В. Ф. Сенчуков

ЦІЛОЧИСЛОВІ СІТКИ: ПОБУДОВА ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Монографія

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2017

УДК 303.092.5
ББК 22.176
С 31

Рецензенти: завідувач кафедри вищої та прикладної математики Української інженерно-педагогічної академії, д-р фіз.-мат. наук, професор *О. М. Литвин;* професор кафедри інформатики та прикладної математики Харківського національного автомобільно-дорожнього університету Міністерства освіти і науки України, д-р фіз.-мат. наук, професор *В. М. Колодяжний;* професор кафедри вищої математики Харківського державного університету харчування та торгівлі, д-р техн. наук, професор *М. С. Синєкоп.*

Рекомендовано до видання рішенням ученої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.

Протокол № 7 від 24.04.2017 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Сенчуков В. Ф.

С 31 Цілочислові сітки: побудова та застосування : монографія [Електронний ресурс] / В. Ф. Сенчуков. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 248 с.

ISBN 978-966-676-702-1

Викладено конструктивний підхід до аналітичного опису дискретних множин в одно-, дво-, три-, …, *m*-вимірних цілочислових евклідових просторах та його застосування в теорії чисел і задачах дискретної оптимізації.

Рекомендовано для фахівців-економістів, наукових працівників та практиків у галузі теорії чисел, теорії алгоритмів, дискретної математики, задач оптимального розкрою матеріалів, кристалографії і взагалі для тих, кого полонить "жар холодних чисел".

УДК 303.092.5
ББК 22.176

ISBN 978-966-676-702-1

Світлій пам'яті мого Вчителя
Володимира Логвиновича Рвачова
присвячується

Передмова

В. Л. Рвачовим була створена математична теорія R-функцій, побудована на стику математичної логіки, класичних методів прикладної математики і сучасних методів кібернетики. Одним із основних результатів цієї теорії є розв'язання оберненої задачі аналітичної геометрії: побудувати рівняння, відповідне заданому геометричному об'єкту (лінії, кресленню). Історично ця проблема сягає ще часів Рене Декарта. Метод координат дозволив безмежно збільшувати кількість вивчених кривих і поверхонь, оскільки кожне нове рівняння давало нову лінію або поверхню. Це призвело до того, що надалі основну увагу було приділено задачі вивчення об'єктів, які описуються заданими рівняннями. Обернена задача знаходилася в затінку, фактично не розглядалася, якщо не брати до уваги деякі найпростіші форми: пряму, площину, коло, конічні перерізи тощо. В. Л. Рвачову вдалося розв'язати обернену задачу таким чином, що стало можливим будувати рівняння будь-яких складних геометричних об'єктів у вигляді єдиного аналітичного виразу в класі добре вивчених на множині дійсних чисел елементарних функцій, тобто функцій з континуальною (неперервною) областю визначення.

Проте стан речей не змінився щодо функцій дискретного (перервного) аргументу, зокрема числових послідовностей як функцій натурального аргументу. Легко можна за відомим загальним членом послідовності нанести на числову вісь точки (певна річ, в обмеженій кількості), тобто зобразити геометрично. Якщо ж на числовій осі вибрати ряд точок, чи так само легко описати формулою закон їх розташування, якому вони підкоряються?

Наприклад, легко зобразити точки, які відповідають квадратам натуральних чисел. А який вигляд матиме формула неквадратів? Це вже задача, яка для встановлення відповідної функціональної залежності потребує більш-менш глибокого аналізу.

Аналогічна задача постає стосовно аналітичного опису дискретної, зокрема цілочислової множини точок – точок з цілими координатами – двовимірного простору (площини), тривимірного простору і загалом – багатовимірного простору.

Запропонована робота є першою спробою систематичного висвітлення питань, пов'язаних з аналітичним описуванням об'єктів дискретного типу. Під впливом і у світлі ідей, які привели до створення теорії R-функцій, розроблено конструктивні засоби, що дозволяють побудувати формулу для функції, що описує дискретну множину, елементи якої мають певні властивості. (Засоби називають конструктивними, якщо в них відразу задається правило (конструкція), за яким функцію, що визначається, можна обчислити.)

Витоком усіх понять, на яких будується виклад, є поняття нумерації як функціонального відображення множини натуральних чисел на задану множину (не обов'язково числової природи). Зокрема, числові послідовності з відомим загальним членом є нумерацією множини значень їх елементів. Залучення до розгляду алгебри логіки і алгебри множин дало можливість побудувати послідовнісну модель булевої алгебри – алгебри, пропозиційними змінними (простими висловленнями) якої є послідовності. Пропонується також послідовнісна модель багатозначної алгебри логіки.

Від читача потрібне володіння основними положеннями теорії множин і булевої алгебри в обсязі вишу, з популярним викладом яких можна ознайомитись, наприклад, у книгах [7; 53]. Бажано також володіти початковими відомостями з теорії чисел [24]. Для більш глибокого вивчення відповідного теоретичного матеріалу рекомендуються монографії [5; 11; 30; 48].

Наскільки це було можливо, автор намагався викладати матеріал якомога простіше, не жертвуючи істиною. Самі конструктивні засоби елементарні, й зрозуміти їх до снаги навіть школяру. Запропоновані приклади, вправи і завдання дозволяють опанувати введені поняття.

Для кращого розуміння суті викладеного майже кожна теорема супроводжується розв'язанням відповідного прикладу.

Автор

Вступ

З росіянином треба говорити російською,
з англійцем – англійською, з французом –
французькою, а з природою – математичною мовою.
Тільки розмовляючи нею, природа відкриває нам свої таємниці.
Віллард Гіббс

Сучасну математику, яка настільки розрослася і стала настільки розгалуженою і різноманітною, навряд чи можливо описати змістовно, але її можна охарактеризувати з функціональної точки зору як мову природознавства і техніки, як мову й інструмент пізнання навколишнього світу і нас самих.

Умовно виклад усього матеріалу можна поділити на дві частини. Перша присвячена перетворенням множини натуральних чисел (одновимірній нумерації) у поєднанні з математичною логікою, а друга – нумерації точок одно-, дво-, …, m-вимірних цілочислових просторів, побудові цілочислових сіток і узагалі дискретних сіток, відповідних різноманітним областям.

Розділ 1 "Координатний простір і евклідові простори" містить довідковий матеріал щодо основних понять. У розділі 2 "R-функції. Послідовнісна модель двозначної та багатозначної логіки" подаються в ознайомчому аспекті відомості про R-функції та основи S-алгебри.

У третьому розділі "Узагальнені арифметичні прогресії" вивчається клас функцій, замкнений відносно алгебраїчних і логічних операцій.

На цій основі в розділі 4 "Застосування S-алгебри в теорії чисел" розглядаються послідовності всіх зведених систем лишків за майже простим модулем. У термінах узагальнених арифметичних прогресій установлена структура послідовності простих чисел (вона є кусково зворотною узагальненою арифметичною прогресією), отримано аналітичний опис процесу решетування за Ератосфеном і дві рекурентні формули послідовності простих чисел-близнюків (в алгебраїчній і тригонометричній формах).

П'ятий розділ "Підсумовування кусково-визначених числових послідовностей" присвячено розробленню методу подання загального члена кусково-визначених числових послідовностей у вигляді єдиного аналітичного виразу, який названо методом повних і неповних сум.

Розділ 6 "Цілочислові сітки на прямій і площині", розділ 7 "Цілочислові сітки у просторі", розділ 8 "Багатовимірні цілочислові сітки" охоплюють нумерацію цілих точок і побудову сіток за різними схемами.

У дев'ятому розділі "Цілочислове математичне програмування: короткий огляд" наводяться означення основних понять математичного програмування, постановка задачі цілочислового (дискретного) програмування, опис відомих точних методів цілочислової оптимізації.

Розділ 10 "Метод накладання цілочислової сітки в задачах цілочислової (дискретної) оптимізації" присвячено опису методу повного перебору ("грубої сили"), основою якого є цілочислові сітки. Наводяться приклади чисельної реалізації в середовищі пакета прикладних програм MatLab лінійних і нелінійних задач цілочислового програмування, пропонуються деякі модифікації методу.

У післямові висвітлено основні результати роботи та сподівання стосовно подальшого розвитку алгебро-логічного підходу в теорії чисел, у математичному програмуванні та впровадження його в інші галузі знань.

Коли книга була майже зверстана, відкрилися деякі цікаві зв'язки арифметичних прогресій із потужністю множини простих чисел у многочленах, тому відповідний матеріал уміщено в додатки (додаток А). Інші додатки також містять матеріал, тісно пов'язаний із методикою монографії.

З метою показати конструктивність запропонованих аналітичних засобів опису дискретних множин виклад теоретичного матеріалу супроводжується численними конкретними прикладами.

Стиль викладу матеріалу книги певною мірою нагадує бесіду автора з читачем, і вони разом проводять дослідження.

Формули, рисунки, теореми тощо нумеруються парами, перший елемент пари є номером розділу, а другий (після крапки) вказує на номер у межах одного розділу.

Перед посиланням на ту чи іншу формулу слово "формула" не пишеться. У кінці доведення теорем, розв'язання прикладів і задач після крапки ставиться напівжирна точка •.

Розділ 1. Координатний простір і евклідові простори

Абстракція є дієвим інструментом
математичного мислення.
Ріхард Курант

1.1. Означення координатного й евклідових просторів

Множина m дійсних чисел називається **упорядкованою,** або $\boldsymbol{m}$-**кортежем** ($\boldsymbol{m}$-**кою**) [50], якщо вказано, яке з чисел вважається першим, яке – другим і т. д. Довільну впорядковану сукупність m чисел подають так: $(x_1,\ x_2,\ ...,x_m)$, де $x_i \in \mathbf{R} = (-\infty, \infty)$, $i = \overline{1,m}$, тобто числа записуються в порядку зростання їхніх номерів.

Множина всіляких m-кортежів називається $\boldsymbol{m}$**-вимірним координатним простором** і позначається через $\mathbf{R}^{\boldsymbol{m}}$. Кожну із сукупностей m чисел називають **точкою** $\boldsymbol{m}$**-вимірного простору.** Позначення точки: $M(x_1, x_2, ..., x_m)$. Числа $x_i, i = \overline{1,m}$, називають **координатами** точки M. Точка $O(0, 0, ..., 0)$ – **початок координат.**

Відстань між точками $M_1(x_1,\ x_2,\ ...,x_m)$ і $M_2(y_1,\ y_2,\ ...,y_m)$ в $\mathbf{R}^{\boldsymbol{m}}$ обчислюється за формулою:

$$\rho(M_1,\ M_2) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + ... + (x_m - y_m)^2}, \qquad (1.1)$$

яка є узагальненням добре відомих формул аналітичної геометрії для площини ($m = 2$) і тривимірного простору ($m = 3$).

Координатний простір із введеною за формулою (1.1) відстанню між точками називається $\boldsymbol{m}$**-вимірним евклідовим простором** $\mathbf{E}^{\boldsymbol{m}}$**.**

Простору $\mathbf{E}^{\boldsymbol{m}}$ належать точки, координати яких є дійсними числами. У подальшому викладі знадобиться підмножина тільки таких точок із $\mathbf{E}^{\boldsymbol{m}}$, які мають цілочислові координати; такі точки називають коротко **цілими точками.** Підмножину цілих точок m-вимірного евклідового простору будемо називати $\boldsymbol{m}$**-вимірним евклідовим цілочисловим простором** і позначати через $\mathbf{Z}^{\boldsymbol{m}}$ [50]:

$$\mathbf{Z}^{\boldsymbol{m}} = \{ M_1(x_1,\ x_2,\ ...,x_m) \mid\ x_i \in \mathbf{Z}\ \forall i = \overline{1,m}\ \}. \qquad (1.2)$$

Якщо розглядають невід'ємні точки із множини цілих чисел $\mathbf{Z}$, то відповідні підмножини із $\mathbf{Z}^{\boldsymbol{m}}$ позначають через $\mathbf{Z}_+^{\boldsymbol{m}}$; *наприклад*, для площини: $\mathbf{Z}_+^{\mathbf{2}}$, для тривимірного простору: $\mathbf{Z}_+^{\mathbf{3}}$.

Викладені відомості будуть надалі використовуватись для висвітлення питань, пов'язаних із застосуванням просторів $\mathbf{Z}^{\boldsymbol{m}}$ для розв'язання задач дискретної оптимізації.

1.2. Деякі різновиди множин і областей

Нехай $M\,(C)$ – довільна (фіксована) точка із $\mathbf{E}^{\boldsymbol{m}}$, $r > 0$ – деяке дійсне число. Множину $\{M \,|\, \rho(M, C) \le r\}$ називають **$\boldsymbol{m}$-вимірною кулею** радіусом r із центром у точці C.

Множину $\{M \,|\, \rho(M, C) = r\}$ називають **$\boldsymbol{m}$-вимірною сферою** радіусом r, а множину $\{M : \rho(M, C) < r\}$ – **відкритою $\boldsymbol{m}$-вимірною кулею** радіусом r.

В $\mathbf{E}^2$ двовимірна куля – це круг, двовимірна сфера – коло; в $\mathbf{E}^1 = \mathbf{E}$ це відповідно відрізок і дві його кінцеві точки.

Будь-яку відкриту **$\boldsymbol{m}$-вимірну кулю** радіусом ε: $\{M : \rho(M, C) < \varepsilon\}$, називають **$\varepsilon$-околом точки $\boldsymbol{C}$** [52].

Нехай $A(a_1,\ a_2,\ ...,a_m) \in \mathbf{E}^{\boldsymbol{m}}$ і $d_1,\ d_2,\ ...,\ d_m$ – деякі додатні числа.

Множина $\{\ M_1(x_1,\ x_2,\ ...,\ x_m) \,\big|\, |\,x_1 - a_1\,| \le\ d_1, ..., |\,x_m - a_m\,| \le\ d_m\ \}$ називається **$\boldsymbol{m}$-вимірним паралелепіпедом.** В окремому випадку: $d_1 = d_2 = ... = d_m = d - const$, отримуємо **$\boldsymbol{m}$-вимірний куб.**

В $\mathbf{E}^2$ – це квадрат, в $\mathbf{E}$ – це відрізок із центром симетрії в точці A.

Нехай $\{M\}$ – деяка множина точок із $\mathbf{E}^{\boldsymbol{m}}$. Точка A називається **внутрішньою точкою** множини $\{M\}$, якщо існує ε-окіл точки A, який міститься у множині $\{M\}$ (рис. 1.1).

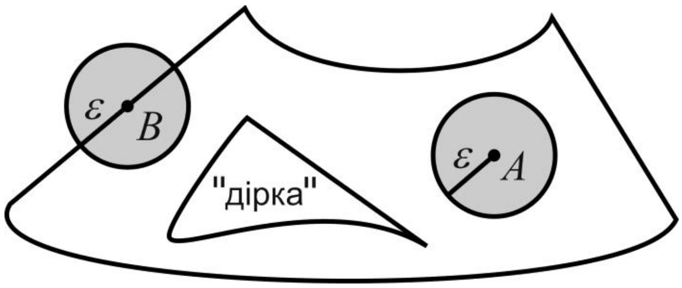


Рис. 1.1. **Внутрішня і гранична точки**

Точку $B \in \{M\}$ називають **граничною точкою** множини $\{M\}$, якщо в будь-якому ε-околі точки B містяться як точки множини $\{M\}$, так і всі точки, які цій множині не належать (див. рис. 1.1).

Гранична точка може належати, а може й не належати множині $\{M\}$. Множина $\{M\}$ називається **відкритою,** якщо всі її точки є внутрішніми, і **замкненою**, якщо вона містить усі свої граничні точки. Множина всіх граничних точок називається **межею** множини $\{M\}$.

Наприклад, межею тривимірної кулі $\{M \,|\, \rho(M, C) \le r\}$ є сфера $\{M \,|\, \rho(M, C) = r\}$. Ця ж сфера є межею відкритої кулі $\{M \,|\, \rho(M, C) < r\}$. На рис. 1.1 зображено замкнену множину.

Множина, яка не може бути подана у вигляді об'єднання її двох відокремлених власних підмножин, називається **зв'язною.**

У просторі $\mathbf{E}$**,** тобто на прямій, будь-яка зв'язна відкрита множина – це інтервал; до сукупності відкритих множин включаються і нескінченні інтервали: $(-\infty, b)$, (a, ∞), $(-\infty, \infty)$.

Будь-яка непорожня зв'язна відкрита множина або об'єднання такої множини з частиною її межі або з усією межею, тобто замкнена множина, називається **областю в** $\mathbf{E}^{m}$ і звичайно позначається через D.

Опуклою областю $\boldsymbol{D}$ точок площини ($\mathbf{E}^2$) чи простору ($\mathbf{E}^3$) називається область із такою властивістю: відрізок, що з'єднує дві її будь-які точки, міститься в ній повністю. Такими областями є, *наприклад*, круг, трикутник, куля, паралелепіпед. Будь-яку частину межі опуклої області називають відповідно **опуклою кривою** чи **опуклою поверхнею** (такими, *наприклад*, є коло і будь-яка його дуга, частина сфери). Поняття опуклої області узагальнюється на довільну скінченну вимірність m [50].

Область D називається **однозв'язною** (областю без "дірок"), якщо будь-який замкнений шлях у ній можна неперервно стягнути в точку, не виходячи за межі області. Довільна опукла множина в евклідовому просторі є однозв'язною. Кругове кільце як область не є однозв'язним. Область, яка не є однозв'язною, називають **багатозв'язною**.

Інакше кажучи, **багатозв'язна область** – це область, у якій існують замкнені криві, що не стягуються в межах цієї області в точку. На рис. 1.1 маємо **двозв'язну область,** оскільки є одна "дірка". У разі наявності k дірок область називають $(\boldsymbol{k}+\mathbf{1})$**-зв'язною.**

1.3. Попередні відомості про відповідність і відображення, композицію та суперпозицію

Розглянемо дві множини X і Y (дискретні чи неперервні, скінченні чи нескінченні). Елементи цих двох множин x і y можуть певним чином зіставлятися один з одним, утворюючи пари (x, y). Якщо спосіб такого зіставлення визначений, тобто для кожного елемента $x \in X$ зазначено елемент $y \in Y$, з яким зіставляється x, то кажуть, що між множинами X і Y установлено **відповідність** [50]. Зауважимо, що іменник *відповідність* досить гнучкий у поєднанні з іншими словами: можна сказати і *відповідність із чим*, і *між чим і чим*, і *чому*.

Відображення – це (з найбільш загальної точки зору) закон f, за яким елементам однієї множини ставляться у відповідність елементи іншої множини; позначається $f: X \to Y$, або $X \xrightarrow{f} Y$. Якщо відображення f ставить у відповідність елементу $x \in X$ елемент $y \in Y$, то $y = f(x)$ називають **образом** $\boldsymbol{x}$, а x – **прообразом** $\boldsymbol{y}$.

Пригадаємо деякі різновиди відображень. Якщо будь-якому прообразу відповідає єдиний образ, то відображення називається **однозначним.** (До таких відображень належать функції.)

Якщо, крім того, будь-якому образу відповідає єдиний прообраз, то відображення називають **взаємно однозначним,** або **бієкцією** (від лат. *bijectio* – накладання).

Виразним *прикладом* є взаємно однозначна відповідність між множиною дійсних чисел і множиною точок прямої, а от функція $y = f(x) = x^2$ не є взаємно однозначним відображенням числової осі на множину додатних чисел.

Відображення X в підмножину множини Y називають ***ін'єкцією*** (від лат. *injectio* – вкладення), якщо різним значенням x відповідають різні значення y: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Відображення X на всю множину Y називають ***сюр'єкцією*** (від лат. *surjectio* – покриття). Сюр'єктивна ін'єкція, або ін'єктивна сюр'єкція, визначає взаємно однозначне відображення (бієкцію).

Із основних елементарних функцій – функцій однієї змінної – можна утворювати інші, більше складні за будовою функції не тільки за допомогою арифметичних дій ($+, -, \times, /$).

Композиція (від лат. *compositio* – складання, зв'язування) – це спосіб утворення більш складних функцій таким шляхом: замість аргументу даної функції підставляється деяка функція від іншого аргументу; результат композиції називають **складеною функцією**, або **функцією від функції**. Позначається кружком $\circ$. *Наприклад,*

$$\big(z = f(y),\ y = \varphi(x)\big) \ \Rightarrow\ z = (f \circ \varphi)(x) = f(\varphi(x)) \text{ – складена функція.}$$

За певних умов композицію можна утворювати для будь-якої скінченної кількості функцій.

Якщо йдеться про функції декількох змінних, то, як правило, операцію утворення складених функцій називають **суперпозицією** (від лат. *super* – зверху, над). У випадку суперпозиції замість кожного із декількох аргументів можна підставляти інші функції від більшої чи меншої кількості змінних. Деякі автори поняття *композиції* і *суперпозиції* ототожнюють.

Вправи і задачі

1. Запишіть рівняння сфери в m-вимірному евклідовому просторі.

2. Як виглядає аналітичний опис кулі в m-вимірному евклідовому просторі?

3. Зобразіть схематично: а) відкриту область; б) замкнену область; в) тризв'язну область в $\mathbf{E}^2$.

4. Наведіть приклади областей в $\mathbf{E}^2$ і $\mathbf{E}^3$, які не є опуклими.

5. $M_1(x_1,\ x_2, \ldots, x_m)$ і $M_2(y_1,\ y_2, \ldots, y_m)$ – довільні точки області D із $\mathbf{E}^{\boldsymbol{m}}$. Координати точки $M_3(z_1,\ z_2, \ldots, z_m) \in D$ задовольняють умову: $z_i = \lambda x_i + (1-\lambda) y_i$, $i = \overline{1,m}$, де $\forall \lambda \in [0,1]$. Покажіть, що область D опукла.

Розділ 2. $\boldsymbol{R}$-функції. Послідовнісна модель двозначної та багатозначної логіки

Логіка – це свого роду гігієна, що дозволяє
математику зберігати свої ідеї здоровими і сильними.
Герман Вейль

2.1. Поняття $\boldsymbol{R}$-функції. Головна система $\boldsymbol{R}_\alpha$-операцій

Дійсна змінна величина у процесі змінювання може взагалі набувати як додатних, так і від'ємних значень. Для введення поняття R-функції властивості "бути додатною", "бути від'ємною", або коротше "додатність" і "від'ємність", розглядаються як *якості,* які може мати змінна.

