

**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**  
**ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ**  
**ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ**

**Методичні рекомендації**  
**до виконання самостійної роботи студентів**  
**з навчальної дисципліни**  
**"ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА"**  
**для студентів напряму підготовки**  
**6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа"**  
**всіх форм навчання**

**Харків**  
**ХНЕУ ім. С. Кузнеця**  
**2016**

Затверджено на засіданні кафедри природничих наук та технології.  
Протокол № 1 від 26.08.2015 р.

*Самостійне електронне текстове мережеве видання*

**Укладачі:** А. Г. Крюк  
С. О. Дитиненко

**Методичні** рекомендації до виконання самостійної роботи  
М 54 студентів з навчальної дисципліни "Технічна механіка" для студентів напряму підготовки 6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа" всіх форм навчання : [Електронне видання] / уклад. А. Г. Крюк, С. О. Дитиненко. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 70 с.

Розглянуто основні положення відносно визначення зусиль у стержнях ферм і визначення центрів тяжіння перерізів, які допоможуть студентам у ході виконання самостійних робіт.

Рекомендовано для студентів інженерних спеціальностей.

## Вступ

Навчальна дисципліна "Технічна механіка" складається з трьох розділів: теоретична механіка, опір матеріалів, деталі машин.

На основних законах теоретичної механіки базуються більшість загальноінженерних навчальних дисциплін, таких, як "Опір матеріалів", "Теорія механізмів і машин", "Матеріалознавство", "Основи технологічних систем", "Деталі машин".

Щоб добре засвоїти навчальну дисципліну потрібно не тільки глибоко вивчити теоретичний матеріал, а й отримати тверді навички в розв'язанні задач. Для цього необхідно самостійно вирішити велику кількість задач з усіх розділів теоретичної механіки.

У пропонованих методичних рекомендаціях розглядаються два спеціальні завдання.

Перше завдання пов'язане з широко використовуваними в даний час конструкціями, які називаються фермами. Двоопорна дворівнева мостова ферма побудована й експлуатується в якості переходів між головним корпусом і L-корпусом ХНЕУ ім. С. Кузнеця.

Під час визначення зусиль у стержнях ферми використовують три способи: спосіб вирізання вузлів, спосіб Кремона, спосіб розрізів ферми.

Друге завдання пов'язане з визначенням координат центра ваги плоских фігур простих і складних форм. Практична користь цього завдання залежить від того, що, вміючи визначати положення центра ваги плоскої лінії, плоских фігур різних конфігурацій, можна визначати площі, об'єми і вагу.

У методичних рекомендаціях наведені приклади рішення задач. Ґрунтуючись на цих прикладах, студенти зможуть поглибити свої знання та практичні навички з теоретичної механіки.

Методичні рекомендації укладені на основі концепції STEM-освіти.

У STEM-освіті має переважати багатопрофільний підхід, який використовує інтегративність у навчанні STEM-дисциплін, як це робиться в реальних виробничих умовах.

# Тема 1. Зв'язки і їх реакції (балкові опори і їх реакції)

## 1. Поняття про ферму. Задачі розрахунку ферм

Під час будівництва мостів, підйомних кранів та інших споруд застосовуються конструкції, які називаються фермами. Фермою називається конструкція, що складається зі стрижнів, з'єднаних між собою кінцями шарнірів і утворюють геометрично незмінну систему [1].

Шарнірні з'єднання стрижнів ферми називаються її вузлами. Якщо осі всіх стрижнів ферми лежать в одній площині, то така ферма називається плоскою. Будемо розглядати тільки плоскі ферми. Серед різноманітних типів ферм необхідно розрізняти такі два основних види: ферми без зайвих стрижнів і ферми з зайвими стрижнями.

Якщо з ферми не можна зняти жодного стержня, не позбавивши її властивості геометричної незмінності, то така ферма належить до першого типу, тобто не має зайвих стрижнів. Такою найпростішою фермою є стрижневий трикутник з шарнірними з'єднаннями за вершинами. До таких же ферм без зайвих стрижнів належить чотирикутник з однією діагоналлю (рис. 1).

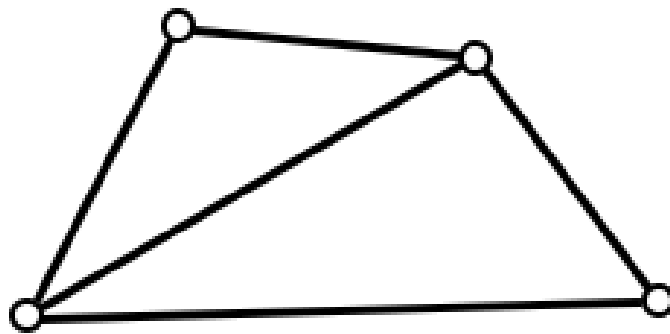


Рис. 1. Ферма без зайвих стрижнів

Така ж мостова ферма, що складається з трикутників (рис. 2а). Якщо від ферми, зображеної на рис. 1, відняти один стрижень, наприклад стержень, розташований по діагоналі, то отримана конструкція не буде вже геометрично незмінною системою. Оскільки з'єднання стрижнів шарнірні, то ясно, що така система, що складається з чотирьох стрижнів із чотирма вузлами, під дією прикладених до неї сил може змінювати свою форму.

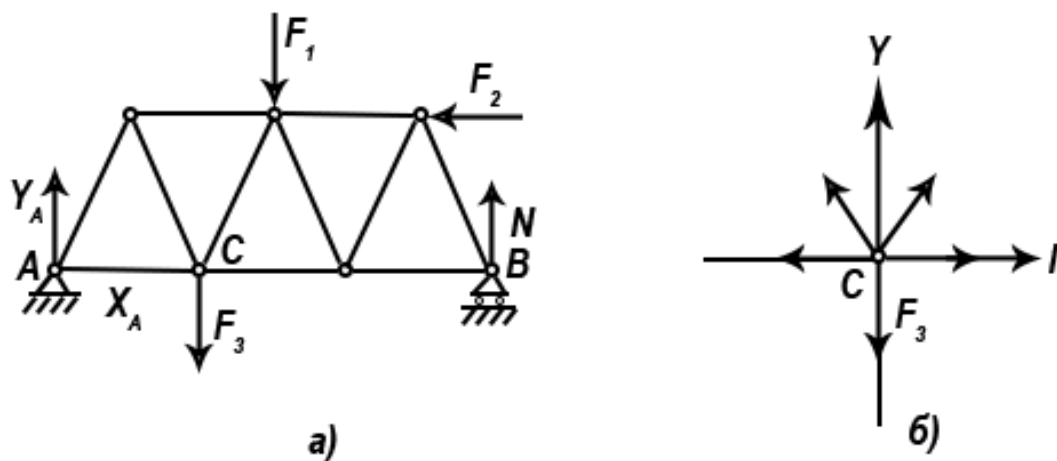


Рис. 2. Ферма без зайвих стрижнів:  
 а – трикутна мостова ферма;  
 б – рівновага вузла С

Якщо ж під час зняття одного або декількох стрижнів ферма не втрачає властивості незмінності, то така ферма належить до другого типу, тобто є фермою із зайвими стрижнями. Прикладом такої ферми служить чотирикутник з двома діагоналями (рис. 3).

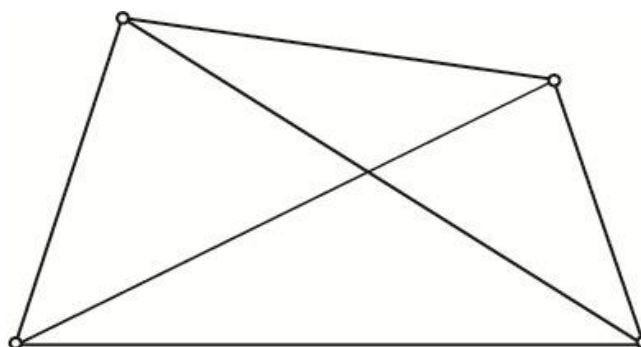


Рис. 3. Ферма с зайвими стрижнями

Ясно, що якщо відняти від цієї ферми одну діагональ, то ферма залишиться геометрично незмінною. Отже, друга діагональ з точки зору забезпечення незмінності ферми є зайвою, ця ферма має один зайвий стрижень. Постараємося встановити залежність між числом стержнів  $m$  і числом вузлів  $n$  ферми без зайвих стрижнів. Висновок приведемо для так званої простої ферми, тобто що складається з ряду трикутників, сторонами яких слугують стрижні ферми і в вершинах яких знаходяться її вузли. Будемо розглядати один із таких трикутників як основний. Під час додавання до цього основного трикутнику кожного нового вузла доводиться додавати

два нових стрижня, що з'єднуються в цьому вузлі. Таким чином, під час додавання до трьох основних вузлів  $n - 3$  інших вузлів додається  $2(n - 3)$  стрижні; отже, число всіх стрижнів ферми (разом із трьома основними) дорівнює:

$$2(n - 3) + 3 = 2n - 3,$$

тобто

$$m = 2n - 3.$$

Ця рівність виражає шукану залежність між числом стрижнів і числом вузлів ферми без зайвих стрижнів. Якщо  $m < 2n - 3$ , то число стрижнів недостатньо для забезпечення геометричної незмінюваності ферми. У цьому випадку маємо змінну стрижневу систему. Якщо ж  $m > 2n - 3$ , то маємо ферму з зайвими стрижнями.

Надалі будемо припускати виконаними такі умови:

- 1) всі стрижні ферми – прямолінійні;
- 2) тертя в шарнірах відсутнє;
- 3) задані сили, що діють на ферму (навантаження), лежать у площині цієї ферми і прикладені тільки в її вузлах;
- 4) власна вага кожного стержня ферми настільки мала порівняно з силами, прикладеними в вузлах ферми, що нею можна знехтувати.

Неважко побачити, що під час виконання цих умов кожен стрижень ферми буде відчувати тільки стиснення або розтягнення і не буде піддаватися вигину, в чому полягає основна особливість і головна перевага ферми як будівельної конструкції.

Дійсно, за умови, що всі навантаження прикладені у вузлах ферми і що тертя в шарнірах немає, кожен стрижень ферми буде перебувати під дією тільки двох сил, прикладених до його кінців (реакцій шарнірів, які перебувають на кінцях цього стрижня). Але у разі рівноваги твердого тіла під дією тільки двох сил ці сили повинні бути рівні за модулем і спрямовані в протилежні сторони по прямій, що з'єднує точки їх прикладення. Отже, сили, прикладені до стрижня ферми, будуть неодмінно спрямовані уздовж цього стрижня, а потім будуть викликати тільки його стиснення або розтягнення.

Перше завдання під час розрахунку ферми полягає у такому: до даної ферми (в її вузлах) прикладена система заданих сил  $F_1, F_2, F_3$ , і т.д. Потрібно визначити реакції опор і сили, що стискають або розтягують

кожен зі стрижнів цієї ферми (зусилля в стрижнях ферми). Це завдання ми і будемо розглядати.

Задані сили  $F_i$ , прикладені до ферми, і опорні реакції є щодо цієї ферми зовнішніми силами. Шукані ж зусилля в стержнях ферми є для неї силами внутрішніми.

Під час розрахунку ферм необхідно розрізняти ферми, які статично визначаються та статично невизначаються. Якщо всі невідомі сили, які потрібно знайти під час розрахунку даної ферми, тобто реакції опор і зусилля в її стрижнях, можуть бути визначені методами статички твердого тіла, то така ферма є статично визначаємою; в іншому випадку маємо статично невизначаєму ферму. Постараємося з'ясувати, в якому випадку ферма є статично визначаємою. Для цього зауважимо насамперед, що оскільки ферма є незмінною системою, то, як відомо, число невідомих опорних реакцій не повинно бути більше трьох. В іншому випадку завдання визначення опорних реакцій для даної ферми стає статично невизначаємим. Але, крім трьох невідомих реакцій, потрібно визначити ще силу, що стискає або розтягує для кожного з  $m$  стрижнів ферми; таким чином, ми маємо всього  $m + 3$  невідомих сили. Подивимося тепер, скільки можна скласти незалежних рівнянь для визначення цих невідомих сил. Для цього застосуємо так званий спосіб вирізання вузлів. Виріжемо будь-який вузол ферми, зображеної на рис. 2а, наприклад вузол С, і розглянемо його окремо (рис. 2б). До цього вузла С прикладені задана сила  $F_3$  і реакції стрижнів, що з'єднуються в цьому вузлі, спрямовані уздовж цих стрижнів. Ці реакції чисельно рівні зусиллям, які ми шукаємо в перерізаних стержнях. Оскільки сили, прикладені до вузла С, є плоскою системою врівноважених сил, ми будемо мати для цього вузла два рівняння рівноваги, які отримаємо, прирівнявши до нуля суми проєкцій всіх цих сил на осі  $x$  і  $y$ . Аналогічно можемо вчинити і щодо кожного з решти вузлів ферми. Тому отримаємо всього  $2n$  рівнянь, де  $n$  позначає число вузлів ферми.

Тепер зрозуміло, що для того, щоб розглянута задача була статично визначеною, число рівнянь повинно дорівнювати числу невідомих, тобто ми повинні мати рівність  $m + 3 = 2n$  або  $m = 2n - 3$ . Але це рівність, як було зазначено, має місце для ферми без зайвих стрижнів. Звідси випливає, що ферма без зайвих стрижнів є статично визначаємою.

Ферма, що має зайві стрижні, є статично невизначаємою, оскільки в цьому випадку число рівнянь буде недостатньо для визначення всіх

невідомих сил (у цьому випадку  $2n < m + 3$ ). Способи визначення зусиль у стержнях таких ферм розглядаються в курсах опору матеріалів та будівельної механіки. Доводиться брати до уваги пружні деформації (деформації стиснення або розтягування), що викликаються у стержнях ферми доданими до неї зовнішніми силами.

## 2. Спосіб вирізання вузлів

Під час визначення зусиль в стержнях ферми за способом вирізання вузлів, можна вирішувати завдання і аналітично, і графічно. Зазвичай користуються графічним способом, оскільки цей спосіб значно простіше, наочніше і швидше веде до мети.

Спосіб вирізання вузлів, як вказувалося вже у попередньому параграфі, полягає у такому: вирізають у послідовному порядку кожен із вузлів ферми і розглядають сили, прикладені до вирізаного вузлу. У число цих сил входять, по-перше, реакції перерізанних стержнів, прикладені до вирізаного вузлу, чисельно рівні шуканим зусиллям в цих стержнях, і, по-друге, можуть входити задані сили, прикладені в вузлах ферми, і опорні реакції. Так як сили, прикладені до вирізаного вузлу, врівноважуються, то багатокутник цих сил є замкнутим. Побудувавши замкнуті силові багатокутники для кожного вузла ферми, можна визначити графічно зусилля в стержнях цієї ферми.

Під час аналітичного вирішення задачі складають рівняння рівноваги сил, прикладені до кожного вирізаного вузлу, і вирішуючи ці рівняння, знаходять з них невідомі сили.

Як приклад можна застосувати спосіб вирізання вузлів до ферми, зображеної на рис. 4. Ця ферма має одну нерухому шарнірну опору А і одну рухому опору В. До неї додані задані вертикальні сили  $F_1$ ,  $F_2$  і  $F_3$ .

Рішення завдання починають завжди з визначення опорних реакцій.

У даному випадку всі задані сили  $F_i$  вертикальні, отже, горизонтальна складова реакції в шарнірі А дорівнює нулю. Вертикальні реакції опор А і В графічно визначаються побудовою замкненого силового багатокутника. Позначимо ці реакції через  $R_A$  і  $R_B$ . Коли реакції  $R_A$  і  $R_B$  будуть знайдені, всі зовнішні сили, прикладені до ферми, будуть відомі.



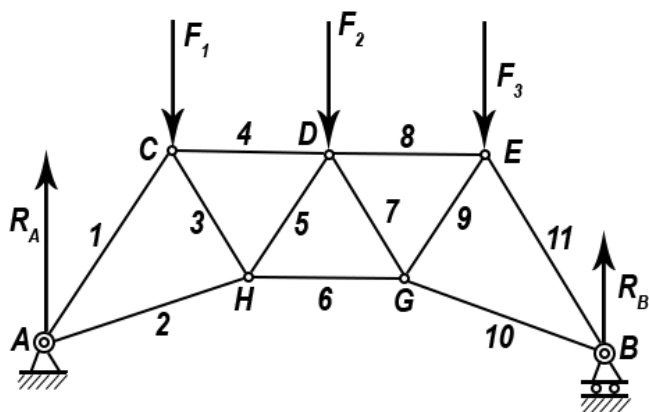


Рис. 4. Схема двохопорної ферми

Визначивши опорні реакції, переходимо до вирізання вузлів. Першим потрібно вирізати той вузол, в якому поєднуються тільки два стержні. Зазвичай такими бувають вузли на опорах, що і бачимо в даній фермі. Почнемо з вузла А. До цього вузла прикладені три сили: відома сила  $R_A$  і дві реакції  $S_1$  і  $S_2$  перерізаних стержнів 1 і 2; лінії дії цих реакцій відомі (ці сили спрямовані вздовж відповідних стержнів), а чисельні значення їх потрібно визначити. Для цього будемо замкнутий багатокутник цих трьох сил: з довільно обраної точки проводимо вектор, що зображає силу  $R_A$ ; з початку і кінця цього вектора проводимо прямі, паралельні стержнів 1 і 2. Точка перетину цих прямих визначає третю вершину силового трикутника, а довжини його сторін, паралельних стержнів 1 і 2, визначають чисельні значення  $S_1$  і  $S_2$  реакцій цих стержнів, рівні шуканим зусиллям (рис. 5).

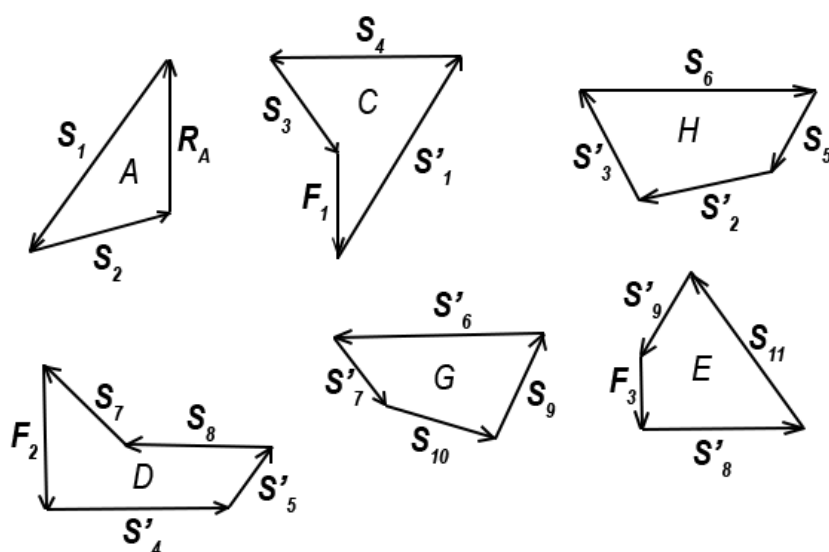


Рис. 5. Вузли ферми малюнка 4

Нагадаємо, що для визначення напрямку сил  $S_1$  і  $S_2$  в силовому трикутнику потрібно обійти цей трикутник по його периметру в напрямі відомої сили  $R_A$ , тобто в даному випадку проти годинникової стрілки. Залишається з'ясувати характер зусиль у стержнях 1 і 2, тобто визначити, чи будуть ці стержні стиснуті або розтягнуті. Це легко зробити, беручи до уваги напрямки сил  $S_1$  і  $S_2$  в силовому трикутнику, з таких міркувань: сила  $S_1$  є реакцією стержня 1, прикладеною до вузла А; якщо перенесемо вектор  $S_1$  з силового трикутника на стержень 1, то побачимо, що цей вектор спрямований до вузла А; отже, стержень 1 тисне на вузол А з силою  $S_1$ , а тому сам відчуває стиснення; справді, реакція вузла А, прикладена до стержня 1, дорівнює по модулю і спрямована протилежно силі  $S_1$ . Отже, до стержня 1 в точці А прикладена сила  $-S_1$ ; друга сила прикладена до цього стержня в точці С (реакція шарніра С). Оскільки стержень 1 знаходиться в рівновазі, то ці дві сили рівні за модулем і спрямовані протилежно. Таким чином, ми бачимо, що стержень 1 знаходиться під дією двох сил, спрямованих назустріч одна одній, як показано на рис. 6а, і викликають, вочевидь, стиснення.

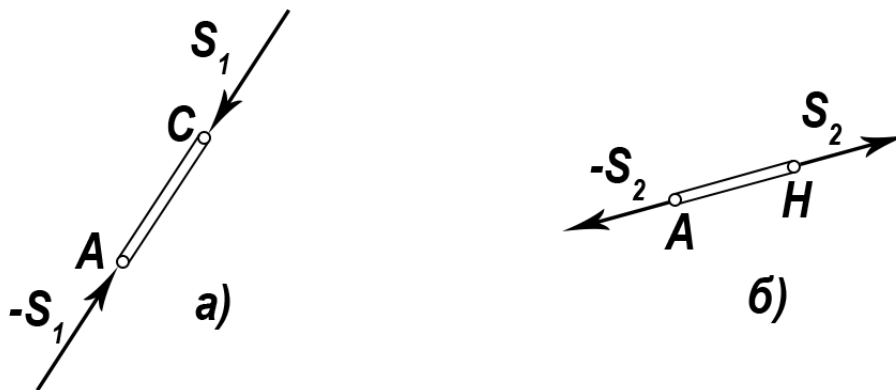


Рис. 6. Зусилля в стержнях 1,2

Розглянемо тепер стержень 2. Переносючи вектор  $S_2$  на цей стержень, бачимо, що цей вектор буде спрямований від вузла А. Отже, стержень 2 тягне вузол А з силою  $S_2$ . Звідси, на підставі таких же міркувань, як і в попередньому випадку, переконуємося, що стержень 2 знаходиться під дією двох розтягуючих сил, як показано на рис. 6б.

Таким чином, приходимо до висновку, що необхідно пам'ятати, під час визначення характеру зусиль у стержнях ферми: якщо реакція даного стержня, прикладена до вирізаного вузла, спрямована до цього вузла, то стержень стиснутий; якщо ж ця реакція спрямована від вузла, то стержень розтягнутий.

