УДК 539.3

Т. В. Денисова, В. С. Проценко

О крутильных колебаниях составного упругого полупространства

Харьковский национальный экономический университет им. Семена Кузнеца
Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ»

Приведено решение задачи о крутильных осесимметричных гармонических колебаниях упругого радиально-неоднородного полупространства $z > 0$, составленного из двух однородных частей с разными свойствами. Одна часть полупространства ($\rho < R$) имеет константы (ρ_1, μ_1), другая часть ($\rho > R$) – константы (ρ_2, μ_2), где ρ – полярный радиус, ρ_k, μ_k – соответственно плотность и модуль сдвига упругих частей полупространства. Решение получено на основе нового интегрального преобразования Ханкеля – Вебера на смешанном спектре, введенного авторами этой статьи. Отличительной особенностью рассмотренной задачи колебания от других подобных задач [1, 2] являются отдельные волны, бегущие вглубь полупространства без затухания. Число таких волн конечно и тем больше, чем сильнее отличаются материальные константы частей, составляющих полупространство. В однородной среде таких волн нет.

Ключевые слова: составное упругое полупространство, крутильные колебания, новое интегральное преобразование на смешанном спектре, точное решение, бегущие волны.

Введение

Крутильные гармонические колебания радиально-неоднородного упругого полупространства, составленного из двух частей с различными материальными константами, ранее никем не рассматривались. В научной литературе [1, 2] исследований по этому вопросу авторы статьи не обнаружили. Между тем, эта задача требует для своего точного решения нового интегрального преобразования и имеет особенность, существенно отличающую ее от аналогичной задачи для однородного полупространства. В рассматриваемой задаче при некоторых условиях появляются отдельные изолированные волны, бегущие вглубь полупространства с неизменной амплитудой. Из приведенного в работе решения как частный случай следует решение задачи для однородного тела.

1. Постановка задачи и основные уравнения

Граница неоднородного полупространства $z > 0$ подвержена действию крутящих усилий $\tau_{z\varphi} = f(\rho)e^{i\omega t}$ на круге конечного радиуса. Считаем, что ось Oz направлена внутрь упругого тела. Надо найти решение системы уравнений колебаний

$$\frac{\partial^2 w_k}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial w_k}{\partial \rho} - \frac{w_k}{\rho^2} + \frac{\partial^2 w_k}{\partial z^2} = \left(\frac{\rho_k}{\mu_k}\right)\frac{\partial^2 w_k}{\partial t^2} \tag{1.1}$$

в областях ($\rho < R,\ k = 1$) и ($\rho > R,\ k = 2$) при условиях непрерывности перемещений и напряжений на поверхности $\rho = R$. На бесконечности примем условие ограниченности углового перемещения $w_2(\rho, z, t)$, а зависимость для перемещения от времени – в виде $w_k = u_k(\rho, z)e^{i\omega t}$, где ω – частота колебаний.

Тогда для комплексной амплитуды u_k получим уравнения:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial \rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u_k}{\partial \rho}-\frac{u_k}{\rho^2}+\frac{\partial^2 u_k}{\partial z^2}+\omega_k^2 u_k=0\,,\quad \omega_k^2=\omega^2\frac{\rho_k}{\mu_k}\,, \tag{1.2}$$

с краевым условием на поверхности $z=0$: $\tau_{\rho\varphi}=f(\rho)$.

Будем решать уравнение (1.2) методом разделения переменных, в соответствии с которым положим:

$$u_k(\rho,z)=R_k(\rho)e^{-\sqrt{r}z}\,, \tag{1.3}$$

где r – параметр разделения (спектральный параметр).