Функції декількох змінних, яким якості "додатність" і "від'ємність" від аргументів передаються самій функції мовби "у спадок", були названі **$\boldsymbol{R}$-функціями** [30]. Інакше кажучи, задання якостей аргументів цілком визначає якість функції, тобто для певних якостей аргументів функція отримує у спадок одну з двох можливих якостей.

Знак змінної величини можна розглядати як двійкову змінну. Якщо вважати, наприклад, що знаку "плюс" відповідає значення істинності (одиниця), а знаку "мінус" – значення хибності (нуль), тоді в багатьох випадках операціям над дійсними величинами будуть відповідати певні операції над двійковими величинами, тобто булеві функції. Ця обставина вказує на тісний зв'язок між R-функціями і функціями алгебри логіки (алгебри висловлень).

Припустимо, що нуль завжди забезпечений якимось знаком ("плюс" або "мінус") і, відповідно до цього, належить до множини додатних або від'ємних чисел (це реалізовано в електронних обчислювальних машинах: знаковий розряд будь-якого числа, в тому числі й нуля, може перебувати лише в одному з двох станів, відповідних знакам "плюс" і "мінус"). За цим припущенням будь-яка дійсна величина належить класу або додатних, або від'ємних чисел. Нуль у проміжку $(-\infty, 0]$ від’ємний, у проміжку $[0, +\infty)$ – додатний.

Належність величини x до одного з цих класів визначається за допомогою предиката – логічної функції – $P(x) =$ «x невід'ємне».

Тоді $P(x)=(x\geq +0)=1$, а для висловлення «x не додатне» $P(x)=(x\leq -0)=0$, $x\in \mathbf{R}=(-\infty,\infty)$.

Описове означення R-функцій формалізується за допомогою предиката $P(x)$. Нехай $x=(x_1,x_2)$ – двовимірний кортеж, $x_i\in \mathbf{R}$, $i=1,2$, і кортеж $X=(X_1,X_2)$, де $X_i\in\{0,1\}$, $i=1,2$.

Розглянемо функцію двох змінних $f(x)=f(x_1,x_2)$ і булеву функцію $F(X)=F(X_1,X_2)$.

Функцію $f(x_1,x_2)$ називають ***R*-функцією**, якщо існує така булева функція $F(X_1,X_2)$, що предикат від значень $f(x)$ чисельно дорівнює значенням булевої функції від предикатів змінних x_1,x_2:

$$f(x_1,x_2) - R\text{-функція} \rightleftharpoons \exists F(X): P[f(x_1,x_2)]=F[P(x_1),P(x_2)]. \qquad (2.1)$$

Булева функція $F(X)$, яка задовольняє рівність у (2.1), називається **супровідною** (для) R-функції $f(x)$.

Приклад 2.1. Знак-якість функції $f(x)=x_1\cdot x_2$ визначається знаками співмножників і не залежить від величини їхніх модулів (нуль вважається додатним і від'ємним числом одночасно). Установимо для неї супровідну булеву функцію.

Розв'язання. Нехай знаку "плюс" відповідає одиниця, а знаку "мінус" – нуль (табл. 2.1). Тоді відповідна булева функція серед своїх значень від предикатів змінних x_1,x_2 матиме одиниці для однакових значень змінних X_1, X_2, тобто супровідна функція є рівнозначністю.

Таблиця 2.1

Таблиця якостей функції $f(x)$ та її супровідна булева функція

x_1 x_2	f
$-$ $-$	$+$
$-$ $+$	$-$
$+$ $-$	$-$
$+$ $+$	$+$

$\Leftrightarrow$

X_1 X_2	F
0 0	1
0 1	0
1 0	0
1 1	1

$\Leftrightarrow$ $F=X_1\sim X_2=X_1X_2\vee\overline{X}_1\overline{X}_2$.•

Означення (2.1) узагальнюється на випадок функцій довільної скінченної кількості m змінних: $f(x)=f(x_1, x_2, ..., x_m)$. У разі збільшення кількості аргументів супровідна функція звичайно ускладнюється.

Приклад 2.2. Складіть таблицю якостей функції трьох змінних $u=f(x, y, z)=x \cdot y \cdot z$ і знайдіть її супровідну функцію $U=F(X, Y, Z)$.

Розв'язання. Аналізуємо задану функцію як добуток трьох співмножників і приходимо до висновку: якщо один із них або всі вони від'ємні, то якістю функції є "від'ємність"; у протилежному випадку – "додатність". Отже, знак функції визначається, як і в прикладі 2.1, знаками співмножників і не залежить від величини їхніх модулів (нуль вважається додатним і від'ємним числом одночасно). Зважаючи на результати аналізу зразу можна подати табличне задання супровідної булевої функції (табл. 2.2).

Якості "від'ємність" приписується значення 0, а якості "додатність" – значення 1, у результаті чого отримуємо табличне задання булевої функції від трьох змінних: три перші елементи стовпців – це набори значень атомів, а четвертий елемент – відповідне значення функції.

Таблиця 2.2

Таблиця значень істинності супровідної функції

X	0	0	0	0	1	1	1	1
Y	0	0	1	1	0	0	1	1
Z	0	1	0	1	0	1	0	1
U	0	1	1	0	1	0	0	1

За наборами значень атомів, на яких функція набуває значень, що дорівнюють одиниці, знайдемо досконалу диз'юнктивну нормальну форму U [50]:

$$U_{\vee}=\overline{X}\,\overline{Y}\,Z \vee \overline{X}\,Y\,\overline{Z} \vee X\,\overline{Y}\,\overline{Z} \vee X\,Y\,Z\,,$$

і мінімізуємо її, зменшуючи кількість операцій з одинадцяти до дев'яти:

$$U_{\min}=\overline{X}\,(\overline{Y}\,Z \vee Y\,\overline{Z}) \vee X\,(\overline{Y}\,\overline{Z} \vee Y\,Z)\,.\bullet$$

Зауваження. Крім поділу множини дійсних чисел на додатні і від'ємні, існує безліч інших можливостей наділення їх якостями. Наприклад, можна розглядати якості: "число раціональне", "число ірраціональне"; "число за модулем більше двох", "число за модулем не перевищує двійку" тощо. Можна, нарешті, вводити декілька (і навіть безліч) якісних градацій. При цьому відповідно ускладнюються, як правило, і супровідні функції.

Розбиття множини дійсних чисел $\mathbf{R}$ за якостями на підмножини $\mathbf{R}(i)$, $i = 0, 1, 2, ..., k-1$, що не перетинаються, названо **покриттям множини $\mathbf{R}$,** а значення елементів із $\mathbf{R}(i)$ – **якісними градаціями на $\mathbf{R}$**. Якщо, наприклад, якісні градації описуються множинами $\mathbf{R}(0) = (-\infty, 0)$, $\mathbf{R}(1) = \{0\}$, $\mathbf{R}(2) = (0, +\infty)$, то відповідний тризначний предикат матиме вигляд:

$$P_3(x) = \begin{cases} 2, \text{ якщо } x > 0 \\ 1, \text{ якщо } x = 0 \\ 0, \text{ якщо } x < 0 \end{cases}.$$

За таких умов R-функції $f(x) = f(x_1, x_2, ..., x_m)$ відповідатиме єдина супровідна функція $F(X) = F(X_1, X_2, ..., X_m)$ тризначної логіки, при цьому виконується співвідношення:

$$P_3[f(x_1, x_2, ..., x_m)] = F[P_3(x_1), P_3(x_2), ..., P_3(x_2)] \tag{2.2}$$

як узагальнення рівності із (2.1).

Якщо розглядати якісні градації $\mathbf{R}(0) = (-\infty, 0)$, $\mathbf{R}(1) = [0, 1]$, $\mathbf{R}(2) = (1, +\infty)$ то відповідним тризначним предикатом можна описати для події S області значень E від'ємної неймовірності $\overline{P}^-(S)$, ймовірності $P(S)$, додатної неймовірності $\overline{P}^+(S)$ [41]:

$$P_3(x) = \begin{cases} 0, \text{ якщо } x \in E(\overline{P}^-) \\ 1, \text{ якщо } x \in E(P) \\ 2, \text{ якщо } x \in E(\overline{P}^+) \end{cases}.$$

За означенням будь-яку елементарну функцію можна отримати із основних елементарних функцій за допомогою арифметичних дій (додавання, віднімання, множення, ділення), констант $a \in \mathbf{R}$ і суперпозиції функцій, тобто побудови функцій від функцій. Відповідну множину функціональних залежностей позначимо через H_e:

$$H_e = \{x+y, xy, x/y,\ x^n,\ a^x\ (a>0),\ \log_a x\ (a>0, a\neq 1),\ \sin x,\ \cos x,$$
$$tgx,\ ctgx,\ arcsin\,x,\ arccos\,x,\ arctg\,x,\ arcctgx,\ a\in(-\infty,+\infty)\}. \tag{2.3}$$

Множину H_e назвемо **базисною системою функцій,** а всі елементарні функції – $\boldsymbol{H_e}$**-реалізовними функціями.**

Із усієї множини елементарних функцій можна виокремити певну підмножину, задаючи ту чи іншу базисну систему. *Наприклад*, система $H_r = \{x+y, xy, (-\infty,+\infty)\}$, яка крім операцій додавання і множення містить усі дійсні числа, реалізує будь-яку цілу раціональну функцію (многочлен), а якщо до неї додати операцію (дію) ділення, то за допомогою такої системи $H_d = \{x+y, xy, x/y, (-\infty,+\infty)\}$ можна описати довільну дробово-раціональну функцію.

Виникає питання, чи існують такі базисні системи функцій H**,** для яких R-функції були б H-реалізовними? Відповідь ствердна, і це дозволяє будувати у вигляді єдиного аналітичного виразу безліч функцій, які є R-функціями. Установлено [30], що множина H-реалізовних функцій (позначимо її через $\{\boldsymbol{H}\}$) має таку властивість: суперпозиція довільної скінченної системи функцій із множини $\{\boldsymbol{H}\}$ є підмножиною цієї множини. Множини функцій, які мають таку властивість, називаються **функціонально замкненими.** Інакше кажучи, **функціонально замкнена множина** – множина, яка містить у собі суперпозиції всіх своїх елементів. Прикладами функціонально замкнених множин є множина елементарних функцій і зокрема раціональних функцій.

Нехай $\{\boldsymbol{H}_0\}$ – деяка функціональна множина. Якщо множина $\{\boldsymbol{H}\}$ включає в себе множину $\{\boldsymbol{H}_0\}$, то система H називається функціонально **повною відносно множини** $\{\boldsymbol{H}_0\}$.

Так, наприклад, повною відносно множини многочленів $\{H_r\}$ довільного числа аргументів є множина дробово-раціональних функцій $\{H_d\}$ і, тим паче, множина елементарних функцій $\{H_e\}$.

У роботі [30] доведено, що, для того щоб система H базисних функцій, складена із R-функцій, була повною відносно множини R-функцій, необхідно і достатньо, щоб функціонально повною була відповідна їй система H^* булевих функцій.

Однією з повних систем булевих функцій двох змінних (назвемо її **головною**) є система

$$H^* = \{ \wedge, \vee, \neg \}, \tag{2.4}$$

де $\wedge$ – символ кон'юнкції;

$\vee$ – символ диз'юнкції;

$\neg$ – символ інверсії (її часто позначають надрядковим символом $^-$).

Відповідна їй повна система R-функцій, яку позначимо через H_α, теж складається з трьох операцій:

$$H_\alpha = \{ \wedge_\alpha, \vee_\alpha, \neg_\alpha \}, \tag{2.5}$$

де α – числовий параметр: $-1 < \alpha \le 1$;

$\wedge_\alpha$ – символ R_α-кон'юнкції: $x \wedge_\alpha y \equiv \frac{1}{2}\left(x + y - \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right)$;

$\vee_\alpha$ – символ R_α-диз'юнкції: $x \vee_\alpha y \equiv \frac{1}{2}\left(x + y + \sqrt{x^2 + y^2 - 2\alpha xy} \right)$;

$\neg_\alpha$ – символ R_α-інверсії: $\neg_\alpha x = -x$, або $\overline{x}^{\alpha} = -x$.

Системи (2.4) і (2.5) однотипні, оскільки обидві мають по дві бінарні операції і по одній – унарній. Відповідні алгебри – алгебра R-функцій $\boldsymbol{A}_R$ і булева алгебра $\boldsymbol{A}_B$ – є ізоморфними ($\cong$):

$$\boldsymbol{A}_R = (\{H\}; \vee_\alpha, \wedge_\alpha, {}^{-\alpha}) \cong \boldsymbol{A}_B = (\{H^*\}; \vee, \wedge, {}^{-}). \tag{2.6}$$

Якщо в (2.5) взяти $\alpha = 1$, то отримаємо відповідно:

$$R_1\text{-кон'юнкцію: } x \wedge_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y - |x - y|);$$

$$R_1\text{-диз'юнкцію: } x \vee_1 y \equiv \frac{1}{2}(x + y + |x - y|); \qquad (2.7)$$

$$R_1\text{-заперечення: } \overline{x}^1 = -x \text{, або просто } \overline{x} = -x.$$

Надамо першим двом формулам із (2.7) іншого вигляду, спираючись на те, сума (добуток) двох чисел x, y дорівнює сумі (добутку) меншого і більшого з них:

$$\min(x, y) + \max(x, y) = x + y, \quad \min(x, y) \cdot \max(x, y) = x \cdot y.$$

Тоді $\min(x, y)$ і $\max(x, y)$ є відповідно меншим і більшим коренями рівняння:

$$z^2 + (x + y)z + xy = 0.$$

Розв'язуючи це рівняння, знаходимо:

$$\min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|), \; \max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|). \qquad (2.8)$$

Таким чином, як окремий випадок H_α при $\alpha = 1$ система функцій

$$H_1 = \{ x \wedge_1 y = \min(x, y), \; x \vee_1 y = \max(x, y), \; \overline{x} = -x \} \qquad (2.9)$$

є повною відносно множини R-функцій.

Зв'язок R-функцій з формальною логікою став джерелом численних застосувань у різних галузях знань: аналітичній геометрії, математичному програмуванні, оптимальному розміщенні геометричних об'єктів, розпізнаванні образів, теорії стійкості, хімічній технології і особливо математичній фізиці з її численними задачами дослідження, розрахунку і оптимізації фізико-механічних полів. Велику бібліографію щодо застосувань R-функцій можна знайти в монографії засновника і творця теорії цих функцій В. Л. Рвачова [30].

2.2. Послідовнісна модель алгебри k-значної логіки ($k \geq 2$)

На основі ідей, які привели до створення теорії R-функцій, пропонується аналітичне описання деяких дискретних креслень – геометричних об'єктів, що складаються з ізольованих точок простору $\mathbf{E}^m$.

Оскільки природа елементів множини, з яких утворено послідовність, із точки зору алгебри байдужа, то є можливість застосування запропонованої моделі в дослідженнях об'єктів нечислової природи.

Для кращого розуміння побудови послідовнісної моделі алгебри багатозначної логіки спочатку розглянемо, яким чином можна прийти до моделі двозначної алгебри числових послідовностей – *булевої алгебри послідовностей* з алфавітом $B_2 = \{0, 1\}$. Перш за все наведемо нестроге, в описовому плані, ключове поняття.

Під **логічними операціями над послідовностями** будемо розуміти операції, в результаті виконання яких отримують послідовності, складені з тих чи інших елементів вихідних послідовностей.

Добре відомі арифметичні операції над послідовностями $(+, -, \times, :)$ зводяться до їх виконання над елементами заданих послідовностей – операндів, при цьому вихідні послідовності немовби "губляться".

Якщо ж ідеться про логічні операції, то вислідна послідовність ніби "вбирає" в себе певні властивості операндів.

Наприклад, на запитання, яка послідовність буде об'єднанням послідовностей непарних ($x = 2n - 1$) і парних ($y = 2n$) чисел, ґрунтуючись на суто інтуїтивних міркуваннях, можемо відразу відповісти: послідовність натуральних чисел ($z = n$).

Але як формальним шляхом отримати такий результат? У зв'язку з цим виникає проблема створення конструктивних засобів, за допомогою яких можна було б за відомими аналітичними зображеннями заданих послідовностей отримати формулу результату логічної операції над ними.

Звуження R-функцій на дискретні множини не дає, на жаль, такої можливості, адже якісні градації "додатність" і "від'ємність" розглядаються на континуальній множині, а не на дискретній, яка є сукупністю окремих точок-індивідуумів. Безумовно, на алфавіті $B_2 = \{0, 1\}$ результати булевих операцій $\wedge, \vee$ і R_α-операцій $\wedge_\alpha, \vee_\alpha$ збігаються.

Вихідними множинами у викладі п. 2.2 є дискретні числові множини, зокрема множина натуральних чисел. Основні відомості щодо отриманих результатів наведені в роботах автора [33 – 37].

Із відомих означень поняття числової послідовності приймемо таке. **Числовою послідовністю** (**ч/п**) елементів даної множини M називається визначена на множині натуральних чисел $\mathbf{N}$ функція $x = f(n)$, область значень $\operatorname{rng} f$ якої належить множині M: $\operatorname{rng} f \subseteq M$, тобто, мовою відображень, $f:\ \mathbf{N} \to M$. Упорядкована пара $x_n = (n, x)$ – **елемент**, або **член** ч/п $x = f(n)$: $x_n \in x$, де $\in$ – символ належності; $f(n)$ – **загальний член** ч/п. Множину $\operatorname{rng} f$ – підмножину M – назвемо **породною множиною** (для) ч/п $x = f(n)$.

Якщо $x = f(n) - const\ \ \forall n \in \mathbf{N}$, то ч/п називають **стаціонарною** Послідовність, породна множина якої є порожньою, називається **порожньою** і позначається через $s_{\varnothing}$ (від лат. *sequence* – послідовність).

Нехай $\nu : \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ – якась зростальна ч/п: $\nu(n+1) - \nu(n) > 0$. Композиція $y = x(\nu(n))$, або $y = x \circ \nu$ – суперпозиція двох компонент, – називається **підпослідовністю** ч/п x: $y \sqsubset x$, де $\sqsubset$ – символ включення. Відносно послідовності y ч/п $\nu = \nu(n)$ назвемо **нумератором** y в x і позначимо через ν_y. У граничних випадках: $\nu_y = n$ і $\nu_y = s_{\varnothing}$, отримуємо відповідно: $y = x$ і $y = s_{\varnothing}$.

Поряд із нумератором однією з характеристик підпослідовності y є **індикатор** μ_y – двозначний предикат, значення якого для кожного її члена визначається булевим алфавітом $B_2 = \{0, 1\}$:

$$(\mu_y)_n = \begin{cases} 1, & \text{якщо } x_n \in y \\ 0, & \text{якщо } x_n \bar{\in} y \end{cases}. \tag{2.10}$$

де $\in$ ($\bar{\in}$) – знак належності (неналежності).

Індикатори підпослідовностей довільної ч/п x є нескінченними булевими векторами, при цьому $\mu_{s_{\varnothing}} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots)$, $\mu_x = (1, 1, \ldots, 1, \ldots)$.

Із наведених означень випливає, що між підпослідовностями та їхніми нумераторами й індикаторами існує взаємно однозначна відповідність (бієкція): $y \leftrightarrow \nu_y$ $y \leftrightarrow \mu_y$.

Звичайно розглядаються підпослідовності певної фіксованої ч/п, яка називається **основною,** або **універсальною** (**універсумом**), і позначається через $s_{\circ}$. Універсум нумераторів – послідовність натуральних чисел ($\nu_{\circ}(n)=n$), індикаторів – стаціонарна ч/п ($\mu_{\circ}(n)=1$).

Приклад 2.3. Нехай універсум $s_{\circ}$, з породною множиною $\mathbf{N}$, такий:

$s_{\circ} = (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ ...,\ [(n+1)/2],\ ...\ )$, тут $[\cdot]$ – ціла частина числа.

Опишемо підпослідовність універсуму $s_{\circ}(n)$: $x = f(n) = s_{\circ}(\nu_x(n))$, елементи якої визначаються нумератором $\nu_x = (1, 4, 7, 10, ..., 3n-2, ...)$.

Розв'язання. Складаємо композицію $x = s_{\circ} \circ \nu$, для чого у вираз загального члена універсуму замість n підставляємо $\nu_x(n)$:

$$x = s_{\circ} \circ \nu = \left[\frac{\nu_x(n)+1}{2}\right] = \left[\frac{(3n-2)+1}{2}\right] = \left[\frac{3n-1}{2}\right].$$

Остаточно, з урахуванням того, що цілий доданок можна виносити за символ цілої частини, отримуємо:

$$x = f(n) = \left[\frac{2n+(n-1)}{2}\right] = n + \left[\frac{n-1}{2}\right].$$

Індикатор μ_x послідовності x має вигляд: $\mu_x = (1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 1, ...)$. •

В теоретико-числових дослідженнях часто в якості універсуму $s_{\circ}$ виступає послідовність натуральних чисел: $s_{\circ} = s_{\circ}(n) = n$, і тоді універсум нумераторів $\nu_{\circ}(n) = n$ співпадає з основною послідовністю.

Перейдемо до формалізації наведеного вище описового означення (дефініції) логічних операцій над ч/п.

Щоб відрізняти такі операції від операцій алгебри множин і алгебри логіки, для них використовуються інші символи.

Нехай x, y, z – ч/п, які належать множині підпослідовностей деякого універсуму $s_\circ$; $\nu_x = a(n)$, $\nu_y = b(n)$, $\nu_z = c(n)$ – відповідні нумератори; $rng\, a = A$, $rng\, b = B$, $rng\, c = C$ – породні множини нумераторів.