Після вузла А потрібно вирізати вузол С. До цього вузла прикладені чотири сили: з них сила  $F_1$  дана, а реакція стрижня 1 вже знайдена. Таким чином, з числа сил, прикладених до цього вузла, невідомі знову тільки дві: реакції стрижнів 3 і 4. Побудова замкнутого багатокутника чотирьох сил, що діють на вузол С, потрібно починати з побудови відомих сил. Необхідно звернути увагу на те, що реакція  $S'_1$  стержня 1, прикладена до вузла С, очевидно, дорівнює за модулем і спрямована протилежно реакції цього стрижня, яка додається до вузла А. Тому  $S'_1 = -S_1$ , тобто реакції кожного стержня, прикладені до вузлів, які цей стрижень з'єднує, завжди рівні за модулем і протилежні за напрямом. Тепер, щоб побудувати силовий багатокутник для вузла С, проводимо з довільної точки вектор  $S'_1$ , далі з початку вектора  $F_1$  і з кінця вектора  $S'_1$  проводимо прямі, паралельні стержнів 3 і 4, до їх перетину.

Довжини сторін отриманого замкнутого чотирикутника, паралельних стержнів 3 і 4, визначають чисельні значення шуканих зусиль  $S_3$  і  $S_4$  у цих стрижнях. Обходячи цей чотирикутник по його периметру в напрямі однієї з відомих сил  $F_1$  або  $S'_1$ , знаходимо напрями сил  $S_3$  і  $S_4$  (див. рис. 5б).

Оскільки вектор  $S_3$ , як бачимо з креслення, спрямований від вузла С (якщо перенести цей вектор на стрижень 3), то звідси робимо висновок, що стрижень 3 розтягнутий. Вектор  $S_4$  спрямований до вузла С; отже, стрижень 4 стиснутий. Тепер слід переходити до вузла Н (див. рис. 5), оскільки із чотирьох сил, прикладених до цього вузла, дві сили (реакції стрижнів 2 і 3) вже знайдено, і невідомими залишаються лише дві сили – реакції стрижнів 5 і 6, які позначимо через  $S_5$  і  $S_6$ . У процесі побудови силового багатокутника для вузла Н знову потрібно взяти до уваги, що реакції  $S'_5$  і  $S'_6$  стрижнів 2 і 3, прикладені до вузла Н, відповідно рівні по модулю і протилежні за напрямом реакцій цих стрижнів, прикладеним до вузлів А і С, тобто  $S'_2 = -S_2$  і  $S'_3 = -S_3$ . Цей силовий багатокутник показаний на рис. 5. Беручи до уваги напрями сил  $S_5$  і  $S_6$ , бачимо, що стрижень 5 стиснутий, а стрижень 6 розтягнутий.

Кожного разу під час переходу до нового вузла потрібно стежити за тим, щоб у цьому вузлі було не більше двох стержнів, у яких зусилля ще не визначені. Тому після вузла Н потрібно вирізати вузол D. Потім вирізаємо вузли G і E.

Силіві багатокутники, побудовані для цих вузлів, показані на рис. 5 (г, д, е). Таким чином, зусилля в усіх стержнях даної ферми визначені. Зрозуміло, що немає потреби вирізати останній вузол В, так як зусилля

в стержнях 10 і 11, що з'єднуються в цьому вузлі, визначені вже раніше під час вирізання вузлів G і E. Але силовий багатокутник для вузла B можна побудувати з метою контролю правильності зроблених до цього побудов: під час побудови багатокутника знайдених вже сил, прикладених до вузла B, цей багатокутник повинен замкнутися.

Зрозуміло, що вирізання вузлів даної ферми можна було б почати з вузла B, далі вирізати вузол E, потім вузол G і т. д.

### 3. Спосіб Кремона

Викладений у попередньому пункті графічний спосіб вирізання вузлів за своєю ідеєю дуже простий, наочний і не може викликати труднощів, оскільки завжди легко зрозуміти, в якій послідовності слід вирізати вузли даної ферми. Однак цей спосіб має той недолік, що кожен силу (за винятком зовнішніх сил) доводиться, як можна бачити, зображати на кресленні два рази (в протилежних напрямках), що під час розрахунку ферм із великим числом вузлів ускладнює роботу і робить побудову менш точним. Крім того, оскільки силові багатокутники будуються окремо для кожного вузла, то ми не отримуємо єдиної, загальної картини розподілу зусиль у стержнях даної ферми. Тому виникає прагнення вдосконалити цей спосіб так, щоб звільнитися від цих недоліків. Для цього було б достатньо з'єднати разом всі розрізнені силові багатокутники, зображені, наприклад, на рис. 5, таким чином, щоб вони утворили одну геометричну фігуру – загальну діаграму зусиль для всієї даної ферми – і щоб при цьому кожна сила на цій діаграмі зустрічалася тільки один раз. Геометрична теорія побудови таких діаграм була розроблена італійським геометром Луїджі Кремона [2].

Під час побудови діаграми Кремона доводиться будувати силові багатокутники для кожного з вузлів ферми абсолютно так само, як це було зазначено в попередньому параграфі. Але для того, щоб діаграма була побудована правильно, щоб ці силові багатокутники утворили одну геометричну фігуру і притому так, щоб кожна сила на діаграмі зустрічалася тільки один раз, у процесі побудови діаграми Кремона потрібно строго дотримуватися певних правил. Ці правила ми і розглянемо на прикладі побудови діаграми для симетричної ферми, зображеної на рис. 7. До цієї ферми прикладена одна задана вертикальна сила F.

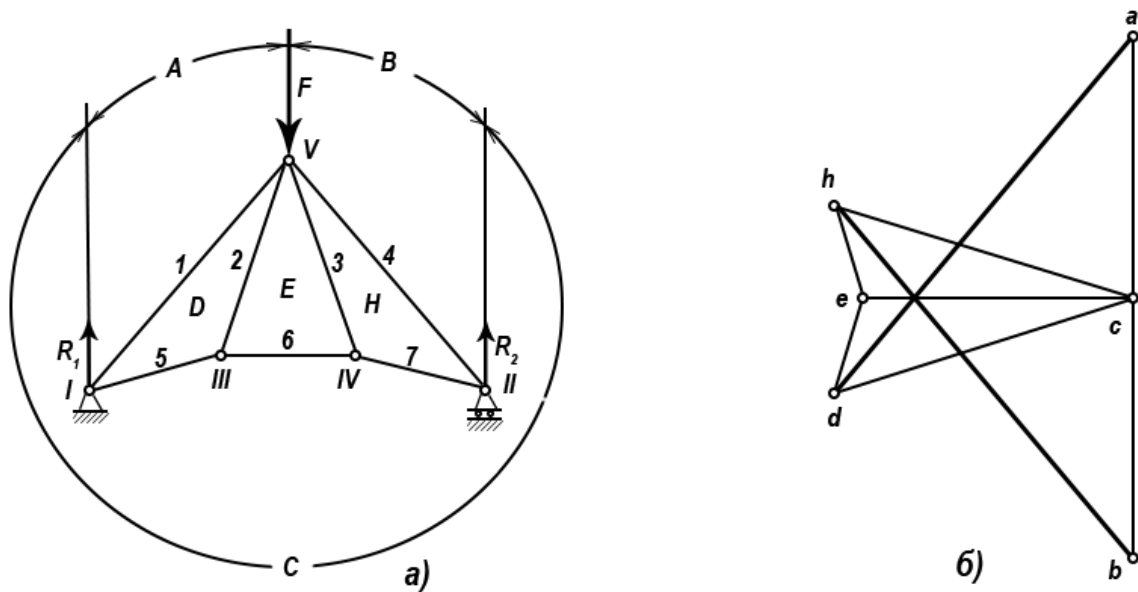


Рис. 7. Діаграма симетричної ферми

Перш ніж приступати до побудови діаграми Кремона, визначають спочатку опорні реакції. Це можна зробити або аналітично з трьох рівнянь рівноваги зовнішніх сил, прикладених до ферми, в які, крім заданих сил, увійдуть і опорні реакції, або графічно. У даному випадку горизонтальна складова реакції в нерухомому шарнірі дорівнює нулю. Що стосується вертикальних реакцій цього шарніра і рухомої опори, то внаслідок повної симетрії ці реакції, очевидно, рівні між собою і, отже, кожна з них дорівнює за модулем  $\frac{1}{2} F$ . Позначимо ці реакції через  $R_1$  і  $R_2$ . Зовнішні сили будемо завжди зображати на кресленні так, щоб вони були розташовані поза даної ферми. Тому зовнішня сила  $F$  зображена на кресленні так, що у вузлі  $V$  знаходиться кінець вектора  $F$ , а не його початок.

Частини площини, обмежені зовнішнім контуром ферми і лініями зовнішніх сил, будемо називати зовнішніми областями. У даному випадку є, очевидно, три зовнішні області, які позначимо буквами  $A$ ,  $B$  і  $C$ . Частини площини, розташовані всередині ферми і обмежені тільки стрижнями ферми, будемо називати внутрішніми областями. У даному випадку є три внутрішні області, які позначимо буквами  $D$ ,  $E$ ,  $H$ . На діаграмі Кремона не будемо ставити стрілок, що вказують напрями сил, а будемо позначати кожену силу двома буквами, що стоять на початку і в кінці прямолінійного відрізка, який зображує на діаграмі цю силу. Зауважимо, що порядок літерного позначення сил під час побудови діаграми Кремона грає дуже істотну роль. Домовимося кожену силу на діаграмі позначати двома малими

буквами, відповідними тим великим літерам, якими позначені дві суміжні області, розмежовані лінією дії цієї сили. Крім того, необхідно встановити певну послідовність літер під час позначення всіх зовнішніх сил на діаграмі. Домовимося у процесі позначення кожної зовнішньої сили на діаграмі ставити букви в тому порядку, в якому розташовані дві суміжні зовнішні області, розмежовані лінією дії цієї сили, під час обходу ферми за годинниковою стрілкою, тому сила  $F$  повинна мати на діаграмі позначення  $ab$  (а не  $ba$ ). Перша буква позначає початок відрізка, який зображує на діаграмі силу  $F$ , а друга – кінець цього відрізка. Аналогічно сили  $R_1$  і  $R_2$  повинні мати позначення відповідно  $ca$  і  $bc$ . Визначивши, як зазначено, опорні реакції, переходять до побудови багатокутника зовнішніх сил, який завжди буде замкнутим, оскільки всі зовнішні сили, прикладені до ферми, знаходяться в рівновазі. Оскільки в даному випадку всі зовнішні сили паралельні, то на діаграмі відрізки, що зображують ці сили, розташуються на одній прямій, як показано на рис. 7б (відрізки  $ab$ ,  $bc$ ,  $ca$ ). (Масштаб сил на цьому кресленні узятий в чотири рази більшим, ніж на рис. 7а). Важливо зауважити, що побудова багатокутника зовнішніх сил можна починати з будь-якою зовнішньою силою, але всі інші сили необхідно будувати в тій послідовності, в якій ми їх зустрічаємо під час обходу ферми в установленому напрямі, тобто за годинниковою стрілкою.

Побудувавши замкнутий багатокутник зовнішніх сил, переходимо до побудови на діаграмі силових багатокутників для кожного з вузлів ферми. Як було зазначено в попередньому пункті, потрібно починати з такого вузла, в якому поєднуються тільки два стержня. Для даної ферми такими вузлами є вузли I і II. Почнемо з вузла I. До цього вузла прикладені три сили: сила  $R_1 = ca$  і реакції стержнів 1 і 5, спрямовані уздовж цих стержнів. Оскільки стержень 1 розмежує суміжні області A і D, то згідно з прийнятим правилом реакція цього стержня повинна бути позначена на діаграмі буквами  $a$  і  $d$ . Точно так же реакція стержня 5 повинна позначатися на діаграмі буквами  $d$  і  $c$ . Тепер вже ясно, як потрібно будувати на діаграмі трикутник сил, прикладених до вузла I: оскільки відрізок  $ca$  на діаграмі вже побудований, то залишається з точки  $c$  провести пряму, паралельну стержню 5 (а не стержню 1, оскільки буква  $c$  не входить у позначення реакції цього стержня), а з точки  $a$  провести пряму, паралельну стержню 1. Точку перетину цих прямих позначимо літерою  $d$ , яка є спільною в позначеннях реакцій стержнів 1 і 5. Таким чином, силовий трикутник  $adca$  для вузла I побудований (рис. 7б). Обходячи цей трикутник у напрямку сили  $R_1$ , тобто

в напрямі від  $s$  до  $a$ , бачимо, що реакції стрижнів 1 і 5, прикладені до вузла I, зображуються векторами  $ad$  і  $dc$ . Звідси приходимо до такого висновку: для визначення напрямку реакції стержня, яка додається до вирізаного вузла, необхідно читати букви, що позначають цю реакцію на діаграмі, в тому порядку, в якому розташовані дві суміжні області, розмежовані цим стрижнем, під час обходу вирізаного вузла за годинниковою стрілкою. Справді, обходячи вузол I за годинниковою стрілкою, потрібно згідно з цим правилом позначити реакцію, наприклад, стрижня 1, прикладену до цього вузла, вектором  $ad$  ( $a$  не  $da$ ), що відповідає дійсному напрямку цієї сили в силовому трикутнику, побудованому для вузла I.

Під час переходу до нового вузла потрібно вибирати завжди такий вузол, у якому є не більше двох невідомих сил, тобто не більше двох стрижнів, в яких зусилля ще не визначені. Тому переходимо до вузла III. До цього вузла прикладені три урівноважуючі сили – реакції стрижнів 5, 2 і 6. Обходячи цей вузол за годинниковою стрілкою, бачимо, що ці сили на діаграмі повинні зображуватися відповідно відрізками  $cd$ ,  $de$  і  $ec$ . Але відрізок  $cd$  на діаграмі вже є. Залишається з точки  $d$  провести пряму, паралельну стрижня 2, а з точки  $c$  – пряму, паралельну стрижня 6. Точку перетину цих прямих позначаємо буквою  $e$ . Таким чином, отримуємо силовий трикутник  $cdes$  для вузла III.

Вирізаємо тепер вузол IV. Обходячи цей вузол за годинниковою стрілкою, знаходимо, що три урівноважуючі сили, що діють на цей вузол (реакції стрижнів 6, 3 і 7), повинні на діаграмі складати трикутник зі сторонами  $se$ ,  $eh$  і  $hc$ ; тому з точки  $e$  проводимо пряму, паралельну стрижня 3, а з точки  $c$  – пряму, паралельну стрижня 7. Точку перетину цих прямих позначаємо буквою  $h$ .

Переходимо до вузла II. З трьох сил  $bc$ ,  $ch$  і  $hb$ , прикладених до цього вузла, дві перші на діаграмі вже є, тому для побудови силового трикутника для вузла II досить з'єднати на діаграмі точки  $h$  і  $b$ . Зрозуміло, що якщо побудова діаграми виконано досить точно, то пряма  $hb$  повинна виявитися паралельною стрижню 4.

Переходячи, нарешті, до вузла V, бачимо, що багатокутник сил, прикладених до цього вузла, на діаграмі вже побудований (багатокутник  $abheda$ ). Таким чином, діаграма Кремона для даної ферми побудована повністю. Вимірявши на діаграмі довжину відрізків  $ad$ ,  $dc$ ,  $ch$  і т. д. і, знаючи масштаб, в якому побудовані зовнішні сили, прикладені до ферми, знаходимо чисельні значення зусиль в кожному з її стрижнів.

Подивимося тепер, як за діаграмою Кремона визначити, які стрижні стиснуті і які розтягнуті. З попереднього параграфа відомо, що характер зусилля в даному стрижні визначається напрямом реакції цього стрижня, яка додається до одного з вузлів, що знаходяться на його кінцях. Але вже відомо, як знайти цей напрям на діаграмі. Нехай, наприклад, потрібно визначити, стиснутий або розтягнутий стрижень 3. Для цього обходимо за годинниковою стрілкою один із двох вузлів, які з'єднує цей стержень, наприклад вузол V. Реакція стрижня 3, прикладена до вузла V, зображується на діаграмі вектором  $he$  (а не  $eh$ ). Якщо перенесемо вектор  $he$  на стрижень 3, то побачимо, що цей вектор спрямований від вузла V. Звідси, на підставі сказаного в попередньому параграфі робимо висновок, що стрижень 3 розтягнутий. Легко перевірити, що прийдемо до того ж результату, обходячи за годинниковою стрілкою вузол IV. Під час обхода вузла V бачимо також, що реакція стрижня 4, прикладена до цього вузла, зображується на діаграмі вектором  $bh$ ; але цей вектор, якщо його перенести на стрижень 4, буде спрямований до вузла V, отже, стрижень 4 стиснутий. На діаграмі Кремона стискають зусилля прийнято зображати подвійними або жирними лініями.

Дві геометричні фігури, які зображають ферму разом з лініями дії всіх доданих до неї зовнішніх сил (включаючи й опорні реакції) і побудовану для цієї ферми діаграму Кремона, називаються взаємними. Укажемо на наступні основні властивості таких взаємних фігур:

1) взаємні фігури мають рівне число сторін. Дійсно кожної прямої лінії ферми (лінії дії зовнішньої сили або стрижня) відповідає тільки одна пряма лінія на діаграмі (зовнішня сила або реакція стрижня) і навпаки;

2) сторони взаємних фігур попарно паралельні або перпендикулярні. Дійсно, кожену пряму лінію на діаграмі проводимо паралельно відповідній прямій лінії на фермі. Щоб отримати дві взаємні фігури з перпендикулярними сторонами, досить повернути діаграму Кремона навколо будь-якої точки на прямий кут;

3) прямих лініях, які обмежують на одній фігурі многокутну область, відповідають на іншій формі прямі лінії, які перетинають в одній точці, і навпаки. Дійсно прямих лініях на фермі, що обмежує якусь область, наприклад область D, відповідають на діаграмі прямі лінії, які мають спільну точку d.



## 4. Спосіб розрізів ферми

Розглянуті способи вирізання вузлів і спосіб Кремона становлять графічні способи визначення зусиль в стержнях ферми. Тепер розглянемо аналітичний спосіб вирішення того ж завдання [3].

Застосуємо цей аналітичний спосіб розрахування ферми, зображеної на рис. 8а, що складається із стрижневих рівнобедрених трикутників.

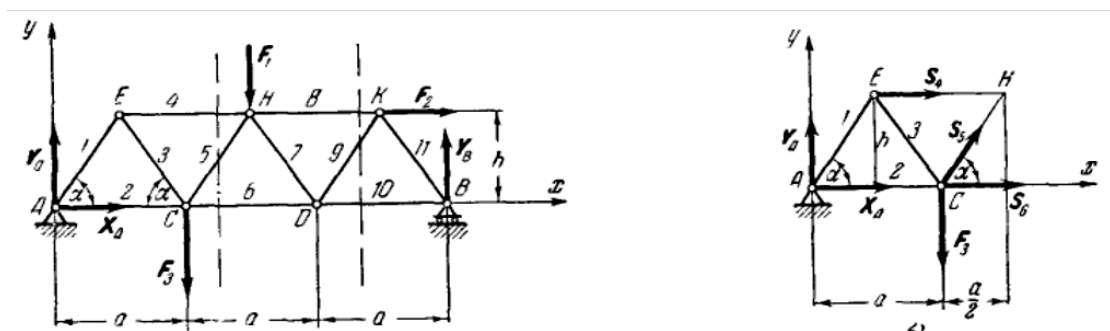


Рис. 8. Стрижнева ферма

Ця ферма має нерухому шарнірну опору А і рухому опору В на котках, які можуть переміщатися по нерухомій горизонтальній площині. До ферми прикладені три задані сили: дві вертикальні сили  $F_1$  і  $F_3$  і одна горизонтальна сила  $F_2$ . Розміри ферми вказані на кресленні. Потрібно знайти зусилля в стрижнях цієї ферми.

Визначимо, насамперед, опорні реакції. У нерухомому шарнірі А маємо дві складові реакції: горизонтальну  $X_A$  і вертикальну  $Y_A$ ; в точці В, вважаючи опорну площину гладкою, маємо тільки вертикальну реакцію  $Y_B$ . Для визначення цих реакцій складемо три рівняння рівноваги всіх зовнішніх сил, що діють на ферму. Складаючи рівняння проєкцій зовнішніх сил на вісь  $x$  і два рівняння моментів цих сил щодо точок А і В, отримаємо:

$$X_A + F_2 = 0,$$

$$3aY_B - aF_3 - \frac{3}{2}aF_1 - hF_2 = 0,$$

$$2aF_3 + \frac{3}{2}aF_1 - hF_2 - 3aY_A = 0.$$

З цих рівнянь знаходимо:

$$X_A = -F_2, \quad Y_A = \frac{F_1}{2} + \frac{2}{3}F_3 - \frac{h}{3a}F_2,$$

$$Y_B = \frac{F_1}{2} + \frac{F_3}{3} + \frac{h}{3a} F_2.$$

Негативне значення величини  $X_A$  показує, що реакція  $X_A$  має напрямок, протилежне прийнятому на кресленні, тобто направлена вліво.

Переходимо тепер до визначення зусиль в стержнях ферми. Для цього розріжемо дану ферму на дві частини так, щоб виявилися перерізними тільки стрижні (а не вузли), але не більше, ніж три стрижня. Проведемо, наприклад, розріз по стрижням 4, 5 і 6. Після цього видалимо подумки одну з відрізнаних частин ферми, наприклад праву, і розглянемо решту ліву частину. Ця частина залишиться в рівновазі, якщо прикласти до неї в вузлах E і C реакції перерізнаних стрижнів, які чисельно рівні шуканим зусиллям у цих стрижнях. Позначимо ці реакції через  $S_4$ ,  $S_5$  і  $S_6$  (рис. 8б). Реакція перерізаною стрижня може бути направлена уздовж цього стрижня як в ту, так і в іншу сторону залежно від того, чи буде цей стрижень стиснутий або розтягнутий. Оскільки дійсний напрям сил  $S_i$  нам заздалегідь не відомий, то для визначеності припустимо, що всі перерізані стрижні розтягнуті, і, отже, направимо кожен з сил  $S_i$  уздовж відповідного стержня від вузла, як показано на рис. 8б.

Таким чином, розглянута частина ферми знаходиться в рівновазі під дією шести сил:  $X_A$ ,  $Y_A$ ,  $F_3$ ,  $S_4$ ,  $S_5$  і  $S_6$ . З них перші три відомі, а три останні потрібно визначити, що можна зробити, склавши три рівняння рівноваги для даної частини ферми.

