=\psi(n+1)$$

или $$\varphi(n)=\varphi(0)+\sum_{i=1}^{n}\psi(i).$$

Далее рассмотрим ряд примеров, демонстрирующих различные динамические режимы эволюции капитала при различных видах функции $\varphi(n,i)$.

Пример 1. Пусть $\varphi(n,i)=\varphi(n-i)=\frac{1}{N}$. В таком случае из выражения (2) следует

$$I(n)=\frac{1}{N}\sum_{i=n-N}^{n-1}B(i).$$

С экономической точки зрения это означает, что фактические инвестиции $I(n)$ есть не что иное как среднее арифметическое всех планируемых решений о капиталовложениях $B(i)$ от момента времени $n-N$ до момента $n-1$ включительно.

Тогда система разностных уравнений (5), (6) примет более простой вид:

$$\begin{cases} B(n) = \dfrac{a}{N}\cdot\sum\limits_{i=n-N}^{n-1} B(i) - r\cdot K(n) + a\cdot A & (15) \\ K(n+1) - K(n) = B(n-N) & (16) \end{cases}$$

Путем алгебраических преобразований системы (15), (16) нетрудно получить разностное уравнение для динамики капитала $K(n)$

$$K(n+1+N) = \left(1+\frac{a}{N}\right)K(n+N) - \left(r+\frac{a}{N}\right)K(n) + aA \qquad (17)$$

Разностное уравнение $N+1$ порядка имеет стационарное решение:

$$K(\infty) = \frac{aA}{r} \qquad (18)$$

Представляется удобным для дальнейшего анализа переписать (17) с использованием переменной $x(n) = K(n) - K(\infty)$, являющейся отклонением текущего значения капитала $K(n)$ от своего равновесия $K(\infty)$:

$$x(n+1+N) = \left(1+\frac{a}{N}\right)x(n+N) - \left(r+\frac{a}{N}\right)x(n) \qquad (19)$$

И при этом очевидно существует тривиальная стационарная точка $x(\infty) = 0$.

Разностное уравнение (19) достаточно часто встречается в математической литературе [6]. В работе С. Куруклиса [7] получены параметрические условия для устойчивости тривиального решения (19). Разностное уравнение (19) обладает характеристическим полиномом:

$$\lambda^{N+1} - p\lambda^{N} + q = 0, \qquad (20)$$

где $p = 1 + \dfrac{a}{N}$ $\quad q = r + \dfrac{a}{N}$.

Из теоремы (3) указанной статьи [7] следует, что для любого натурального N, неотрицательного действительного числа p и произвольного действительного числа q корни уравнения (20) лежат внутри единичного круга на комплексной плоскости, если и только если $p < \dfrac{N+1}{N}$ и

$$\begin{cases} p-1 < q < \left(p^2+1-2p\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{для} \quad N-\text{нечетных}, \qquad (21) \\ |q-p| < 1, \quad |q| < \left(p^2+1-2p\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}, & \text{для} \quad N-\text{четных}, \qquad (22) \end{cases}$$

Здесь $\varphi \in \left(0, \dfrac{\pi}{N+1}\right)$ решение уравнения

$$p\sin(N\theta) = \sin((N+1)\theta) \qquad (23)$$

В интересующем нас случае параметр $q > 0$. Поэтому из (21),(22) вытекают следующие условия:

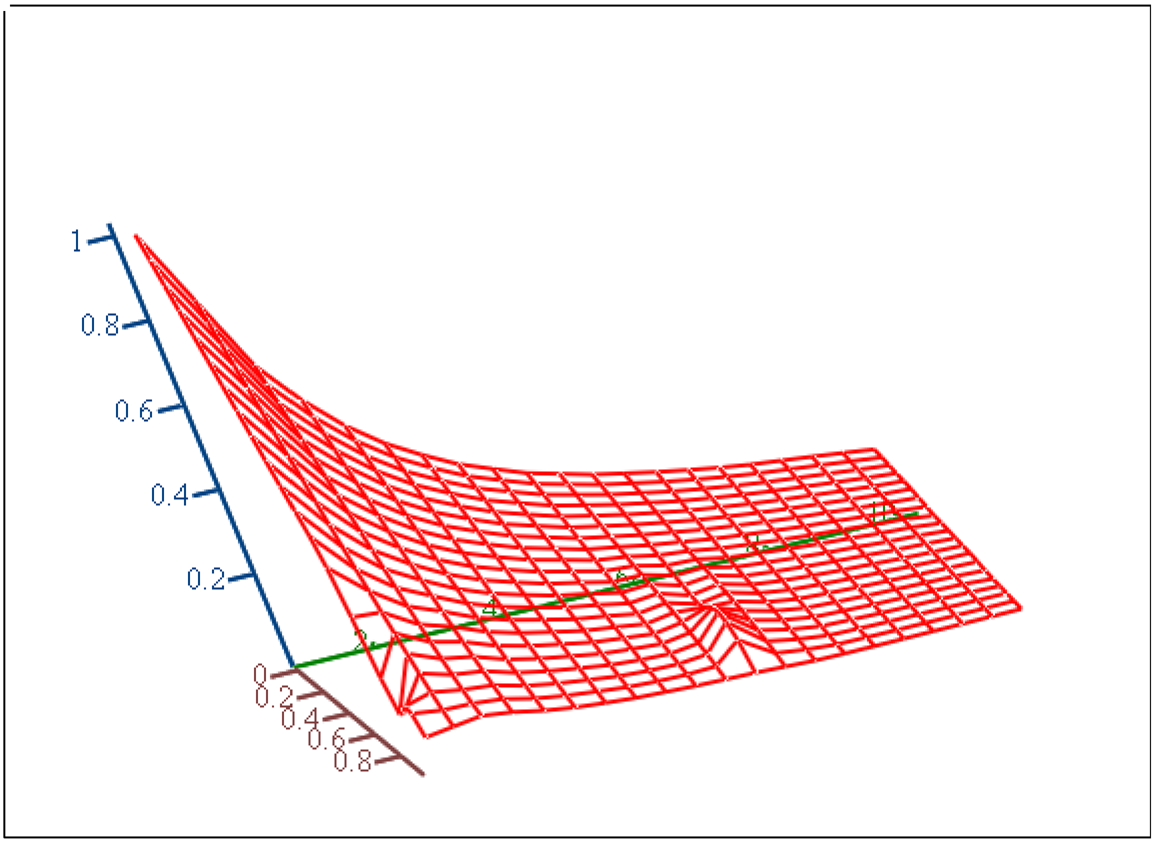
$$p < \frac{N+1}{N} \quad \text{и} \quad p-1 < q < \left(p^2 + 1 - 2p\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \tag{24}$$

Выполнив обратную замену $p = 1 + \frac{a}{N}$ $\quad q = r + \frac{a}{N}$ будем иметь:

$$a < 1 \quad \text{и} \quad r < \left(p^2 + 1 - 2p\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{a}{N} \tag{25}$$

Итак, неравенства (25) гарантируют попадание внутрь единичного круга корней полинома (20) и обеспечивают условия асимптотической устойчивости нулевого решения разностного уравнения (19). В данном примере не было необходимости в применении Z - преобразования.

На рис. 1 приведена зависимость максимального значения r при различных N и a.



(MX ,MY ,r)

Рис. 1

На рис. 2 изображены графики динамики капитала $K = K(n)$ при различных значениях $r, N, a = 0.125$, удовлетворяющих условиям устойчивости (25).