Логічною сумою (**s-об'єднанням $\sqcup$**) двох послідовностей x, y називається ч/п z, породна множина нумератора якої є об'єднанням породних множин нумераторів вихідних послідовностей:

$$z = x \sqcup y \;\rightleftharpoons\; C = A \bigcup B. \tag{2.11}$$

Логічним добутком (**s-перетином $\sqcap$**) двох послідовностей x, y називається ч/п z, породна множина нумератора якої є перетином (перерізом) породних множин нумераторів вихідних послідовностей:

$$z = x \sqcap y \;\rightleftharpoons\; C = A \bigcap B. \tag{2.12}$$

Логічною різницею (**s-різницею $\llcorner$**) двох послідовностей x, y називається ч/п z, породна множина нумератора якої є різницею породних множин нумераторів вихідних послідовностей:

$$z = x \llcorner y \;\rightleftharpoons\; C = A \setminus B. \tag{2.13}$$

Різниця $z = s_\circ \llcorner x$ називається **s-доповненням** послідовності x і позначається через $\urcorner x$:

$$z = \urcorner x \;\rightleftharpoons\; C = \mathbf{N} \setminus A = A'. \tag{2.14}$$

Формалізовані логічні операції об'єднуються загальною назвою – **s-операції.** Нумератор результату виконання будь-якої операції над даними ч/п називається **нумератором цієї s-операції:**

$$\nu_z = \nu_x \perp \nu_y \;\rightleftharpoons\; rng\,\nu_z = rng\,\nu_x \top rng\,\nu_y, \tag{2.15}$$

де $\perp$ ($\top$) – один із символів $\sqcup$, $\sqcap$, $\llcorner$ ($\bigcup, \bigcap, \setminus$) відповідно.

Нехай $M(s)$ – множина ч/п, яка є замкненою щодо композицій, $M(\nu)$ – множина нумераторів ч/п, а $M(rng\,\nu)$ – відповідна сукупність породних множин нумераторів, $M(\mu)$ – множина індикаторів ч/п із $M(s)$.

Теорема 2.1. Множина $M(s)$ з визначеними на ній s-операціями є булевою алгеброю:

$$A_s = (M(s);\ \sqcup,\ \sqcap,\ \urcorner). \tag{2.16}$$

Доведення. Кожній послідовності із множини $M(s)$, замкненій відносно композицій, відповідає породна множина нумератора. Згідно з означеннями (2.11) – (2.14) логічних операцій над ч/п і бієкцій (2.15) алгебра A_s і алгебра породних множин нумераторів:

$$A_{rng\,\nu} = (M(rng\,\nu);\ \cup, \cap, '), \tag{2.17}$$

ізоморфні, і це означає, що алгебра A_s – булева алгебра.•

Алгебра A_s називається **булевою алгеброю послідовностей**, або коротко – s**-алгеброю.**

Множина $M(\mu)$ із системою операцій: диз'юнкція ($\vee$); кон'юнкція ($\wedge$); інверсія, або заперечення ($\neg$, або надрядковий символ $^{-}$), визначають алгебру двозначної логіки – булеву алгебру:

$$A_\mu = (M(\mu); \vee, \wedge, ^{-}), \tag{2.18}$$

при цьому μ_x, μ_y, μ_z пов'язані еквіваленцією:

$$\mu_z = \mu_x \perp \mu_y \ \Leftrightarrow\ (\mu_z)_n = (\mu_x)_n \perp (\mu_y)_n,\ \ n = 1, 2, \ldots\ . \tag{2.19}$$

Під символом $\perp$ слід розуміти одну з операцій $\vee$, $\wedge$, $\overline{\rightarrow}$; інверсія розглядається як окремий випадок заперечення імплікації:

$$\bar{\mu}_n = \overline{1 \to \mu_n} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \mu_n = 0 \\ 0, \text{ якщо } \mu_n = 1 \end{cases}.$$

Завдяки бієкції між множинами $M(s)$, $M(\nu)$, $M(rng\,\nu)$, $M(\mu)$ і однотипності операцій робимо висновок про ізоморфність відповідних алгебр:

$$A_s \cong A_\nu \cong A_{rng\,\nu} \cong A_\mu, \tag{2.20}$$

де A_ν – алгебра нумераторів: $A_\nu = (M(\nu);\ \sqcup,\ \sqcap,\ \urcorner\ )$, з такими ж головними операціями, що і A_s.

З урахуванням ланцюжка ізоморфізмів (2.20) s-операції можна означити через операції над індикаторами: $\vee$, $\wedge$, $^-$, і покласти в основу означення s-алгебри співвідношення:

$$A_s = (M(s);\ \sqcup, \sqcap, \urcorner) \rightleftharpoons A_\mu = (M(\mu); \vee, \wedge, ^-). \tag{2.21}$$

Саме такий підхід використано в дефініції k-значної $(k > 2)$ s-алгебри – s-відображення.

Тепер постає питання, чи для всіх нескінченних послідовностей $x = x(n)$ – підпослідовностей універсуму: $x \sqsubset s_\circ$, описані в (2.11) – (2.14) s-операції будуть виконуватись? Відповідь не ствердна. Дійсно, із означення нумератора ч/п (не порожнього) випливає, що його породна множина злічення, і результатом об'єднання скінченного числа злічених множин завжди є злічення множина. Проте перетин і різниця злічених множин може бути і скінченною множиною. Отже, s-операції $\sqcap$, $\llcorner$ визначені не завжди. Зокрема, s-доповнення $\urcorner$ невизначене для послідовностей $x \sqsubset s_\circ$ з нумераторами $\nu_x = n + c$, $0 < c - const$, у яких область значень $rng\,\nu_x$ є усіченням основної множини.

Надалі розгляду підлягають послідовності, теоретико-множинні операції над породними множинами яких дають злічену або порожню множину.

Запропонована алгебраїзація послідовностей дає можливість "автоматичного" перенесення певних результатів досліджень з однієї алгебри в іншу. Йдучи шляхом узагальнення поняття послідовності, приходимо до відповідних узагальнень s-алгебри – алгебра подвійних послідовностей (s_k-алгебра, $k > 2$) і алгебра спрямованостей, які є узагальненням поняття послідовності на випадок довільних топологічних просторів [16] (s_d -алгебра). Можна розглядати модифікації s-алгебри на множинах різних числових і функціональних послідовностей: алгебри рядів і нескінченних добутків, і тоді додатково постають питання збіжності.

Виберемо в якості основної множину натуральних чисел $\mathbf{N}$, якій відповідає універсум $s_\circ = n$. На множині $\mathbf{N}$ можна розглядати різні якісні градації. *Наприклад*, такі: П – "число просте"; С – "число складене"; К – "числа кратні числам 2 або 3", Н – "числа не кратні ні числу 2, ні числу 3"; М – "числа не перевищують $a \in \mathbf{N}$", Б – "числа більші від a". Покриття множини $\mathbf{N}$ підмножинами: $\mathbf{N}(0) =$«числа кратні трьом», $\mathbf{N}(1) =$«числа при діленні на три дають остачу 1», $\mathbf{N}(2) =$«числа при діленні на три дають остачу 2», потребує використання алгебри тризначної логіки з алфавітом $B_3 = \{0, 1, 2\}$. При цьому, природно, ускладнюється задача побудови конструктивних засобів для аналітичного опису логічних операцій над послідовностями.

Загалом задача аналітичного опису s-операцій досить складна. Ускладнення пояснюються тим, що різні якісні градації основної множини вимагають побудови різних базисних систем операцій.

Перейдемо до узагальнення розглянутої моделі s-алгебри на випадки, коли кількість якісних градацій перевищує дві ($k > 2$) [40], для чого згадаємо дефініції деяких понять.

Прямим добутком множин X, Y називається множина, яка позначається через $X \times Y$, що складається з упорядкованих пар, перша компонента яких належить множині X, а друга – множині Y [50]:

$$X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X, y \in Y\}.$$

Операція прямого добутку легко поширюється і на більшу кількість множин. *Наприклад,* у випадку трьох множин X, Y, Z елементами прямого добутку є трійки:

$$X \times Y \times Z = \{(x, y, z) | x \in X, y \in Y, z \in Z\}.$$

Окремим випадком операції прямого добутку є поняття *степенів* множини. Нехай M – довільна множина. Прямий добуток m однакових множин, рівних M, називається **m-м степенем множини** M:

$$M^m = \underbrace{M \times M \times ... \times M}_{m \text{ разів}}.$$

Орієнтований граф, у вершинах якого знаходяться досліджувані об'єкти, а дугами є види відображень (їх названо морфізмами), причому результат композиції дуг не залежить від обраного шляху, називається **комутативною діаграмою.** (Морфізм (від грец. *morphe* – форма) – друга складова частина складних слів, що означає: належить до форми, виду; наприклад, ізоморфізм (від грец. *isos* – рівний, однаковий) – однаковий за формою.)

Нехай, як і в разі коли $k = 2$,

$M(s)$ – множина послідовностей, замкнена щодо композиції, а $M^m(s) = M(s) \times M(s) \times ... \times M(s)$ – її m-й степінь;

$B_k = \{0, 1, 2, ..., k-1\}$– алфавіт k-значної логіки, а B_k^m – його m-й степінь;

$f^m = (f_1, f_2, ..., f_m)$ – m-кортеж послідовностей із $M^m(s)$;

$\mu_n(f_i)$, $i = \overline{1, m}$, – індикатори, які для кожного n набувають значень із множини B_k.

Введемо в розгляд відображення:

1) $f : M^m(s) \to M(s)$, яке кожній m-ці ч/п із множини $M^m(s)$ ставить у відповідність ч/п $f(n)$ із $M(s)$;

2) $F : B_k^m \to B_k$ – певна функція k-значної логіки m змінних;

3) $\mu_n: M(s) \to B_k$, яке послідовності $f(n)$ ставить у відповідність її індикатор;

4) $\mu_n^m: M^m(s) \to B_k^m$, яке кожній m-ці послідовностей із множини $M^m(s)$ ставить у відповідність m-кортежі з елементів m-го степеня алфавіту B_k.

Відображення $f: M^m(s) \to M(s)$ називається ***S*-відображенням** кортежу послідовностей, якщо $\forall n \in \mathbf{N}$ воно разом з якоюсь функцією F утворює комутативну діаграму (рис. 2.1).

$$\begin{tikzcd}
\boldsymbol{M^m(s)} \arrow[r, "\boldsymbol{f}"] \arrow[d, "\boldsymbol{\mu_n^m}"'] & \boldsymbol{M(s)} \arrow[d, "\boldsymbol{\mu_n}"] \\
\boldsymbol{B_k^m} \arrow[r, "\boldsymbol{F}"'] & \boldsymbol{B_k}
\end{tikzcd}$$

Рис. 2.1. **Комутативна діаграма**

Інакше кажучи, справджується рівність композицій:

$$\mu_n \circ f = F \circ \mu_n^m. \qquad (2.22)$$

Це означає: якщо відображення f є S-відображенням, то індикатор результівної послідовності дорівнює послідовності значень функції F, заданої на наборах однойменних (за номером) елементів індикаторів початкових послідовностей:

$$\mu_n \circ f = (\mu_1(f),\ \mu_2(f),...) = (F(\mu_1^m(f)), F(\mu_2^m(f)),...) = F \circ \mu_n^m. \qquad (2.23)$$

(На рис. 2.1 усі символи напівжирні для виразності.)

Для кращого розуміння властивості комутативності діаграми розглянемо найпростіший випадок: $k = m = 2$, коли кортеж f^m складений із двох послідовностей: $f^2 = (f_1,\ f_2) \in M^2(s)$, і задіяна двозначна логіка.

Приклад 2.4. Дано двоелементний кортеж: $(f_1,\ f_2) = (2n-1, 3n-2)$, і складові його образу (табл. 2.3) – результати дії відповідних операцій-відображень, – які отримані рухом від вершини $M^2(s)$ до вершини B_2 (див. рис. 2.1) за годинниковою стрілкою і проти її ходу.

Необхідно установити, чи буде таке відображення S-відображенням заданого кортежу послідовностей.

Розв'язання. Нехай відображення $M^2(s) \xrightarrow{f} M(s)$ визначило ч/п $f(n) \in M(s)$. Композиція $\mu_n \circ f$ для нього наведена в другому рядку.

Таблиця 2.3

Складові результату дії комутативної діаграми

n	1	2	3	4	5	6	7	8…
$\mu_n \circ f$	1	0	1^*	1	1	0	1	0…
$\mu_n(f_1)$	1	0	$\underline{1}$	0	$\underline{1}$	0	1	0…
$\mu_n(f_2)$	1	0	$\underline{0}$	**1**	$\underline{0}$	0	1	0…
$F \circ \mu_n^2$	1	0	1	1	1	0	1	0…

З іншого боку, якщо $\mu_n(f_1)$ і $\mu_n(f_2)$ (див. табл. 2.3) – індикатори елементів заданого кортежу, то $\mu_n^2 = (\mu_n(f_1), \mu_n(f_2))$. Кожній такій парі третього і четвертого рядків за двозначною алгеброю логіки відповідає п'ятий рядок, і він збігається з другим рядком, рядком для $\mu_n \circ f$.

Отже, супровідною для відображення f є булева функція двох змінних $F = F(X_1, X_2)$, де X_1, X_2 для кожного n набувають відповідно значень індикаторів $\mu_n(f_1)$, $\mu_n(f_2)$, при цьому якщо хоча б один із операндів не нуль, вона набуває значення, що дорівнює одиниці.

Отже, булева функція F двох змінних є диз'юнкцією:

$$F = X_1 \vee X_2 \;\Leftrightarrow\; f(n) = f_1(n) \sqcup f_2(n),$$

а це означає, що задане відображення є S-відображенням.

Припустимо, що відображення f визначило ч/п, індикатор якої за $n = 3$ має значення, що дорівнює не одиниці (позначено 1^*), а нулю.

Тоді не знайшлося б функції F, яка забезпечила б комутативність діаграми, оскільки двом однаковим парам $(1,0)$ в третьому і п'ятому стовпцях таблиці 2.3, з підкресленими елементами, відповідали б різні елементи другого рядка. Це означало б, що f не є логічною операцією над ч/п.:

$$f_1 = f_1(n) = 2n - 1, \quad f_2 = f_2(n) = 3n - 2. \bullet$$

Функція k-значної логіки m змінних $F: B_k^m \to B_k$, яка відповідає S-відображенню в сенсі забезпечення комутативності діаграми, називається **супровідною** для f.

На основі функціональної замкненості множини $M(F)$ усіх функцій k-значної логіки і комутативності діаграми отримуємо справедливість таких тверджень.

Теорема 2.1. Множина всіх логічних операцій $M(f)$ є замкненою щодо композиції.

Теорема 2.2. Система відображень $H_f \subset M(f)$ є повною відносно множини $M(f)$, якщо, і тільки якщо повною є відповідна система супровідних функцій $H_F \subset M(F)$.

Доведення сформульованих теорем достеменно повторюють аналогічні теореми, доведені для R-функцій [30], із заміною термінів відповідно до вихідної (дискретної) множини натуральних чисел.

Відображення f, супровідними функціями для яких є функції деякої повної системи H_F, називаються **головними операціями** S-відображення. Множина $M(s)$ із системою визначених на ній головних операцій називається **послідовнісною моделлю алгебри багатозначної логіки:**

$$A_s = (\, M(s);\ H_f \,). \tag{2.24}$$

Поряд з алгеброю A_s доцільно розглядати однотипну з нею алгебру індикаторів:

$$A_\mu = (\, M(\mu);\ H_F \,). \tag{2.25}$$

Для системи головних операцій над індикаторами не введено спеціальне позначення, оскільки згідно з діаграмою (рис. 2.1) вони зводяться до операцій системи H_F над однойменними (за номером) елементами вихідних послідовностей.

Ізоморфність алгебр A_s, і A_μ, що випливає з їх однотипності і наявності бієкції $M(s) \leftrightarrow M(\mu)$, дозволяє навести алгоритм отримання результату відображення $f : M^m(s) \to M(s)$, а саме [38]:

формулюється запит на оброблення заданого кортежу послідовностей (за допомогою операцій системи H_f);

знаходяться індикатори членів кортежу f^m (зі значеннями із B_k);

здійснюється переклад запиту на мову алгебри A_μ (2.25) для знаходження вислідного індикатора (за допомогою операцій із H_f);

будується вислідна послідовність (за вислідним індикатором).

Реалізація наведених кроків простежується в процесі розв'язання прикладу 2.4.

Вправи і задачі

1. В умовах прикладу 2.2 знайдіть досконалу кон'юнктивну нормальну форму функції U і мінімізуйте її.

2. Чому система базисних функцій з операціями додавання і віднімання: $H_r = \{x + y, xy, (-\infty, +\infty)\}$, не є повною відносно множини R-функцій?

3. Переконайтеся, що функція двох змінних

$$z = f(x, y) = (xy)^2 + x^2 + (x - xy)\sqrt{x^2 y^2 + x^2}$$

є R-функцією, а супроводжує її диз'юнкція: $Z = X \vee Y$.

4. Доведіть, що функція

$$z = f(x, y) = x^2 + y^2 + (y - x)\sqrt{x^2 + y^2} \;-$$

R-функція, якій відповідає імплікація: $Z = X \to Y$.

Вказівка: здійсніть перехід до полярних координат.

Розділ 3. Узагальнені арифметичні прогресії

О, Диво, ця функція Антьє!
Н. П. Шивдук

3.1. Функція Антьє та деякі її властивості

Нехай $i, k, n, m, t \in \mathbf{N}$; $c \in \mathbf{Z}$; $x, y, z \in \mathbf{R}$, $z \neq 0$. **Функцією Антьє – цілою частиною дійсного числа** x – називається функція, яка позначається через $[x]$, або $E(x)$, і визначається подвійною нерівністю: $x-1<[x]\leq x$, або $[x]\leq x<[x]+1$. Читається: "ціла частина" або "Антьє".

Наведемо найпростіші властивості $E(x)$ [27]:

1⁰. $[x+c]=[x]+c$.

2⁰. $\left[\frac{[x]}{n}\right]=\left[\frac{x}{n}\right]$, звідки $\left[\frac{[nx]}{n}\right]=[x]$.

3⁰. $[x]+\left[x+\frac{1}{t}\right]+\left[x+\frac{2}{t}\right]+\ldots+\left[x+\frac{t-1}{t}\right]=[tx]$ – тотожність Ерміта.

Теорема 3.1 (*узагальнення **3⁰***). Справедлива тотожність:

$$\sum_{i=1}^{t}\left[\frac{c+t-i}{t}\right]=c. \tag{3.1}$$

Доведення. Розглянемо спочатку випадок, коли $c=n\in\mathbf{N}$. Для довільного фіксованого t проведемо індукцію за n. Для $n=1$ маємо:

$$\left[\frac{1+t-1}{t}\right]+\left[\frac{1+t-2}{t}\right]+\ldots+\left[\frac{1}{t}\right]=1,$$

оскільки всі доданки, крім першого, дорівнюють нулеві.

Припустимо справедливість (3.1) для $n=k$, тоді для $n=k+1$ маємо:

$$\left[\frac{k+t}{t}\right]+\left[\frac{k+t-1}{t}\right]+\ldots+\left[\frac{k+1}{t}\right]+\left(\left[\frac{k}{t}\right]-\left[\frac{k}{t}\right]\right)=k+\left[\frac{k+t}{t}\right]-\left[\frac{k}{t}\right]=k+1.$$

Якщо $c<0$, то беремо $c=-n$ і наводимо ті ж самі міркування.
Якщо $c=0$, то всі доданки у лівій частині (3.1) дорівнюють нулеві.

Наслідки:

1) змінюючи в (3.1) порядок доданків на зворотний, отримуємо:

$$\sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{c+i}{t}\right]=\sum_{i=1}^{t}\left[\frac{c+i-1}{t}\right]=c\,; \tag{3.2}$$

2) за властивістю **1⁰** із (3.1):

$$\sum_{i=1}^{t}\left[(c-i)/t\right]=c-t\,; \tag{3.3}$$

3) підсумовуючи в (3.3) від одиниці до kt, маємо:

$$\sum_{i=1}^{kt}\left[\frac{c-i}{t}\right]=k(c-t(k+1)/2)\,; \tag{3.4}$$

4) заміною в (3.2) c на n отримуємо:

$$\sum_{i=1}^{t}\left[\frac{n+i-1}{t}\right]=n\,; \tag{3.5}$$

5) якщо в (3.2) взяти $c=[tx]$, то з урахуванням **1^0, 2^0** як наслідок із (3.1) отримаємо тотожність Ерміта **3^0**:

$$\sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{c+i}{t}\right]=\sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{[tx]+i}{t}\right]=\sum_{i=0}^{t-1}\left[x+\frac{i}{t}\right]=[tx]; \tag{3.6}$$

6) якщо в (3.1) взяти $c=[(x+y)/z]$, то з урахуванням **1^0, 2^0**

$$\left[\frac{x+y}{z}\right]=\sum_{i=1}^{t}\left[\frac{x+y+z(t-i)}{tz}\right]; \tag{3.7}$$

(Формула (3.7), отримана іншим шляхом, виявлена в роботі [14].)

7) якщо в (3.2) взяти $c=[(x+y)/z]$, то

$$\left[\frac{x+y}{z}\right]=\sum_{i=0}^{t-1}\left[\frac{x+y+zi}{tz}\right]=\sum_{i=1}^{t}\left[\frac{x+y+z(i-1)}{tz}\right]; \tag{3.8}$$

8) із (3.7), розкриваючи круглі дужки, маємо:

$$\left[\frac{x+y}{z}\right]=\sum_{i=1}^{t}\left[\frac{x+y+zt-zi}{tz}\right]=\sum_{i=1}^{t}\left[\frac{x+y-zi}{tz}\right]+t\,.\bullet \tag{3.9}$$

Властивості **1^0 – 3^0** і співвідношення (3.1) – (3.9) використовуються надалі в розробленні конструктивних засобів для аналітичного опису дискретних множин.

3.2. Базисні індикатори та нумератори числових послідовностей

Нагадаємо (див. п. 2.2): важливими характеристиками ч/п $x=x(n)$ як підпослідовності універсуму $s_\circ=s_\circ(n)$ є індикатор (див. (2.10)) – нескінченний булевий вектор, координати якого, нулі й одиниці, визначаються двозначним предикатом, і нумератор як послідовність номерів елементів універсуму, що визначає ч/п $x=x(n)$. В аналітичному вигляді деякі індикатори й нумератори описуються мовою Антьє.

Нехай i,n – натуральні змінні, $T\in\mathbf{N}$ – фіксоване.

Нескінченні булеві вектори (позначимо їх через $e_i(n)$), які описуються співвідношеннями:

$$e_i(n)=\left[\frac{n-i}{T}\right]-\left[\frac{n-(i+1)}{T}\right],\ i=\overline{1,T}\,, \tag{3.10}$$

називаються **базисними індикаторами** ч/п, а вся їх сукупність – **T_e-базисом** індикаторів: $\{e_i(n)\}$, $i=\overline{1,T}$.