Найбільш просте рішення цієї системи трьох рівнянь ми будемо мати в тому випадку, коли кожне з них може бути вирішено незалежно від інших, тобто коли в кожне з цих рівнянь входить тільки одна невідома сила. Щоб отримати рівняння рівноваги, в яке з трьох невідомих сил входила б тільки  $S_4$ , потрібно скласти рівняння моментів відносно точки C, в якій перетинаються лінії дії двох інших невідомих сил  $S_5$  і  $S_6$ , оскільки моменти цих сил щодо C дорівнюють нулю.

Другий аналогічної точкою є вузол H, в якому перетинаються лінії дії сил  $S_5$  і  $S_4$ . Якщо складемо рівняння моментів щодо точки H, то величини  $S_5$  і  $S_4$  в це рівняння не увійдуть. Точка перетину ліній дії сил  $S_4$  і  $S_6$  є нескінченно віддаленою, оскільки ці сили паралельні. Тому, щоб отримати рівняння, що не містить невідомих  $S_4$  і  $S_6$ , потрібно скласти рівняння проєкцій на вісь, перпендикулярну до напрямку сил  $S_4$  і  $S_6$  тобто на вісь Y, оскільки проєкції сил  $S_4$  і  $S_6$  на цю вісь дорівнюють нулю. Таким чином, склавши два рівняння моментів щодо точок C і H і рівняння проєкцій на вісь y,

отримаємо наступну, найбільш просту в даному випадку систему рівнянь рівноваги:

1) рівняння моментів відносно точки С:

$$-aY_A - hS_4 = 0,$$

2) рівняння моментів відносно точки Н:

$$hS_6 + \frac{a}{2}F_3 + hX_A - \frac{3}{2}aY_A = 0,$$

3) рівняння проєкцій на вісь у:

$$Y_A + S_5 \sin \alpha - F_3 = 0.$$

Із цих рівнянь знаходимо:

$$S_4 = -\frac{a}{h}Y_A, \quad S_6 = \frac{3a}{2h}Y_A - X_A - \frac{a}{2h}F_3, \quad S_5 = \frac{F_3 - Y_A}{\sin \alpha}.$$

Залишається підставити сюди знайдені значення  $X_A$  і  $Y_A$ . Що стосується кута  $\alpha$ , то він визначається за даними розмірами ферми з прямокутного трикутника з катетами  $h$  і  $a/2$  саме:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2h}{a}.$$

Таким чином, зусилля в стержнях 4, 5 і 6 знайдені. Якщо  $Y_A > 0$ , то величина  $S_4$  отримує негативне значення. Це означає, що сила  $S_4$  має напрямок, протилежне прийнятому, тобто вона буде направлена до вузла Е; отже, стрижень 4 буде стиснутий. Звідси бачимо, що під час визначення зусиль у стержнях ферми аналітичним способом характер зусилля в стержні визначається за знаком знайденої реакції цього стрижня: якщо з рівнянь рівноваги отримаємо для реакції даного стержня від'ємне значення, то стрижень стиснутий, якщо ж ця реакція має позитивне значення, то стрижень розтягнутий. Зрозуміло, що це правило буде правильним лише в тому випадку, якщо ми домовимося реакцію перерізаною стрижня доставляти завжди від відповідного вузла.

Якщо зробимо другий розріз, наприклад за стрижнями 8, 9 і 10, і складемо три рівняння рівноваги для однієї з відрізаних частин ферми, наприклад, для лівої частини АЕНД або для правої частини, тобто для

стержня KB, то знайдемо з цих рівнянь зусилля  $S_8, S_9, S_{10}$  у стрижнях 8, 9, 10. Щоб знайти зусилля в стрижнях 1 і 2, досить перерізати тільки ці два стержня і скласти два рівняння рівноваги для відрізання правій частині ферми EKBC (два рівняння моментів щодо точок E і C) або ж два рівняння рівноваги для відрізаного вузла A, проектуючи всі сили, прикладені до цього вузла ( $X_A, Y_A, S_1$  і  $S_2$ ), на осі  $x$  і  $y$ .

Резюмуючи все викладене, зазначимо ще раз, як визначаються зусилля в стержнях ферми аналітичним способом (за способом розрізів ферми):

1) визначають спочатку опорні реакції, складаючи для цього три рівняння рівноваги для всієї даної ферми в цілому (в ці рівняння входять тільки зовнішні сили, прикладені до ферми, тобто задані навантаження і опорні реакції);

2) розрізають ферму на дві частини, роблячи при цьому перший розріз не більше, ніж за трьома стержнів, і розглядають одну з відрізанних частин, видаливши подумки другу частину ферми. Реакцію кожного перерізаною стрижня направляють уздовж цього стрижня від вузла;

3) складають для решти ферми три рівняння рівноваги: три рівняння моментів щодо трьох точок, у яких попарно перетинаються напрямки перерізанних стержнів; якщо з перерізанних стержнів два паралельні, то замість третього рівняння моментів складають рівняння проекцій на вісь, перпендикулярну до паралельним стержнів;

4) з цих трьох рівнянь знаходять реакції перерізанних стержнів; при цьому позитивних значень реакцій відповідають розтягують зусилля, а негативним – стискають;

5) роблячи послідовно ряд розрізів ферми за різними стержнями, визначають зусилля в усіх стержнях ферми.

На рис. 9 – 11 подано варіанти ферм, в яких необхідно визначити зусилля в стержнях.

Розглянемо визначення реакцій опор і зусиль в стержнях плоскої ферми.

До одного з вузлів плоскою ферми прикладена сила. Визначити реакції опор ферми (за допомогою теореми про рівновагу трьох непаралельних сил), а також зусилля у всіх її стрижнях способом вирізання вузлів. Вага стержнів не враховувати. Результати аналітичного розрахунку перевірити для кожного вузла шляхом побудови силового багатокутника.

Ґрунтуючись на отриманих значеннях зусиль в стержнях, визначити реакції опор ферми також і аналітичним способом.

Схеми ферм і необхідні для розрахунку дані наведені на рис. 9 – 11.

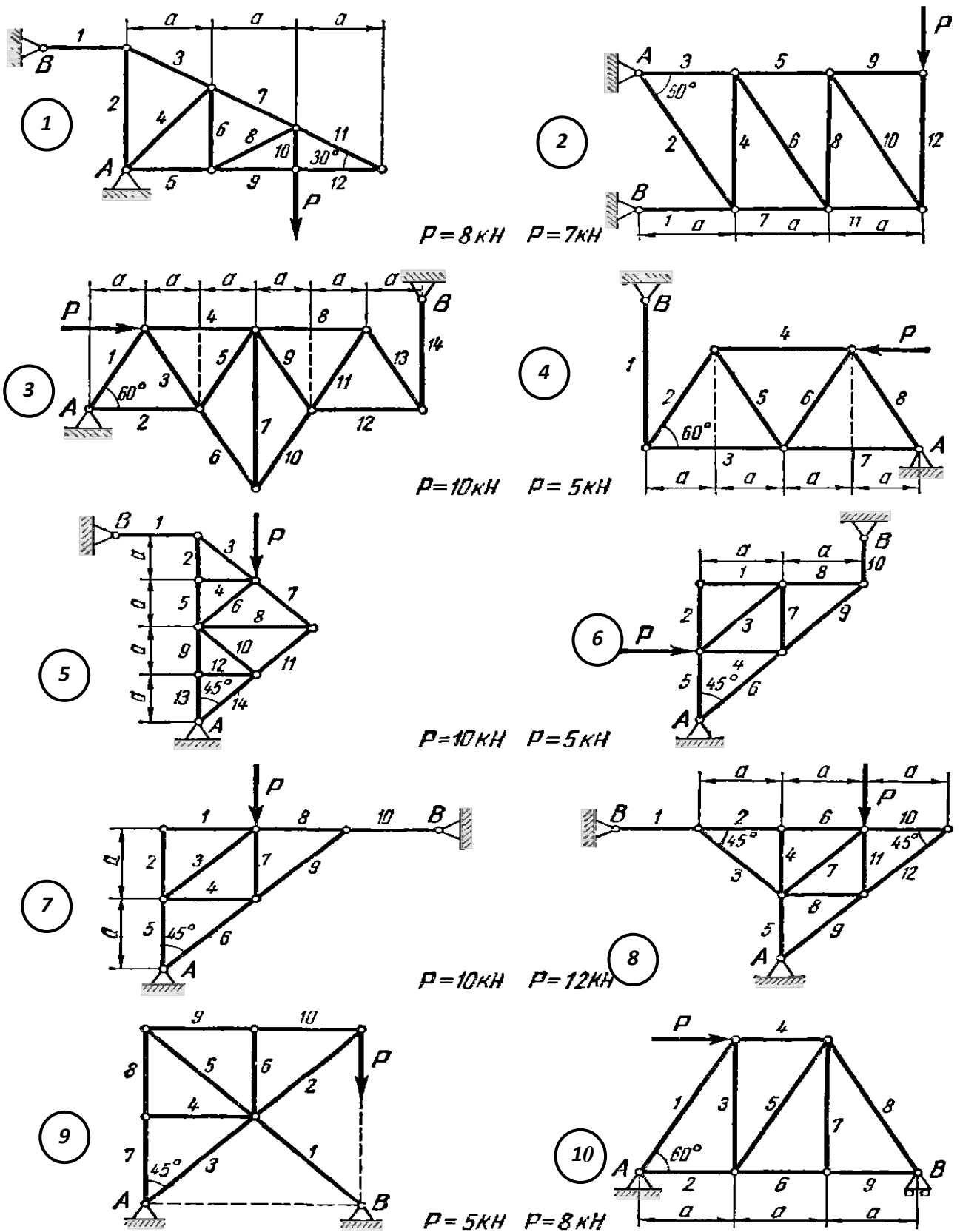
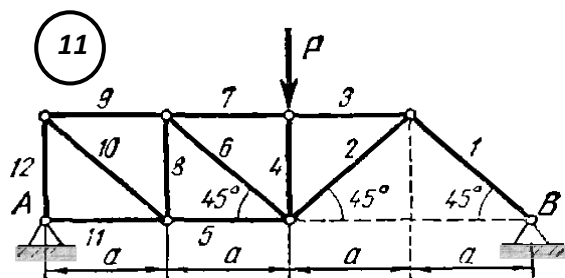
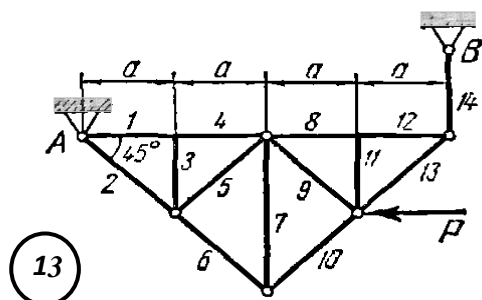
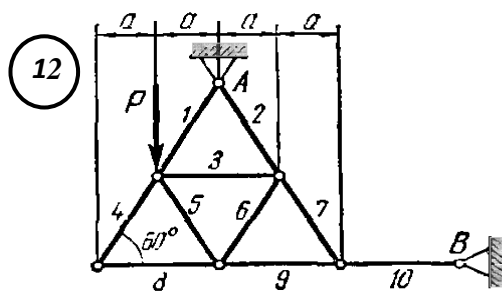


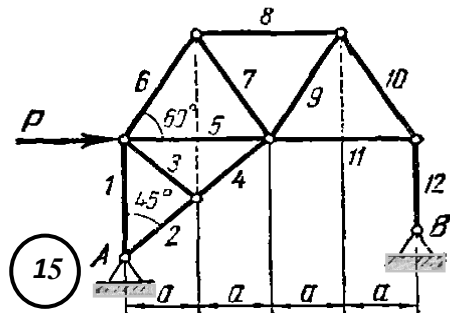
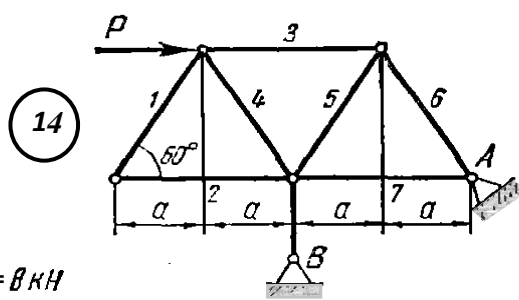
Рис. 9. Схеми ферм для варіантів 1 – 10



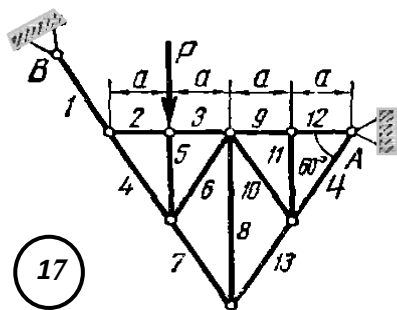
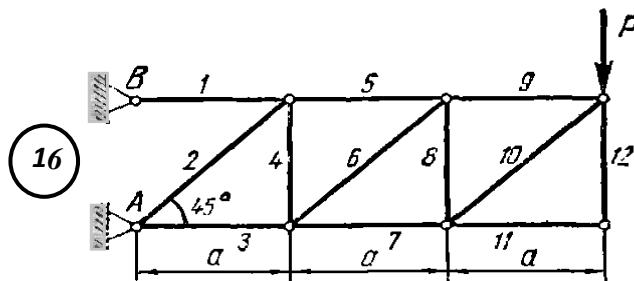
$P = 4 \text{ кН}$     $P = 10 \text{ кН}$



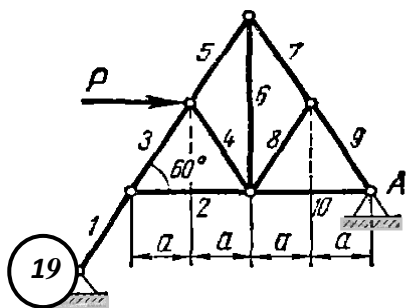
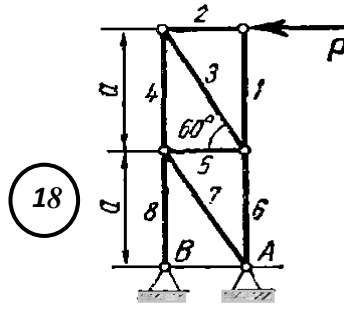
$P = 12 \text{ кН}$     $P = 8 \text{ кН}$



$P = 10 \text{ кН}$     $P = 12 \text{ кН}$



$P = 5 \text{ кН}$     $P = 12 \text{ кН}$



$P = 5 \text{ кН}$     $P = 5 \text{ кН}$

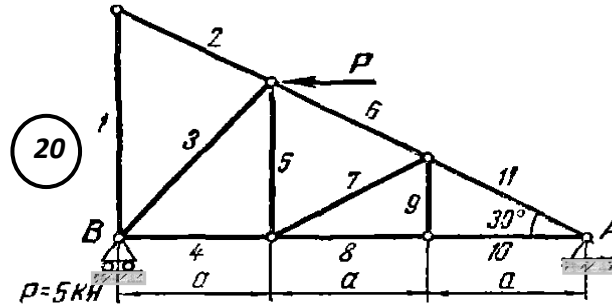


Рис. 10. Схеми ферм для варіантів 11 – 20

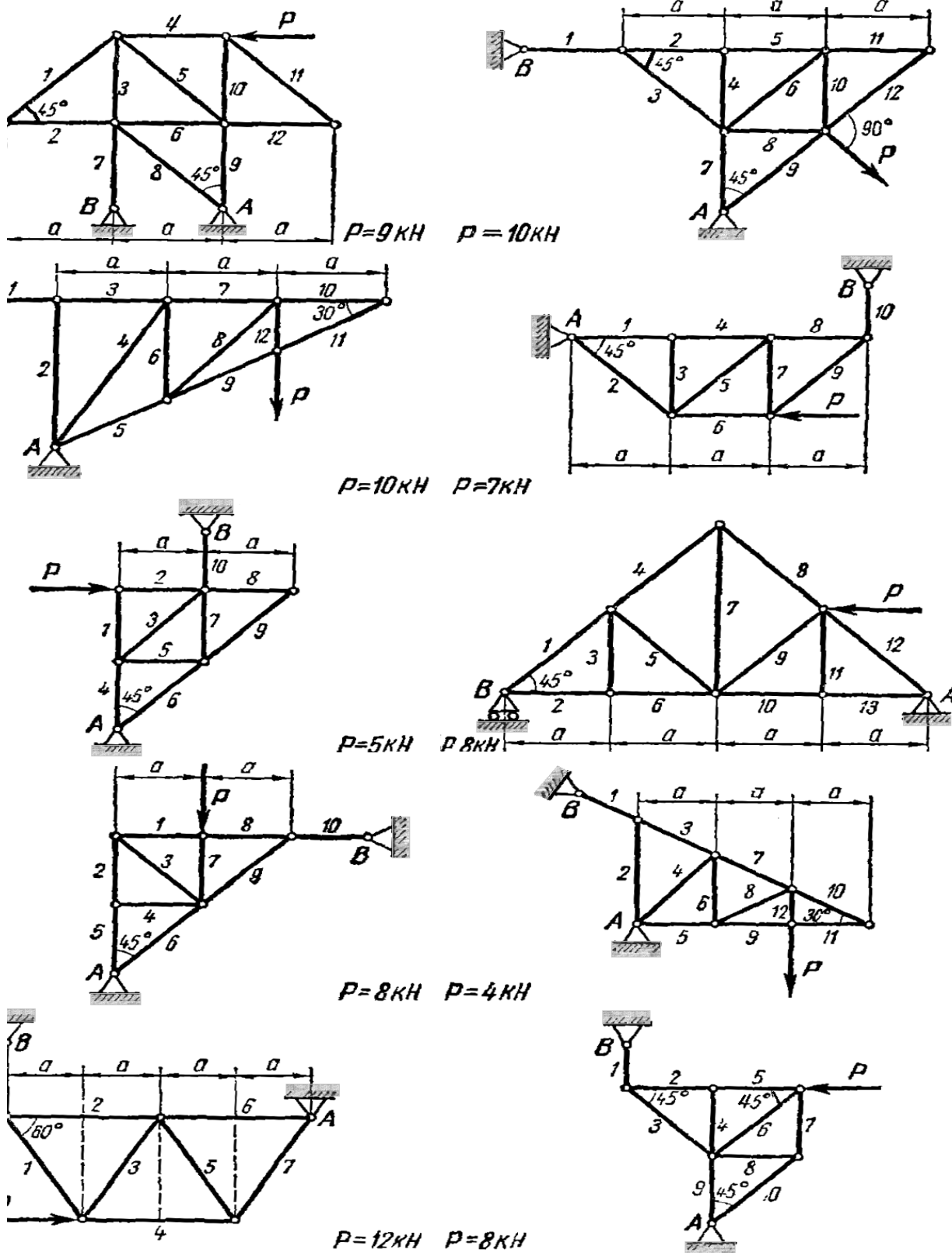


Рис. 11. Схеми ферм для варіантів 21 – 30

Приклад виконання завдання.

Дано: схема ферми (рис. 12а);  $P = 11 \text{ Кн}$ ,  $\alpha = 30^\circ$ . Знайти реакції  $R_A$ ,  $R_B$  і зусилля в стержнях.

Рішення. 1. Визначення реакцій опор. Розглянемо зовнішні сили, прикладені до ферми: задається силу  $P$  і реакції опор  $R_A$  і  $R_B$ . Оскільки опора  $A$  стрижнева, то лінія дії реакції  $R_A$  відома: вона спрямована по осі стрижня  $AD$ . Лінію дії  $R_B$  реакції визначаємо, застосовуючи теорему про рівновагу трьох непаралельних сил (рис. 12а).

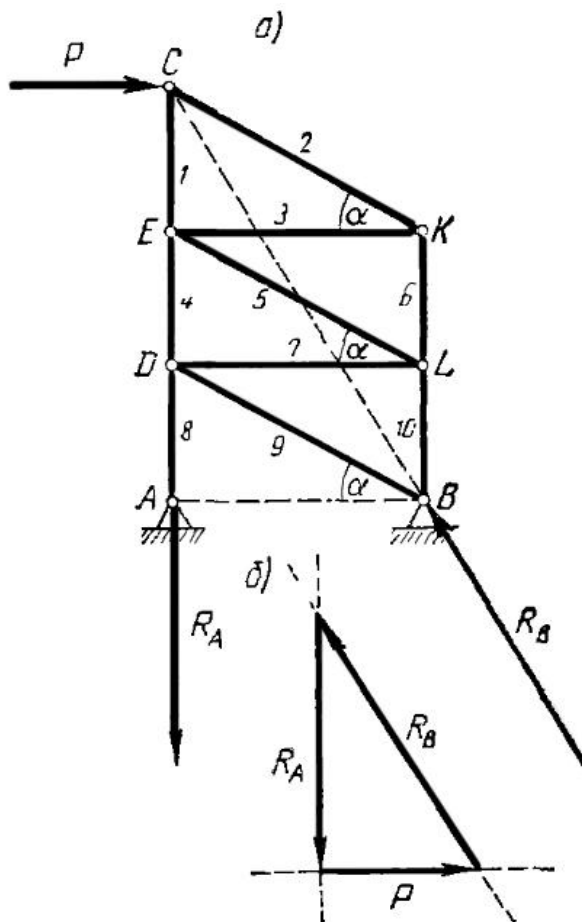


Рис. 12. Схема розрахункової ферми

Три сили  $P$ ,  $R_A$  і  $R_B$  взаємно врівноважуються, отже, лінії їх дії перетинаються в одній точці.

Знаходимо точку перетину ліній дії сил  $P$  і  $R_A$ . Лінія дії реакції  $R_B$  проходить через цю точку (точку  $C$ ) і центр шарніра  $B$ . Будуємо замкнутий силовий трикутник.

Його побудова починаємо з сили  $P$ . Через початок вектора  $P$  проводимо пряму, паралельну лінії дії однієї реакції, наприклад  $R_A$ , а через кінець – пряму, паралельну лінії дії  $R_B$  до їх взаємного перетину.