В результате приходим к задаче Штурма-Лиувилля (Ш.-Л.): найти те значения спектрального параметра r, для которых решения уравнений:

$$R_k''+\rho^{-1}R_k'-\rho^{-2}R_k+\left(r+\omega_k^2\right)R_k=0 \quad (k=1,2),$$

с граничными условиями $R_1(0)=0$, $R_2(\infty)<\infty$ и условиями сопряжения:

$$R_1(R)=R_2(R)\,,\quad \mu_1\frac{d}{d\rho}\left(\frac{R_1(\rho)}{\rho}\right)\Bigg|_{\rho=R}=\mu_2\frac{d}{d\rho}\left(\frac{R_2(\rho)}{\rho}\right)\Bigg|_{\rho=R}\,, \tag{1.4}$$

являются ненулевыми.

Последнее условие в (1.4) есть условие равенства касательных напряжений $\tau_{r\varphi}=\mu\rho(\rho^{-1}u)'_\rho$ на поверхности раздела упругих сред.

Стандартным способом устанавливаем, что задача Ш.-Л. имеет действительный спектр. Предположим, что ее решение $R(\rho,r)=\left[R_1(\rho,r),R_2(\rho,r)\right]^T$ найдено. Тогда перемещение $u(\rho,z)$ можно записать в виде:

$$u(\rho,z)=\left[u_1,u_2\right]^T=\int_{-\infty}^{\infty}A(r)e^{-\sqrt{r}z}R(\rho,r)\,dr\,, \tag{1.5}$$

где $A(r)$ – произвольная функция.

Из краевого условия на границе полупространства: $\tau_{z\varphi}(\rho,0)=\mu\cdot u_z'\big|_{z=0}=f(\rho)$, находим уравнение для определения неизвестной функции $A(r)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}A(r)\sqrt{r}R(\rho,r)\,dr=t(\rho)\,,\quad \rho\in(0,\infty)\,, \tag{1.6}$$

где $t(\rho)=\mu^{-1}(\rho)f(\rho)$, $\mu(\rho)=\begin{cases}\mu_1, & \rho\in(0,R),\\ \mu_2, & \rho>R.\end{cases}$

Задача сведена к обращению равенства (1.6) относительно функции $A(r)$.

2. Интегральное преобразование Ханкеля-Вебера на смешанном спектре

Исследуем поставленную выше задачу Ш.-Л. Будем различать два случая: а) $\omega_2>\omega_1$; б) $\omega_1>\omega_2$. Как легко проверить, в первом случае спектр задачи непрерывный и расположен на полупрямой $r>-\omega_2^2$. Во втором случае спектр – смешанный, причем его непрерывная часть та же, что и в первом случае, а дискретная часть находится на интервале $(-\omega_1^2, -\omega_2^2)$. Этот, более интересный с точки зрения приложений, случай будем дальше рассматривать.

Собственные функции для точечной части спектра имеют вид:

$$Z(\rho, r_k) = \begin{cases} J_1(\gamma_k \rho) \cdot K_1(\delta_k R), & \rho \in (0, R), \\ K_1(\delta_k \rho) \cdot J_1(\gamma_k R), & \rho > R, \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\gamma_k = \sqrt{r_k + \omega_1^2}\,,\ \delta_k = \sqrt{-r_k - \omega_2^2}\,,$$

где r_k – простые корни уравнения:

$$\mu_{21} \frac{J_1(\xi)}{\xi \cdot J_2(\xi)} = \frac{K_1\left(\sqrt{g^2 - \xi^2}\right)}{\sqrt{g^2 - \xi^2} \cdot K_2\left(\sqrt{g^2 - \xi^2}\right)}, \quad \xi \in (0, g), \tag{2.2}$$

$$\mu_{21} = \mu_2 / \mu_1, \quad \xi = R\sqrt{\omega_1^2 + r}, \quad g = R\sqrt{\omega_1^2 - \omega_2^2},\ r \in (-\omega_1^2, -\omega_2^2),$$

где $J_n(x)$, $K_n(x)$ – функции Бесселя [3].

Корни уравнения (2.2) легко обнаруживаются графически*.

Если построить графики функций, которые стоят в равенстве (2.2) слева и справа, и совместить их в одной системе координат, то станет ясно, что число корней зависит от величины параметра g, т.е. от разности ω_1 и ω_2 при заданном значении R. Этих корней будет тем больше, чем больше эта разность.