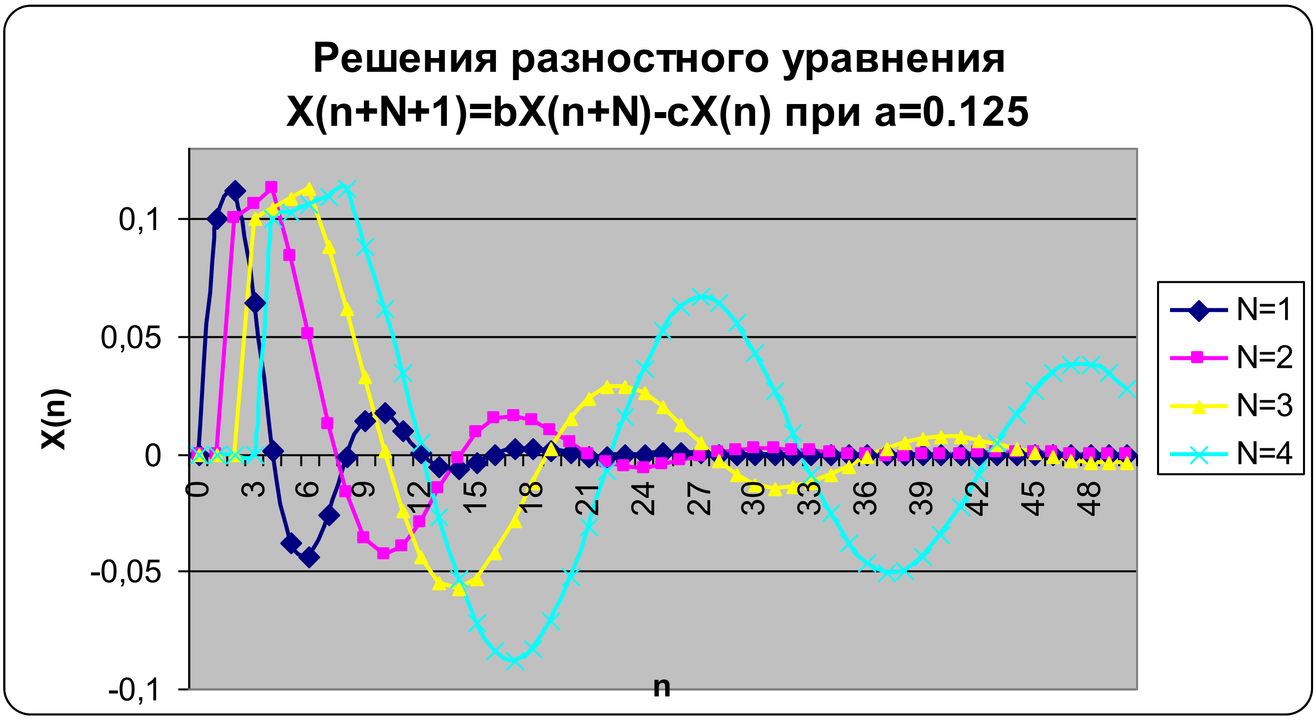


Рис. 2 Динамика капитала $K = K(n)$ при различных значениях $r, N, a = 0.125$.

Пример 2.

В отличие от предыдущего примера возьмем $\varphi(n-i) = (1-b)b^{n-i}$ $0 < b < 1$. Такой способ определения весовой функции означает, что вклад в реальные инвестиции плановых решений о капиталовложениях от предыдущего временного шага к последующему возрастает в геометрической прогрессии.

Тогда $\tilde{\varphi}(z) = \dfrac{(1-b)z}{z-b}$ и с учетом (14) имеем $\tilde{\psi}(z) = \dfrac{(1-b)(z-1)}{(z-b)}$. Для данного конкретного вида функции $\psi(z)$ выражение (13) для $\tilde{K}(z)$ запишется в форме:

$$\tilde{K}(z) = a \cdot A \cdot \frac{z}{z-1} \cdot \frac{z-b}{z^{N+2} + p_1 z^{N+1} + p_2 z^N + p_{N+1} z + p_{N+2}} \qquad (26)$$

где $p_1 = -(b+1+a(1-b))$; $p_2 = -(b+a(1-b))$; $p_{N+1} = r + a(1-b)$; $p_{N+2} = -(rb + a(1-b))$.

Об устойчивости динамики капитала, описываемого уравнением (26) можно судить по расположению корней знаменателя:

$$\lambda^{N+2} + p_1\lambda^{N+1} + p_2\lambda^N + p_{N+1}\lambda + p_{N+2} = 0 \qquad (27)$$

В настоящее время для полиномиального уравнения (27) не разработаны параметрические условия на коэффициенты данного уравнения, гарантирующие расположение корней в единичном круге комплексной плоскости. Даже при $N = 1$ имеет место характеристическое уравнение

$$\lambda^3 + q_1\lambda^2 + q_2\lambda + q_3 = 0,$$

где $q_1 = -(b+1+a(1-b))$; $q_2 = r - b$; $q_3 = -(rb + a(1-b))$.

Для данного уравнения все три корня будут по модулю меньше единицы, если

$$|q_1 + q_3| < 1 + q_2 \quad \text{и} \quad |q_2 - q_1 q_3| < 1 - q_3^2.$$

При подстановке конкретных значений q_1, q_2, q_3 в вышеуказанные неравенства получится довольно громоздкая система четырех линейно-квадратических неравенств, относительно параметров r, a, b. В случаях , когда $N > 1$ при использовании критерия Шура [8] сложность параметрических условий устойчивости будет только возрастать. Авторы настоящей работы выражают надежду, что для полиномиального уравнения (27) возможно получение конструктивных результатов относительно расположения корней внутри единичной окружности.

В заключение следовало бы отметить, что весовая функция $\varphi(n - i)$ играет роль так называемого формирующего фильтра между планируемыми и реализованными инвестиционными проектами. Очевидно, что обоснованный выбор структуры вышеуказанного фильтра может обеспечить устойчивый рост капитала и предотвратить нежелательные кризисные явления и катастрофы, а также служить эффективным инструментом в реализации стабильности макроэкономической политики.

Литература

1. Kalecki M. A Macrodynamic Theory of Business Cycles, Econometrica, 1935, №3, p. 327-344.
2. Frisch R., Holme H. The Characteristic Solutions of Mixed Difference and Differential Equation? Econometrica, 1935, №3, p. 235-239.
3. Прасолов А. В. Математические методы экономической динамики. – СПб.: Изд-во «Лань», 2008. – 352 с.
4. Аллен Р. Математическая экономия. – М.: Издательство иностранной литературы, 1963. -668 с.
5. Juri E Theory and Applications of Z- transform, Wilye, New York, 1964.
6. Clark C. W. A delay recraitement model of population dynamics with an application to baleen. Journal Mathematical Biology, 1976, №3, p. 381-391.
7. Kuruklis S. The asymptotic stability of $x_{n+1} - ax_n + bx_{n-k} = 0$. Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1994, №188, p. 719-731.
8. Elydi S. An introduction to difference equations, Springer, New York, 2005, p. 540.