Теорема 3.2 (*про базисні індикатори*). Базисні індикатори $e_i(n)$ мають властивості:

1) $e_i(n)$ – періодичні послідовності з періодом T:

$$e_i(n+T)=e_i(n),\ i=\overline{1,T};$$

2) координатами індикаторів є нулі й одиниці:

$$\forall m\in\mathbf{N}:\ e_i(n)=\begin{cases}1, & n=i+(m-1)T\\ 0, & n\neq i+(m-1)T\end{cases};$$

3) сума всіх, у кількості T, індикаторів є стаціонарною ч/п:

$$\sum_{i=1}^{T}e_i(n)=(1,1,1,\ldots,1,\ldots)=\mu_{\circ}(n).$$

Доведення зводиться до використання властивостей Антьє.

1. $$e_i(n+T)=\left[\frac{n+T-i}{T}\right]-\left[\frac{n+T-(i+1)}{T}\right]=\left[\frac{n-i}{T}+1\right]-\left[\frac{n-(i+1)}{T}+1\right].$$

За властивістю $\mathbf{1^0}$ одиниці виносяться за знак Антьє і взаємно знищуються. Отже, базисні індикатори – періодичні послідовності.

2. Беремо $n=i+(m-1)T$, тоді

$$e_i(n)=[m-1]-\left[m-1+\frac{-1}{T}\right]=-\left[\frac{-1}{T}\right]=1.$$

У випадку $n\neq i+(m-1)T$ здійснюємо перехід до рівності:

$$n\neq i+(m-1)T\ \Rightarrow\ i+(m-1)T<n<i+mT\ \Rightarrow\ i+(m-1)T+a;$$

$$0<a<T,\ a\in\mathbf{N}.$$

Таким чином,

$$e_i(n)=\left[(m-1)+\frac{a}{T}\right]-\left[(m-1)+\frac{a-1}{T}\right]=0,$$

адже якщо $T>1$: $\left[\frac{a}{T}\right]-\left[\frac{a-1}{T}\right]=0\ \forall a=1,2,\ldots,T-1.$

3. Після підсумовування $e_i(n)$ за індексом i в алгебраїчній сумі доданки через один, починаючи з другого, взаємно знищуються, залишаються лише перший і останній, сума яких для всіх натуральних n тотожно дорівнює одиниці:

$$\sum_{i=1}^{T} e_i(n)=\left[\frac{n-1}{T}\right]-\left[\frac{n-(T+1)}{T}\right]=\left[\frac{n-1}{T}\right]-\left[\frac{n-1}{T}+(-1)\right]=1\ \ \forall n\in\mathbf{N}.$$

Це означає, що сума базисних індикаторів визначає універсум $s_\circ=s_\circ(n)$ і є універсумом самих індикаторів: $\mu_\circ(n)=(1,1,1,\ldots,1,\ldots)$.

Наслідки з третьої властивості:

1) сума добутків номерів (індексів) індикаторів із самими індикаторами дає періодичну послідовність:

$$\sum_{i=1}^{T} i e_i(n)=n-T\left[\frac{n-1}{T}\right]; \qquad (3.11)$$

2) будь-яка періодична ч/п з періодом T подається як лінійна комбінація базисних індикаторів:

$$a(n+T)=a(n)=a_1e_1(n)+a_2e_2(n)+\ldots+a_Te_T(n). \qquad (3.12)$$

Відзначимо, що арифметична і логічна почленні суми, арифметичний і логічний почленні добутки базисних індикаторів збігаються; для всіх логічних операцій над x, y із $B_2=\{0,1\}$ справедливі формули [4]:

$$x\vee y=x+y-xy,\ x\wedge y=xy,\ \bar{x}=1-x. \qquad (3.13)$$

Зауваження. Якщо в правій частині (3.10) додати і відняти одиницю, то базисні індикатори набувають вигляду:

$$e_i(n)=\left[\frac{n+T-i}{T}\right]-\left[\frac{n+T-(i+1)}{T}\right],\ i=\overline{1,T}\,, \qquad (3.14)$$

що дає можливість оперувати під знаком Антьє невід'ємними числами. Щоб підкреслити наявність параметра T, замість $e_i(n)$ пишуть $e_i(n,T)$.•

Пов'яжемо з базисними індикаторами квадратну матрицю T-го порядку:

$$E_T=\begin{bmatrix} e_1(1) & e_1(2)\ldots e_1(j)\ldots e_1(T) \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ e_i(1) & e_i(2)\ldots e_i(j)\ldots e_i(T) \\ \multicolumn{2}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ e_T(1) & e_T(2)\ldots e_T(j)\ldots e_T(T) \end{bmatrix}. \qquad (3.15)$$

Звичайно, $e_i(n,T)$ – нескінченновимірні вектори, але судити про їх координати можна за одним періодом, оскільки $e_i(n+T)=e_i(n)$, $i=\overline{1,T}$.

Приклад 3.1. Нехай $e_i(n,T)$ – базисні індикатори з періодом $T=4$.

Треба: а) побудувати матрицю E_4; б) знайти матриці логічної суми, логічного добутку, логічного доповнення нумераторів.

Розв'язання: а) згідно з означенням (3.10) маємо одиничну матрицю четвертого порядку:

$$E_4=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix};$$

б) переконуємося в тому, що арифметична й логічна сума збігаються (беруться суми елементів стовпців):

$$\forall j \in [1,T]:\ \sum_{i=1}^{T} e_i(j) = \bigvee_{i=1}^{T} e_i(j) = [\,1\,1\,1\,1\,];$$

переконуємося в тому, що арифметичний і логічний добутки збігаються (беруться добутки елементів стовпців):

$$\forall j \in [1,T]:\ e_1(j)\cdot e_2(j)\cdot \ldots \cdot e_T(j) = \bigwedge_{i=1}^{T} e_i(j) = [\,0\,0\,0\,0\,];$$

за формулою $\bar{x} = 1 - x$ (див. (3.13)) для кожного i з проміжку $[1,T]$ $\bar{e}_i(j) = 1 - e_i(j)$, $j = 1,\ 2,\ ...,\ T$, і тоді:

$$\overline{E}_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.\bullet$$

Арифметичні прогресії, загальні члени яких $\nu_i(n)$ описуються співвідношеннями:

$$\nu_i(n) = i + T(n-1),\ i = \overline{1,T}, \tag{3.16}$$

називаються **базисними нумераторами** ч/п, а вся їх сукупність – T_ν**-базисом** нумераторів: $\{\nu_i(n)\}$, $i = \overline{1,T}$.

Теорема 3.3 (*про базисні нумератори*). Базисні нумератори $\nu_i(n)$ мають властивості:

1) їхні породні множини не мають спільних елементів:

$$rng\,\nu_i(n) \cap rng\,\nu_j(n) = \varnothing\ \forall i \neq j;$$

2) логічна сума базисних нумераторів складає їхній універсум:

$$\bigsqcup_{i=1}^{T} \nu_i(n) = s_\circ(n) = n;$$

3) скінченні різниці нумераторів утворюють стаціонарну ч/п:

$$d_i(n)=\nu_i(n+1)-\nu_i(n)=(T,T,T,...,T,...).$$

Доведення зводиться до безпосередньої перевірки справедливості відповідних співвідношень.

1. Виписуємо для наочності породні множини й аналізуємо їх:

$$\left.\begin{array}{r} rng\,\nu_i(n)=\{i,i+T,\ i+2T,...,\ i+(n-1)T,...\} \\ rng\,\nu_j(n)=\{\ j,\ j+T,\ j+2T,...,\ j+(n-1)T,...\} \end{array}\right] \Rightarrow \ \left|\, i\neq j \,\right| \ \Rightarrow \ 1).$$

2. З огляду на бієкцію між нумераторами й індикаторами (див. (2.10)) для кожного $n=i=\overline{1,T}$ універсуму $s_\circ(n)=n$ індикатор $\mu_i(n)$ набуває значень, що дорівнюють одиниці, як і для будь-якого $n=i+(m-1)T$, $\forall m\in\mathbf{N}$, завдяки періодичності базисного індикатора.

3. Дійсно:

$$d_i(n)=\nu_i(n+1)-\nu_i(n)=i+Tn-i-T(n-1)=T \quad \forall n\in\mathbf{N}.$$

Наслідок: $\frac{1}{T}d_i(n)=\mu_\circ(n)=(1,1,...,1,...)$ – універсум індикаторів. •

3.3. Означення узагальнених арифметичних прогресій, їхні арифметичні властивості

Послідовність чисел називається **узагальненою арифметичною прогресією** (**у. а. п.**), якщо вона задовольняє функціональне рівняння [34]:

$$f(n+T)-f(n)=D, \tag{3.17}$$

де $n\in\mathbf{N}$, $rng\,f\subset\mathbf{N}$, $f(n+1)-f(n)>0$; $1\le T\in\mathbf{N}$, $T,D-const$.

Рівняння (3.17) є звуженням функціонального рівняння

$$f(x+T)-f(x)=D;\ \ x,T,D\in\mathbf{R}, \tag{3.18}$$

на множині натуральних чисел. Розв'язком (3.18) є сума періодичної і лінійної функцій [25]:

$$f(x)=a(x)+r(x-1), \tag{3.19}$$

де $a(x+T)=a(x)$, $r-const$.

На множині $\mathbf{N}$

$$f(n)=a(n)+D\cdot[(n-1)/T], \tag{3.20}$$

де $[\cdot]$ – ціла частина числа (Антьє), $a(n+T)=a(n)$.

Позначається у. а. п. трійкою $(f(n),T,D)$, число T називається **періодом ч/п,** а D **– різницею ч/п.**

Якщо $T=1$, отримуємо арифметичну прогресію, якщо $D=0$ – періодичну послідовність, а якщо $T=1$, $D=0$, то приходимо до стаціонарної послідовності.

Вивчалися найпростіші, за виглядом породних множин, у. а. п.: $f(n):\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, тобто перетворення множини натуральних чисел; такі послідовності названі **натуральними.**

У. а. п. цілком визначається заданням перших T членів і різниці D.

Приклад 3.2. Дано: $T=2$, $D=3$; $a_1=f_1=1$, $a_2=f_2=2$. Подайте $f(n)$ згідно з (3.17), (3.20) і для $n=\overline{1,8}$ наведіть таблицю значень складових $f(n)$ і самої послідовності.

Розв'язання. В умовах прикладу рівняння (3.17) виглядає так: $f(n+2)-f(n)=3$, а згідно з (3.20) $f(n)=a(n)+3\cdot[(n-1)/2]$.

Підраховуємо для заданих n значення складових та самої $f(n)$ (табл. 3.1).

Таблиця 3.1

Складові послідовності $f(n)$ та їх сума

n	1	2	3	4	5	6	7	8...
$a(n)$	1	2	1	2	1	2	1	2...
$3[(n-1)/2]$	0	0	3	3	6	6	9	9...
$f(n)$	1	2	4	5	7	8	10	11...

.

Візуальний аналіз табл. 3.1 показує, що скінченні різниці ч/п $d_n = f(n+1) - f(n)$ співпадають з елементами $a(n)$.•

Теорема 3.4 (*про* T*-розклад*). Композиції у. а. п. $f(n)$ і базисних нумераторів $\nu_i(n)$, $i=\overline{1,T}$ (3.16) є арифметичними прогресіями з першим членом $a(i)$ і різницею D.

Доведення. Позначимо композицію послідовності $(f(n), T, D)$ з нумератором $\nu_i(n) = i + T(n-1)$ через $f^i(n)$.

Залучимо $f(n)$ у вигляді (3.20), тоді:

$$f^i(n) = (f \circ \nu_i)(n) = a(i + T(n-1)) + D \cdot \left\lceil \frac{i + T(n-1) - 1}{T} \right\rceil.$$

Завдяки періодичності ч/п $a(n)$ і властивості **1⁰** Антьє маємо:

$$f^i(n) = a(i) + D \cdot (n-1) \quad \Leftrightarrow \quad (f^i(n), 1, D), \ i = \overline{1,T}. \tag{3.21}$$

Кортеж арифметичних прогресій (3.21) назвемо ***T*-розкладом,** або ***T*-розбиттям,** у. а. п. $f(n)$.

Наслідок. Логічна сума елементів T-розкладу є вихідною у. а. п.:

$$f(n) = \bigsqcup_{i=1}^{T} f^i = \bigsqcup_{i=1}^{T} (f_i + D(n-1)).\bullet \tag{3.22}$$

Приклад 3.3. В умовах прикладу 3.2: $T=2$, $D=3$; $a_1 = f_1 = 1$, $a_2 = f_2 = 2$, знайдіть T-розклад відповідної $f(n)$ і його логічну суму.

Розв'язання. Згідно з (3.21) отримуємо:

$$f^1(n) = a_1 + D(n-1) = 3n - 2, \ f^2(n) = a_2 + D(n-1) = 3n - 1,$$

відповідний T-розклад заданої у. а. п. такий: ($f^1(n)$, $f^2(n)$).

У світлі (3.22) $f(n)$ є логічною сумою – s-об'єднанням – двох арифметичних прогресій: $f^1(n)=3n-2$, $f^2(n)=3n-1$.

Логічна сума елементів T-розкладу має вигляд:

$$f(n)=f^1(n)\sqcup f^2(n)=n-1+[(n+1)/2]=\begin{bmatrix} f^1, \text{ якщо } n-\text{непарне} \\ f^2, \text{ якщо } n-\text{парне} \end{bmatrix}. \quad (3.23)$$

Арифметичні прогресії – зворотні ч/п [23], тому формула (3.23) рівносильна завданню двох зворотних рівнянь:

$$f^1_{n+2}=2f^1_{n+1}-f^1_n;\quad f^2_{n+2}=2f^2_{n+1}-f^2_n.\bullet \quad (3.24)$$

Результати аналізу прикладу 3.3 узагальнюються на довільну у. а. п. Якщо f_1, f_2, ..., f_T – перші T членів у. а. п. $f(n)$, то вся ч/п є s-об'єднанням T арифметичних прогресій із першими членами, що дорівнюють f_i, $i=\overline{1,T}$, і різницями D (див. (3.23)).

Кожній арифметичній прогресії відповідає зворотне рівняння другого порядку:

$$f^i_{n+2}=2f^i_{n+1}-f^i_n,\ i=\overline{1,T}, \quad (3.25)$$

де $f^i(n)$ – арифметична прогресія з першим членом f_i.

Висновок: будь-яка у. а. п. описується кортежем T рівнянь (3.25).

Зауваження:

1) універсум $s_\circ(n)=n$ – арифметична прогресія, у якої перший член і різниця дорівнюють одиниці – можна розглядати як у. а. п., що задовольняє функціональне рівняння $f(n+T)-f(n)=T$ із довільним натуральним T, більшим від одиниці; наприклад:

$$T=D=5\ \Rightarrow\ s_\circ(n)=n=\bigsqcup_{i=1}^{5}(f_i+5(n-1)),$$

де $f_i=1, 2, 3, 4, 5$ – перші п'ять чисел натурального ряду;

2) якщо T період у. а. п., то й число mT, $m\in\mathbf{N}$, є її періодом, а відповідна різниця дорівнює mD:

$$f(n+mT)-f(n)=mD. \tag{3.26}$$

Перехід від у. а. п. з періодом T і різницею D до ч/п з періодом mT і різницею mD називається ***m*-розширенням** вихідної послідовності.

Зауваження. m-Розширення у. а. п. тягне за собою m-розширення відповідних T_e-базисів індикаторів (3.10) і T_ν-базисів нумераторів (3.16).

$$\begin{gathered} e_i(n,T)=\left[\frac{n-i}{T}\right]-\left[\frac{n-(i+1)}{T}\right],\ i=\overline{1,T}\,,\quad\Rightarrow \\ \Rightarrow\quad e_j(n,mT)=\left[\frac{n-j}{mT}\right]-\left[\frac{n-(j+1)}{mT}\right],\ j=\overline{1,mT}\,; \end{gathered} \tag{3.27}$$

$$\nu_i(n)=i+T(n-1),\ i=\overline{1,T}\,,\quad\Rightarrow\quad \nu_j(n)=j+mT(n-1),\ j=\overline{1,mT}\,. \tag{3.28}$$

Теорема 3.5 (*про замкненість у. а. п.*). Множина всіх у. а. п. замкнена відносно операцій додавання ($+$) та множення на скаляр (·).

Доведення. Нехай задані дві послідовності: $(f_i(n),T_i,D_i)$, $i=1,2$, а $f(n)=f_1(n)+f_2(n)$ – їх сума. Покажемо, що існують такі числа T і D, що $f(n+T)-f(n)=D$. Знайдемо найменше спільне кратне періодів: $T=[T_1,T_2]$, згідно з (3.26) візьмемо $m_1=T_2D_1$, $m_2=T_1D_2$, тоді: $f_i(n+T)-f_i(n)=D_iT/T_i$, $i=1,2$, звідки

$$f(n+T)-f(n)=T(D_1/T_1+D_2/T_2)=D. \tag{3.29}$$

Нехай $f(n)=a(n)+D\big[(n-1)/T\big]$, $c-const$ і $f_c(n)=cf(n)$, тоді

$$f_c(n)=c\cdot a(n)+c\cdot D\big[(n-1)/T\big]\ – \tag{3.30}$$

у. а. п. з тим же періодом T і різницею cD.

Наслідок:

$$f(n)=c_1 f_1(n)+c_2 f_2(n),\ c_1, c_2-const\ , - \qquad (3.31)$$

у. а. п. з періодом T і різницею $D=T(c_1D_1/T_1+c_2D_2/T_2)$.

Таким чином, лінійна комбінація у. а. п. є у. а. п. •

Теорема 3.6 (*про зворотність у. а. п.*). Будь-яка у. а. п. є зворотною послідовністю $(T+1)$-го порядку.

Доведення. Збільшимо в рівнянні (3.17) номер n на одиницю:

$$f(n+T)-f(n)=D \ \Rightarrow \ f(n+1+T)-f(n+1)=D.$$

Прирівнюючи ліві частини рівнянь, отримаємо зворотне рівняння [22]:

$$f(n+T+1)=f(n+T)+f(n+1)-f(n) \qquad (3.32)$$

з характеристичним рівнянням

$$q^{n+T+1}=q^{n+T}+q^{n+1}-q^n \ \ (q\neq 0), \text{ або } (q-1)(q^T-1)=0. \qquad (3.33)$$

Корені (3.32) такі:

$$q=1,\ q_k=\sqrt[T]{1}=\cos\frac{2\pi k}{T}+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{T} \ \ (i=\sqrt{-1}),\ \ k=0,1,...,T-1. \bullet \qquad (3.34)$$

Рівняння (3.32) не містить параметра D, тому під час його розв'язання необхідно враховувати вихідне функціональне рівняння.

Помічаємо, що одиниця є двократним коренем, тоді загальний член послідовності слід шукати у вигляді [22]:

$$f(n)=A_0(n-1)+B_0+\sum_{k=1}^{T-1}B_k\left(\cos\frac{2\pi k}{T}(n-1)+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{T}(n-1)\right), \qquad (3.35)$$

де A_0, B_k, $k=0,1,\ ...,\ T-1$, – сталі, що підлягають визначенню.

Формулу (3.35) назвемо **тригонометричною формою подання у. а. п.**

Коефіцієнт A_0 знаходимо з урахуванням вихідного рівняння. Згідно з (3.35) маємо:

$$f(n+T)=A_0T+A_0(n-1)+B_0+\sum_{k=1}^{T-1}B_k\left(\cos\frac{2\pi k}{T}(n-1)+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{T}(n-1)\right),$$

тоді $f(n+T)-f(n)=A_0T=D$, звідки $A_0=D/T$.

Коефіцієнти B_k, $k=0,1,\ ...,\ T-1$, визначаються за відомими значеннями перших T членів послідовності – її періодичної складової.

Покажемо на конкретному прикладі, як це реалізується.

Приклад 3.4. Знайдіть розв'язок рівняння $f(n+T)-f(n)=D$, якщо $T=3$, $D=10$; $f_1=1$, $f_2=5$, $f_3=7$. Інакше кажучи, запишіть загальний член заданої у. а. п.

Розв'язання. В умовах прикладу рівняння (3.31) має вигляд:

$$f(n+4)=f(n+3)+f(n+1)-f(n). \tag{3.36}$$

Складаємо характеристичне рівняння і розв'язуємо його:

$$(q-1)(q^3-1)=0 \;\Rightarrow\; (q=1, q_k=\sqrt[3]{1}=\cos\frac{2\pi k}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{3},\ k=0,1,2).$$

Маємо: $q=1$ (двократний корінь), $q_1=-\frac{1}{2}+i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$, $q_2=-\frac{1}{2}-i\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Загальний член послідовності шукаємо у вигляді (3.36):

$$f_n=A_0(n-1)q^{n-1}+B_0q_0^{n-1}+B_1q_1^{n-1}+B_2q_2^{n-1}.$$

Застосовуючи формулу Муавра:

$$f_n=A_0(n-1)+B_0+B_1\left(\cos\frac{2\pi(n-1)}{3}+i\cdot\sin\frac{2\pi(n-1)}{3}\right)+$$

$$+B_2\left(\cos\frac{4\pi(n-1)}{3}+i\cdot\sin\frac{4\pi(n-1)}{3}\right),$$

і враховуючи тригонометричні формули зведення:

$$\cos(\pi \pm \alpha) = -\cos\alpha,\ \sin(\pi \pm \alpha) = \mp \sin\alpha,$$

отримуємо:

$$f_n = A_0(n-1) + B_0 + (-1)^{n-1}\left((B_1 + B_2)\cos\frac{\pi(n-1)}{3} - \left(B_1 - B_2\right) i \cdot \sin\frac{\pi(n-1)}{3} \right).$$

Позначимо: $B_1 + B_2 = A_1$, $\left(B_1 - B_2\right) \cdot i = A_2$, і знайдемо коефіцієнти B_0, A_1, A_2 за відомими $f_1 = 1$, $f_2 = 5$, $f_3 = 7$, і $A_0 = D/T = 10/3$:

$$\left| \begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \end{array} \right| \begin{cases} B_0 + A_1 = 1 \\ A_0 + B_0 - 1/2 A_1 + \sqrt{3}/2 A_2 = 5 \\ 2A_0 + B_0 + 1/2 A_1 - \sqrt{3}/2 A_2 = 7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0 = 1 \\ A_1 = 0 \\ A_2 = 4/3\sqrt{3} \end{cases}.$$

Таким чином,

$$f(n) = \frac{1}{3}\left(10n - 7 + (-1)^n \frac{4}{\sqrt{3}} \sin\frac{\pi(n-1)}{3} \right). \bullet \qquad (3.37)$$

Зауваження. Формулу (3.37) можна подати в іншому вигляді – через Антьє – за допомогою базисних індикаторів. А саме (див. (3.12), (3.20)):

$$f(n) = a(n) + 10 \cdot \left[(n-1)/3\right],$$

$$a(n+3) = a(n) = f_1 e_1(n) + f_2 e_2(n) + f_3 e_3(n),$$

де $e_i(n) = [(n+3-i)/3] - [(n+2-i)/3]$ (див. (3.14)).