Сторони отриманого замкнутого силового трикутника визначають модулі та напрями опорних реакцій  $R_A$  і  $R_B$ . З подоби силового трикутника і трикутника  $ABC$  знаходимо  $R_A$  і  $R_B$ :

$$\frac{R_A}{AC} = \frac{P}{AB} = \frac{R_B}{BC}.$$

Прийнявши  $AB = a$ , отримаємо:

$$AC = 3CE = 3a \operatorname{tg} \alpha = 3a \frac{\sqrt{3}}{3} = a\sqrt{3};$$

$$BC = \sqrt{(AC)^2 + (AB)^2} = \sqrt{(a\sqrt{3})^2 + a^2} = 2a.$$

Отже:

$$\frac{R_A}{a\sqrt{3}} = \frac{P}{a} = \frac{R_B}{2a},$$

звідки:

$$R_A = P\sqrt{3} = 11\sqrt{3} = 19,05 \text{ кН};$$

$$R_B = 2P = 2 \times 11 = 22 \text{ кН}.$$

1. Визначення зусиль у стержнях ферми. Крім зовнішніх сил, які можуть бути включені до вузла ферми, на кожен її вузол діють реакції сходилися в ньому стрижнів. Ці реакції рівні зусиллям в стрижнях.

Розглядаємо рівновагу сил, прикладених до кожного вузла ферми, вибираючи вузли в такій послідовності, щоб число невідомих сил в вузлі не перевищувало двох.

Умовно припускаємо, що всі стрижні розтягнуті, тобто реакції стрижнів спрямовані від вузлів (рис. 13).

Негативні знаки знайдених реакцій показують, що відповідні стержнів не розтягнуті, а стиснуті, тобто реакції цих стрижнів спрямовані до вузлів.

Реакції кожного стержня позначимо  $S$  і  $S'$ , причому  $S = -S'$ . Розрахунок починаємо з вузла  $C$ .

Складемо два рівняння рівноваги сил, прикладених до цього вузла:

$$\sum X_i = 0; \quad P + S_2 \cos 30^\circ = 0;$$

звідки:

$$\sum Y_s = 0; \quad -S_1 - S_2 \cos 60^\circ = 0;$$

$$S_2 = -\frac{P}{\cos 30^\circ} = -\frac{11 \times 2}{\sqrt{3}} = -12,7 \text{ кН};$$

$$S_1 = -S_2 \cos 60^\circ = -(-12,7) \times 0,5 = 6,35 \text{ кН}.$$

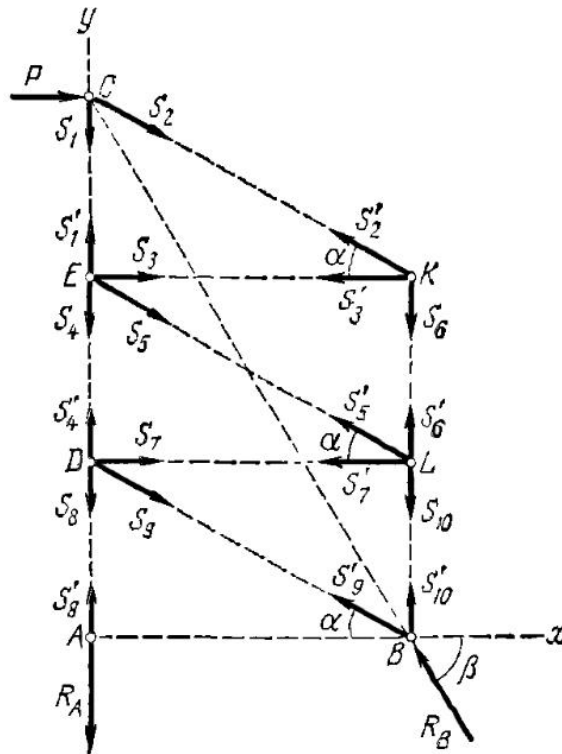


Рис. 13. Напрямы реакцій стержнів

Значення  $S_2$  виходить негативним,  $S_1$  – позитивним. Отже, стрижень 1 розтягнутий, а стрижень 2 стиснутий.

Для перевірки розрахунку будемо в масштабі трикутник сил  $P$ ,  $S_1$  і  $S_2$ , враховуючи, що напрям  $S_2$  у цьому трикутнику має бути протилежно напрямку  $S_2$  на рис. 13, оскільки стрижень 2 стиснутий (рис. 14).

Трикутник сил виходить замкнутим, тобто реакції  $S_1$  і  $S_2$  визначені правильно. Реакції інших стрижнів ферми визначаємо аналогічно. Замкнені багатокутники сил, прикладених до кожного вузлів ферми, показані на рис. 14.

Вузол К:

$$\sum X_i = 0; \quad -S'_2 \cos 30^\circ - S'_3 = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad -S_6 + S'_2 \cos 60^\circ = 0;$$

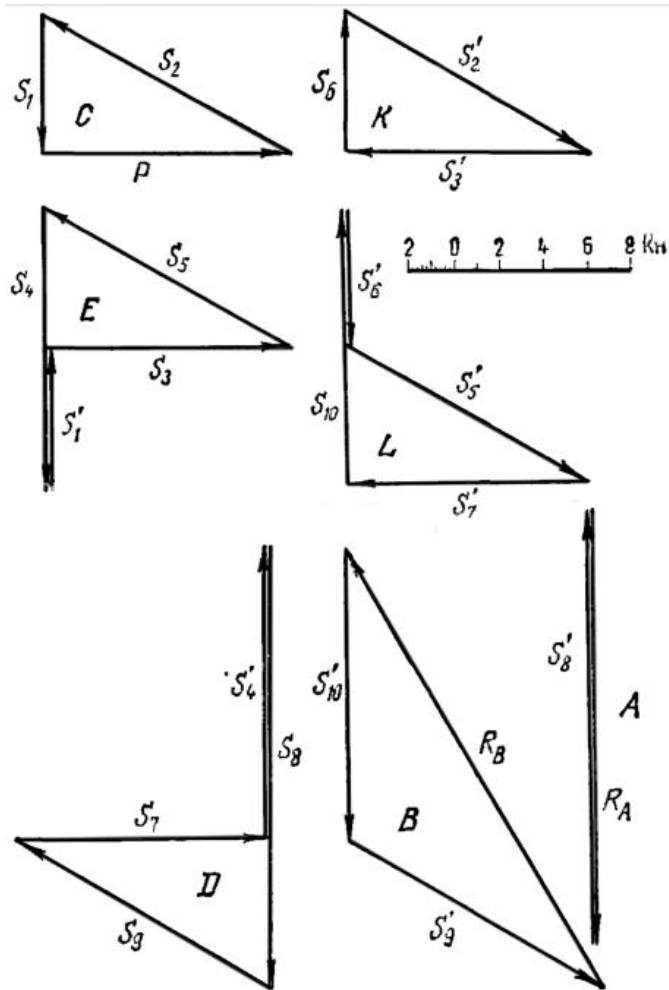


Рис. 14. Трикутник сил

Підставляючи в ці рівняння  $S'_2 = S_2 = -12,7$  кН, отримуємо:

$$S'_3 = -S'_2 \cos 30^\circ = -(-12,7) \frac{\sqrt{3}}{2} = 11 \text{ кН};$$

$$S'_6 = -S'_2 \cos 60^\circ = -12,7 \times 0,5 = -6,35 \text{ кН};$$

Вузол E:

$$\sum X_i = 0;$$

$$S_3 + S_5 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$S'_1 - S_4 - S_5 \cos 60^\circ = 0;$$

звідки:

$$S_5 = -\frac{S_3}{\cos 30^\circ} = -\frac{11,0}{0,866} = -12,7 \text{ кН},$$

$$S_4 = S'_1 - S_5 \cos 60^\circ = 6,35 - (-12,7) \times 0,5 = 12,7 \text{ кН}.$$

Вузол *L*:

$$\sum X_i = 0;$$

$$-S'_7 - S'_5 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0;$$

$$S'_6 + S'_5 \cos 60^\circ - S_{10} = 0;$$

звідки:

$$S'_7 = -S'_5 \cos 30^\circ = -(-12,7) \times 0,866 = 11,0 \text{ кН};$$

$$S_{10} = S'_6 + S'_5 \cos 60^\circ = -6,35 - 12,7 \times 0,5 = -12,7 \text{ кН}.$$

Вузол *D*:

$$\sum X_i = 0; \quad S_7 + S_9 \cos 30^\circ = 0;$$

$$\sum Y_i = 0; \quad S'_4 - S_8 - S_9 \cos 60^\circ = 0;$$

звідки:

$$S_9 = -\frac{S_7}{\cos 30^\circ} = -\frac{11,0}{0,866} = -12,7 \text{ кН};$$

$$S_8 = S'_4 - S_9 \cos 60^\circ = 12,7 - (-12,7) \times 0,5 = 19,05 \text{ кН}.$$

Таким чином, реакції всіх стрижнів ферми визначені. Зауважимо, що реакції опор даної ферми можна визначити, склавши рівняння рівноваги сил, прикладених до вузлів *A* і *B* (рис. 15).

Вузол *A*:

$$\sum Y_i = 0, \quad S'_8 - R_A = 0, \quad R_A = S'_8 = 19,05 \text{ кН}.$$

Вузол *B*:

$$\sum X_i = 0, \quad -S'_9 \cos 30^\circ - R_B \cos \beta = 0,$$

$$\sum Y_i = 0, \quad S'_{10} - S'_9 \cos 60^\circ + R_B \sin \beta = 0.$$

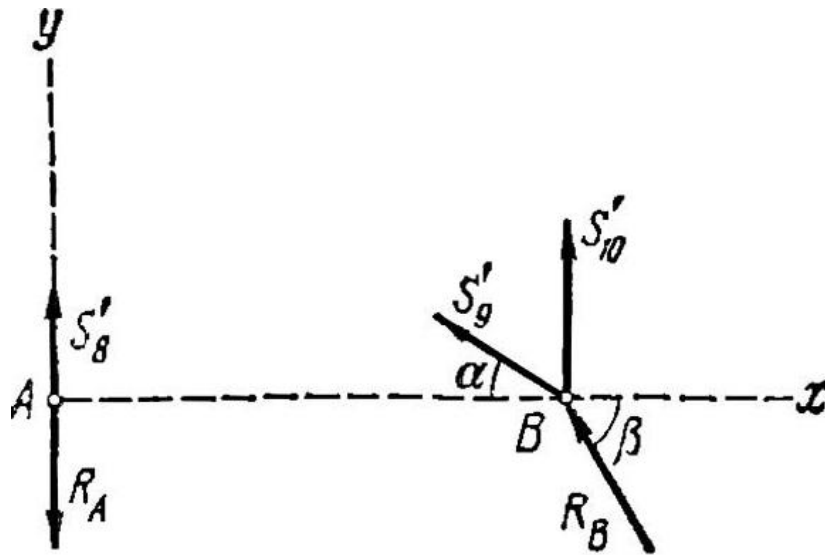


Рис. 15. Вузол А, вузол В

Вирішуючи спільно ці рівняння отримуємо:

$$R_B = 22 \text{ кН}, \quad \beta = \arctg 1,73 = 60^\circ$$

Числові значення реакцій отримання двома способами збігаються. Замкнені багатокутники сил, прикладених до опорних вузлів ферми, показані на рис. 14.

2. Складання таблиці зусиль у стержнях ферми і побудова схеми ферми з дійсними напрямками цих зусиль.

За результатами розрахунку складаємо таблицю зусиль в стержнях ферми (табл. 1).

Таблиця 1

### Зусилля в стержнях ферми

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Знак зусилля	+	-	+	+	-	-	+	+	-	-
Зусилля (кН)	6,35	12,7	11,0	12,7	12,7	6,35	11,0	19,05	12,7	12,7

Схема ферми з дійсними напрямками зусиль в стержнях показана на рис. 16.

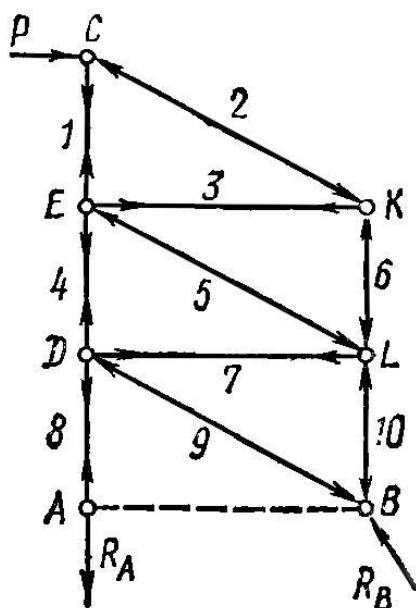


Рис. 16. Дійсні спрямування зусиль у стержнях ферми

## Тема 2. Центри ваги

### 1. Загальні формули для координат центра ваги

Уявімо якесь тверде тіло (рис. 17), що знаходиться поблизу поверхні Землі. На кожен елементарну частинку цього тіла діє сила тяжіння до землі, спрямована по вертикалі вниз, – вага цієї частки. Строго кажучи, ці сили, які будемо позначати через  $p_1, p_2, p_3$  є системою сил, що сходяться, оскільки всі вони перетинаються в одній точці – приблизно в центрі Землі.

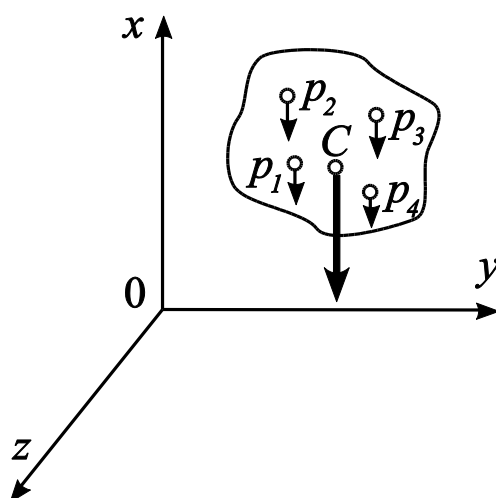


Рис. 17. Вага елементарної частинки

Але з огляду на те, що відстань даного тіла від центру Землі дуже велике порівняно з відстанями між окремими частинками цього тіла, кути, під якими перетинаються сили  $p_i$ , дуже малі, і з великим ступенем точності можна вважати, що всі ці сили паралельні. Центр  $Z$  цієї системи паралельних сил називається центром ваги даного тіла, а рівнодіюча цих сил  $P = \sum P_i$ , що проходить через точку  $C$ , є вагою цього тіла.

Розглянемо рішення задачі, що складається у визначенні положення центра ваги даного тіла. Віднесемо це тіло до прямокутної системі координат  $Oxyz$ . Щоб визначити положення центра ваги  $C$ , потрібно знайти його координати, які будемо позначати через  $x_c$ ,  $y_c$  і  $z_c$ . Оскільки центр ваги тіла є центр паралельних сил, що становить ваги елементарних частинок цього тіла, то для обчислення координат центра ваги можна застосувати загальні формули. Ці формули мають такий вигляд:

$$x_c = \frac{\sum px}{\sum p}, \quad y_c = \frac{\sum py}{\sum p}, \quad z_c = \frac{\sum pz}{\sum p}.$$

Тут  $x$ ,  $y$  і  $z$  позначають координати точок докладання зусиль  $p_i$ .

Позначимо вагу одиниці об'єму даного тіла через  $\gamma$ , обсяги елементарних частинок, на які розбивали все тіло (наприклад, площинами, паралельними координатним площинам, тоді матеріальні частинки матимуть форму, елементарних прямокутних паралелепіпедів), позначимо через  $\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3$  і т.д. Якщо дане тіло однорідне, то величина для всіх частинок тіла однакова, і отже, будемо мати:

$$p_1 = \gamma \Delta V_1, \quad p_2 = \gamma \Delta V_2, \quad p_3 = \gamma \Delta V_3, \quad \dots$$

Підставляючи ці значення сил  $p_i$  в попередні формули, отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum yx \Delta V}{\sum y \Delta V} = \frac{y \sum x \Delta V}{y \sum \Delta V} = \frac{\sum x \Delta V}{V},$$

де  $V = \sum \Delta V$  є обсяг усього тіла. Такі ж формули отримаємо і для двох інших координат:

$$y_c = \frac{\sum y \Delta V}{V}, \quad z_c = \frac{\sum z \Delta V}{V}.$$

Щоб отримати тепер точні формули для координат центра ваги однорідного тіла, потрібно в попередніх висловлюваннях перейти до межі, припускаючи, що число елементарних частинок, з яких складається тіло, необмежено зростає, а обсяг  $\Delta V_i$  кожної такої частки прагне до нуля. Тому остаточно будемо мати:

$$x_C = \frac{\lim \sum x \Delta V}{V}, \quad y_C = \frac{\lim \sum y \Delta V}{V}, \quad z_C = \frac{\lim \sum z \Delta V}{V}. \quad (1)$$

Якщо маємо тіло двох вимірів, наприклад дуже тонку пластинку, товщиною якою можна знехтувати, то завдання зводиться до визначення центра ваги матеріальної плоскої фігури.

Якщо така пластинка однорідна, то попередні формули для координат центра ваги обсягу залишаються вірними і в цьому випадку, тільки замість елементів обсягу  $\Delta V_i$  потрібно брати елементи площі  $\Delta S_i$ , а в знаменнику замість обсягу  $V$  потрібно брати площу  $S$  даної фігури (рис. 18). Отже, для координат центра ваги плоскої фігури матимемо:

$$x_C = \frac{\lim \sum x \Delta S}{S}, \quad y_C = \frac{\lim \sum y \Delta S}{S}. \quad (2)$$

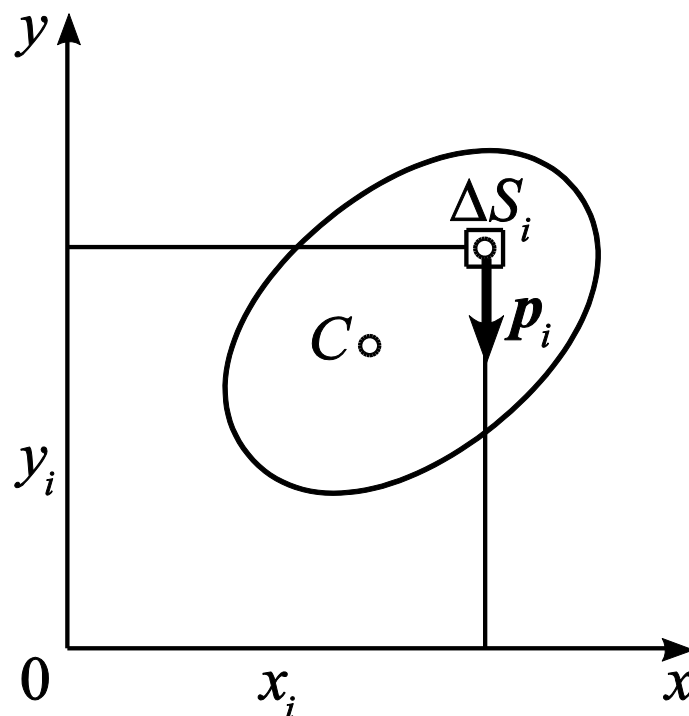


Рис. 18. Координати центра ваги плоскої фігури



Аналогічно для координат центра ваги однорідної плоскої матеріальної лінії АВ (наприклад, тонкого дроту, зігнутою у вигляді деякої плоскої кривої) отримаємо:

$$x_C = \frac{\lim \sum x \Delta l}{l}, \quad y_C = \frac{\lim \sum y \Delta l}{l}. \quad (3)$$

У цих формулах  $\Delta l$  позначає довжину елементарної дуги даної лінії, а  $l$  – всю довжину цієї лінії (рис. 19).

Слід зазначити, що центр ваги  $C$  кривої лінії взагалі не лежить на цій лінії.

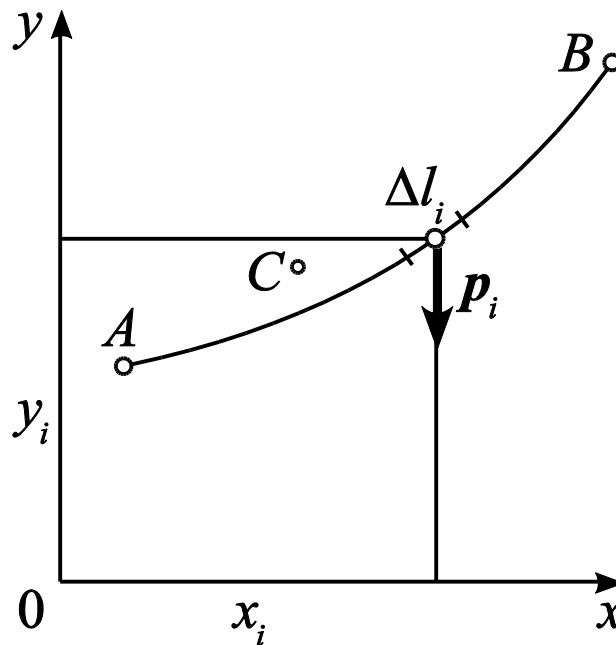


Рис. 19. Центр тяжкості кривої лінії

Зрозуміло, що формули (3) залишаються такими ж і в тому випадку, коли дана однорідна матеріальна лінія не є плоскою. У цьому випадку будемо мати:

$$x_C = \frac{\lim \sum x \Delta l}{l}, \quad y_C = \frac{\lim \sum y \Delta l}{l}, \quad z_C = \frac{\lim \sum z \Delta l}{l}. \quad (4)$$

Обчислення меж сум, що входять в отримані формули, проводиться в загальному випадку методами інтегрального числення. Ці межі виражаються певними інтегралами, поширеними відповідно на весь обсяг

даного тіла або на всю площу даної фігури або ж взятими уздовж даної лінії. Але якщо тіло має просту геометричну форму, то положення центра ваги такого тіла можна визначити елементарним шляхом.

## 2. Положення центра ваги симетричного тіла

*Лема.* Якщо точки докладання всіх даних паралельних сил лежать в одній і тій же площині або на одній і тій же прямій, то центр цієї системи паралельних сил лежить відповідно в тій же площині або на тій же прямій.

*Доведення.* Прийmemo площину, в якій лежать точки докладання всіх даних паралельних сил, за координатну площину Охуz. Тоді в правій частині формули:

$$z_c = \frac{\sum pz}{\sum p}$$

необхідно отримати всі координати z рівними нулю, а тому  $z_c = 0$ , тобто центр даної системи паралельних сил лежить в площині Оху, що й треба було довести.

Аналогічно доведемо і другу частину леми: прийmemo ту пряму, на якій лежать точки докладання всіх даних паралельних сил, за координатну вісь z. Тоді для всіх цих точок будемо мати:  $x_i = y_i = 0$ , а тому:

$$x_c = \frac{\sum px}{\sum p} = 0 \quad \text{і} \quad y_c = \frac{\sum py}{\sum p} = 0,$$

тобто центр даної системи паралельних сил лежить на осі z, що й треба було довести.