Для непрерывной части спектра имеем собственные функции:

$$R(\rho, r) = \begin{cases} 2(\pi/R) J_1(\alpha_1 \rho) \alpha_1^{-1}, & \rho \in (0, R), \\ B J_1(\alpha_2 \rho) + C Y_1(\alpha_2 \rho), & \rho > R, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$B = \mu_{21}^{-1} J_2(\alpha_1 R) \cdot Y_1(\alpha_2 R) - \alpha_2 \alpha_1^{-1} J_1(\alpha_1 R) \cdot Y_2(\alpha_2 R),$$

$$C = \alpha_2 \alpha_1^{-1} J_1(\alpha_1 R) \cdot J_2(\alpha_2 R) - \mu_{21}^{-1} J_1(\alpha_2 R) \cdot J_2(\alpha_1 R), \quad \alpha_k = \sqrt{r + \omega_k^2}\,,$$

где $Y_n(x)$ – второе линейно независимое с $J_n(x)$ решение уравнения Бесселя [3].

Разложение произвольной функции $f(x)$ по собственным функциям задачи Ш.-Л. получим, используя операционный метод [4]. Опуская вычисления, приведем окончательный результат:

$$f(x) = \frac{1}{2\mu_{21}} \int_{-\omega_2^2}^{\infty} \frac{\tilde{f}(r)dr}{\Delta(r)} R(x, r) + \sum_{n=1}^{N} \frac{\tilde{\varphi}(r_n)}{\omega(r_n)} Z(x, r_n), \quad x > 0, \tag{2.4}$$

где N – число корней уравнения (2.2),

$$\tilde{f}(r) = \int_0^{\infty} f(y) R(y, r) \cdot \sigma(y) y dy\,, \quad \tilde{\varphi}(r_n) = \int_0^{\infty} f(y) Z(y, r_n) \sigma(y) dy\,, \tag{2.5}$$

---

*) При некоторых значениях параметров μ_k, ω_k, R возможно собственное значение $r = -\omega_2^2$, которому отвечает простейшая собственная функция $z(\rho, \gamma) = \left[J_1(\sqrt{\gamma}\rho), J_1(\sqrt{\gamma}R) R \rho^{-1}\right]^T$, $\gamma = \omega_1^2 - \omega_2^2$. Будем его называть *исключительным* и считать, что такого собственного значения у нас нет.

$$\Delta(r)=B^2(r)+C^2(r), \quad \omega(r_n)=R\mu_1^{-1}K_1(\delta_n)J_1(\gamma_n)\Delta_n,$$

$$\sigma(y)=\begin{cases} 1, & y\in(0,R), \\ \mu_{21}, & y>R, \end{cases}$$

$$2R^{-2}\Delta_n=\mu_2\delta_n\gamma_n^{-1}J_2(\gamma_n)K_2(\delta_n)+(\mu_1-\mu_2)\gamma_n^{-1}J_1(\gamma_n)K_1(\delta_n)+$$
$$+\mu_1\left(2\gamma_n^{-2}-\delta_n^{-1}\right)K_1(\delta_n)J_2(\gamma_n)-\mu_2\left(\gamma_n\delta_n\right)^{-1}J_1(\gamma_n)K_2(\delta_n)+\mu_1\delta_n^{-1}J_2(\gamma_n)K_0(\delta_n).$$

Отметим, что сумма в (2.4) появилась из-за наличия дискретной части спектра (полюсов функции Грина) в задаче Ш.-Л. Если $\omega_1=\omega_2$, то уравнение (2.2) не имеет корней и сумма в (2.4) пропадает. Эта сумма отсутствует также и при $\omega_2>\omega_1$, но само интегральное разложение остается справедливым и в этом случае. Пара формул (2.4), (2.5) представляет собой прямое и обратное интегральное преобразование, которое назовем преобразованием Ханкеля-Вебера. Класс функций, для которых применимо найденное разложение, тот же, что и в классическом преобразовании Ханкеля.