Після підстановки виразів для $e_i(n)$ і зведення подібних членів отримаємо:

$$a(n) = 1 + 4\left[\frac{n+1}{3}\right] + 2\left[\frac{n}{3}\right] - 6\left[\frac{n-1}{3}\right].$$

Отже,

$$f(n)=10\left[\frac{n-1}{3}\right]+\left(1+4\left[\frac{n+1}{3}\right]+2\left[\frac{n}{3}\right]-6\left[\frac{n-1}{3}\right]\right).$$

Після спрощення за допомогою (3.5) при $t=3$ і заміною n на $n-1$:

$$\left[\frac{n+1}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]+\left[\frac{n-1}{3}\right]=n-1,$$

остаточно маємо:

$$f(n)=1+4\left[\frac{n+1}{3}\right]+2\left[\frac{n}{3}\right]+4\left[\frac{n-1}{3}\right]=4n-3-2\left[\frac{n}{3}\right]. \qquad (3.38)$$

Зіставляючи (3.37) і (3.38), отримуємо подання "синуса" через Антьє:

$$\sin\frac{\pi(n-1)}{3}=(-1)^n\frac{\sqrt{3}}{2}\left(n-1-3\left[\frac{n}{3}\right]\right),$$

яке можна розглядати як своєрідну формулу зведення.

Лема 3.1 (*про композицію двох у. а. п.*). Композиція натуральних у. а. п.: $(f_i(n),T_i,D_i)$, $i=1,2$, є натуральна у.а.п.: $f_\circ=f_1\circ f_2\in M(s)$, з періодом $T_\circ=T_1T_2/\Delta$ і різницею $D_\circ=D_1D_2/\Delta$, де $\Delta=(T_1,D_2)$ – найбільший спільний дільник чисел T_1, D_2.

Доведення. Здійснимо $m_2=T_1/\Delta$-розширення ч/п $f_1(n)$ і $m_1=D_2/\Delta$-розширення ч/п $f_2(n)$. Скористаємось рівнянням (3.26) у вигляді: $f(n+mT)=f(n)+mD$, і покажемо, що $f_\circ(n+T_\circ)=f_\circ(n)+D_\circ$.

Дійсно,

$$f_\circ\left(n+\frac{T_1T_2}{\Delta}\right)=f_1\left(f_2\left(n+\frac{T_1}{\Delta}T_2\right)\right)=f_1\left(f_2(n)+\frac{T_1}{\Delta}D_2\right)=f_1\left(f_2(n)+\frac{D_2}{\Delta}T_1\right).$$

Остаточно:

$$f_\circ\left(n+\frac{T_1T_2}{\Delta}\right)=\underbrace{f_1(f_2(n))}_{f_\circ(n)}+\frac{D_2}{\Delta}D_1=f_\circ(n)+\frac{D_1D_2}{\Delta},$$

де $f_2(n)$ виступає в ролі нумератора для $f_1(n)$, а $\frac{T_1T_2}{\Delta}=T_0$, $\frac{D_1D_2}{\Delta}=D_0$.

Наслідки:

1) якщо T_1, D_2 взаємно прості, тобто $\Delta=(T_1, D_2)=1$, то $T_\circ=T_1T_2$, $D_\circ=D_1D_2$;

2) числа $T_\circ=T_1T_2/\Delta$, $D_\circ=D_1D_2/\Delta$ – найменші з можливих чисел, які задовольняють рівняння $f_\circ(n+T_\circ)=f_\circ(n)+D_\circ$;

3) якщо $y(n)$ – підпослідовність у. а. п. $x(n)$, нумератором $\nu=\nu_y(n)$ якої є у. а. п., то композиція $x\circ\nu$ належить до ч/п того ж виду:

$$((x(n),\ T_x,\ D_x)\text{ і }(\nu_y(n),\ T_\nu,\ D_\nu))\ \Rightarrow\ (y(n), T_y, D_y),$$

де $T_y=T_xT_\nu/\Delta$, $D_\circ=D_xD_\nu/\Delta$, $\Delta=(T_x, D_\nu)$.•

Теорема 3.7 (*про функціональну замкненість у. а. п.*). Множина натуральних у. а. п. замкнена відносно утворення композицій:

$$(f_i(n), T_i, D_i)\in M(s),\ i=\overline{1,k}\quad\Rightarrow\quad f_\circ=f_1\circ f_2\circ\ldots\circ f_k\in M(s). \qquad (3.39)$$

Доведення. Підґрунтям для такого узагальнення є властивість асоціативності композиції: $h\circ g\circ f=h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ [6]. Дійсно:

$$\begin{aligned} h\circ(g\circ f)&=h\circ(g(f(x))=h(g(f(x)));\\ (h\circ g)\circ f&=h(g(x))\circ f=h(g(f(x))). \end{aligned} \qquad (3.40)$$

У разі кортежу $f_i(n)$, $i=\overline{1,k}$, $k>3$, згідно з (3.40) виокремлюють круглими дужками двійки і/або трійки. Наприклад, якщо взяти $f_1 \circ f_2 \circ f_3 \circ f_4 \circ f_5$, то

$$(f_1 \circ f_2 \circ f_3) \circ (f_4 \circ f_5) = (f_1 \circ f_2) \circ (f_3 \circ f_4 \circ f_5) = (f_1 \circ (f_2 \circ f_3)) \circ (f_4 \circ f_5).$$

Таким чином, множина усіх натуральних у. а. п. $M(s)$ функціонально замкнена, або $\boldsymbol{M(s)}$ **замкнена щодо композиції.** •

Приклад 3.5. Знайдіть композицію у. а. п.: $x(n+2)-x(n)=5$, якщо $x_1=2, x_2=4$; $y(n+3)-y(n)=10$, якщо $y_1=1, y_2=3, y_3=5$

Розв'язання. Підраховуємо період $T_\circ$ і різницю $D_\circ$ висхідної ч/п $f_\circ = x \circ y$:

$$\Delta = (T_x, D_y) \;\Rightarrow\; \left| T_x = 2, D_y = 10 \right| \;\Rightarrow\; \Delta = (2,10) = 2;$$

$$T_\circ = T_x \cdot T_y / \Delta \;\Rightarrow\; \left| T_y = 3 \right| \;\Rightarrow\; T_\circ = 2 \cdot 3/2 = 3;$$

$$D_\circ = D_x \cdot D_y / \Delta \;\Rightarrow\; \left| D_x = 5 \right| \;\Rightarrow\; D_\circ = 5 \cdot 10/2 = 25.$$

Таким чином, результат композиції описується рівнянням:

$$f_\circ(n+T_\circ) - f_\circ(n) = D_\circ \;\Rightarrow\; \left| T_\circ = 3,\ D_\circ = 25 \right| \;\Rightarrow$$
$$f_\circ(n+3) - f_\circ(n) = 25.$$

Покажемо відрізки послідовностей $x(n)$, $y(n)$, $f_\circ(n)$, де між елементами ч/п вказані їхні різниці:

$$x(n): \underline{2}\,_2\, 4\,_3\, \underline{7}\,_2\, 9\,_3\, \underline{12}\,_2\, 14\,_3\, 17\,_2\, 19\,_3\, 22\,_2\, 24\,_3\, \underline{27}\,_2\, 29\,_3\, \underline{32}\,_2\, 34\,_3\, \underline{37}\,_2\, 39\,_3 \ldots;$$

$$y(n): 1_2\, 3_2\, 5_6\, 11_2\, 13_2\, 15_6\;\; 21_2\, 23_2\, 25_6\, 31_2\, 33_2\, 35_6\;\; 41_2\, 43_2\, 45_6 \ldots;$$

$$f_\circ(n): 2\,_5\, 7\,_5\, 12\,_{15}\, 27\,_5\, 32\,_5\, 37\,_{15}\, 52\,_5\, 57\,_5\, 62\,_{15} \ldots .$$

У поданні $x(n)$ підкреслені елементи підмножини, які належать композиції $f_{\circ} = x \circ y$.

Якщо в $f_{\circ}$ виділити періодичну складову, то її загальний член виглядатиме так:

$$f_{\circ}(n) = a(n) + 25\left[\frac{n-1}{3}\right], \text{ де } a_1 = 2, a_2 = 7, a_3 = 12. \bullet$$

Зауваження. Композиція, взагалі кажучи, не має властивості комутативності, тобто $x \circ y \neq y \circ x$.

3.4. Логічні властивості нумераторів та індикаторів узагальнених арифметичних прогресій

Нехай задано у. а. п. $(f(n), T, D)$ з T-розбиттям на арифметичні прогресії $(f_i(n), 1, D) \sqsubset f(n)$, $i = \overline{1,T}$, що породжує T_e-базис індикаторів $\{e_i(n)\}$, $i = \overline{1,T}$, і T_{ν}-базис нумераторів $\{\nu_i(n)\}$, $i = \overline{1,T}$.

У попередніх відомостях стосовно у. а. п. уже було показано, що:

логічною сумою (s-об'єднанням) елементів T-розбиття є

$$f(n) = \bigsqcup_{i=1}^{T} f^{i} = \bigsqcup_{i=1}^{T} (f_i + D(n-1)) \text{ (див. (3.21))};$$

логічна (і арифметична) сума елементів T_e-базису дає універсум індикаторів: $\mu_{\circ}(n) = (1, 1, ..., 1, ...)$, а їх перетин – $\bigwedge_{i=1}^{T} e_i(n) = 0 \ \ \forall n \in \mathbf{N}$;

логічна сума елементів T_{ν}-базису дорівнює універсуму ч/п:

$$\bigsqcup_{i=1}^{T} \nu_i(n) = s_{\circ}(n) = n \text{ (див. теорема 3.3)},$$

а перетин визначає порожню послідовність: $\prod_{i=1}^{T} \nu_i(n) = s_{\varnothing}(n)$.

m-розширення у. а. п.: $(f(n), mT, mD)$ (див. (3.26)), індукує (від лат. *induction* – наведення, спонукання) відповідні розширення індикаторів і нумераторів (див. (3.27), (3.28)) зі збереженням їхніх властивостей, а разом із тим – mT_e-базис і mT_ν-базис.

Покажемо, що члени mT_ν-базису – $\nu_j(n) = j + mT(n-1)$, $j = \overline{1, mT}$ – це підпослідовності елементів T_ν-базису – $\nu_i(n) = i + T(n-1)$, $i = \overline{1, T}$ – з нумераторами $\nu_k(n) = k + m(n-1)$, $k = \overline{1, m}$:

$$\nu_j(n) = (\nu_i \circ \nu_k)(n) = \nu_i(\nu_k(n)) = i + T(k-1) + mT(n-1), \qquad (3.41)$$

де $k = \overline{1, m}$ для кожного фіксованого $i = 1, 2, 3, ..., T$.

Це означає, що кожний елемент T_ν-базису породжує m елементів mT_ν-базису.

Приклад 3.6. Нехай T_ν-базис у. а. п. $\{\nu_i(n)\}$, $i = 1, 2$, описується арифметичними прогресіями $\nu_i(n) = i + 2(n-1)$, $i = 1, 2$. Знайдіть елементи mT_ν-базису, якщо $m = 4$.

Розв'язання. За формулою (3.40), якщо $k = \overline{1, 4}$ і $j = \overline{1, 8}$, отримуємо:

$$\nu_j(n) = \nu_i(\nu_k(n)) = \nu_i \circ \nu_k = i + 2(k-1) + 8(n-1).$$

Знаходимо чотири нумератори, які індукує $\nu_1(n) = 1 + 2(n-1) = 2n - 1$:

$$k = 1: \nu_1(n) = 1 + 8(n-1) = 8n - 7;$$
$$k = 2: \nu_2(n) = 3 + 8(n-1) = 8n - 5;$$
$$k = 3: \nu_3(n) = 5 + 8(n-1) = 8n - 3;$$
$$k = 4: \nu_4(n) = 7 + 8(n-1) = 8n - 1.$$

Знаходимо чотири нумератори, які індукує $\nu_2(n) = 2 + 2(n-1) = 2n$:

$$k = 1: \nu_5(n) = 2 + 8(n-1) = 8n - 6;$$
$$k = 2: \nu_6(n) = 4 + 8(n-1) = 8n - 4;$$

$$k=3:\ \nu_7(n)=6+8(n-1)=8n-2;$$

$$k=4:\ \nu_8(n)=8+8(n-1)=8n.$$

Як і для нумераторів T_ν-базису, логічна сума (s-об'єднання) нумераторів mT_ν-базису дорівнює універсуму натуральних у. а. п.:

$$\bigsqcup_{j=1}^{8}\nu_j(n)=s_\circ(n)=n,$$

тобто описує послідовність натуральних чисел. Такий висновок справедливий для довільних m-розширень будь-яких у. а. п.

Нескладно переконатися, що образом s-об'єднання четвірок нумераторів є відповідно задані нумератори $\nu_i(n)=i+2(n-1)$, $i=1,2$:

$$(\nu_i(n),1,2)=\bigsqcup_{p=0}^{3}(\nu_{i+2p}(n),1,8),\ p=0,1,2\ \ \forall i=1,2,$$

тобто послідовність непарних чисел, якщо $i=1$: $\nu_1(n)=2n-1$, і парних – якщо $i=2$: $\nu_2(n)=2n$.•

Для довільного m-розширення маємо:

$$(\nu_i(n),1,T)=\bigsqcup_{p=0}^{m-1}(\nu_{i+pT}(n),1,mT),\ p=\overline{0,m-1}\ \ \forall i=1,T. \tag{3.42}$$

У відповідності до T_ν-базису отримуємо розбиття $(f_j(n),1,mD)$, $j=\overline{1,mT}$, і, звичайно, згідно з (3.41), якщо $k=\overline{1,m}$ і $i=\overline{1,T}$ отримуємо:

$$\nu_j=\nu_i\circ\nu_k\quad\Rightarrow\quad f_j=f_i\circ\nu_k,$$

$$(f_i(n),1,D)=\bigsqcup_{p=0}^{m-1}(f_{i+pT}(n),1,mD),\ p=\overline{0,m-1}\ \ \forall i=\overline{1,T}. \tag{3.43}$$

Нехай тепер задана сукупність (система) $m_k T_\nu$-базисів, $k=\overline{1,p}$, і $[m_1, m_2, ..., m_p]=m$ – найменше спільне кратне m_k-х. Через елементи m-розширення T_ν-базису будуть виражатись усі нумератори заданої системи базисів (аналогічно до (3.42)), тому назвемо його **загальним базисом** для заданої системи базисів. Нумератори загального базису (аналогічно до (3.41)) отримуються, у свою чергу, із заданих:

$$\nu_{i_k}(n) = i_k + T(k-1) + m_k T(n-1),\; i_k = \overline{1, m_k T}, \qquad (3.44)$$

за допомогою нумераторів:

$$\nu_{i_k l_k}(n) = \frac{m}{m_k}(n-1) + l_k,\; l_k = \overline{1, \rho_k},\; \rho_k = \frac{m}{m_k},\; k = \overline{1,p}.$$

Перехід від заданої системи базисів нумераторів до загального базису називається **зведенням до загального базису.** Поняття загального базису індукує поняття **загального розбиття** заданої системи розбиття.

Із бієкції між нумераторами й індикаторами послідовностей випливає існування відповідної системи **індикаторів загального розбиття.**

Для mT_ν-базису відповідний mT_μ-базис складається з функцій

$(e_j(n), mT, 0)$, $j=\overline{1,mT}$, тобто $e_j(n) = \left[\frac{n-j}{mT}\right] - \left[\frac{n-j-1}{mT}\right]$ (див. (3.27)).

Згідно з (3.41) "автоматично" отримуємо:

$$(e_i(n), T, 0) = \bigvee_{p=0}^{m-1} (e_{i+pT}(n), mT, 0)),\; p = \overline{0, m-1}\;\; \forall i = \overline{1,T}. \qquad (3.45)$$

До такого результату можна прийти за допомогою формули (3.8) заміною $(x+y)/z$ на $(n-i)/T$, i на p, t на m, а $x+y+zi$ на $n-i-pT$:

$$e_i(n)=\left[\frac{n-i}{T}\right]-\left[\frac{n-(i+1)}{T}\right]=\sum_{p=0}^{m-1}\left[\frac{n-(i+pT)}{mT}\right]-\left[\frac{n-(i+pT+1)}{mT}\right]. \qquad (3.46)$$

Звичайно, індикатори, які описуються правою частиною формули (3.46) чи формулою (3.27), теж базисні, тільки порядок їх подання (розташування) буде різним; для поелементного аналітичного опису логічного об'єднання і логічного перетину індикаторів можна використати формули (3.13).

Приклад 3.7. Нехай, як і в прикладі 3.6, T_{ν}-базис описується арифметичними прогресіями $\nu_1(n)=2n-1$, $\nu_2(n)=2n$. Знайдіть на проміжку $n\in[1,8]$ елементи mT_{μ}-базису, якщо $m=3$.

Розв'язання. Діємо за формулою (3.46), якщо $T=2$ і $p=0,1,2$. Підраховуємо координати кожного нумератора для $i=1$ і для $i=2$, а потім складаємо таблицю їхніх значень (табл. 3.2).

Таблиця 3.2

Елементи 3-розширення базисних індикаторів

	$p \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	$8\cdots$
$i=1$:	0	1	0	0	0	0	0	1	$0\cdots$
	1	0	0	1	0	0	0	0	$0\cdots$
	2	0	0	0	0	1	0	0	$0\cdots$
	$e_1(n)$	1	0	1	0	1	0	1	$0\cdots$

,

	$p \setminus n$	1	2	3	4	5	6	7	$8\cdots$
$i=2$:	0	0	1	0	0	0	0	0	$1\ldots$
	1	0	0	0	1	0	0	0	$0\ldots$
	2	0	0	0	0	0	1	0	$0\ldots$
	$e_2(n)$	0	1	0	1	0	1	0	$1\ldots$

.

У табл. 3.2 координати індикаторів рівні одиниці для $i=1$ ($i=2$) відповідають непарним (парним) номерам n. Якщо застосувати формулу (3.27), то для кожного $j=1, 2, ..., mT$ одиниці відповідатимуть значенням $n=j+6(t-1)\ \forall t\in \mathbf{N}$.•

Кортежу $m_k T_\nu$-базисів, $k=\overline{1,p}$, за бієктивним відображенням $\nu\leftrightarrow\mu$ ставиться у відповідність m-розширення T_μ-базису індикаторів, де $m=[m_1, m_2,..., m_p]$, через елементи яких виражаються всі індикатори заданої системи базисів (аналогічно до (3.42)), тому mT_μ-базис називають **загальним базисом індикаторів,** відповідним mT_ν-базису.

Нехай $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_t, ..., \mu_{\boldsymbol{T}}$ – базисні індикатори у. а. п. $(f(n), T, D)$ (або деякого загального m-розширення) і $2\le t\le T$. Якщо розглядати $\boldsymbol{t}$ елементарних симетричних многочленів, змінними яких є базисні індикатори:

$$\delta_1=\mu_1+\mu_2+...+\mu_t,$$
$$\delta_2=\mu_1\mu_2+\mu_1\mu_3+...+\mu_{t-1}\mu_t,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\delta_t=\mu_1\mu_2...\mu_t,$$

то за першим співвідношенням із (3.13): $x\vee y=x+y-xy$, отримаємо всі можливі не базисні індикатори $\mu_{i\vee j}, i\ne j$:

$$\mu_{i\vee j}=\sum_{j=1}^{t}(-1)^{j+1}\delta_j. \tag{3.47}$$

Наприклад, якщо $T=3$, а $t=2$, і брати попарно $\mu_i, \mu_j,\ i\ne j$, тоді:

$$\left.\begin{array}{r}\mu_1=(1,0,0,1,0,0,...)\\ \mu_2=(0,1,0,0,1,0,...)\\ \mu_3=(0,0,1,0,0,1,...)\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{l}\mu_{1\vee 2}=\mu_1+\mu_2-\mu_1\mu_2=(1,1,0,1,1,0,...)\\ \mu_{1\vee 3}=\mu_1+\mu_3-\mu_1\mu_3=(1,0,1,1,0,1,...)\\ \mu_{2\vee 3}=\mu_2+\mu_3-\mu_2\mu_3=(0,1,1,0,1,1,...)\end{array}\right..$$

Кількість не базисних індикаторів дорівнює кількості комбінацій C_T^t.

За допомогою суперпозиції можна знайти диз'юнкцію будь-якої кількості індикаторів. Диз'юнкцію трьох операндів: $x \vee y \vee z$, отримаємо заміною в диз'юнкції $x \vee y$ однієї з букв формулою диз'юнкції: x на $x \vee z$ або y на $y \vee z$:

$$x \vee y = x + y - xy \quad \Rightarrow \quad |\text{заміна } y \text{ на } y + z - yz| \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x \vee y \vee z = x + (y + z - yz) - x(y + z - yz) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x \vee y \vee z = x + y + z - xy - xz - yz + xyz.$$

Це цілком узгоджується з формулою (3.47).

Логічна сума відповідних за бієкцією $\nu \leftrightarrow \mu$ нумераторів є у. а. п. і визначає підпослідовність вихідної у. а. п. $(f(n), T, D)$.

Логічні операції над не базисними індикаторами, як і над базисними, можна звести до арифметичних дій [37].

Теорема 3.8 (*про логічні операції над не базисними індикаторами*). Операції "диз'юнкція", "кон'юнкція", "інверсія" над індикаторами $\mu_i = \mu_i(n)$, $i = \overline{1,k}$, $k \in \mathbf{N}$, описуються формулами:

$$\bigvee_{i=1}^{k} \mu_i(n) = 1 + \left[\frac{1}{k} \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i(n) - 1 \right) \right], \tag{3.48}$$

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \mu_i(n) = \left[\frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \mu_i(n) \right], \tag{3.49}$$

$$\overline{\mu}_i(n) = 1 - \mu_i(n). \tag{3.50}$$

Доведення. У справедливості формул переконуємося безпосередньою перевіркою. Дійсно, якщо в (3.48) за вибраного n координати всіх індикаторів дорівнюють нулеві, то під знаком Антьє отримуємо одиницю з мінусом, і результат диз'юнкції дорівнює нулеві. Якщо ж серед доданків є хоча б одна одиниця, під знаком Антьє матимемо нуль, отже, результат операції – одиниця.