Користуючись цією леммой, неважко довести наступну теорему про становище центру ваги тіла симетричної форми:

*Теорема.* Якщо однорідне тіло має площину, або вісь, або центр симетрії, то центр ваги такого тіла лежить відповідно в цій площині, на цій осі або в цьому центрі симетрії.

*Доведення.* Нехай дане однорідне тіло має площину симетрії, тоді можемо розбити все тіло на пари однакових елементарних частинок рівного ваги, симетрично розташованих відносно цієї площини:  $A_1$  і  $A'_1$ ,  $A_2$  і  $A'_2$  (рис. 20).

Відрізки  $A_1A'_1$ ,  $A_2A'_2$  перпендикулярні до площини симетрії і в точках перетину з нею діляться навпіл, так що  $A_1M_1 = A'_1M_1$ ,  $A_2M_2 = A'_2M_2$ .

Позначимо ваги елементарних частинок через  $p_1$ ,  $p'_1$ ,  $p_2$ ,  $p'_2$ . Оскільки ваги симетричних часток рівні, то  $p_1 = p'_1$ ,  $p_2 = p'_2$ .

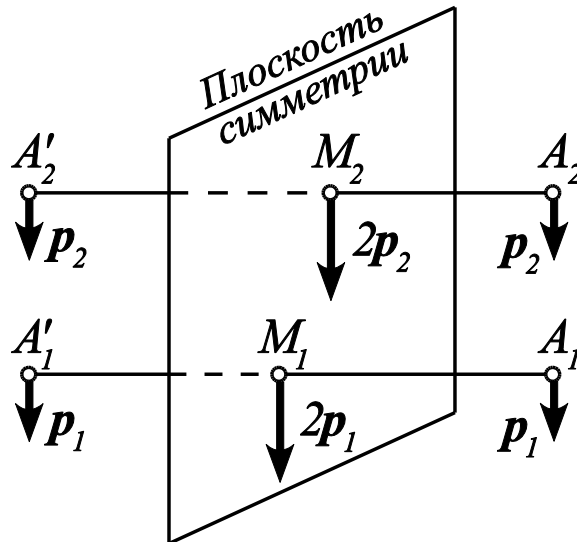


Рис. 20. Плоске симетричне тіло

Склавши дві рівні паралельні сили  $p_1$  і  $p'_1$ , прикладені в точках  $A_1$  і  $A'_1$ , отримаємо рівнодіюча  $2p_1$ , прикладену в точці  $M_1$ . Поступово також з вагами кожної пари симетричних часток, отримаємо систему паралельних сил  $2p_1$ ,  $2p_2$ , точки прикладання яких  $M_1$ ,  $M_2$  лежать в площині симетрії, а отже, на підставі попередньої леми в цій же площині лежить і центр цієї системи паралельних сил, тобто центр ваги даного тіла, що й треба було довести.

Аналогічно доводиться ця теорема і для тих випадків, коли тіло має вісь або центр симетрії. Ця теорема має часті застосування; так, наприклад, з неї безпосередньо випливає, що центр ваги однорідної пластинки, що має форму паралелограма, лежить в точці перетину його діагоналей, центр ваги однорідної еліптичної пластинки лежить в її геометричному центрі, центр ваги однорідного тіла обертання лежить на осі обертання, оскільки ця вісь є для такого тіла віссю симетрії.

### 3. Теорема Гюльдена

*Теорема 1. Площа поверхні, отриманої обертанням деякої плоскої лінії навколо осі, що лежить в площині цієї лінії і її не перетинає, дорівнює довжині цієї лінії, помноженої на довжину окружності, описаної її центром ваги.*

*Доведення.* Уявімо собі поверхню, отриману обертанням дуги АВ деякої плоскої кривої лінії навколо осі Оу (рис. 21).

Нехай центр ваги цієї дуги знаходиться в точці С, позначимо його абсцису через  $x_c$ . Впишемо в дугу АВ ламану лінію, що складається з великого числа малих прямолінійних відрізків. Розглянемо одну зі сторін цієї ламаної лінії, наприклад сторону  $ab$ . Центр тяжкості прямолінійного відрізка  $ab$  знаходиться в його середині – у точці  $t$ , позначимо абсцису цієї точки через  $x$ . Під час обертання навколо осі Оу відрізок  $ab$  опише усічений конус. Якщо позначимо довжину відрізка  $ab$  через  $\Delta l'$ , то бокова поверхня цього конуса буде рівна  $2\pi x \cdot \Delta l'$ .

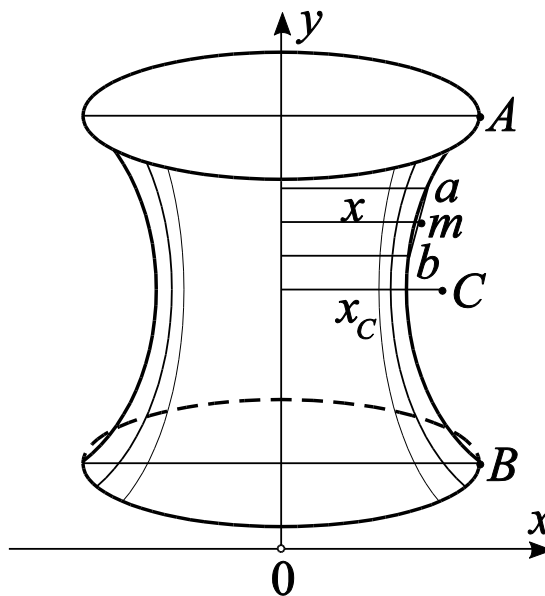


Рис. 21. Площа поверхні плоскої лінії

Якщо, позначимо через  $S'$  суму бічних поверхонь всіх таких усічених конусів, описаних кожною стороною вписаною ламаною лінії, то:

$$S' = \sum 2\pi x \cdot \Delta l' = 2\pi \sum x \cdot \Delta l'.$$

З другого боку, якщо позначити через  $x_C$  абсцису центра важкості  $C'$  цієї ламаної лінії, то:

$$x_C = \frac{\sum x \cdot \Delta l'}{\sum \Delta l'};$$

звідки:

$$\sum x \cdot \Delta l' = x_C \cdot \sum \Delta l' = x_C l',$$

де  $l' = \sum \Delta l'$  є довжина ламаної лінії; і тому:

$$S' = 2\pi x_C l'.$$

Перейдемо тепер до межі, припускаючи, що число сторін вписаною ламаною лінії необмежено зростає, а довжина кожної сторони прагне до нуля. Тоді матимемо:

$$\lim S' = 2\pi \lim(x_C l').$$

Але в межі вписана ламана лінія збігається з даною дугою АВ, її довжина стає рівною довжині  $l$  цієї дуги, а її центр важкості  $C'$  співпадає з точкою  $C$ , і тому:

$$\lim l' = l, \quad \lim x_C = x_C, \quad \lim(x_C l') = x_C l.$$

Крім того, межа, до якого прагне величина  $S'$ , визначає площу  $S$  розглянутої поверхні обертання, тобто  $\lim S' = S$ . Звідкіля виходить:

$$S = 2\pi x_C l, \tag{5}$$

що й треба було довести, оскільки  $2\pi x_C$  є довжина кола, описаного точкою  $C$ .

*Теорема 2. Обсяг тіла, отриманого обертанням деякої плоскої замкнутої фігури навколо осі, що лежить в площині цієї фігури і її не перетинає, дорівнює добутку площі цієї фігури на довжину окружності, описаної її центром ваги.*

*Доведення.* Візьмемо деяку плоску фігуру, площа якої дорівнює  $S$ . Нехай центр ваги цієї фігури лежить в точці  $C$  (рис. 22). Обертаючи цю фігуру навколо осі  $Oy$ , отримуємо тіло, обсяг якого  $V$  потрібно визначити. Для цього розіб'ємо площу даної фігури на велике число малих елементів,

проводячи прямі, паралельні координатним осях  $x$  та  $y$ , на близькій відстані один від одного. Розглянемо один із таких елементів – прямокутник  $abcd$ . Центр тяжкості цього прямокутника лежить в точці перетину його діагоналей. Позначимо абсцису цієї точки через  $x$ .

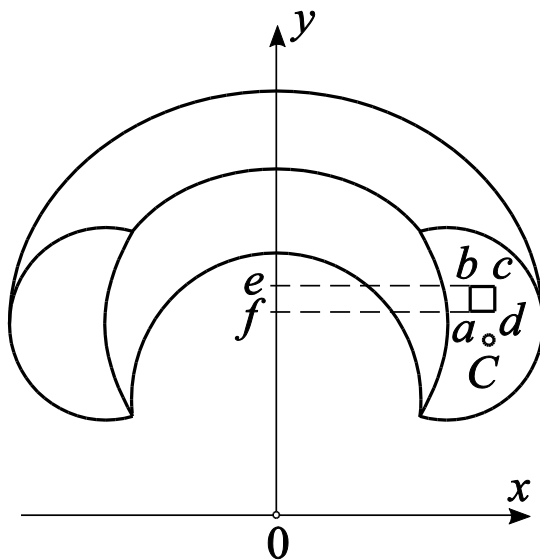


Рис. 22. Об'єм тіла плоскої замкнутої фігури

Далі:

$$ad = \Delta x$$

і

$$ab = \Delta y.$$

Тоді площа цього прямокутника дорівнює:

$$\Delta S = \Delta x \cdot \Delta y;$$

крім того, як видно з рис. 22:

$$fa = x - \frac{\Delta x}{2}$$

і

$$fb = x + \frac{\Delta x}{2}.$$

Обсяг тіла, отриманого обертанням прямокутника  $abcd$  навколо осі  $Oy$ , дорівнює різниці обсягів двох циліндрів, отриманих обертанням прямокутників  $fecd$  і  $feba$  навколо тієї ж осі, тобто:

$$\Delta V' = \pi \left( x + \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \Delta y - \pi \left( x - \frac{\Delta x}{2} \right)^2 \Delta y = 2\pi x \Delta x \Delta y = 2\pi x \Delta S.$$

Якщо визначимо через  $V'$  суму обсягів усіх таких тіл, отриманих обертанням елементарних прямокутників, на які розбили всю цю фігуру, то:

$$V' = \sum \Delta V = 2\pi \sum x \Delta S.$$

Перейдемо до межі, припускаючи, що число елементарних прямокутників необмежено зростає, а площа кожного прямокутника прагне до нуля. Тоді матимемо:

$$V = \lim V' = 2\pi \lim \sum x \cdot \Delta S;$$

з іншого боку, якщо позначимо абсцису центра ваги  $C$  даної плоскої фігури через  $x_C$ , то за формулою (2) маємо:

$$x_C = \frac{\lim \sum x \Delta S}{S}, \quad \text{або} \quad \lim \sum x \Delta S = x_C \cdot S;$$

звідки:

$$V = 2\pi x_C S, \tag{6}$$

що й потрібно було довести.

Доведені теореми дозволяють іноді досить просто знаходити положення центра ваги плоскої лінії або плоскої фігури, а також визначати поверхню і об'єм тіл обертання.

Розглянемо такі приклади.

1. Візьмемо півколо радіуса  $R$  і будемо обертати його навколо діаметра  $OY$  (рис. 23). Отримане у цьому разі тіло обертання є кулею радіуса  $R$ . Нехай центр ваги дуги  $AB$  знаходиться в точці  $C_1$ , а центр ваги площі півкола – у точці  $C_2$ ; обидва ці центри лежать на осі  $Ox$ , що є віссю симетрії і для півкола і для дуги  $AB$ .

Нехай  $OC_1 = x_1$  і  $OC_2 = x_2$ . За першою теоремою Гюльдена маємо:

$$S = 2\pi x_1 l,$$

де  $S$  позначає поверхню кулі, а  $l$  – довжину півкола  $AB$ ; отже:

$$S = 4\pi R^2 \quad \text{і} \quad l = \pi R.$$

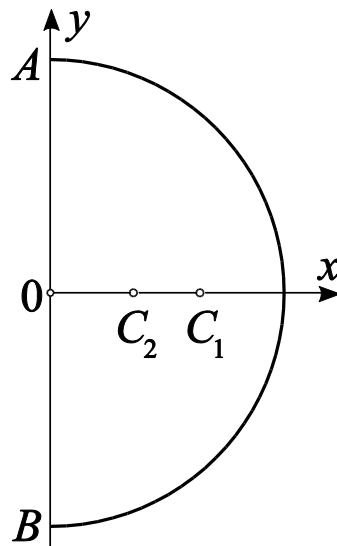


Рис. 23. Центр тяжкості дуги і півкола

Підставляючи ці значення в попередню рівність, отримаємо:

$$4\pi R^2 = 2\pi x_1 \cdot \pi R,$$

звідки знаходимо:

$$x_1 = \frac{2R}{\pi}.$$

Ця формула визначає положення центра ваги півкола. Якщо покладемо наближено  $\pi = \frac{22}{7}$ , то:

$$x_1 = \frac{7}{11}R > \frac{R}{2}.$$

За другою теоремою Гюльдена маємо:

$$V = 2\pi x_2 S.$$

де об'єм кулі  $V = \frac{4}{3}\pi R^3$  і площа півкулі  $S = \frac{1}{2}\pi R^2$ ;

Підставляючи ці значення в попередню рівність, отримаємо:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi x_2 \cdot \frac{1}{2}\pi R^2,$$



звідки знаходимо:

$$x_2 = \frac{4R}{3\pi}.$$

Ця формула визначає положення центра ваги площі півкола. Вважаючи  $\pi = \frac{22}{7}$ , отримаємо наближено:

$$x_2 = \frac{14}{33}R < \frac{R}{2}.$$

2. Візьмемо коло радіуса  $r$ . Центр тяжкості  $C$  кола збігається з його геометричним центром. Якщо будемо це коло обертати навколо осі  $Oy$ , то отримаємо кільцеподібне тіло обертання, зване тором (рис. 24). Радіус кола, описуваної під час обертання точкою  $C$ , тобто відстань точки  $C$  від осі  $Oy$ , позначимо через  $R$ . Теорема Гюльдена дозволяють легко знайти площу поверхні і об'єм тора.

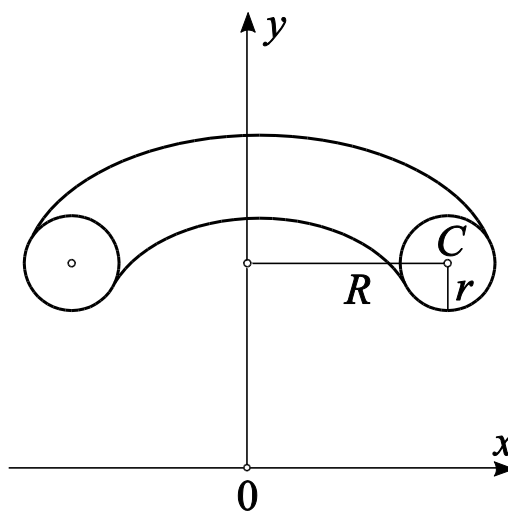


Рис. 24. **Визначення площі поверхні й об'єму тора**

Оскільки центр ваги кола радіуса  $r$  знаходиться в точці  $C$ , то за першою теоремою поверхня тора дорівнює:

$$S = 2\pi r \cdot 2\pi R = 4\pi^2 Rr.$$

За другою теоремою об'єм тора дорівнює:

$$V = \pi r^2 \cdot 2\pi R = 2\pi^2 Rr^2.$$

#### 4. Центри ваги деяких найпростіших однорідних тіл і фігур

1. Центр тяжкості площі трикутника. Знайдемо центр ваги тонкої однорідної трикутної пластинки  $A_1A_2A_3$  (рис. 25).

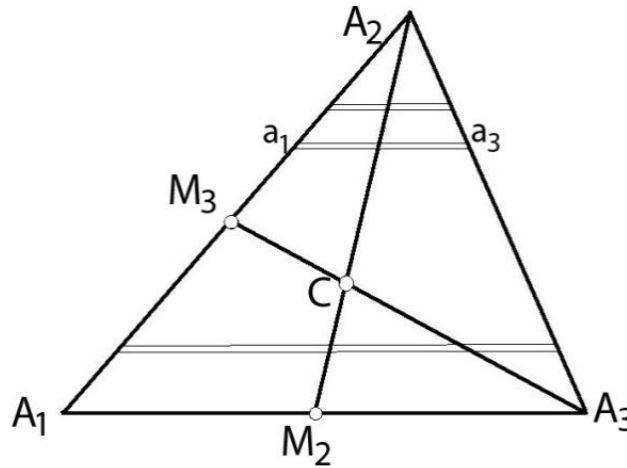


Рис. 25. Центр тяжіння площі трикутника

Для цього розіб'ємо всю площу трикутника прямими, паралельними основи  $A_1A_3$ , на велике число дуже вузьких смужок. Кожну тонку смужку, наприклад  $A_1A_3$ , зважаючи на її незначною ширини можна розглядати як прямолінійний відрізок. Отже, центр ваги знаходиться в її середині. На середні точки всіх цих смужок розташовані на одній прямій, а саме, на медіані  $A_2M_2$  даного трикутника. Отже, на цій медіані лежить і шуканий центр ваги трикутника. Розбивши площа трикутника прямими, паралельними другому його боці, наприклад стороні  $A_1A_2$ , також переконаємося, що шуканий центр ваги трикутника повинен лежати на медіані  $A_3M_3$ . Звідси робимо висновок, що центр ваги  $C$  площі трикутника збігається з точкою перетину його медіан. Оскільки точка перетину медіан ділить кожну медіану на відносини 2: 1, то отриманий результат можна виразити таким чином: центр ваги площі трикутника лежить на одній з його медіан на відстані цієї медіани від вершини трикутника [2].

Якщо позначимо координати вершин даного трикутника через  $(x_1, y_1)$ ,  $(x_2, y_2)$ ,  $(x_3, y_3)$ , а координати його центра ваги вершин  $x_c$  і  $y_c$ , то за формулами аналітичної геометрії для координат точки перетину медіан трикутника матимемо:

$$x_c = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}.$$

2. Центр тяжіння площі багатокутника. Щоб знайти центр ваги площі будь-якого багатокутника  $A_1A_2A_3A_4A_5$  (рис. 26), координати вершин якого відомі, розіб'ємо даний багатокутник діагоналями на три трикутника  $A_1A_2A_3$ ,  $A_1A_3A_4$ ,  $A_1A_4A_5$ . Площі цих трикутників позначимо відповідно через  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$ , а їх центри тяжіння – через  $C_1(x_{c1}, y_{c1})$ ,  $C_2(x_{c2}, y_{c2})$  і  $C_3(x_{c3}, y_{c3})$ .

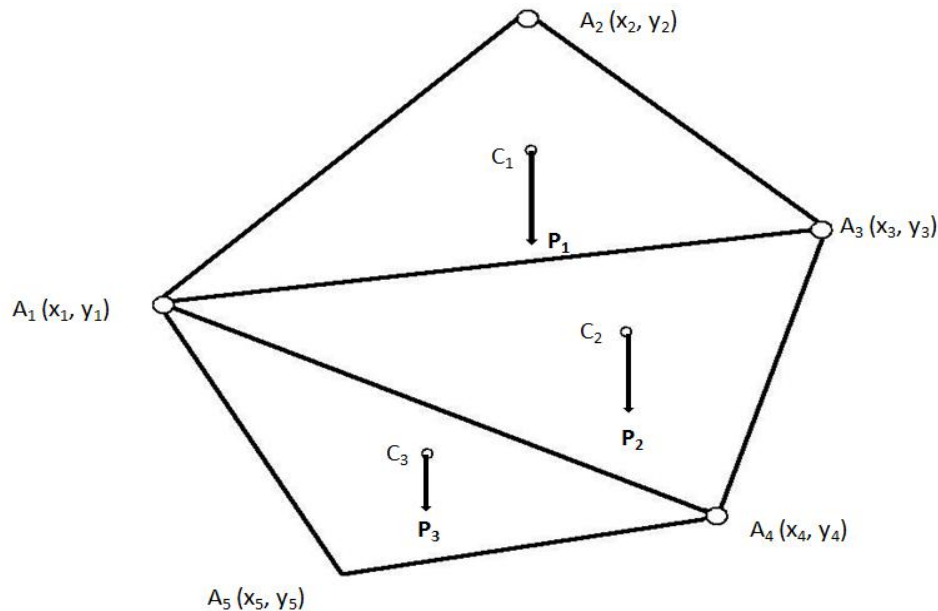


Рис. 26. Центр тяжіння площі багатокутника

Знаючи координати вершин кожного з цих трикутників, неважко обчислити його площу (за відомою формулою аналітичної геометрії) і координати його центра ваги; так, для абсцис точок  $C_1$ ,  $C_2$  і  $C_3$  матимемо:

$$x_{c_1} = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \quad x_{c_2} = \frac{x_1 + x_3 + x_4}{3}, \quad x_{c_3} = \frac{x_1 + x_4 + x_5}{3}$$

У точках  $C_1$ ,  $C_2$  і  $C_3$  прикладені ваги  $P_1$ ,  $P_2$  і  $P_3$  відповідних трикутників. Тепер завдання зводиться до визначення центра системи паралельних сил  $P_1$ ,  $P_2$  і  $P_3$ . Тому для координат  $x_c$  і  $y_c$  центру ваги багатокутника якого шукаємо маємо:

$$x_c = \frac{P_1x_{c_1} + P_2x_{c_2} + P_3x_{c_3}}{P_1 + P_2 + P_3}, \quad y_c = \frac{P_1y_{c_1} + P_2y_{c_2} + P_3y_{c_3}}{P_1 + P_2 + P_3}.$$

Якщо позначимо вага одиниці площі даного багатокутника через  $\gamma$ , то:

$$P_1 = \gamma S_1, \quad P_2 = \gamma S_2, \quad P_3 = \gamma S_3.$$

Підставляючи ці значення в попередні формули і скорочуючи на  $y$ , отримаємо остаточно:

$$x_c = \frac{S_1 x_{c_1} + S_2 x_{c_2} + S_3 x_{c_3}}{S_1 + S_2 + S_3}, \quad y_c = \frac{S_1 y_{c_1} + S_2 y_{c_2} + S_3 y_{c_3}}{S_1 + S_2 + S_3}.$$

3. Центр тяжкості дуги окружності. Нехай потрібно знайти центр ваги дуги  $AB$  кола радіуса  $R$  з центром в точці  $O$  (рис. 27). Шуканий центр ваги  $C$  лежить на осі симетрії дуги  $AB$ , тобто на радіусі, перпендикулярному до хорди  $AB$ . Залишається визначити відстань  $OC$ . Для цього скористаємося першою теоремою Гюльдена.