Обозначим правую часть в формуле (2.4) через $i(x)$. Тогда справедливы равенства:

$$i(x)=\frac{1}{2}\left[f(x-0)+f(x+0)\right] \text{ при } x\in((0,R)\cup(R,\infty)), \tag{2.6}$$

$$i(R)=(\mu_1+\mu_2)^{-1}\left[\mu_1 f(R-0)+\mu_2 f(R+0)\right].$$

Отметим частные случаи найденного преобразования.

1. Положим $\mu_1=\mu_2$, $\rho_1=\rho_2$. После замены $r+\omega_2^2=\lambda^2$ получаем классическое преобразование Ханкеля [3].

2. При $\omega=\mu_1=0$ имеем преобразование Вебера-Орра [3] на $\rho>R$:

$$\int_0^\infty \tilde{f}(\lambda)\Delta_1^{-1}(\lambda)R_2(\rho,\lambda)\lambda d\lambda=f(\rho), \quad \int_R^\infty f(\rho)R_2(\rho,\lambda)\rho d\rho=\tilde{f}(\lambda),$$

$$\Delta_1(\lambda)=J_2^2(R\lambda)+Y_2^2(R\lambda), \quad R_2(\rho,\lambda)=J_2(R\lambda)Y_1(\lambda\rho)-J_1(\lambda\rho)Y_2(R\lambda),$$

с краевым условием $\left(\rho^{-1}R_2\right)'_\rho=0$ в точке $\rho=R$.

3. Если $\omega=0$, $\mu_1=\mu_2 k$ и $k\to\infty$, то получим другое преобразование Вебера-Орра с краевым условием $R_2(R,\lambda)=0$, при этом:

$$\Delta_2(\lambda)=J_1^2(R\lambda)+Y_1^2(R\lambda), \quad R_2(\rho,\lambda)=J_1(\rho\lambda)Y_1(R\lambda)-Y_1(\rho\lambda)J_1(R\lambda).$$

3. Решение задачи о колебании полупространства

В силу того, что преобразование (2.4) представлено суммой двух слагаемых по дискретным и непрерывным точкам спектра, равенства (1.5), (1.6) следует заменить равенствами:

$$u(\rho,z)=\int_{-\omega_2^2}^{\infty} A(r)e^{-\sqrt{r}z}R(\rho,r)dr+\sum_{n=1}^{N}a_n e^{-\sqrt{r_n}z}Z(\rho,r_n), \tag{3.1}$$

$$\int_{-\omega_2^2}^{\infty} A(r)\sqrt{r}R(\rho,r)dr + \sum_{n=1}^{N} a_n\sqrt{r}Z(\rho,r_n) = t(\rho), \quad \rho > 0, \tag{3.2}$$

где наряду с функцией $A(r)$ неизвестны и коэффициенты a_n. Для их определения воспользуемся формулами (2.5). В результате получим:

$$A(r) = \left[2\mu_{21}\sqrt{r}\cdot\Delta(r)\right]^{-1}\int_0^{\infty} t(y)\varphi(y)yR(y,r)dy, \tag{3.3}$$

$$a_n = \left[\sqrt{r_n}\omega(r_n)\right]^{-1}\cdot\int_0^{\infty} t(y)\varphi(y)yZ(y,r_n)dy. \tag{3.4}$$