У разі кон'юнкції одиницю отримуємо тільки за умови, що всі доданки в (3.49) є одиницями. У протилежному випадку результатом буде нуль, оскільки дріб під знаком Антьє додатний і менший від одиниці.

Співвідношення (3.50) змінює нуль на одиницю і навпаки, що відповідає означенню інверсії (заперечення).

Зауваження:

1) під час чисельної реалізації операцій доцільно використовувати матрицю індикаторів (див. (3.15));

2) кон'юнкцію не базисних індикаторів, як і базисних, можна знайти як добуток однойменних за номером координат, не залучаючи Антьє.•

Теорема 3.9 (*про* S*-об'єднання елементів базису нумераторів*). Логічна сума t елементів T_ν-базису є у. а. п. з періодом t і різницею T :

$$\nu_{\sqcup}(n)=\bigsqcup_{j=1}^{t}\nu_{i_j}(n)=\sum_{j=1}^{t}\nu_{i_j}\left(\left\lceil\frac{n-1}{t}\right\rceil+1\right)\cdot e_j(n), \tag{3.51}$$

де $e_j(n+t)=e_j(n)$, $i_j\in\{1,2,...,T\}$, $1<t<T$; i з індексом j означає, що із усієї сукупності нумераторів T_ν-базису вибирається довільним чином t нумераторів; щоб не ускладнювати символіку, приймаємо $i_1<i_2<...<i_t$.

Доведення. Перевіряємо, чи є $\nu_{\sqcup}(n)$ у. а. п., для чого знаходимо різницю між значеннями висхідного нумератора для номерів $(n+t)$ і n або, що те ж саме, суму різниць між добутками правої частини в (3.51) для $j=\overline{1,t}$. Базис нумераторів, T_ν-базис, описується у. а. п. $(\nu_i(n),1,T)$, тобто арифметичними прогресіями $\nu_i(n)=i+T(n-1)$, тому $\forall i=\overline{1,t}$ їхні часткові різниці дорівнюють T, а сума базисних індикаторів $e_j(n)$ дає тотожну одиницю. Отже,

$$\nu_{\sqcup}(n+t)-\nu_{\sqcup}(n)=T\ (e_1(n)+e_2(n)+....+e_t(n))=T\ .$$

Наслідки:

1) якщо $n=\overline{1,t}$, формула (3.51) визначає перші члени нумераторів;

2) виділяючи в правій частині (3.51) періодичну складову, отримуємо її еквівалентне подання:

$$\nu_{i_j}\left(\left[\frac{n-1}{t}\right]+1\right)=T\left[\frac{n-1}{t}\right]+i_j \;\Rightarrow\; \coprod_{j=1}^{t}\nu_{i_j}(n)=T\left[\frac{n-1}{t}\right]+\sum_{j=1}^{t} i_j e_j(n). \quad (3.52)$$

3) якщо залучити (3.11), то звільнюємося від взяття цілої частини, зате доведеться оперувати дробами:

$$\coprod_{j=1}^{t}\nu_{i_j}(n)=\frac{T}{t}(n-1)+\sum_{j=1}^{t}\left(i_j-(j-1)\frac{T}{t}\right)e_j(n)\,.\bullet \quad (3.53)$$

Нумератори, які не є базисними і становлять у. а. п. з періодом $T_\nu > 1$ і різницею D_ν, назвемо **у. а. п.-нумераторами.**

Теорема 3.10 (*про опис у. а. п.-нумераторів*). Не базисні нумератори $(\nu(n), T_\nu, D_\nu)$ можна подати у вигляді:

$$\nu(n)=D_\nu\left[\frac{n-1}{T_\nu}\right]+\sum_{i=1}^{T_\nu}\nu(i)e_i(n,T_\nu)\,, \quad (3.54)$$

де $e_i(n,T_\nu)$ – базисний індикатор з періодом T_ν, тобто $e_i(n+T_\nu)=e_i(n)$.

Доведення зводиться до перевірки того, чи задовольняє $\nu(n)$ відповідне у. а. п. функціональне рівняння (див. (3.17)). Ураховуючи властивість **1^0** Антьє (*про винесення цілого доданка за знак цілої частини*) і періодичність базисних індикаторів, маємо:

$$\nu(n+T_\nu)-\nu(n)=D_\nu\left(\left[\frac{n+T_\nu-1}{T_\nu}\right]-\left[\frac{n-1}{T_\nu}\right]\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{T_\nu}\nu(i)(\underbrace{e_i(n+T_\nu)-e_i(n)}_{0})=D_\nu\left(\left[\frac{n-1}{T_\nu}\right]+1-\left[\frac{n-1}{T_\nu}\right]\right)=D_\nu\,.\bullet$$

Приклад 3.8. Знайдіть аналітичний опис не базисного нумератора $\nu(n)$: $2_1 3_2 5_1 6_2 8_1 9_2 \ldots$, за допомогою (3.54).

Розв'язання. Аналізуємо заданий відрізок нумератора і приходимо до висновку, що $\nu(n)$ є у. а. п. з періодом $T_\nu = 2$ і різницею $D_\nu = 3$. Згідно з (3.54) отримуємо:

$$\nu(n) = 3\left[\frac{n-1}{2}\right] + \sum_{i=1}^{2} \nu(i)\, e_i(n,2) = 3\left[\frac{n-1}{2}\right] + \nu(1)e_1(n,2) + \nu(2)e_2(n,2) =$$

$$= \left|\ \nu(1)=2, \nu(2)=3\ \right| =$$

$$= 3\left[\frac{n-1}{2}\right] + 2e_1(n,2) + 3e_2(n,2) = 3\left[\frac{n-1}{2}\right] + 2 + e_2(n,2).$$

Розгорнемо індикатор:

$$e_2(n,2) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right],$$

і врахуємо, що (див. (3.5))

$$\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right] = n-1,$$

тоді

$$\nu(n) = 3\left[\frac{n-1}{2}\right] + 2 + n - 1 - 2\left[\frac{n-1}{2}\right] = n + \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Переконуємося, що ця формула описує заданий нумератор. •

Задача знаходження s-перетину базисних нумераторів, що належать різним T-розбиттям універсуму $s_0(n) = n$, зводиться до розв'язання невизначених – діофантових – рівнянь [12] або систем таких рівнянь, що є взагалі непростою задачею, або до m-розширень самих нумераторів. Проілюструємо на простому прикладі, як це реалізується.

Приклад 3.9. Знайдіть логічний добуток нумераторів $\nu_1(n)=2n-1$, $\nu_2(n)=3n-2$ і відповідний йому індикатор.

Розв'язання. 1-й спосіб. Задані нумератори належать двом різним T-розбиттям універсуму $s_0(n)$: $T_1=2$, $T_2=3$, у кожному з яких вони базисні. Складаємо рівняння $\nu_1(n)=\nu_2(k)$, $k\in\mathbf{N}$, і розв'язуємо його:

$$2n-1=3k-2 \;\Rightarrow\; 3k-2n=1 \;\Rightarrow\; n=\frac{3k-1}{2}=k+\frac{k-1}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \left|\text{беремо } (k-1)/2=t-1,\; t=1,\,2,\ldots\right| \;\Rightarrow\; (k=2t-1, n=3t-1).$$

Таким чином, $2n-1=3k-2=6t-5$. Тепер замінимо символ t на n і отримаємо відповідь: $(\nu_1 \sqcap \nu_2)(n)=6n-5$: $1, 7, 13, 19, \ldots$.

2-й спосіб. Здійснимо m-розширення нумераторів: $m=[T_1,T_2]=6$ – найменше спільне кратне заданих періодів T_1, T_2, тобто 3-розширення ν_1 і 2-розширення ν_2.

Потім застосовуємо (3.41) для ν_1 з параметрами $i=1$, $j=1,2,3$, $k=1,2,3$:

$$\nu_1(n)=2n-1 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} 1+2\cdot 0+6(n-1)=6n-5 \\ 1+2\cdot 1+6(n-1)=6n-3 \\ 1+2\cdot 2+6(n-1)=6n-1 \end{array}\right.;$$

для ν_2 з параметрами $i=1$, $j=1,2$, $k=1,2$:

$$\nu_2(n)=3n-2 \;\Rightarrow\; \left[\begin{array}{l} 1+3\cdot 0+6(n-1)=6n-5 \\ 1+3\cdot 1+6(n-1)=6n-2 \end{array}\right..$$

Як бачимо, S-перетином $\nu_1(n)$ і $\nu_2(n)$ є базисний нумератор m-розширення: $(\nu_1 \sqcap \nu_2)(n)=6n-5$. Такий самий результат отримаємо, якщо згідно з (3.41) просто знайти композицію $\nu_1\circ\nu_2$.

Тепер наведемо фрагмент таблиці значень операндів і їх логічного добутку (табл. 3.3).

Таблиця 3.3

Відрізки заданих індикаторів і їх S-перетину

n	1	2	3	4	5	6	7	$8\cdots$
$\mu_1(n)$	1	0	1	0	1	0	1	$0\cdots$
$\mu_2(n)$	1	0	0	1	0	0	1	$0\cdots$
$(\mu_1 \wedge \mu_2)(n)$	1	0	0	0	0	0	1	$0\cdots$

.

Аналізуючи рядки таблиці 3.3, помічаємо, що $\mu_1(n) = e_1(n, 2)$, $\mu_2(n) = e_1(n, 3)$, а $\mu_1 \wedge \mu_2 = e_1(n, 6)$, тобто всі індикатори є базисними, але різних T-розбиттів. •

Теорема 3.10 (*про S-об'єднання елементів T-розбиття*). Логічна сума t елементів T-розбиття у. а. п. $(f(n), T, D)$ є у.а.п. з періодом t і різницею D:

$$\bigsqcup_{j=1}^{t} f_{i_j}(n) = (f \circ \nu_{\sqcup})(n) = f_{\sqcup} = D\left[\frac{n-1}{t}\right] + \sum_{j=1}^{t} f_{i_j} e_j(n), \qquad (3.55)$$

де $f_{i_j}(n)$ – перші члени вибраних із T-розбиття послідовностей.

Доведення. Справедливість подання логічної суми у вигляді (3.55) базується на ізоморфізмі S-алгебри та алгебри нумераторів. Згідно з цим у (3.52) замінюємо T на D, а i_j на $f_{i_j}(n)$.

Наслідки:

1) якщо $n = \overline{1, t}$, формула (3.55) визначає перші члени арифметичних прогресій T-розкладу;

2) якщо розглядати всю сукупність елементів T-розбиття, то отримаємо вихідну у. а. п. $(f(n), T, D)$, подану через T її перших членів $f(i)$ і різницю D:

$$f(n)=\sum_{i=1}^{T} e_i(n) f_i\left(\left[\frac{n-1}{T}\right]+1\right)=D\left[\frac{n-1}{T}\right]+\sum_{i=1}^{T} f(i) e_i(n), \tag{3.56}$$

де $f_i(1)$, $\forall n=\overline{1,T}$, у правій частині позначені через $f(i)$, $i=\overline{1,T}$.•

Задача s-об'єднання елементів із різних m-розширень T-розбиття не викликає ніяких принципових труднощів, вона зводиться до вже розв'язаної задачі переходом до загального розбиття вихідної у. а. п. З урахуванням теореми 3.10 робимо **висновок:** логічна сума будь-якої скінченної сукупності арифметичних прогресій, які належать різним розбиттям, є у. а. п.

Перейдемо до розгляду взаємозв'язку між нумераторами та їх логічними доповненнями [34]. Нагадаємо, що нумераторами є натуральні зростальні у. а. п., тому:

$$\begin{gathered} rng\nu \in \mathbf{N},\ rng\bar{\nu} \in \mathbf{N};\ \nu(i)<\nu(i+1),\ \bar{\nu}(i)<\bar{\nu}(i+1)\ \ \forall i \in \mathbf{N}; \\ d(i)=\nu(i+1)-\nu(i)>0,\ \bar{d}(i)=\bar{\nu}(i+1)-\bar{\nu}(i)>0\ \ \forall i \in \mathbf{N}; \\ \bar{\nu}(n) \sqcup \nu(n)=s_0(n)=n,\ \bar{\nu}(n) \sqcap \nu(n)=s_{\varnothing}(n). \end{gathered} \tag{3.57}$$

Лема 3.2. Для довільного $i \in \mathbf{N}$, такого, що часткова різниця $d(i) \neq 1$, справедливі співвідношення:

$$i=\bar{\nu}(j)-j \quad \forall j \in [\nu(i)-i+1, \nu(i+1)-(i+1)]. \tag{3.58}$$

Доведення. На підставі властивостей (3.57) кількість елементів ч/п $\bar{\nu}(i)$, які передують членові $\nu(i)$, дорівнює $\nu(i)-i$, тому

$$\bar{\nu}(\nu(i)-i+1)=\nu(i)+1,\ \bar{\nu}(\nu(i)-i+2)=\nu(i)+2,\ \ldots,$$
$$\bar{\nu}(\nu(i+1)-(i+1))=\nu(i+1)-1.$$

Тоді

$$\overline{\nu}(\nu(i)-i+1)-(\nu(i)-i+1)=i,\ldots,\ \overline{\nu}(\nu(i+1)-(i+1))-(\nu(i+1)-(i+1))=i,$$

звідки й випливає справедливість (3.58). •

Узагальненням леми 3.2 (на випадок коли $d(i)=1$) є лема 3.3.

Лема 3.3. Для довільного $i\in\mathbf{N}$, такого, що часткова різниця $d(i+\lambda)=1$, де $\lambda=0,1,\ldots,\alpha_i-1$ $(1\le\alpha_i\le T-1)$, справедлива рівність:

$$i+\alpha_i=\overline{\nu}(j)-j \quad \forall j\in[\nu(i)-i+1,\ \nu(i+\alpha_i+1)-(i+\alpha_i+1)]. \tag{3.59}$$

Доведення. Розглянемо відрізок універсуму $s_0(n)=n$, який включає відрізок $[\nu(i),\ \nu(i+\alpha_i+1)]$ нумератора.

За умовою леми він містить і члени послідовності $\overline{\nu}(n)$, залежні від номерів $\nu(n)$:

$$\begin{gathered}\overline{\nu}(\nu(i)-i+1)=\nu(i)+\alpha_i+1,\ \ \overline{\nu}(\nu(i)-i+2)=\nu(i)+\alpha_i+2,\ \ldots,\\ \overline{\nu}(\nu(i)+\alpha_i+1-(i+\alpha_i+1))=\nu(i+\alpha_i+1)-1.\end{gathered} \tag{3.60}$$

Із (3.60) випливає, що різниця між значеннями $\overline{\nu}(n)$ і номерами його членів, які лежать між $\nu(i)$ і $\nu(i+\alpha_i+1)$, стала і дорівнює $i+\alpha_i$.

Наслідки. Більш детальний аналіз відрізка $[\nu(i),\ \nu(i+\alpha_i+1)]$ натурального ряду показує, що:

1) $\overline{\nu}(\nu(i)-i+1)=\nu(i+\beta)+\alpha_i-\beta+1 \quad \forall\beta\in[0,\alpha_i]$;

2) $\overline{\nu}(\nu(i)-i+p)=\nu(i+\beta)+p+\alpha_i-\beta \quad \forall p\in[1,d(i+\alpha_i)-1]$;

3) $\overline{\nu}(\nu(i+\beta)-(i+\beta)+1)=\nu(i+\gamma)+\alpha_i-\gamma+1 \quad \forall\gamma\in[0,\alpha_i]$;

4) $\nu(i+\lambda)-(i+\lambda)=const \quad \forall\lambda\in[0,\alpha_i-1]$. •

Теорема 3.11 (*про зв'язок між нумератором і його S-доповненням*).

Якщо $(\nu(n), T, D)$ – нумератор, а $(\overline{\nu}(n), \overline{T}, \overline{D})$ – його S-доповнення, тобто задані у. а. п., періоди і різниці яких пов'язані співвідношеннями $\overline{T} = D - T$, $\overline{D} = D$, тоді справедливі формули:

$$\text{а) } \nu(n) = n + \overline{T} + \sum_{i=1}^{\overline{T}} \left[\frac{1}{T}(n - 1 - (\overline{\nu}(i) - i)) \right],$$

$$\text{б) } \overline{\nu}(n) = n + T + \sum_{i=1}^{T} \left[\frac{1}{\overline{T}}(n - 1 - (\nu(i) - i)) \right]. \tag{3.61}$$

Доведення. Для доведення основної теореми використаємо формулу, за допомогою якої можна отримати загальний член буд-якої послідовності $S(n)$ у замкненому вигляді, тобто у вигляді формули, якщо відомі її часткові різниці [10]:

$$S_n = S_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + \ldots + (S_n - S_{n-1}). \tag{3.62}$$

Подамо нумератор $(\nu(n), T, D)$ через часткові різниці:

$$\nu(n) = \nu(1) + \sum_{i=1}^{T} d(i) \left[\frac{1}{T}(n + T - (i+1)) \right].$$

Залучимо Антьє-тотожність (3.5): $\sum_{i=1}^{t} [(n + i - 1)/t] = n$, тоді

$$\nu(n) = \nu(1) - 1 + n + \sum_{i=1}^{T} (d(i) - 1) \left[\frac{1}{T}(n + T - (i+1)) \right].$$

На підставі леми 3.2 (див. (3.58)) від підсумовування за індексом i перейдемо до підсумовування за індексом j, для чого з метою наочності розгорнемо співвідношення (3.58) для всіх i від одиниці до T:

$$i=1:\ 1=\overline{\nu}(j)-j \quad \forall j\in[\nu(1),\, \nu(2)-2];$$

$$i=2:\ 2=\overline{\nu}(j)-j \quad \forall j\in[\nu(2)-1,\, \nu(3)-3];$$

…………………………………………………………………..

$$i=T-1:\ T-1=\overline{\nu}(j)-j \quad \forall j\in[\nu(T-1)-T+2,\ \nu(T)-T];$$

$$i=T:\ T=\overline{\nu}(j)-j \quad \forall j\in[\nu(T)-T+1,\, \nu(T+1)-(T+1)].$$

За умовою леми 3.2 часткова різниця $d(i)\neq 1\ \ \forall i\in \mathbf{N}$, тому:

$$\sum_{i=1}^{T}(d(i)-1)\left[\frac{1}{T}(n+T-(i+1))\right]=\sum_{j=\nu(i)-i+1}^{\nu(i+1)-(i+1)}\left[\frac{1}{T}(n+T-(\overline{\nu}(j)-j+1))\right].$$

Тепер $\nu(n)$ запишеться так (щоб уникнути занадто громіздких записів, пропускається символ j у нижній межі підсумовування і вираз під знаком Антьє):

$$\nu(n)=n+\nu(1)-1+$$

$$+\sum_{\nu(1)}^{\nu(2)-2}[\,]+\sum_{\nu(2)-1}^{\nu(3)-3}[\,]+\ldots+\sum_{\nu(i-1)-i+2}^{\nu(i)-i}[\,]+\sum_{\nu(i)-i+1}^{\nu(i+1)-(i+1)}[\,]+\sum_{\nu(i+1)-i}^{\nu(i+2)-(i+2)}[\,]+\ldots+\sum_{\nu(T)-T+1}^{\nu(T+1)-(T+1)}[\,].$$

Зауважимо, що різниця меж підсумовування для кожного i визначає зменшену на одиницю часткову різницю послідовності: $\nu(i+1)-i-1-\nu(i)+i=d(i)-1.$

Верхня межа останнього доданка-суми з урахуванням того, що $\nu(T+1)=\nu(1)+D$, а $D-T=\overline{T}$, набуває вигляду: $\overline{T}+\nu(1)-1$, тому в поданні з однією сумою

$$\nu(n)=n+\nu(1)-1+\sum_{j=\nu(1)}^{\overline{T}+\nu(1)-1}\left[\frac{1}{T}(n+T-(\overline{\nu}(j)-j+1))\right].$$

Розіб'ємо її на дві суми:

$$\nu(n) = n + \nu(1) - 1 + \sum_{j=\nu(1)}^{\overline{T}} [\ ] + \sum_{j=\overline{T}+1}^{\overline{T}+\nu(1)-1} [\ ].$$

Завдяки періодичності у. а. п. і зв'язку між періодами: $\overline{T} = D - T$, друга сума зводиться до суми від $j=1$ до $j=\nu(1)-1$ з від'ємником, що дорівнює $\nu(1)-1$:

$$\sum_{j=\overline{T}+1}^{\overline{T}+\nu(1)-1} [\,] = \sum_{j=1}^{\nu(1)-1} [\,] - (\nu(1)-1).$$

Отже,

$$\nu(n) = n + \nu(1) - 1 + \sum_{j=\nu(1)}^{\overline{T}} [\,] + \sum_{j=1}^{\nu(1)-1} [\,] - (\nu(1)-1),$$

звідки

$$\nu(n) = n + \sum_{j=1}^{\overline{T}} \left[\frac{1}{T}(n + T - (\overline{\nu}(j) - j + 1)) \right].$$

Формулу для $\nu(n)$ у вигляді (3.61а) отримаємо, якщо під знаком Антьє виокремити одиницю і замінити індекс j на i.

Випадок $d(i+\lambda)-1=0$, де $i \in \mathbf{N}$, а $\lambda = 0, 1, \ldots, \alpha_i - 1$ $(1 \le \alpha_i \le T-1)$ потребує застосування леми 3.3.

На підставі таких самих міркувань виводиться формула (3.61б). Відзначимо, що подвійне s-доповнення нумератора приводить до вихідного нумератора.•

Якщо у формулах (3.61) символи $\nu, T, \overline{T}$ замінити відповідно на $\overline{\nu}, \overline{T}, T$, то прийдемо до двоїстої формули, тому їх природно назвати формулами **взаємного доповнення.**

Проведемо апробацію формул (3.61) на прикладі.

Приклад 3.10. Подайте в аналітичному вигляді за частковими різницями у. а. п.-нумератор (див. приклад 3.8) $\nu(n)$: $2_1 3_2 5_1 6_2 8_1 9_2 ...$; за формулою (3.61) знайдіть його s-доповнення.