Обертаючи дугу  $AB$  навколо діаметра, паралельного хорді  $AB$ , отримаємо поверхню  $ABB_1A_1$ , що є частиною поверхні кулі і звана кульовим поясом. Як відомо з геометрії, площа цієї поверхні дорівнює  $2\pi R \cdot AB$ .

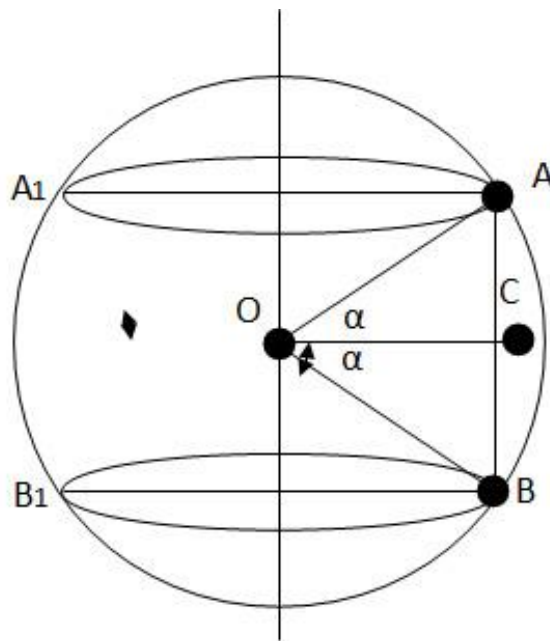


Рис. 27. Центр тяжкості дуги окружності

На підставі першої теореми Гюльдена матимемо:

$$2\pi R \cdot AB = 2\pi \cdot OC \cdot l,$$

де  $l$  – довжина дуги  $AB$ . Звідси:

$$OC = \frac{R \cdot AB}{l}.$$

Якщо позначимо половину центрального кута дуги АВ, вимірюваного в радіанах, через  $\alpha$ , то:

$$l = 2R\alpha \quad \text{і} \quad AB = 2R \sin\alpha,$$

а тому:

$$OC = R \frac{\sin\alpha}{\alpha}.$$

4. Центр ваги кругового сектора. Визначення положення центра ваги кругового сектора ОАВ радіуса R (рис. 28) можна звести до попередньої задачі. Позначимо половину центрального кута цього сектора через  $\alpha$ . Шуканий центр ваги С лежить на симетрії даного сектора, тобто на бісектрисі кута АОВ. Залишається знайти відстань ОС. Розділимо дугу АВ на велике число  $n$  досить малих рівних частин і точки поділу з'єднаємо з центром О. Тоді даний сектор розділиться на  $n$  рівних елементарних секторів. Розглянемо один із таких секторів Оab. Зважаючи на крихту дуги ab, цей сектор можна прийняти за трикутник. Отже, його центр ваги лежить на радіусі, що поділяє кут aOb навпіл, на відстані  $\frac{2}{3} R$  від точки О. Звідси робимо висновок, що центри тяжіння всіх елементарних секторів розташовані на дузі  $A_1B_1$  радіуса  $OA_1 = \frac{2}{3} R$  на рівних відстанях один від одного. У цих центрах прикладені рівні ваги  $p_i$  елементарних секторів.

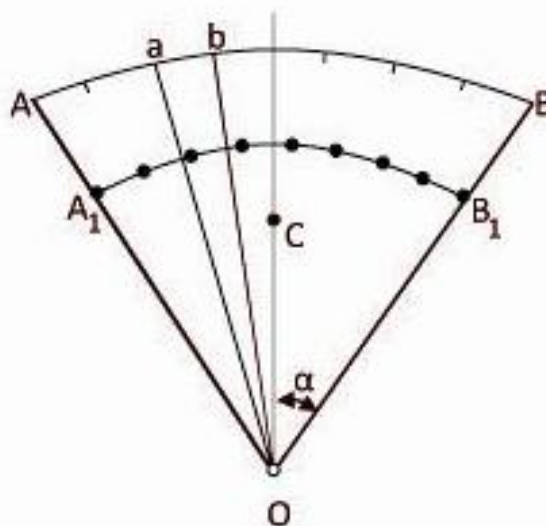


Рис. 28. Центр тяжкості кругового сектора

Отже, шуканий центр ваги сектора АОВ збігається з центром системи паралельних сил  $p_i$ .

У межі за умови  $n \rightarrow \infty$  задача, очевидно, зводиться до знаходження центра ваги однорідної дуги  $A_1B_1$ . Тому на підставі результату, отриманого в попередньому прикладі, знаходимо:

$$OC = OA_1 \frac{\sin \alpha}{\alpha} = \frac{2}{3} R \frac{\sin \alpha}{\alpha}.$$

5. Центр тяжкості призми. Щоб знайти центр ваги однорідної призми з основою  $A_1A_2A_3A_4A_5$  (рис. 29), розіб'ємо всю призму на велике число тонких пластинок площинами, паралельними основи, проведеними на рівних малих відстанях один від одного (на кресленні зображена одна з таких пластинок  $a_1a_2a_3a_4a_5$ ). З огляду на те, що товщина цих платівок дуже мала, їх можна прийняти за плоскі багатокутники. Центри ваги всіх цих багатокутників, в яких прикладені їх рівні ваги  $\rho_i$ , лежать, очевидно, на одній прямій  $C_1C_2$ , що з'єднує центри тяжкості нижнього і верхнього підстав призми.

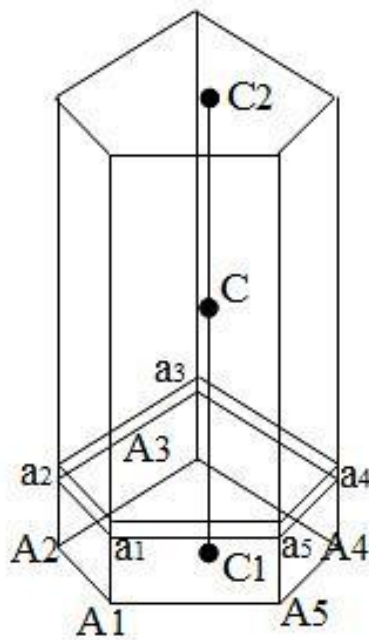


Рис. 29. Центр тяжкості призми

Отже, шуканий центр ваги призми збігається з центром системи паралельних сил  $\rho_i$ , рівних між собою доданих у точках, що знаходяться на прямій  $C_1C_2$  на рівних відстанях один від одного. У межі при  $n \rightarrow \infty$  задача зводиться до знаходження центра ваги однорідної прямолінійного відрізка  $C_1C_2$ . Звідси робимо висновок, що центр ваги однорідної призми

знаходиться в середині відрізка, що з'єднує центри тяжкості нижнього і верхнього підстав цієї призми.

Цей висновок, а отже, і результат залишаються вірними для однорідного циліндра.

6. Центр ваги піраміди. Розглянемо спочатку однорідний тетраедр, тобто однорідну трикутну піраміду  $A_1A_2A_3A_4$  (рис. 30).

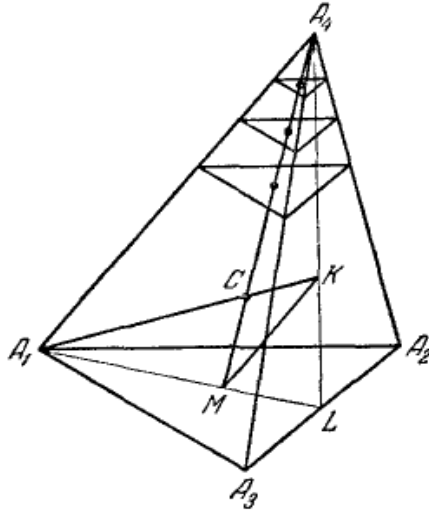


Рис. 30. Центр тяжкості піраміди

Площинами, паралельними основі, розіб'ємо всю піраміду на велику кількість досить тонких трикутних пластинок. Беручи ці пластини за плоскі трикутники, помічаємо, що центри тяжіння всіх цих подібних трикутників лежать на одній прямій, що з'єднує вершину  $A_4$  піраміди з центром тяжкості її заснування, тобто з точкою  $M$  перетину медіан трикутника  $A_1A_2A_3$ . Отже, на цій же прямій лежить шуканий центр ваги даної піраміди. Аналогічно, розбиваючи дану піраміду площинами, паралельними межі  $A_2A_3A_4$ , приходимо до висновку, що її центр ваги повинен лежати на прямій  $A_1K$ , причому  $K$  – центр ваги трикутника  $A_2A_3A_4$ , тобто точка перетину його медіан, а тому шуканий центр ваги піраміди знаходиться в точці  $C$  перетину прямих  $A_4M$  і  $A_1K$ . Знайдемо відстань  $MC$ . За властивістю медіан трикутника маємо:

$$LM = 1/3LA_1 \quad \text{і} \quad LK = 1/3LA_4;$$

з цих двох рівностей випливає, що:

$$MK \parallel A_1A_4 \quad \text{і} \quad MK = 1/3A_1A_4.$$

Але якщо прямі  $A_1A_4$  і  $MK$  паралельні, то трикутники  $A_1CA_4$  і  $MCK$  подібні.

З подоби цих трикутників випливає, що:

$$\frac{MC}{CA_4} = \frac{MK}{A_1A_4} = \frac{1}{3} \quad \text{або} \quad 3MC = CA_4;$$

але

$$MC + CA_4 = MA_4; \quad \text{тобто,} \quad 4MC = MA_4;$$

звідси

$$MC = \frac{1}{4}MA_4.$$

Отже, центр ваги однорідної піраміди лежить на відрізку, що з'єднує вершину піраміди з центром тяжкості її заснування на відстані  $1/4$  цього відрізка від центра ваги підстави піраміди.

Цей результат, отриманий для тетраедра, неважко поширити і на однорідну многокутну піраміду, оскільки дану многокутну піраміду можна розбити на тетраедри площинами, проведеними через вершину піраміди і діагоналі багатокутника, що є її основою.

Розглядаючи конус як межа вписаних у нього пірамід, на підставі попереднього результату приходимо до висновку, що центр ваги однорідного конуса лежить на відрізку, що з'єднує вершину конуса з центром тяжкості його заснування, на відстані  $3/4$  цього відрізка від вершини конуса.

## 5. Визначення центра ваги тіл і фігур складної форми

Часто застосовується метод визначення центра ваги тіла складної геометричної форми полягає в тому, що дане тіло розбивають, якщо це можливо, на такі частини найпростішої форми, центри тяжкості яких легко можуть бути знайдені на підставі сказаного в попередньому параграфі.

Позначимо обсяги цих найпростіших за формою частин даного тіла через  $V_1, V_2, V_3$  і т. д., а їх ваги – через  $P_1, P_2, P_3$  і т. д. Координати їх центрів тяжкості позначимо через  $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2)$  і т. д. Сили  $P_1, P_2, P_3$  і т. д. прикладені в цих центрах. Тепер завдання знаходження центру ваги тіла зводиться до визначення положення центра системи паралельних сил  $P_i$ ,



прикладених в відомих точках. Тому, позначаючи координати шуканого центра ваги даного тіла через  $X_c$ ,  $Y_c$  і  $Z_c$ , матимемо:

$$x_c = \frac{\sum Px}{\sum P}, \quad y_c = \frac{\sum Py}{\sum P}, \quad z_c = \frac{\sum Pz}{\sum P}.$$

Якщо, припускаючи тіло однорідним, позначимо через  $Y$  вага одиниці об'єму тіла, то  $P_1 = YV_1$ ,  $P_2 = YV_2$  і т.д.

Підставляючи ці значення в попередні формули і скорочуючи на  $Y$ , отримаємо:

$$x_c = \frac{\sum Vx}{\sum V}, \quad y_c = \frac{\sum Vy}{\sum V}, \quad z_c = \frac{\sum Vz}{\sum V}.$$

Знаменник цих формул  $\sum V$  виражає обсяг всього даного тіла.

У тих випадках, коли потрібно знайти центр ваги однорідної площині фігури або лінії, у попередніх формулах слід замість обсягів  $V_i$  брати відповідно площі  $S_i$  або довжини  $L_i$  тих найпростіших за формою частин, на які розбивається дана складна фігура або дана лінія.

Цей спосіб був застосований вже під час знаходження центру ваги багатокутника.

Приклад 1. Знайти центр ваги фігури, що складається з півкола радіуса  $R$  і прямокутника зі сторонами  $2R$  і  $h$  (рис. 31).

Рішення. Візьмемо початок координат у геометричному центрі  $O$  півкола і направимо координатні осі, як зазначено на кресленні. Оскільки вісь  $y$  є для даної фігури віссю симетрії, то шуканий центр ваги лежить на цій осі і, отже,  $x_c = 0$ . Залишається знайти  $y_c$ . Для цього розбиваємо цю фігуру на дві частини: півколо і прямокутник.

Позначимо центри тяжкості цих частин  $C_1$  і  $C_2$ . Точка  $C_2$  лежить у середині відрізка  $OA$ . Точка  $C_1$  знаходиться від точки  $O$  на відстані, рівному, як можна бачити  $\frac{4R}{3\pi}$ . Ординату шуканого центра ваги  $C$  даної фігури визначаємо тепер за формулою:

$$y_c = \frac{S_1 y_1 + S_2 y_2}{S_1 + S_2}.$$

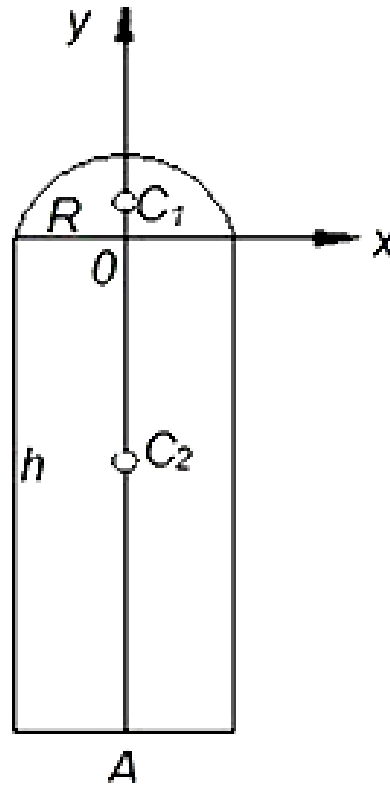


Рис. 31. Центр ваги фігури

Тут  $S_1$  і  $S_2$  позначають площі півкола і прямокутника, а  $y_1$  і  $y_2$  – ординати точок  $C_1$  і  $C_2$ .

$$S_1 = \frac{\pi R^2}{2}, \quad y_1 = \frac{4R}{3\pi}, \quad S_2 = 2Rh, \quad y_2 = -\frac{h}{2}$$

$$y_c = \frac{\frac{2}{3}R^3 - Rh^2}{\frac{1}{2}\pi R^2 + 2Rh} = \frac{2(2R^2 - 3h^3)}{3(\pi R + 4h)}$$

Якщо  $\frac{R}{h} = \sqrt{\frac{3}{2}}$ , то  $y_c = 0$ , тобто центр ваги заданої фігури збігається з центром  $O$  півкола. В іншому випадку центр ваги лежить вище або нижче точки  $O$ , залежно від того, чи буде ставлення  $R:h$  більше або менше  $\sqrt{\frac{3}{2}}$ .

Приклад 2. Визначити положення центра ваги Z-подібної фігури, розміри якої вказані на рис. 32.

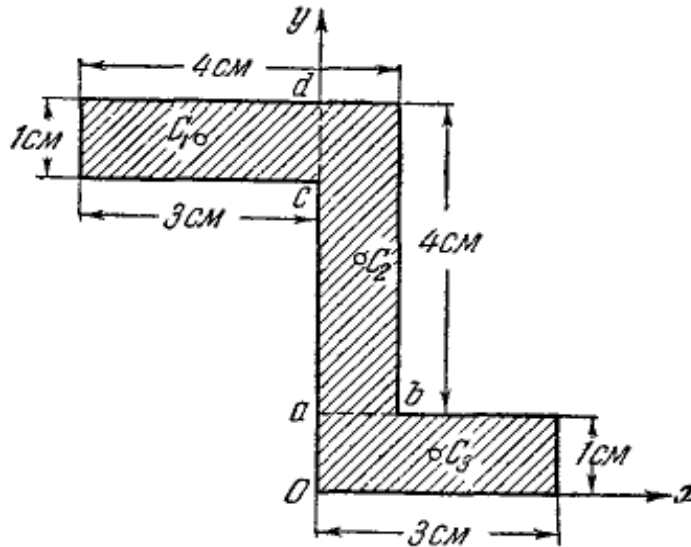


Рис. 32. Центр тяжкості Z-подібної фігури

Рішення. Проведемо осі координат, як зазначено на кресленні, і розіб'ємо цю фігуру на три прямокутника (лінії розрізу позначені на кресленні через  $ab$  і  $cd$ ). Центри ваги цих прямокутників позначимо через  $C_1$ ,  $C_2$  і  $C_3$ , а їх площі – через  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$ . Координати точок  $C_1$ ,  $C_2$  і  $C_3$  позначимо відповідно через  $x_1$  і  $y_1$ ,  $x_2$  і  $y_2$ ,  $x_3$  і  $y_3$ . Як видно з креслення, матимемо:

$$\begin{aligned} x_1 &= -1,5 \text{ см}, \\ y_1 &= 4,5 \text{ см}, \\ S_1 &= 3 \cdot 1 = 3 \text{ см}^2; \\ x_2 &= 0,5 \text{ см}, \\ y_2 &= 3,0 \text{ см}, \\ S_2 &= 4 \cdot 1 = 4 \text{ см}^2; \\ x_3 &= 1,5 \text{ см}, \\ y_3 &= 0,5 \text{ см}, \\ S_3 &= 3 \cdot 1 = 3 \text{ см}^2. \end{aligned}$$

Координати  $x_c$  і  $y_c$  шуканого центру ваги заданої фігури визначити за формулами:

$$\begin{aligned} x_c &= \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{-4,5 + 2 + 4,5}{3 + 4 + 3} = 0,2 \text{ см}, \\ y_c &= \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S_1 + S_2 + S_3} = \frac{13,5 + 12 + 1,5}{3 + 4 + 3} = 2,7 \text{ см}. \end{aligned}$$

Приклад 3. Визначити положення центра ваги подвійного конуса, тобто тіла, що складається з двох конусів, що мають загальну підставу радіуса  $R$  і висоти  $H_1$  і  $H_2$  (рис. 33).

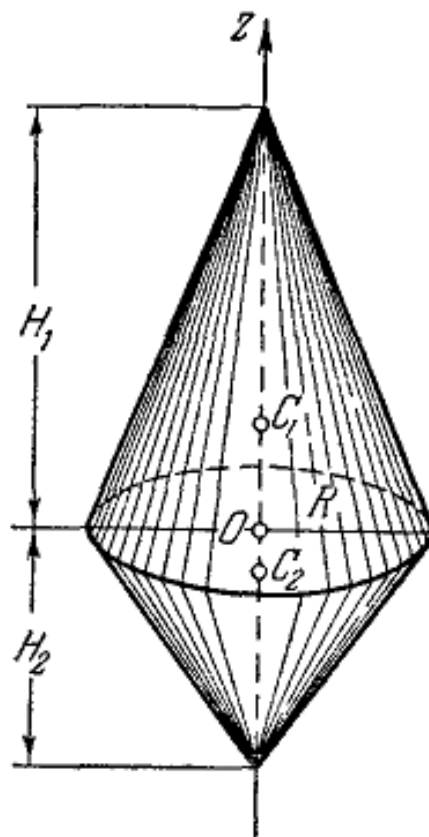


Рис. 33. Центр тяжкості подвійного конуса

Рішення. Шуканий центр ваги лежить на осі симетрії тіла, яку приймемо за вісь  $Oz$ . Центри ваги конусів, з яких складається дане тіло, позначимо через  $C_1$  і  $C_2$ , а координати точок  $C_1$  і  $C_2$  - через  $z_1$  і  $z_2$ ; обсяги цих конусів позначимо через  $V_1$  і  $V_2$ . Тоді:

$$z_1 = \frac{H_1}{4}, \quad V_1 = \frac{\pi R^2 H_1}{3}, \quad z_2 = -\frac{H_2}{4}, \quad V_2 = \frac{\pi R^2 H_2}{3}.$$

Координату  $z_c$  шуканого центра ваги даного тіла знаходимо тепер за формулою:

$$z_c = \frac{z_1 V_1 + z_2 V_2}{V_1 + V_2} \quad \text{або} \quad z_c = \frac{\frac{1}{12} \pi R^2 (H_1^2 - H_2^2)}{\frac{1}{3} \pi R^2 (H_1 + H_2)} = \frac{H_1 - H_2}{4}.$$

Якщо в даному тілі або даної плоскою фігурі є вирізані частини (порожнини або отвори), то для визначення центра ваги такого тіла або такої фігури користуються тими ж прийомами і тими ж самими формулами, як і в попередніх прикладах, але тільки площі і обсяги вирізаних (відібраних) частин потрібно вважати негативними, тобто брати їх у цих формулах зі знаком мінус.

Приклад 4. Визначити положення центра ваги фігури, що представляє собою коло радіуса  $R$ , з якого  $OO_1=a$  (рис. 34).