Формулы (3.1), (3.3), (3.4) дают точное формальное решение задачи $u(\rho,z) = [u_1,u_2]^T$, но оно не является вполне определенным, так как при отрицательных значениях параметра r главная ветвь функции $\sqrt{r}$ имеет два значения $\pm i\sqrt{|r|}$. Для того, чтобы решение задачи было физически корректным, выберем значение главной ветви $\sqrt{r}$ так, чтобы $\arg\sqrt{r} = \pi/2$ при $r < 0$. Другими словами, в интеграле (3.1) точка ветвления $r = 0$ в комплексной плоскости с разрезом обходится сверху по бесконечно малой полуокружности. При таком выборе значений ветви $\sqrt{r}$ в формуле (3.1) решение $w(\rho,z,t) = u(\rho,z)e^{i\omega t}$ будет содержать сомножители вида $e^{-i\sqrt{|r_n|}(z-b_n t)}$, $e^{-i\sqrt{|r|}(z-b(r)t)}$ под знаками суммы и интеграла, где $b_n = \omega\sqrt{|r_n|^{-1}}$, $b(r) = \omega\sqrt{|r|^{-1}}$. Эти сомножители представляют собой отдельные, бегущие от источника волны, распространяющиеся с разными скоростями вдоль положительного направления оси Oz, т.е. вглубь полупространства. Энергию переносят именно эти бегущие волны. Первая группа волн, соответствующая дискретной части спектра, – незатухающие волны. Вторая группа волн, порождаемая непрерывной частью спектра $r \in (-\omega_2^2, 0)$ – это волны с убывающей к нулю амплитудой при $z \to \infty$. Кроме того, решение $w(\rho,z,t)$ содержит и стоячие волны $(r > 0)$, которые энергию не переносят.

Заключение и выводы

1. В статье впервые поставлена и решена задача о гармонических осесимметричных крутильных колебаниях упругого радиально-неоднородного полупространства, составленного из двух однородных частей.

2. Исследована природа спектра неклассической задачи Штурма-Лиувилля для оператора Бесселя с разрывными коэффициентами на полубесконечном интервале. Выявлено, что спектр такой задачи может быть как непрерывным, так и смешанным. Дискретная часть спектра может содержать, при некоторых условиях на параметры задачи, исключительное собственное значение.

3. Получено новое интегральное разложение Ханкеля-Вебера по собственным функциям этой неклассической спектральной задачи (учет исключительного собственного значения, если таковое будет, приведет к дополнительному слагае-

мому в формуле разложения (2.4)). Найденное преобразование позволило получить точное решение задачи колебания.

4. Установлено, что точечный спектр порождает конечное число отдельных волн, бегущих от источника в глубь упругого полупространства без затухания.

Список литературы

1.Развитие теории контактных задач в СССР [Текст]. – М. : Наука, 1976. – 493 с.

2. Ворович, И. И. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей [Текст] / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. – М. : Наука, 1979. – 320 с.

3. Бейтмен, Г. Высшие трансцендентные функции [Текст] / Г. Бейтмен, А. Эрдейн. – М. : Наука, 1966. – Т.1. – 295 с.

4. Уфлянд, Я. С. О некоторых новых интегральных преобразованиях и их приложениях к задачам математической физики [Текст] / Я. С. Уфлянд // Вопросы математической физики. – Л. : Наука. – 1976. – С. 93 – 106.

Рецензент: д-р. физ.-мат. наук, проф. В. А. Меньшиков, Национальный аэрокосмический университет им. Н. Е. Жуковского «ХАИ», г. Харьков

Поступила в редакцию 2017

Про крутильні коливання складеного пружного півпростору

Наведено точний розв'язок задачі про крутильні осесиметричні гармонічні коливання пружного радіально-неоднорідного півпростору, складеного з двох однорідних частин з різними матеріальними константами. Розв'язок отримано за допомогою нового інтегрального перетворення Ханкеля – Вебера на мішаному спектрі, одержаного авторами статі. Виявлено поодинокі хвилі, які прямують вглиб півпростору без затухання.

Ключові слова: складений пружний півпростір, крутильні коливання, нове інтегральне перетворення на мішаному спектрі, точний розв'язок, біжучі хвилі.

On the torsional vibrations of the composite elastic half-space

Exact solution of the problem of the torsional axisymmetric harmonic vibrations of elastic radial-inhomogeneous half-space, composed of two homogeneous parts with different material constants, is given. The solution is obtained using the new Hankel – Weber integral transformation on the mixed spectrum, introduced by the authors of the article. Single waves, running into the half-space without attenuation, are found out.

Key words: composite elastic half-space, torsional vibrations, the new integral transformation on a mixed spectrum, exact solution, traveling waves.