Розв'язання. Аналізуємо заданий відрізок нумератора з метою встановлення його періоду і різниці: $T = 2$ (повторюються різниці 1, 2), $D = 3$ – сума часткових різниць. У s-доповнення $\overline{T} = D - T = 1$, а $\overline{D} = D$.

Описуємо $\nu(n)$ за його частковими різницями (див. (3.62)):

$$\nu(n) = 2 + 1 \cdot \left[\frac{n}{2}\right] + 2 \cdot \left[\frac{n-1}{2}\right] = 2 + \underbrace{\left(\left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n-1}{2}\right]\right)}_{n-1} + \left[\frac{n-1}{2}\right] = n + \left[\frac{n+1}{2}\right].$$

Далі за другою формулою (3.61) знаходимо аналітичний опис $\overline{\nu}(n)$:

$$\overline{\nu}(n) = n + 2 + \sum_{i=1}^{2}\left[\frac{n-1-(\nu(i)-i)}{1}\right] = n + 2 + (n-2) + (n-2) = 3n - 2,$$

що цілком відповідає дійсності (зіставте з $\nu(n)$).•

Як бачимо, $\overline{\nu}(1) = 1$, а $\nu(1) = 2$, і якщо виходити з $\overline{\nu}(n)$, то отримаємо формулу вигляду (3.61а).

Теорема 3.12 (*формули обернення* [32], [36]). Якщо $(\nu(n), T_\nu, D_\nu)$ – у. а. п.-нумератор, а $(\mu(n), T_\mu, D_\mu)$ – бієктивно відповідний йому індикатор, тобто $T_\mu = D_\nu$, $D_\mu = 0$, то:

$$\mu(n) = \sum_{i=1}^{T_\nu} e_{\nu(i)}(n, T_\mu), \tag{3.63}$$

$$\nu(n) = \sum_{i=1}^{T_\mu}\left[\frac{1}{T_\nu}\left(n - 1 + \sum_{j=i}^{T_\mu}\mu(j)\right)\right], \; T_\nu = \sum_{j=1}^{T_\mu}\mu(j). \tag{3.64}$$

Доведення. За означеннями індикатора і нумератора для кожного n нумератор $\nu(n)$ визначає значення індикатора, що дорівнює одиниці, тому $(\mu \circ \nu)(n) = 1 \; \forall n \in \mathbf{N}$. Звідси й отримуємо (3.63).

Легко показати безпосередньою перевіркою, що формула (3.63) задовольняє рівняння $\mu(n+T_\mu) - \mu(n) = 0$, тобто $\mu(n)$ є періодичною послідовністю з періодом T_μ. Дійсно, базисні індикатори мають властивість $e_i(n+T) = e_i(n)$, $i = \overline{1,T}$ (див. теорему 3.2), тому

$$\mu(n+T_\mu) = \sum_{i=1}^{T_\nu} e_{\nu(i)}(n, T_\mu) =$$

$$= e_{\nu(1)}(n, T_\mu) + e_{\nu(2)}(n, T_\mu) + \ldots + e_{\nu(T_\mu)}(n, T_\mu) = \mu(n).$$

Для доведення (3.64), перш за все, слід зауважити, що період нумератора T_ν є сумою значень елементів індикатора $\mu(n)$ з періодом $T_\mu = D_\nu$, адже згідно з бієкцією $\mu(n) \leftrightarrow \nu(n)$ кількість одиниць в періоді індикатора визначає період нумератора: $T_\nu = \sum_{j=1}^{T_\mu} \mu(j)$. На цій підставі переконуємося, що $\nu(n+T_\nu) - \nu(n) = D_\nu = T_\mu$.

Далі, враховуючи (3.63), покажемо що в межах одного періоду

$$\sum_{i=1}^{T_\mu} \left[\frac{1}{T_\nu} \left(m - 1 + \sum_{j=i}^{T_\mu} \sum_{k=1}^{T_\nu} e_{\nu(k)}(j) \right) \right] = \nu(m) \quad \forall m \in \{1, 2, \ldots, T_\nu\}. \tag{3.65}$$

Для цього проведемо підсумовування за індексом $i = 1, 2, \ldots, T_\mu$, змінюючи порядок сумування в подвійній сумі, тобто зовнішнє сумування проведемо за індексом k. Для $i = 1$

$$\sum_{j=1}^{T_\mu} e_{\nu(1)}(j) + \sum_{j=1}^{T_\mu} e_{\nu(2)}(j) + \ldots + \sum_{j=1}^{T_\mu} e_{\nu(T_\nu)}(j) = T_\nu.$$

Зі збільшенням i значення аналогічної суми не збільшуються, оскільки випадають доданки, для яких $\nu(k)<i$, $k=1,2,...,T_\nu$.

Якщо $i=m$ $(m>1)$, то

$$\sum_{j=\nu(m)}^{T_\mu} e_{\nu(1)}(j)+\sum_{j=\nu(m)}^{T_\mu} e_{\nu(2)}(j)+...+\sum_{j=\nu(m)}^{T_\mu} e_{\nu(T_\nu)}(j)=T_\nu-(m-1).$$

Таким чином, у лівій частині співвідношення (3.65) $\nu(m)$ доданків дорівнюють одиниці, а останні – нулю, звідки й випливає справедливість (3.64). Вираз для $\nu(n)$ спрощується за допомогою співвідношення (3.5).

Наслідки:

1) з урахуванням формули $T_\nu=\sum_{j=1}^{T_\mu}\mu(j)$:

$$\nu(n)=\sum_{i=1}^{T_\mu}\left[\frac{1}{T_\nu}\left(n+T_\nu-\left(\sum_{j=1}^{i-1}\mu(j)+1\right)\right)\right]; \tag{3.66}$$

2) якщо в (3.66) підсумовування за j брати в межах від 1 до i, то:

$$\nu(n)=\sum_{i=1}^{T_\mu}\left[\frac{1}{T_\nu}\left(n+T_\nu-\left(\sum_{j=1}^{i}\mu(j)+1\right)\right)\right]+1.\bullet \tag{3.67}$$

Приклад 3.11. Згідно з (3.64) за відрізком індикатора (табл. (3.4)) знайдіть аналітичний опис відповідного у. а. п.-нумератора.

Таблиця 3.4

Відрізки заданого індикатора та нумератора

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13…
$\mu(n)$	1	0	1	1	1	0	1	0	1	1	1	0	1…
$\nu(n)$	1		3	4	5		7		9	10	11		13…

.

Розв'язання. Аналізуємо задану табл. 3.4 з метою встановлення періоду й різниці $\mu(n)$ та $\nu(n)$. Ними відповідно є відрізки:

$$\underbrace{1_{-1}0_{1}1_{0}1_{0}1_{-1}0_{1}1}_{T_\mu=6,\,D_\mu=0} \text{ і } \underbrace{1_{2}3_{1}4_{1}5_{2}7}_{T_\nu=4,\,D_\nu=6}.$$

Періоди охоплюються фігурною дужкою, а різниці ч/п визначаються за сумою часткових різниць, які наведені між елементами ч/п.

Підраховуючи необхідні суми згідно з (3.64), отримуємо:

$$\nu(n)=\sum_{i=1}^{6}\left[\frac{1}{4}\left(n-1+\sum_{j=i}^{6}\mu(j)\right)\right]=$$

$$=\left[\frac{n-1+4}{4}\right]+\left[\frac{n-1+3}{4}\right]+\left[\frac{n-1+3}{4}\right]+\left[\frac{n-1+2}{4}\right]+\left[\frac{n-1+1}{4}\right]+\left[\frac{n-1+0}{4}\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \nu(n)=\left[\frac{n+3}{4}\right]+2\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]+\left[\frac{n-1}{4}\right].$$

За властивістю Антьє (3.5)

$$\left[\frac{n+3}{4}\right]+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n}{4}\right]=n.$$

Остаточно маємо:

$$\nu(n)=n+\left[\frac{n+2}{4}\right]+\left[\frac{n-1}{4}\right].$$

Переконайтеся, що (3.67) дає той самий результат.•

Стосовно логічної різниці двох послідовностей $x(n)$, $y(n)$, яка не є головною операцією S-алгебри, відразу зазначимо, що її виконання зводиться до S-перетину першого операнда із S-доповненням другого операнда:

$$(x \llcorner y)(n) = (x \sqcap \neg y)(n). \qquad (3.68)$$

Нехай задано у.а.п. $(f(n), T, D)$ з T-розбиттям на арифметичні прогресії $\nu_i(n) = i + T(n-1)$, $i = \overline{1,T}$, що породжує T_ν-базис нумераторів $\{\nu_i(n)\}$, $i = \overline{1,T}$ і T_e-базис індикаторів $\{e_i(n)\}$, $i = \overline{1,T}$ (див. (3.10) і (3.16)).

Логічне доповнення нумераторів, і не тільки базисних, знаходиться за формулами взаємного доповнення (3.61).

Почнемо з базисних: $\nu_j(n) = j + T(n-1)$, $j = \overline{1,T}$, де замінено індекс i на j, щоб не виникло колізій під час використання (3.61):

$$\bar{\nu}_j(n) = n + T + \sum_{i=1}^{T}\left[\frac{1}{\bar{T}}(n - 1 - (j + T(i-1) - i)\right]. \qquad (3.69)$$

Приклад 3.12. Знайдемо S-доповнення арифметичної прогресії $\nu_3(n) = 3 + 4(n-1)$, тобто базисного нумератора $(\nu_3(n), 1, 4)$ з першим членом, що дорівнює трьом, і різницею, що дорівнює чотирьом, переконаємося в тому, що результатом логічної суми $\nu_3(n)$ і $\bar{\nu}_3(n)$ є універсум.

Розв'язання. За умовою $\nu_3(n) = 3 + 4(n-1) = 4n - 1$, тобто $D = 4$, $T = 1$, тоді $\bar{D} = 4$, $\bar{T} = D - T = 3$. Усі числові параметри відомі, отже, записуємо загальний член $\bar{\nu}_3(n)$:

$$\bar{\nu}_3(n) = n + 1 + \sum_{i=1}^{1}\left[\frac{1}{3}(n - 1 - (3i - 1)\right] = n + 1 + \left[\frac{n-3}{3}\right].$$

Остаточно

$$\bar{\nu}_3(n) = n + [n/3]. \qquad (3.70)$$

Переконаємося в тому, що результатом логічної суми є універсум: $\nu_3(n) \sqcup \overline{\nu}_3(n) = s_\circ(n) = n$. Для цього подамо $\overline{\nu}_3(n)$ у вигляді (3.54):

$$\overline{\nu}_3(n) = 4\left[\frac{n-1}{3}\right] + \sum_{i=1}^{3} \overline{\nu}_3(i) e_i(n,3).$$

Перший, другий і третій доданки під знаком суми описують відповідно арифметичні прогресії із загальними членами

$$1+4(n-1)=4n-3,\ \ 2+4(n-1)=4n-2,\ \ 4+4(n-1)=4n,$$

які в сукупності з $\nu_3(n)=4n-1$ складають 4-розклад послідовності натуральних чисел, тому їх логічна сума є універсумом $s_\circ(n)=n$.●

Зауваження. Якщо $\nu(n)$ не базисний нумератор, а є у. а. п.-нумератором, то його логічне доповнення до універсуму знаходиться за допомогою таких самих конструктивних засобів – використання формули обернення (3.61).

Дуже легко знайти логічну різницю між нумераторами $\nu_1(n)$ і $\nu_2(n)$, якщо $\nu_1(n) \sqcap \nu_2(n) = s_\varnothing$: $\nu_1(n) \mathrel{\llcorner} \nu_2(n) = \nu_1(n)$.

3.5. Логічні властивості узагальнених арифметичних прогресій

Результати дослідження логічних властивостей нумераторів, які не є базисними (являють собою у. а. п. з періодом, більшим від одиниці), без принципових змін переносяться на будь-яку у. а. п. $(f(n), T, D)$. А саме (див. (3.54) або (3.56), (3.61), (3.63), (3.64)):

подання $f(n)$ через базисні індикатори:

$$f(n) = \sum_{i=1}^{T} e_i(n) f_i\left(\left[\frac{n-1}{T}\right]+1\right) = D\left[\frac{n-1}{T}\right] + \sum_{i=1}^{T} f(i) e_i(n); \tag{3.71}$$

формули взаємного доповнення:

$$\begin{aligned} f(n) &= n+\overline{T}+\sum_{i=1}^{\overline{T}}\left[\frac{1}{T}(n-1-(\overline{f}(i)-i))\right], \\ \overline{f}(n) &= n+T+\sum_{i=1}^{T}\left[\frac{1}{\overline{T}}(n-1-(f(i)-i))\right]; \end{aligned} \tag{3.72}$$

формули обернення:

$$\mu(n)=\sum_{i=1}^{T} e_{f(i)}(n, T_\mu), \tag{3.73}$$

$$f(n)=\sum_{i=1}^{T_\mu}\left[\frac{1}{T}\left(n-1+\sum_{j=i}^{T_\mu}\mu(j)\right)\right], \; T=\sum_{j=1}^{T_\mu}\mu(j). \tag{3.74}$$

Досі досліджувалася у. а. п. $(f(n), T, D)$ та її m-розширення $(f(n), mT, mD)$. Далі розглянемо s-операції над у. а. п., які мають різні періоди з однаковими або різними розширеннями різниць.

Логічна сума узагальнених арифметичних прогресій

Теорема 3.13 (*про логічну суму у. а. п. з однаковими різницями*).

Якщо $(f_i(n), T_i, mD_0)$, $i=1,2$, – послідовності деякого універсуму $(f_0(n), T_0, mD_0)$ з у. а. п.-нумераторами $(\nu_i(n), T_i, m_iT_0) \sqsubset \nu_0(n)=n$, то логічна сума $f_{12}(n)=f_1(n) \sqcup f_2(n)$ є у. а. п. з періодом $T_\sqcup \le T_1+T_2$ і різницею $D_\sqcup = mD_0$.

Доведення. За теоремою 3.10 логічна сума T_i елементів універсуму є у. а. п. з періодом T_i і різницею mD_0:

$$f_i(n)=\bigsqcup_{k_i=1}^{T_i} f_{ik_i}(n), \text{ де } f_{ik_i}(n)=f_{ik_i}(1)+mD_0(n-1), \; k_i=\overline{1,T_i}.$$

Відповідні нумератори $\nu_i(n)$, $i=1,2$, за теоремою 3.8 описуються S-об'єднанням елементів $m_i T_{\nu_i}$-базисів:

$$\nu_i(n)=\bigsqcup_{k_i=1}^{T_i}\nu_{ik_i}(n), \text{ де } \nu_{ik_i}(n)=\nu_{ik_i}(1)+m_i T_0(n-1),\ k_i=\overline{1,T_i}.$$

Якщо $rng\,\nu_{1k_1}(n)\bigcap rng\,\nu_{2k_2}(n)=\varnothing$, то отримаємо (T_1+T_2) різних елементів $\nu_i(n)$, і залишається для опису s-об'єднання скористатися формулами (3.48) і (3.52):

$$(f_{12}(n), T_{\sqcup}, D_{\sqcup}), \text{ де } T_{\sqcup}=T_1+T_2,\ D_{\sqcup}=mD_0. \tag{3.75}$$

Якщо серед нумераторів ν_{ik_i}-х є такі, що збігаються, то

$$T_{\sqcup}=T_1+T_2-t_{\sqcap},\ D_{\sqcup}=mD_0, \tag{3.76}$$

де $t_{\sqcap}=|rng\,\nu_{1k_1}(n)\bigcap rng\,\nu_{2k_2}(n)|$ – кількість елементів у перетині породних множин нумераторів.•

Теорема 3.14 (*про логічну суму у. а. п. із різними різницями*).

Якщо $(f_i(n), T_i, m_i D_0)$, $i=1,2$, – послідовності деякого універсуму $(f_0(n), T_0, mD_0)$ з у. а. п.-нумераторами $(\nu_i(n), T_i, m_i T_0)\sqsubset \nu_0(n)=n$, то логічна сума $f_{12}(n)=f_1(n)\sqcup f_2(n)$ є у. а. п. з періодом $T_{\sqcup}\le m\left(\frac{T_1}{m_1}+\frac{T_2}{m_2}\right)$ і різницею $D_{\sqcup}=mD_0$, де $m=[m_1, m_2]$ – найменше спільне кратне m_1, m_2.

Доведення. Використовуючи (3.43), здійснимо $\frac{m}{m_i}$-розширення заданих послідовностей:

$$(f_i(n), T_i, m_i D_0) \;\Rightarrow\; (f_i(n), \frac{m}{m_i}T_i, mD_0),\ i=1,2.$$

Ситуація звелася до розгляду двох у. а. п. з однаковими різницями. За теоремою 3.13

$$(f_{12}(n), T_{\sqcup}, D_{\sqcup}),\ T_{\sqcup} = m\left(\frac{T_1}{m_1} + \frac{T_2}{m_2}\right) - t_{\sqcap},\ D_{\sqcup} = mD_0,$$

де $t_{\sqcap} = |rng\ \nu_{1k_1}(n) \cap rng\ \nu_{2k_2}(n)|$ – кількість елементів у перетині породних множин нумераторів $(\nu_{ik_i}(n), 1, mT_0)$, $k_i = 1,\ 2,\ ...,\ \frac{m}{m_i} T_i$.•

Наслідок. Якщо $(f_i(n), T_i, D_i)$, $i = \overline{1, p}$, $p > 2$, – натуральні у. а. п., які попарно не перетинаються, то вислідна послідовність така:

$$(\bigsqcup_{i=1}^{p} f_i(n), T, D),\ \text{з}\ T = D\sum_{i=1}^{p}\frac{T_i}{D_i}\ \text{і}\ D = [D_1, D_2, ..., D_p].$$

Теорема узагальнюється на довільну скінченну кількість у. а. п., при цьому для отримання $T_{\sqcup}$ треба застосовувати формулу методу включення-виключення [29]. Звичайно, у ролі універсуму частіше виступає не якась у. а. п., а послідовність натуральних чисел.•

Із теорем 3.13 та 3.14 випливає головний **висновок:** множина $M(s)$ у. а. п.-підмножин універсуму $s_0(n)$ – замкнена відносно операції логічної суми.

Логічний добуток узагальнених арифметичних прогресій

Знаходження S-перетину у. а. п. не викликає принципових труднощів. Кон'юнкція (S-перетин) елементів деякого базису індикаторів (нумераторів) дає порожній індикатор (нумератор).

У загальному випадку кон'юнкція k $(k > 2)$ індикаторів згідно з (3.13) знаходиться покоординатним добутком:

$$\bigwedge_{i=1}^{k} \mu_i(n) = \mu_1(n) \cdot \mu_2(n) \cdot ... \cdot \mu_k(n),\ n = 1, 2, ... \tag{3.77}$$

Результівний індикатор і визначає S-перетин відповідних підпослідовностей універсума.

Логічний добуток у. а. п.-нумераторів знаходиться як загальний розв'язок систем лінійних рівнянь, що містять Антьє. Якщо задані нумератори розкласти за елементами загального базису, то приходимо до наборів арифметичних прогресій із рівними різницями.

Для операції П справедливі твердження, аналогічні до теорем 3.13 та 3.14 і висновків із них. Їх справедливість ґрунтується на тих самих засадах, тому наведемо відповідні теореми без доведення.

Теорема 3.15 (*про логічний перетин у. а. п. з однаковими різницями*).

$$(f_1(n), T_1, mD_0) \sqcap (f_2(n), T_2, mD_0) = (f_{12}(n), T_{\text{п}}, D_{\text{п}}), \tag{3.78}$$

де $T_{\text{п}} = T_1 + T_2 - t_{\text{п}}$, $D_{\text{п}} = mD_0$, $t_{\text{п}} = |rng\, \nu_{1k_1}(n) \cap rng\, \nu_{2k_2}(n)|$, а $\nu_{ik_i}(n)$ – у.а.п. $(\nu_{ik_i}(n), 1, m_iT_0)$, $i = 1, 2$, $k_i = \overline{1, T_i}$.

При $T_{\text{п}} = 0$ маємо $f_{12}(n) = s_\varnothing$, а якщо $rng\, \nu_{1k_1}(n) = rng\, \nu_{2k_2}(n)$, то $T_{\text{п}} = T_1 = T_2$ і $f_{12}(n) = f_1(n) = f_2(n)$.•

Теорема 3.16 (*про логічний перетин у.а.п. з різними різницями*).

$$(f_1(n), T_1, m_1D_0) \sqcap (f_2(n), T_2, m_2D_0) = (f_{12}(n), T_{\text{п}}, D_{\text{п}}), \tag{3.79}$$

де $T_{\text{п}} = m\left(\dfrac{T_1}{m_1} + \dfrac{T_2}{m_2}\right) - t_{\text{п}}$, $D_{\text{п}} = mD_0$, $m = [m_1, m_2]$, $t_{\text{п}}$ – кількість елементів перетину породних множин нумераторів, а $\nu_{ik_i}(n)$ – у. а. п.-нумератори

$(\nu_{ik_i}(n), \dfrac{m}{m_i}T_i, mT_0)$, $i = 1, 2$, $k_i = 1, 2, ..., \dfrac{m}{m_i}T_i$.•

Висновок. Множина $M(s)$ у. а. п. – підмножин універсуму $s_\circ(n)$– замкнена відносно операції логічного перетину.

Логічне доповнення і логічна різниця узагальнених арифметичних прогресій

Нехай $(f(n), T, D)$ – універсум (зокрема, $s_\circ = n$), $(f_1(n), T_1, mD)$ – підпослідовність $f(n)$, тобто $f_1(n) = (f \circ \nu_1)(n)$, $\nu_1(n)$ – s-об'єднання деяких, у кількості T_1, базисних нумераторів mT_ν-базису. s-Об'єднання нумераторів цього базису, які не ввійшли до $\nu_1(n)$, дає нумератор $\neg\nu_1(n)$ послідовності, яка доповнює $f_1(n)$ до $f(n)$. На цій підставі період s-доповнення $\neg f_1(n)$ є $\overline{T_1} = mT - T_1$, а його різниця $\overline{D_1}$ буде такою ж, як і у $f(n)$, тобто

$$(f_1(n), T_1, mD) \Rightarrow (\neg f_1(n), \overline{T_1}, \overline{D_1}),\ \overline{T_1} = mT - T_1,\ \overline{D_1} = mD. \qquad (3.80)$$

Приклад 3.13. Знайдіть s-доповнення $\neg(c \cdot n)$, $c > 1$, $c \in \mathbf{N}$.