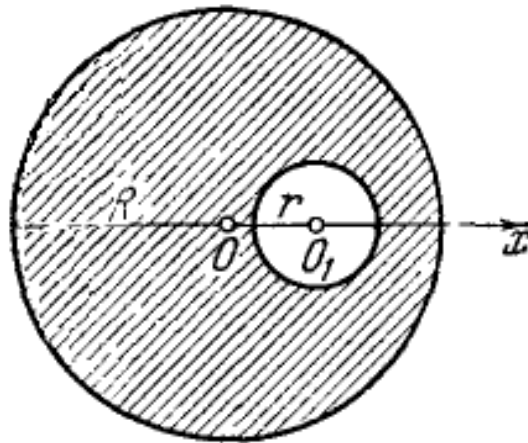


Рис. 34. Центр ваги фігури

Рішення. Шуканий центр ваги лежить на осі симетрії  $Ox$ , що проходить через центр кіл  $O$  і  $O_1$ ; початок координат візьмемо в центрі великого кола. Будемо розглядати дану фігуру, якщо вона складається з двох кіл радіусів  $R$  і  $r$ . Площа першого кола  $S_1 = \pi R^2$ ; центр ваги цього кола збігається з початком координат  $O$ , отже, абсциса цього центра  $x_1=0$ . Центр тяжкості другого кола збігається з точкою  $O_1$ , абсциса якої  $x_2 = a$ . Оскільки площа  $S_2$  цього кола віднімається, то її потрібно брати зі знаком мінус. Отже,

$$S_2 = -\pi r^2.$$

Абсциса  $x_c$  шуканого центра ваги визначається тепер за тією ж формулою, як і в прикладі 2:

$$x_c = \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2}{S_1 + S_2} \quad \text{або} \quad x_c = \frac{-\pi r^2 a}{\pi(R^2 - r^2)} = -\frac{ar^2}{R^2 - r^2}.$$

Приклад 5. Знайти центр ваги фігури  $ABDE$ , що становить трапецію, з якої вирізаний півколо з центром в точці  $O$  з діаметром, рівним  $AB$ , якщо  $AE = a$ ,  $BD = b$  і  $AB = h$  (рис. 35).

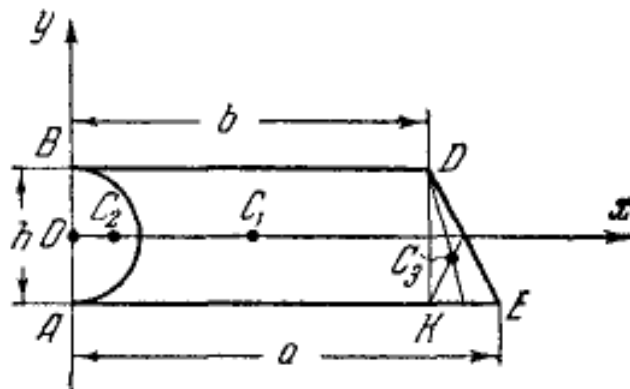


Рис. 35. Центр ваги фігури

Рішення. Візьмемо початок координат у центрі  $O$  вирізаного півкола, вісь  $x$  направимо паралельно стороні  $AE$  і вісь  $y$  – перпендикулярно до цієї сторони.

Виділимо в даній фігурі три частини: прямокутник  $ABDK$ , вирізаний півколо і прямокутний трикутник  $KDE$ . Якщо позначимо площі цих частин відповідно через  $S_1$ ,  $S_2$  і  $S_3$ , а їх центри тяжіння – через  $C_1(x_1, y_1)$ ,  $C_2(x_2, y_2)$  і  $C_3(x_3, y_3)$ , то  $S_1 = bh$ ,

$$S_2 = -\frac{\pi h^2}{8},$$

$$S_3 = \frac{(a-b)h}{2},$$

$$x_1 = \frac{b}{2},$$

$$y_1 = 0,$$

$$x_2 = -\frac{4R}{3\pi} = \frac{2h}{3\pi},$$

$$y_2 = 0.$$

Для визначення координат  $x_3$  і  $y_3$  точки  $C_3$  знайдемо спочатку координати вершин трикутника  $KDE$ :

$$\begin{aligned}x_K &= b, & x_D &= b, & x_E &= a, \\y_K &= -\frac{h}{2}, & y_D &= \frac{h}{2}, & y_E &= -\frac{h}{2}.\end{aligned}$$

Застосовуючи формули, отримаємо:

$$\begin{aligned}x_3 &= \frac{x_K + x_D + x_E}{3} = \frac{a + 2b}{3}, \\y_3 &= \frac{y_K + y_D + y_E}{3} = -\frac{h}{6}.\end{aligned}$$

Площа даної фігури  $ABDE$  дорівнює:

$$S = bh - \frac{1}{8}\pi h^2 + \frac{1}{2}(a-b)h = \frac{h}{8}[8b - \pi h + 4(a-b)] = \frac{h}{8}[4(a+b) - \pi h].$$

Координати  $x_c$  і  $y_c$  шуканого центра ваги заданої фігури знаходимо за формулами:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{x_1 S_1 + x_2 S_2 + x_3 S_3}{S}, \\y_c &= \frac{y_1 S_1 + y_2 S_2 + y_3 S_3}{S}.\end{aligned}$$

Підставляючи значення входять сюди величин, отримаємо:

$$\begin{aligned}x_c &= \frac{\frac{1}{2}b^2 h - \frac{1}{12}h^3 + \frac{1}{6}(a-b)(a+2b)h}{\frac{1}{8}h[4(a+b) - \pi h]} = \frac{2}{3} \frac{6b^2 - h^2 + 2(a^2 + ab - 2b^2)}{4(a+b) - \pi h} = \\&= \frac{2}{3} \frac{2(a^2 + ab + b^2) - h^2}{4(a+b) - \pi h}, \\y_c &= \frac{-\frac{1}{12}(a-b)h^2}{\frac{1}{8}h[4(a+b) - \pi h]} = -\frac{2}{3} \frac{(a-b)h}{4(a+b) - \pi h}.\end{aligned}$$

## 6. Застосування загальних формул до обчислення координат центра ваги

Спосіб знаходження центра ваги, що був розглянутий вище, не є загальним: він стає непридатним в тому випадку, коли дане тіло або дану фігуру можна розбити на кілька частин найпростішої геометричної форми, коли, наприклад, дане тіло обмежене криволінійною поверхнею довільного вигляду або дана плоска фігура обмежена якимось криволінійним контуром. У цих випадках, щоб визначити місце розташування центра тяжіння, потрібно застосовувати загальні формули (1) або (2), або (3) і входять до ці формули межі інтегральних сум обчислювати, як було вже зазначено, методами інтегрального числення.

Приклад 6. Знайти центр ваги параболічного сегмента  $AOB$ , якщо висота цього сегмента дорівнює  $h$ , а рівняння параболи має вигляд  $y = \frac{x^2}{2p}$ , де  $p$  – параметр параболи (рис. 36).

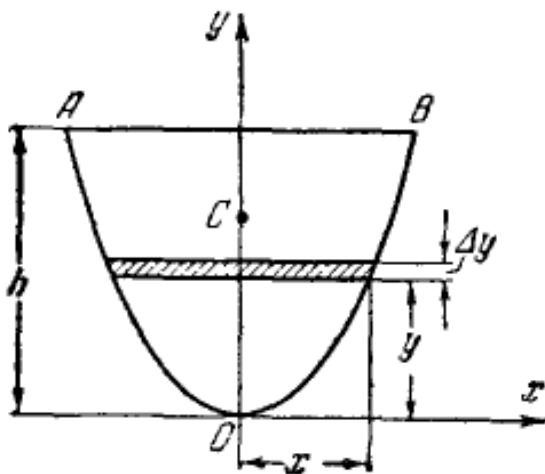


Рис. 36. Центр тяжкості параболічного сегмента

Рішення. Оскільки вісь  $y$  є для сегмента  $AOB$  віссю симетрії, то шуканий центр ваги  $C$  лежить на цій осі, а тому  $x_c = 0$ , і досить знайти тільки ординату  $y_c$ , тобто відстані  $OC$ .

Розіб'ємо всю площу сегмента  $AOB$  прямими, паралельними осі  $x$ , на велике число  $n$  досить вузьких смужок. Якщо позначимо ширину такої елементарної смужки через  $\Delta y$ , то її площа буде дорівнює:

$$\Delta S = 2x\Delta y.$$



Підсумовуючи ці елементарні площі і переходячи потім до межі при  $n \rightarrow \infty$  і  $\Delta y \rightarrow 0$ , отримаємо величину площі  $S$  сегмента  $AOB$ . Отже,

$$S = \lim \sum 2x\Delta y.$$

Але межа цієї суми виражається певним інтегралом, узятим за змінною  $y$  в тих межах, в яких змінюється  $y$ , тобто в даному випадку в межах  $0$  до  $h$ , а тому:

$$S = 2 \int_0^h x dy$$

З рівняння параболи маємо:

$$x = \sqrt{2py}$$

і, отже,

$$S = 2 \int_0^h \sqrt{2py} dy = 2\sqrt{2p} \int_0^h y^{\frac{1}{2}} dy = 2\sqrt{2p} \frac{2}{3} h^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3} h \sqrt{2ph}.$$

Для обчислень шуканої ординати  $y_c$  центра ваги сегмента скористаємося  $AOB$  формулою:

$$y_c = \frac{\lim \sum y \Delta S}{S}.$$

У цій формулі  $\Delta S$  позначає площа елементарної частини даної фігури,  $y$  позначає ординату центра ваги цієї елементарної площадки, а  $S$  вже визначена, то залишається знайти значення чисельника попередньої дробу.

Беручи за елемент площі  $\Delta S$  площа елементарної смужки, центр ваги якої лежить, очевидно, на осі  $y$ , і замінюючи  $\Delta S$  через  $2x\Delta y$ , отримаємо:

$$\begin{aligned} \lim \sum y \cdot \Delta S &= \lim \sum 2xy\Delta y = 2 \int_0^h xy dy = 2 \int_0^h \sqrt{2py} y dy = 2\sqrt{2p} \int_0^h y^{\frac{3}{2}} dy = \\ &= 2\sqrt{2p} \frac{2}{5} h^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5} h^2 \sqrt{2ph}. \end{aligned}$$

Отже,

$$Y_C = \frac{\frac{4}{5}h^2\sqrt{2ph}}{\frac{4}{3}h\sqrt{2ph}} = 0,6h.$$

Приклад 7. Знайти положення центра ваги однорідної півкулі радіуса  $R$  (рис. 37).

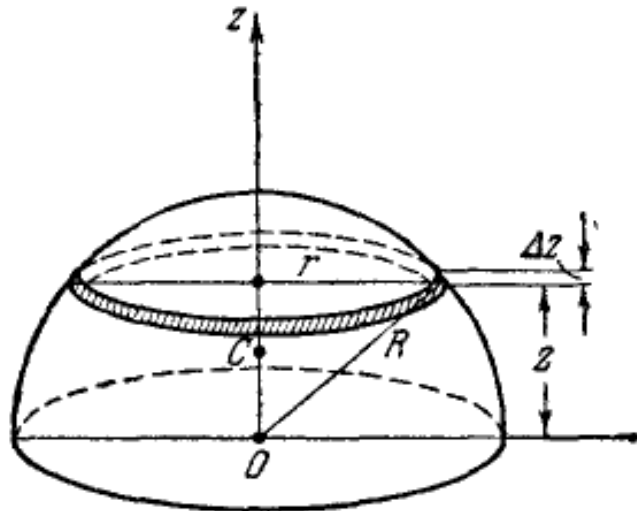


Рис. 37. Центр тяжкості однорідного напівкулі

Рішення. Прийmemo вісь симетрії напівкулі за вісь  $z$ , а початок координат візьmemo в геометричному центрі  $O$  напівкулі. Шуканий центр ваги  $C$  лежить на осі симетрії  $z$ , і тому досить знайти відстань  $OC=z_c$ .

Розіб'ємо цю півкулю площинами, перпендикулярними до осі  $z$ , на велике число  $n$  досить тонких шарів. Центр тяжкості кожного такого елементарного шару лежить на осі  $z$ . Для обчислення шуканої координати  $z_c$  застосуємо формулу (1):

$$z_c = \frac{\lim \sum z \Delta V}{V}.$$

У цій формулі  $\Delta V$  є обсяг елементарної частини даного тіла,  $z$  – координата центра ваги цього елементарного обсягу, а  $V$  позначає обсяг всього даного тіла. Якщо за елемент обсягу прийmemo обсяг елементарної кулі, то:

$$\Delta V = \pi r^2 \Delta z,$$

де  $r$  є радіус нижньої основи шару, а  $\Delta z$  – його нескінченно мала висота. Отже,

$$\lim \sum z \Delta V = \lim \sum \pi r^2 z \Delta z.$$

Межа суми  $\sum \pi r^2 z \Delta z$  при  $n \rightarrow \infty$  і  $\Delta z \rightarrow 0$  виражається певним інтегралом, узятим за змінним  $z$  у межах зміни цього змінного, тобто в межах від 0 до  $R$ . А тому:

$$\lim \sum z \Delta V = \int_0^R \pi r^2 z dz$$

Але, як видно з рис. 37,  $r^2 = R^2 - z^2$ . Підставляючи це значення  $r^2$ , отримаємо:

$$\lim \sum z \Delta V = \int_0^R \pi (R^2 - z^2) z dz = \pi \cdot R^2 \int_0^R z dz - \pi \int_0^R z^3 dz = \pi \cdot R^2 \cdot \frac{R^2}{2} - \pi \frac{R^4}{4} = \frac{\pi R^4}{4}$$

Обсяг  $V$  напівкулі дорівнює  $\frac{2}{3} \pi R^3$ . Отже,

$$z_C = \frac{\frac{1}{4} \pi R^4}{\frac{2}{3} \pi R^3} = \frac{3}{8} R.$$

## 7. Графічне визначення центра ваги плоских фігур

Графічний спосіб знаходження центра ваги складної плоскої фігури полягає у такому: цю форму розбивають на декілька таких частин найпростішої геометричної форми, положення центрів ваги яких відомо (наприклад, на трикутники або прямокутники). Позначимо центри тяжкості таких частин через  $C_1, C_2, C_3$  і т. д. Положення цих точок може бути легко знайдено (наприклад, центр ваги трикутника лежить в точці перетину його медіан, центр ваги прямокутника – в точці перетину його діагоналей). У цих точках прикладені ваги  $P_1, P_2, P_3$  і т. д. Відповідних частин, на які розбивається дана фігура. Позначимо площі цих частин через  $S_1, S_2, S_3$  і т. д. Оскільки розміри фігури задані, ці площі також можуть бути знайдені. Якщо дана фігура однорідна, то ваги  $P_1, P_2, P_3$  і т. д. Пропорційні площам  $S_1, S_2, S_3$

і т. д. Тому під час зображення сил  $P_1, P_2, P_3$ , і т. д. На кресленні в довільно обраному масштабі довжини векторів, що зображують ці сили, потрібно брати пропорційними площами  $S_j$ .

У результаті отримуємо систему паралельних сил  $P_1, P_2, P_3$  і т. д. Прикладених у відомих точках  $C_1, C_2, C_3$  і т. д. Центр цих паралельних сил є шуканий центр ваги даної фігури. Таким чином, приходимо до задачі знаходження центра заданої системи паралельних сил. Якщо дана фігура має вісь симетрії, то рішення задачі спрощується, оскільки заздалегідь відомо, що центр ваги такої фігури лежить на цій осі симетрії.

Приклад 8. Знайти центр ваги двотаврової фігури зображеної на рис. 38.

Рішення. Оскільки фігура має вісь симетрії  $xx$ , то шуканий центр ваги лежить на цій осі. Розбиваємо цю фігуру прямими  $ab$  і  $cd$  на три прямокутника. Ваги цих прямокутників, прикладені в їх центри тяжіння на осі  $xx$ , пропорційні їх площам. Отже, ці ваги, як видно із заданих розмірів фігури, відносяться між собою, як 3: 4: 4.

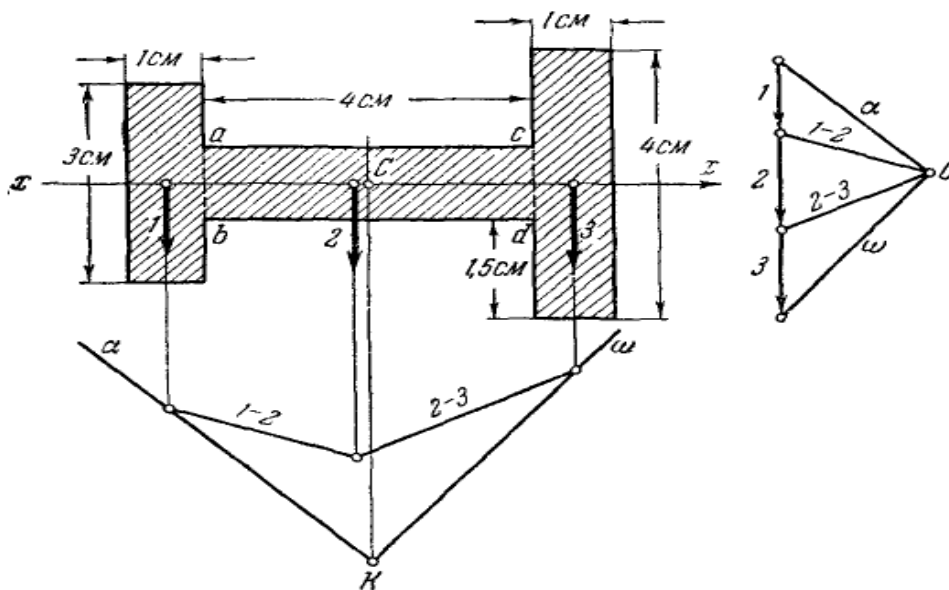


Рис. 38. Центр тяжкості симетричною двотавровою фігурою

Побудувавши в масштабі ці сили, які позначені на кресленні цифрами 1, 2 і 3, складемо їх графічно за допомогою силового і мотузкового багатокутників. Рівнодіюча цих сил спрямована на прямий, їм паралельної і проходить через точку  $K$  перетину сторін  $\alpha$  і  $\omega$  мотузкового багатокутника. Шуканий центр ваги лежить на цій прямій. Отже, він знаходиться в точці  $C$  перетину цієї прямої з віссю симетрії даної фігури.

Приклад 9. На рис. 39 дана Z-подібна фігура. Потрібно знайти положення її центра ваги.

Рішення. Раніше ми вирішили цю задачу аналітично, обчислюючи координати шуканого центра ваги. Тепер вирішимо її графічно. Розіб'ємо цю фігуру на три прямокутника прямими  $ab$  і  $cd$ . Ваги цих прямокутників позначені цифрами 1, 2 і 3. Взявши розміри з рис. 39, бачимо що ці ваги відносяться між собою як 3: 4: 3. Склавши графічно ці сили за допомогою силового і мотузкового багатокутників, знайдемо пряму, по якій направлена рівнодіюча цих сил. Ця пряма паралельна даними силам і проходить через точку перетину  $K$  сторін  $\alpha$  і  $\omega$  мотузкового багатокутника. Шуканий центр ваги фігури лежить на цій прямій. Оскільки дана фігура симетрії не має, то вчинимо згідно зі сказаним, а саме: повернемо сили 1, 2 і 3 навколо їх точок прикладання на прямий кут, так щоб вони зайняли положення  $1'$ ,  $2'$  і  $3'$ . Побудуємо мотузковий багатокутник для цієї нової системи сил; боку цього багатокутника  $\alpha'$ ,  $1' - 2'$ ,  $2' - 3'$  і  $\omega'$  проводимо перпендикулярно до відповідних сторонам  $\alpha$ ,  $1 - 2$ ,  $2 - 3$  і  $\omega$  першого мотузкового багатокутника. Шуканий центр ваги лежить на прямій, паралельній силам  $1'$ ,  $2'$ ,  $3'$  і проходить через точку перетину  $K'$  сторін  $\alpha'$  і  $\omega'$  другого мотузкового багатокутника. Отже, він знаходиться в точці  $C$  перетину прямих  $KC$  і  $K'C$ .

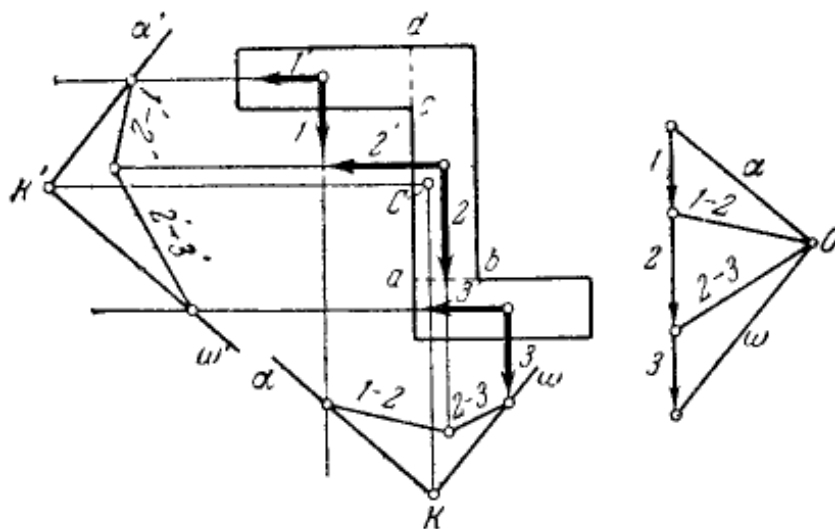


Рис. 39. Центр тяжкості Z-подібної фігури

На малюнках 40 – 42 представлені варіанти фігур, для яких необхідно знайти координати центрів ваги.

Знайти координати центра ваги плоскої фігури, складеної з тонких однорідних стрижнів однакового погонного ваги (варіанти 6, 7), плоскої

фігури (варіанти 7 – 18 і 24 – 30) або обсягу (варіанти 19 – 23), показаних на рис. 40 – 42. У варіантах 1 – 6 розміри вказані в метрах, а в варіантах 7 – 30 – у сантиметрах.

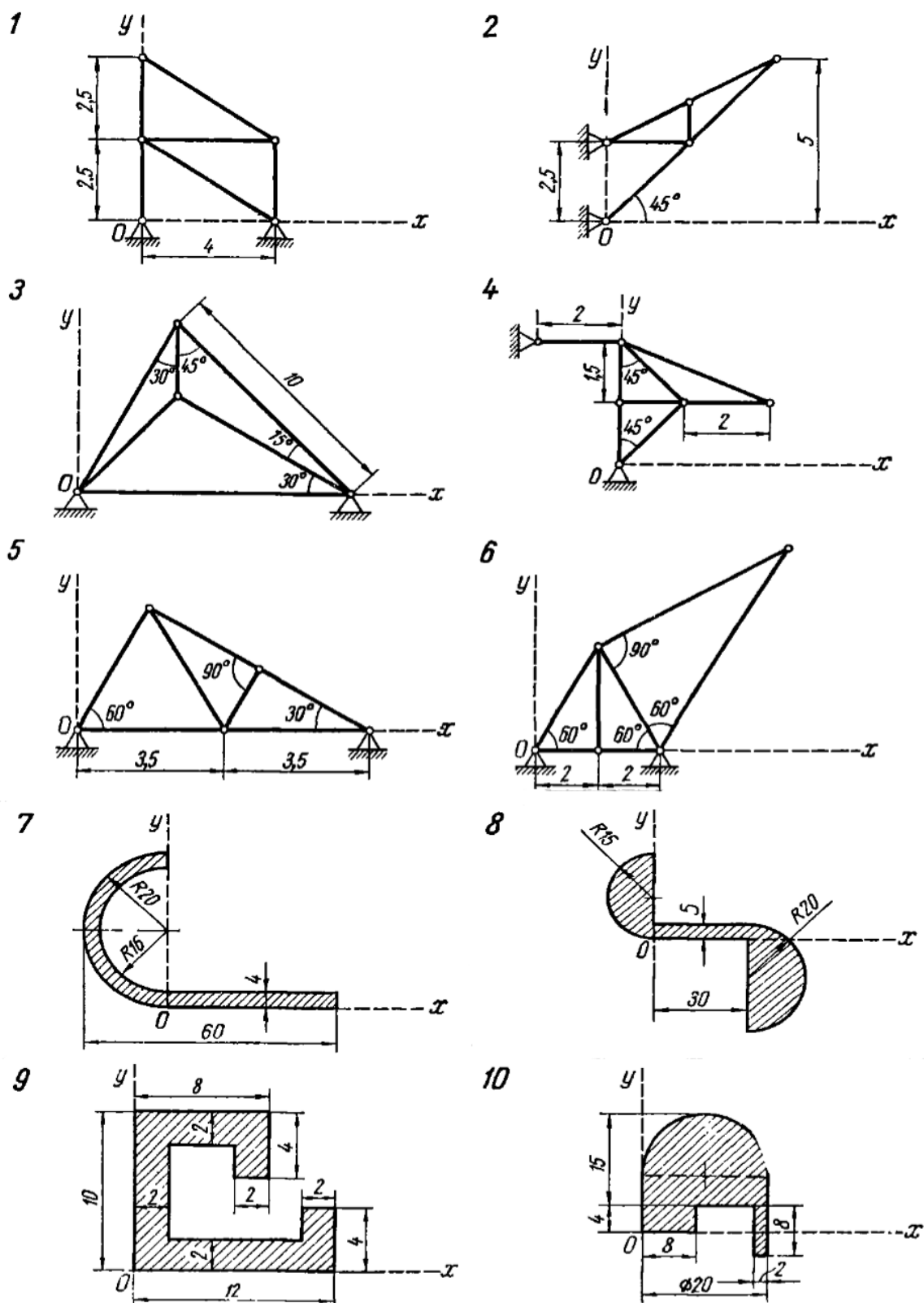
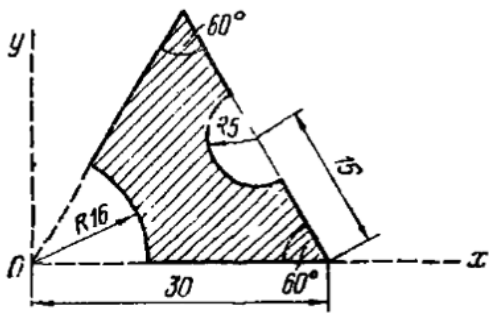
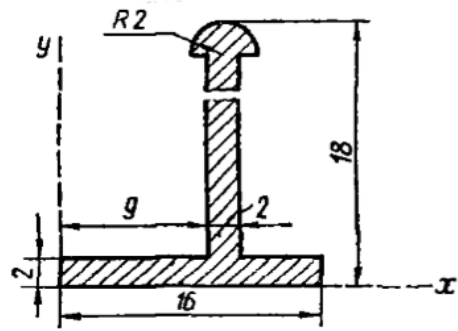


Рис. 40. Для обчислення координат центра ваги плоских фігур

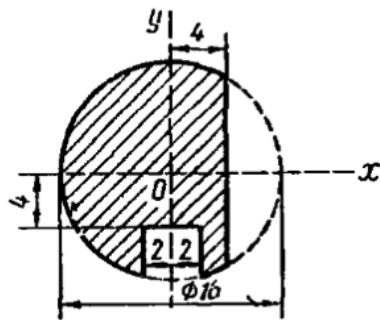
11



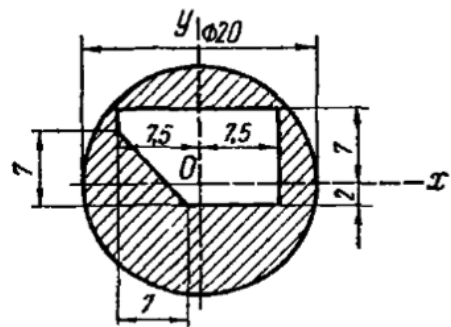
12



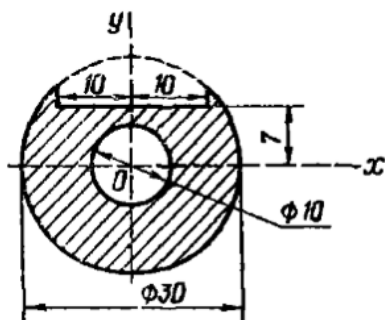
13



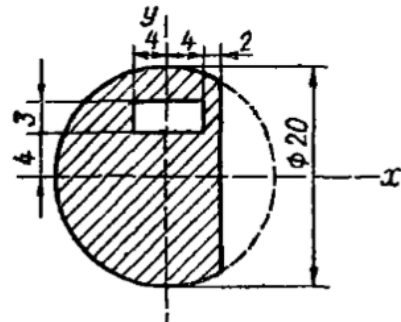
14



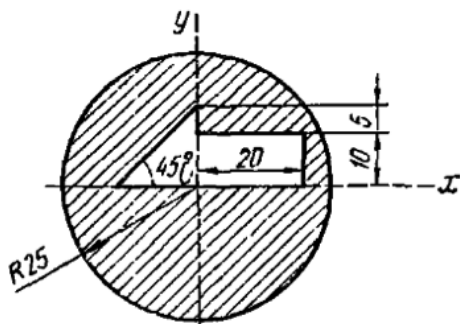
15



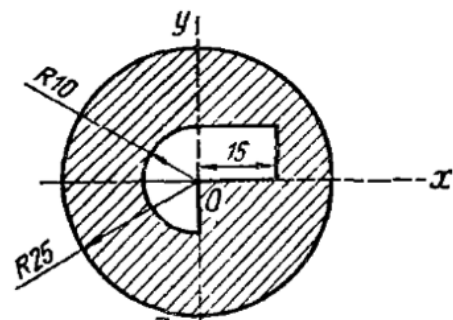
16



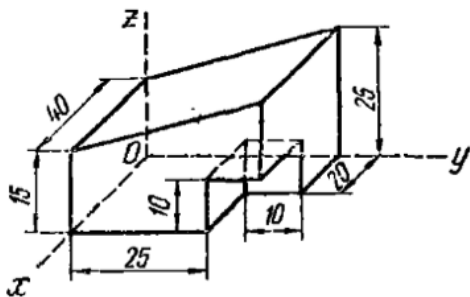
17



18



19



20

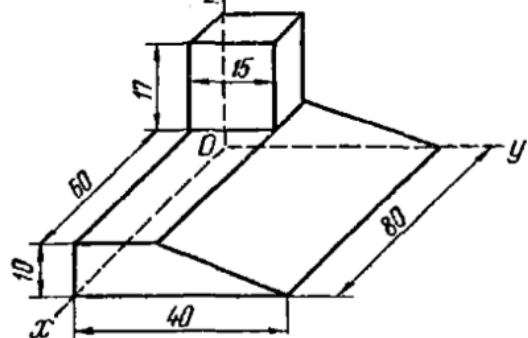


Рис. 41. Для обчислення координат центра ваги плоских фігур

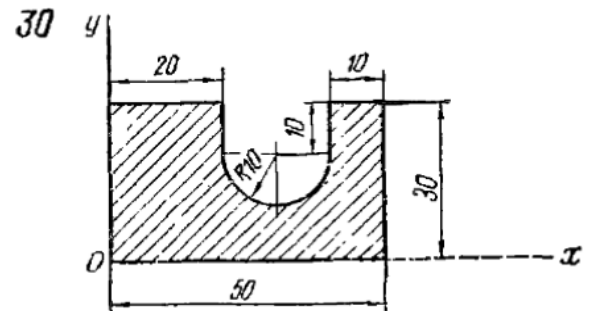
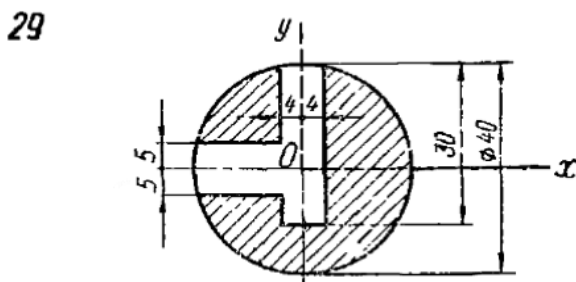
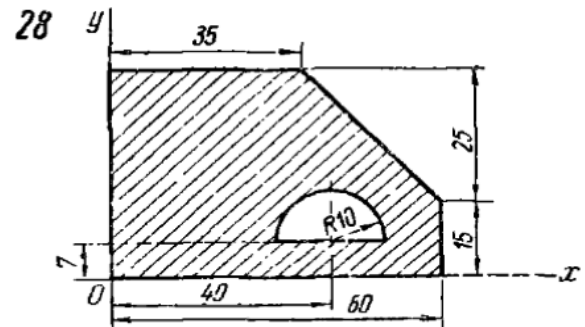
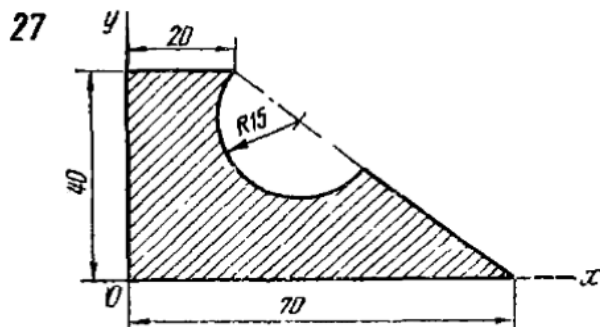
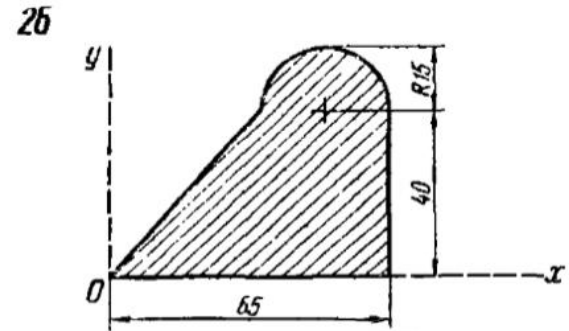
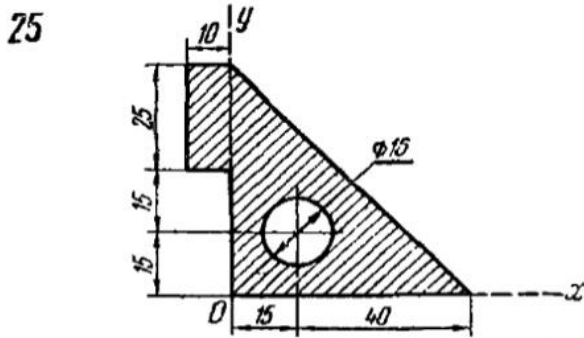
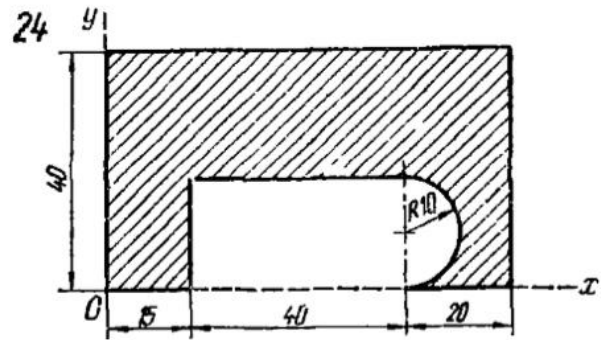
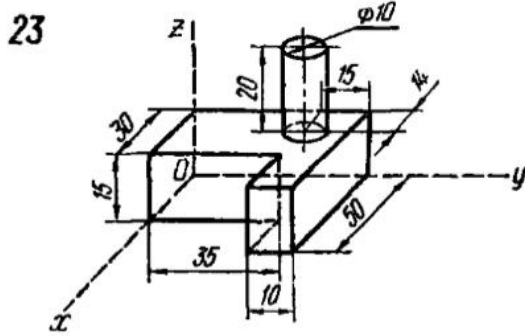
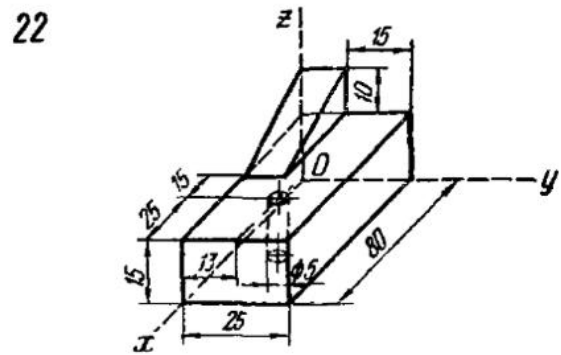
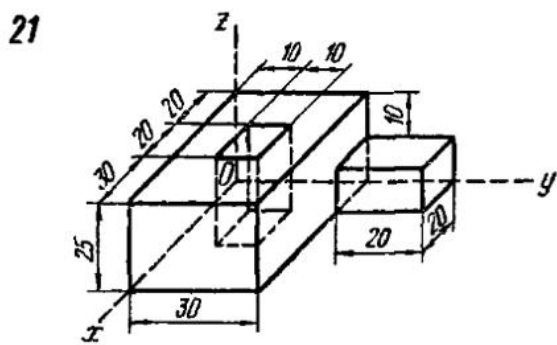


Рис. 42. Для обчислення координат центра ваги плоских фігур



Приклад виконання завдання

Визначити координати центра ваги плоскої фігури, показаної на рис. 43.

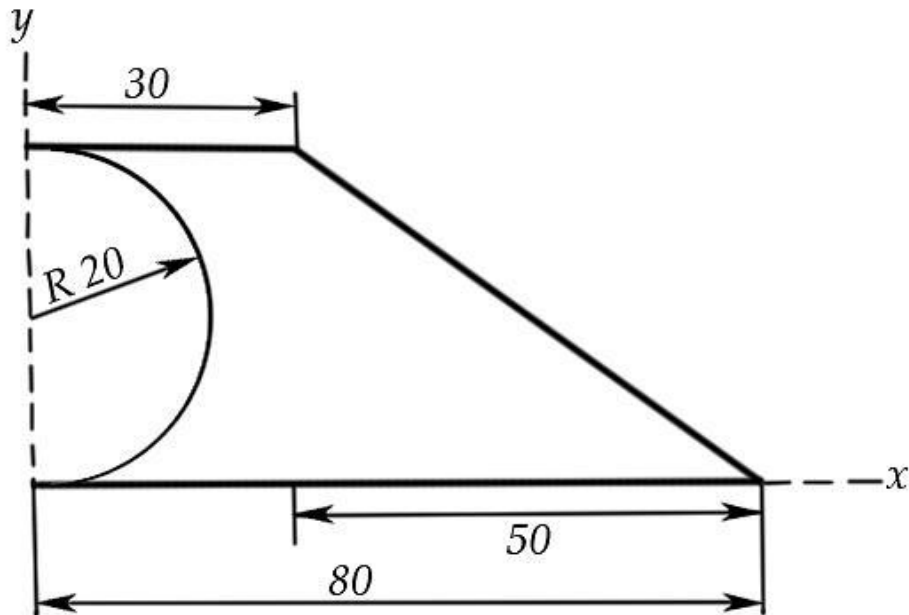


Рис. 43. Фігура

Рішення. Координати центра ваги площі визначаємо за формулами:

$$x_c = \frac{S_y}{\sum F}; \quad y_c = \frac{S_x}{\sum F}.$$

Щоб скористатися цими формулами, площа ділимо на окремі частини, положення центрів ваги яких відомі. У даному випадку такими частинами є: прямокутник, трикутник і половина кола (рис. 44). Площа половини кола, вирізаня з площі прямокутника, вважаємо негативною.

Маємо:

площа прямокутника

$$F_1 = 40 \cdot 80 = 3200 \text{ см}^2;$$

площа трикутника

$$F_2 = \frac{40 \cdot 30}{2} = 600 \text{ см}^2$$

площа кола

$$F_3 = \frac{\pi \cdot 20^2}{2} = 200\pi = 628 \text{ см}^2.$$

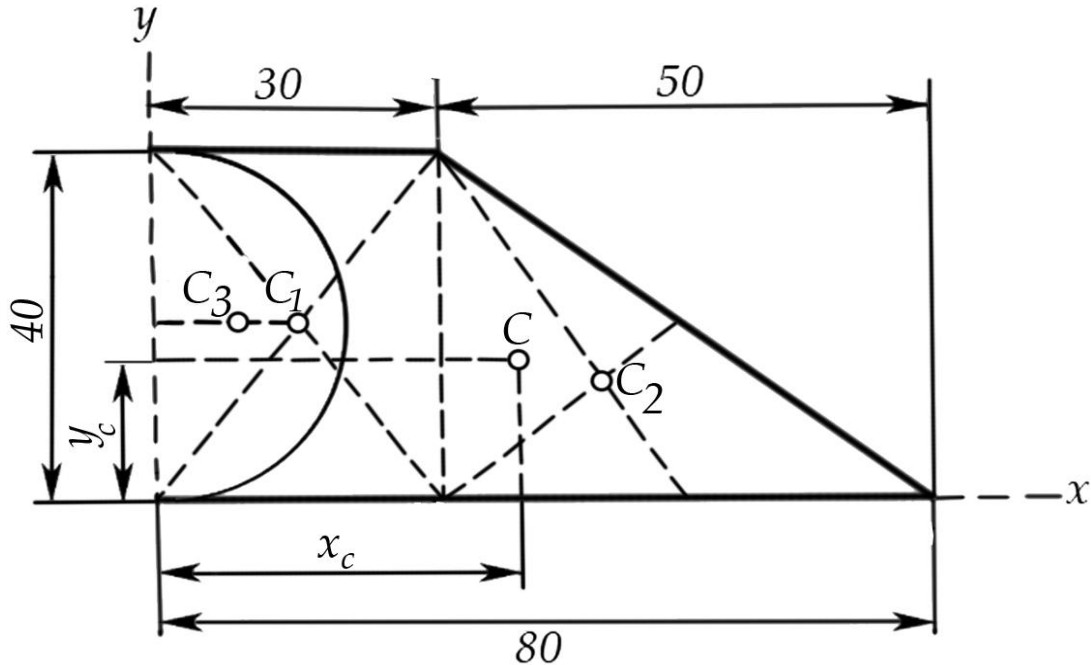


Рис. 44. Центр тяжіння площі

Центри ваги розглянутих частин перетину мають такі координати:  
для трикутника

$$x_1 = 15 \text{ см}; \quad y_1 = 20 \text{ см};$$

для трикутника

$$x_2 = 30 + \frac{50}{3} = 46,7 \text{ см}; \quad y_2 = \frac{40}{3} = 13,3 \text{ см};$$

для половини кола

$$x_3 = \frac{4R}{3\pi} = \frac{4 \cdot 20}{3\pi} = 8,5 \text{ см}; \quad y_3 = 20 \text{ см}.$$

Для обчислення координат центра ваги плоскої фігури складаємо табл. 2.

## Обчислення координат

Номер елемента	$F_i, \text{см}^3$	$x_i, \text{см}^3$	$y_i, \text{см}^3$	$S_{iy}=F_i x_i, \text{см}^3$	$S_{ix}=F_i y_i, \text{см}^3$
1	1 200	15	20	18 000	24 000
2	1 000	46,7	13,3	46 700	13 300
3	-628	8,5	20	-5 338	-12 560
$\Sigma$	1 572			59 362	24 700

За формулами обчислюємо координати центра ваги плоскої фігури:

$$x_c = \frac{59\,362}{1\,572} = 37,8 \text{ см}; \quad y_c = \frac{24\,700}{1\,572} = 15,7 \text{ см.}$$

Центр тяжіння площі показаний на рис. 44.

## Рекомендована література

1. Беляев Н. М. Сопротивление материалов [Текст] : учебник / Н. М. Беляев. – Москва : Высшая школа, 1999. – 856 с.
2. Воронов И. М. Курс теоретической механики [Текст] : учебник / И. М. Воронов. – Москва : Высшая школа, 2002. – 552 с.
3. Сборник задач для курсовых работ по теоретической механике [Текст] / Б. Н. Квасников и др. ; под общей ред. А. А. Яблонского. – Москва : Высшая школа, 1992. – 432 с.

## Зміст

Вступ.....	3
Тема 1. Зв'язки і їх реакції (балкові опори і їх реакції) .....	4
1. Поняття про ферму. Задачі розрахунку ферм.....	4
2. Спосіб вирізання вузлів .....	8
3. Спосіб Кремона .....	12
4. Спосіб розрізів ферми.....	17
Тема 2. Центри ваги.....	30
1. Загальні формули для координат центра ваги.....	30
2. Положення центра ваги симетричного тіла .....	34
3. Теореми Гюльдена.....	36
4. Центри ваги деяких найпростіших однорідних тіл і фігур .....	42
5. Визначення центра ваги тіл і фігур складної форми.....	48
6. Застосування загальних формул до обчислення координат центра ваги.....	56
7. Графічне визначення центра ваги плоских фігур.....	59
Рекомендована література.....	68

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

**Методичні рекомендації  
до виконання самостійної роботи студентів  
з навчальної дисципліни  
"ТЕХНІЧНА МЕХАНІКА"  
для студентів напряму підготовки  
6.051501 "Видавничо-поліграфічна справа"  
всіх форм навчання**

*Самостійне електронне текстове мережеве видання*

Укладачі: **Крюк** Анатолій Григорович  
**Дитиненко** Станіслав Олександрович

Відповідальний за видання *Ф. В. Новіков*

Редактор *В. О. Бутенко*

Коректор *В. О. Бутенко*

План 2016 р. Поз. № 333 ЕВ. Обсяг 70 с.

---

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

*Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру  
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.*