Розв'язання. На відміну від прикладу 3.12 застосовувати формулу взаємного доповнення (3.61) не будемо, а використаємо c-розбиття універсуму $s_\circ(n) = n$: $n = \bigsqcup_{i=1}^{c} (i + c(n-1)))$.

Тоді

$$\neg(c \cdot n) = n \llcorner (c \cdot n) = \bigsqcup_{i=1}^{c-1} (i + c(n-1)),\ \overline{T} = c - 1,\ \overline{D} = c.$$

Далі, враховуючи теорему 3.2, наслідок із неї (3.11), теорему 3.10 і (3.56),приходимо до такого:

$$\neg(c \cdot n) = \neg\sum_{i=1}^{c-1}\left(i + c\left[\frac{n-1}{c-1}\right]\right)e_i(n, \overline{T}) = n + \left[\frac{n-1}{c-1}\right]. \bullet \qquad (3.81)$$

Оскільки система функцій $\vee, \wedge, \overline{}$ повна відносно множини булевих функцій, повною відносно множини у. а. п. $M(s)$ буде й система операцій $\sqcup$, $\sqcap$, $\neg$, тому s-різниця у. а. п. виражається через них, а саме:

$$\big((f_1(n), T_1, m_1 D) \in M(s)\,,\ (f_2(n), T_2, m_2 D) \in M(s)\big) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ (f_1 \llcorner\, f_2)(n) = (f_1 \sqcap \urcorner f_2)(n) \in M(s)\big). \tag{3.82}$$

Згідно з теоремою 3.16 для $(f_j(n), T_j, m_j D) \sqsubset (f(n), T, D) = s_\circ(n)$, $j = 1, 2$, маємо:

$$(f_1 \llcorner\, f_2)(n)\,,\ T_\llcorner, D_\llcorner),\ T_\llcorner = m\left(\frac{T_1}{m_1} + \frac{\bar{T}_2}{m_2}\right) - t_\sqcap\,,$$

$$D_\llcorner = mD\,,\ m = [m_1, m_2],\ \bar{T}_2 = mT - T_2\,,$$

де $t_\sqcap$ – кількість елементів перетину породних множин нумераторів:

$$(\nu_{1k_1}(n), \mathbf{1}, mT),\ (\nu_{1k_2}(n), \mathbf{1}, mT),\ k_1 = 1, 2, ..., \frac{m}{m_1}T_1,\ k_2 = 1, 2, ..., \frac{m}{m_2}\bar{T}_2\,.$$

Викладене в п. 3.5 дозволяє зробити **висновок:** множина у. а. п. $M(s)$ підпослідовностей певного універсуму $s_0(n)$ замкнена відносно операцій $\sqcup$, $\sqcap$, $\urcorner$, тобто є S-алгеброю.

Цікавим з точки зору розширення можливостей конструктивних засобів є питання знаходження S-доповнень не тільки натуральних у. а. п., а натуральних ч/п взагалі.

Теорема 3.17 (*про логічне доповнення не у. а. п.-нумераторів*). Якщо послідовність $\nu(m)$, $m \in \mathbf{N}$, така, що рівняння $\nu(m) - m + 1 = n$ розв'язуване відносно m в аналітичному вигляді: $m = \psi(n)$, то логічне доповнення $\overline{\nu(n)}$ описується формулою:

$$\overline{\nu(n)} = n + [\psi(n)], \tag{3.83}$$

де Антьє від $\psi(n)$ названа **функцією-стрибком** логічного доповнення.

Доведення. Кількість елементів нумератора $\overline{\nu(n)}$, що передують за певного m членові $\nu(m)$, як уже зазначалося під час доведення леми 3.2, дорівнює $\nu(m)-m$. Збільшена ж на одиницю ця різниця дає номер n наступного елемента доповнення нумератора $\overline{\nu(n)}$: $\nu(m)-m+1=n$. Отже, якщо $m=\psi(n)$ є коренем рівняння $\nu(m)-m+1=n$, то Антьє від m визначатиме "стрибок" на дві одиниці значення нумератора $\overline{\nu(n)}$ порівняно з попереднім. Таким чином, маємо ланцюжок:

$$\left(\nu(m)-m+1=n \;\Rightarrow\; m=\psi(n)\right) \;\Rightarrow\; \overline{\nu(n)}=n+[m]=n+[\psi(n)].\bullet$$

Основна складність в отриманні $\overline{\nu(n)}$ полягає, безумовно, в знаходженні m як функції від n. Порівняно легко ця задача розв'язується для поліномів степеня, не вищого від четвертого, і для функцій вигляду $f(n)=f_1(n)+n$, де $f_1(n)$ має обернену функцію $f_1^{-1}(n)$.

Приклад 3.14. Дано $f(n)=n^2$. Знайдіть загальний член послідовності неквадратів – послідовності, яка не містить квадрати натуральних чисел: $\overline{f}(n)=\neg n^2$, або $\overline{f}(n)=\overline{n^2}$.

Розв'язання. Випишемо відрізок універсуму і вкажемо елементи послідовностей $f(n)$ і $\overline{f}(n)$:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$f(n)$	$f(1)$			$f(2)$					$f(3)$
$\overline{f}(n)$		$\overline{f}(1)$	$\overline{f}(2)$		$\overline{f}(3)$	$\overline{f}(4)$	$\overline{f}(5)$	$\overline{f}(6)$	

.

Під кожним числом першого рядка у другому рядку вказані занумеровані по порядку елементи $f(n)$: $f(1)=1$, $f(2)=4$, $f(3)=9$.

У третьому рядку занумеровані по порядку елементи $\overline{f}(n)$: $\overline{f}(1)=2$, $\overline{f}(2)=3$, $\overline{f}(3)=5$, $\overline{f}(4)=6$, $\overline{f}(5)=7$, $\overline{f}(6)=8$.

За порожніми комірками другого і третього рядків простежується кількість членів $\overline{f}(n)$ $\left(f(n)\right)$, які передують елементам $f(n)$ ($\overline{f}(n)$).

Діємо згідно з теоремою 3.17 (за ланцюжком із точкою •):

$$m^2 - m + 1 = n \;\Rightarrow\; m^2 - m - (n-1) = 0 \;\Rightarrow\; m = \frac{1+\sqrt{1+4(n-1)}}{2} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; \psi(n) = [(\sqrt{4n-3}+1)/2] \;\Rightarrow\; \overline{f}(n) = \neg n^2 = n + [(\sqrt{4n-3}+1)/2].$$

Наведемо відрізок значень s-доповнення послідовності $f(n) = n^2$:

n	<u>1</u>	2	<u>3</u>	4	5	6	<u>7</u>	8	9…
$\overline{f}(n)$	2	3	5	6	7	8	10	11	12…

.

Визначимо номери n, для яких $\overline{f}(n)$ здійснює стрибки (у першому рядку вони підкреслені):

$$\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2} = l \;\Rightarrow\; \sqrt{4n-3} = 2l-1 \;\Rightarrow\; 4n-3 = (2l-1)^2 \;\Rightarrow$$

$\Rightarrow\; n = l^2 - l + 1 = l(l-1)+1,\; l$ – натуральне число.•

Аналогічно описуються інші послідовності натуральних чисел, які не є фігурними, *наприклад*, послідовність не трикутних чисел:

$$\neg n(n+1)/2 = n + [(\sqrt{8n-7}+1)/2].$$

Як відзначалося, легко знайти s-доповнення для класу функцій вигляду: $f(n) = f_1(n) + n$, де $\exists f_1^{-1}(n)$. *Наприклад,* якщо $f(n) = 2^n + n$, то

$$\neg(2^n + n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n + [\log_2(n-1)], & n \ge 2 \end{cases}.$$

Інші приклади s-доповнення наведені в додатку Г.

3.6. Форми подання узагальнених арифметичних прогресій і повні відносно них системи функцій

Підсумовуючи розглянуте в п. 3, маємо подання у. а. п. за допомогою: *функціонального рівняння* (за означенням (3.17)):

$$f(n+T)-f(n)=D;$$

кортежу арифметичних прогресій (див. (3.25)):

$$f_{n+2}^{i}=2f_{n+1}^{i}-f_{n}^{i},\ i=\overline{1,T};$$

зворотного рівняння (згідно з (3.32)):

$$f(n+T+1)=f(n+T)+f(n+1)-f(n);$$

загального члена у вигляді суми кусково-сталої функції і періодичної складової (див. (3.56)):

$$f(n)=D\left[\frac{n-1}{T}\right]+\sum_{i=1}^{T}f(i)e_i(n);$$

загального члена в тригонометричній формі (згідно з теоремою 3.6 , див. (3.35)):

$$f(n)=A_0(n-1)+B_0+\sum_{k=1}^{T-1}B_k\left(\cos\frac{2\pi k}{T}(n-1)+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{T}(n-1)\right).$$

Із аналізу арифметичних подань у. а. п. з урахуванням їхніх арифметичних і логічних властивостей випливає повнота множини всіх натуральних у.а.п. $M(s)$ відносно системи функцій:

$$H_A=\{\ x+y, xy,\ \frac{x}{y}\ (y\neq 0),\ x,y\in\mathbf{N}\cup\{0\};\ ax,\ a\in\mathbf{Z},\ \left[\frac{x}{a}\right],\ a\neq 0\},\quad (3.84)$$

тобто $M(s)$ є підмножиною множини всіх H_A-реалізовних функцій:

$$M(s) \subset \{H_A\}. \tag{3.85}$$

Аналогічно з аналізу тригонометричного подання у. а. п. з урахуванням їхніх арифметичних і логічних властивостей випливає повнота множини всіх натуральних у. а. п. $M(s)$ відносно системи функцій:

$$H_T = \{x + y, xy, x/y \ (y \neq 0),\ x, y \in \mathbf{R};\ \sin ax,\ \cos ax, a \in (-\infty, +\infty)\} \tag{3.86}$$

тобто $M(s)$ є підмножиною множини всіх H_T-реалізовних функцій:

$$M(s) \subset \{H_T\}. \tag{3.87}$$

Дійсно, оскільки за допомогою арифметичних операцій і композицій із систем функцій H_A і H_T можна отримати не тільки у. а. п.

3.7. Поняття про мішані й кускові узагальнені арифметичні прогресії

У попередньому викладі (п. 2.2, (2.11) – (2.14)) розглядалися у.а.п. як підпослідовності деякого універсуму, зокрема $s_\circ = s_\circ(n) = n$, теоретико-множинні операції над породними множинами яких дають зліченну або порожню множину. Нумератори таких ч/п є базисними або у.а.п.-нумераторами як S-об'єднання базисних. Саме для таких у. а. п. справедливий висновок про їхню замкненість відносно S-операцій.

Базисні нумератори будь-якого m-розширення T_ν-базису (якщо $m = 1$, маємо T_ν-базис), описуються арифметичними прогресіями (3.28) $\nu_i(n) = i + mT(n-1)$, $i = \overline{1, T}$, у яких перші члени не перевищують mT. А якщо взяти арифметичні прогресії з тією ж різницею, але першим членом, більшим від mT? Логічна сума – S-об'єднання – таких нумераторів уже не є у. а. п.

Приклад 3.15. Дано лінійні нумератори $\nu_1(n)=2n-1$, $\nu'_2(n)=4n+6$. Знайдіть відрізок їхньої логічної суми, на якому простежується закономірність утворення S-об'єднання.

Розв'язання. Наводимо наочне подання нумераторів за кількома першими членами, вказуючи між ними часткові різниці:

$$\nu_1(n)=(1\,{}_2 3\,{}_2 5\,{}_2 7\,{}_2\,9\,{}_2 11\,{}_2 ...),\ \nu'_2(n)=(10\,{}_4 14\,{}_4 18\,{}_4 22\,{}_4\,26\,{}_4 ...).$$

Логічна сума $\nu'_{12}(n)=\nu_1 \sqcup \nu'_2$ має вигляд:

$$\nu'_{12}(n)=(1\,{}_2 3\,{}_2 5\,{}_2\big|7\,{}_2\,9\,{}_1\,10\,{}_1\,11\,{}_2\,13\,{}_1\,14\,{}_1 15\,{}_2 17\,{}_1 18\,{}_1 19\,{}_2 ...)\ .$$

Бачимо, що періодичність трійки часткових різниць – (211) – спостерігається з четвертого члена (після риски), починаючи з нього $\nu'_{12}(n)$ стає у. а. п.•

Нумератори з першими членами, більшими від mT, тягнуть за собою послідовності, які не є у. а. п. Таким чином, приходимо до узагальнення поняття у. а. п.

Послідовність $f(n)$ називається **мішаною у. а. п.,** якщо $\forall n > k$, $k \in \mathbf{N}$, виконується співвідношення:

$$f(n+T)-f(n)=D,\quad T, D-const. \tag{3.88}$$

Загальний член такої ч/п має дві складові: доперіодична частина – функція $f_1(n)$, і власне у. а. п. – $f_2(n)$:

$$f(n)=\begin{cases} f_1(n), & 1<n\le k \\ f_2(n), & n>k \end{cases}. \qquad 3.89)$$

Число k природно назвати **дефектом** у. а. п. або у. а. п.-нумератора, а самі ч/п – **урізаними з дефектом** $\boldsymbol{k}$. У прикладі 3.15 $k=3$.

На противагу мішаним у. а. п. послідовності $f(n)$, які задовольняють рівняння (3.88) $\forall n \in \mathbf{N}$, будемо називати **чистими у. а. п.**

Деякі види не базисних нумераторів і відповідних їм послідовностей можна описати єдиним аналітичним виразом за допомогою модифікації Антьє – функції Антьє-плюс ($[x]_+$, або $E_+(x)$):

$$E_+(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ E(x), & x\ge 0\end{cases}=\begin{cases}0, & x<1\\ E(x), & x\ge 1\end{cases}=\frac{1}{2}(E(x)+|E(x)|). \qquad (3.90)$$

До таких нумераторів належать деякі урізані й мішані нумератори.

Безпосередньою перевіркою переконуємося, *наприклад,* що логічна сума двох нумераторів:

$$\nu(n)=n+\left[\frac{an+b}{c}\right]_+,\ \bar{\nu}(n)=n+\left[\frac{\bar{a}n+\bar{b}}{\bar{c}}\right]_+,\ a,c\in\mathbf{N},\ b,\bar{b}\in\mathbf{Z}, \qquad (3.91)$$

які не перетинаються, за виконання умов: $\bar{a}=c$, $\bar{c}=a$, $b+\bar{b}=-1$, дає універсум $\nu_\circ(n)=n$.

Приклад 3.15. Покажіть, що образом s-об'єднання нумераторів $\nu(n)=n+\left[\frac{2n+7}{3}\right]$, $\bar{\nu}(n)=n+\left[\frac{3n-8}{2}\right]_+$ є послідовність натуральних чисел.

Розв'язання. Аналіз $\nu(n)$ показує, що це є чиста у. а. п.:

$$\nu(n)=(4_1 5_2 7_2 9_1 10_2 12_2 14_1 \ldots),$$

з першим членом 4 і різницею 5.

Другий нумератор – мішана у. а. п. з дефектом, що дорівнює двом:

$$\bar{\nu}(n)=(1_1 2_1 3_3 6_2 8_3 11_2 13_3 16_2 \ldots).$$

Логічна сума дорівнює універсуму нумераторів:

$$\nu(n)\sqcup\bar{\nu}(n)=s_\circ(n)=n=(1_1 2_1 3_1 4_1 5_1 6_1 7_1 8_1 \ldots).$$

До речі, рівність (3.81), отримана іншим шляхом, узгоджується зі співвідношеннями (3.91)

$$\nu(n) = c\cdot n = n + (c-1)n = n + \left[\frac{(c-1)n+0}{1}\right] \;\Rightarrow\; \bar{\nu}(n) = n + \left[\frac{n-1}{c-1}\right]. \bullet \qquad (3.92)$$

У загальному випадку задача подання мішаної у. а. п. однією формулою не є легкою.

За аналогією з функціями неперервного аргументу приходимо ще до одного узагальнення у. а. п. **Кусковою у. а. п.** називається послідовність $f(n)$, складена зі зліченної множини відрізків різних у. а. п.:

$$f(n) = \begin{cases} f_1(n), & 1 \le n \le n_1 \\ f_2(n), & n_1 < n \le n_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ f_k(n), & n_{k-1} < n \le n_k \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases}. \qquad (3.93)$$

Зокрема, це можуть бути відрізки однієї й тієї ж у. а. п.

Наприклад, розглядаючи послідовність натуральних як у. а. п., у якої період і різниця рівні між собою: $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}$, маємо:

$$f(n) = f_k(n), \;\; k = 1, 2, \ldots; \;\; n \in \left[\frac{k(k-1)}{2} + 1, \; \frac{k(k+1)}{2}\right], \qquad (3.94)$$

де

$$f_k(n) = n - \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}\right]\cdot\left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right];$$

$$f_1(n) = (1), \quad f_2(n) = (1, 2), \quad f_3(n) = (1, 2, 3), \quad f_4(n) = (1, 2, 3, 4), \ldots .$$

Для кожного k отримуємо відрізок натурального ряду від 1 до k.

Вправи і задачі

1. Переконайтеся, що ч/п (3.11) є періодичною; її період – T перших членів натурального ряду: $f(n) = n - T\left[(n-1)/T\right]$.

2. Покажіть справедливість співвідношення:

$$\sum_{i=1}^{T}(T+1-i)\cdot e_i(n) = T\left(\left[\frac{n-1}{T}\right]+1\right)-n+1.$$

3. В умовах теореми 3.4 запишіть (3.21) $(f^i(n), 1, D)$ у вигляді функціонального рівняння.

4. Доведіть лему 3.1 (*про композицію двох у. а. п.*), використовуючи подання ч/п у вигляді (3.20): $f(n) = a(n) + D\cdot\left[(n-1)/T\right]$.

5. В умовах прикладу 3.5 знайдіть композицію $f_{\circ} = y \circ x$.

6. Наведіть підтвердження асоціативності композицій для випадку чотирьох послідовностей.

7. Обміркуйте, чи справедлива теорема 3.8, якщо послідовності не будуть натуральними.

8. Доведіть теорему 3.9, спираючись на формулу (3.44), для нумераторів.

9. Покажіть, що за допомогою (3.11) загальний член у. а. п. $(f(n), T, D)$ можна подати у вигляді:

$$f(n) = \frac{D}{T}n + \sum_{i=1}^{T}\left(f(i) - \frac{D}{T}i\right)\cdot e_i(n),$$

де $f(i)$, $i = \overline{1, T}$, – її перші T членів.

10. Знайдіть аналітичний опис не базисного нумератора $\nu(n)$: $1_3 4_1 5_3 8_1 9_3 12_1 \ldots$, за допомогою формули (3.54).

11. За яких умов $(\nu_1 \circ \nu_2)(n) = (\nu_2 \circ \nu_1)(n)$, якщо $\nu_1(n) = a_1 n + b_1$, $\nu_2(n) = a_2 n + b_2$, де $a_1, b_1, a_2, b_2 - const$?

12. В умовах прикладу 3.11 за формулою (3.63) покажіть, що опис індикатора такий: $\mu(n) = 1 - [(n+4)/6] + [(n+3)/6] - [n/6] + [(n-1)/6]$.

Розділ 4. Застосування s-алгебри в теорії чисел

Оцінка математичної теорії визначається не тільки її правильністю.
Вона залежить також від важливості предмета і галузі застосування.
За межами цього має бути ще місце для вільних суджень людини.
Джордж Буль.

4.1. Початкові відомості з теорії порівнянь. Деякі важливі теоретико-числові функції

Упровадження логічних операцій над послідовностями в теорію чисел здійснимо, вивчаючи спеціальні натуральні у. а. п. з $s_{\circ}(n)=n$ [39], у. а. п., у яких різницею D_k є **майже просте число** – добуток послідовних простих чисел від $p_1=2$ до якогось p_k, $k\in\mathbf{N}$, а періодом T_k – кількість чисел, які взаємно прості з D_k і не перевищують D_k:

$$s_k(n+T_k)-s_k(n)=D_k, \tag{4.1}$$

де $D_k = p_1 p_2 ... p_k$, а період T_k обчислюється за допомогою так званої **функції Ейлера** [1; 5; 8], яка позначається через $\varphi(\bullet)$:

$$T_k = \varphi(D_k) = (p_1-1)(p_2-1)...(p_k-1), \quad D_0 = T_0 = 1. \tag{4.2}$$

Приклад 4.1. Складіть рівняння (4.1) за умови, що $k=3$, запишіть загальний член послідовності й наведіть її відрізок довжиною T_3.

Розв'язання. Знаходимо різницю $D_3 = p_1 p_2 p_3 = 2\cdot 3\cdot 5 = 30$ і період у. а. п. $T_3 = (p_1-1)(p_2-1)(p_3-1) = 1\cdot 2\cdot 4 = 8$, тоді (4.1) набуде вигляду:

$$s_3(n+8)-s_3(n)=30.$$

Загальний член такий (див. (3.56)):

$$s_3(n) = 30\left[\frac{n-1}{8}\right] + \sum_{i=1}^{8} s_3(i)\, e_i(n,8).$$

Перший доданок у $s_3(n)$ на кожному проміжку з натуральних чисел: $[8l-7, 8l]$, $l=1,2,3,...$, визначає кусково-сталу функцію зі значеннями $(l-1)\,D_3$. На проміжку $[1,8]$ – нуль, на проміжку $[9,16]$ – 30, на проміжку $[17,24]$ – 60 і т. д. Другий доданок – періодична складова – 8-кортеж натуральних чисел, взаємно простих з числом 30.

Відрізок $s_3(n)$ довжиною 8 має вигляд:

$$s_3(n): 1_6\, 7_4\, 11_2\, 13_4\, 17_2\, 19_4\, 23_6\, 29_2\, ..., \tag{4.3}$$

де між елементами послідовності наведені часткові різниці, сума яких дорівнює різниці у. а. п. $D_3 = 30$.

Далі додаванням до кожного елемента першого періоду числа 30 легко визначити елементи наступного періоду.•

Початкові відомості з теорії порівнянь

Нехай m – задане натуральне число: $m \in \mathbf{N}$. Усі числа із $\mathbf{Z}$ відносно числа m розбиваються на m підмножин, елементи яких після ділення на m дають одну й ту саму остачу. Так, якщо $m=2$, цілі числа розбиваються на підмножини парних і непарних чисел: $2k, 2k+1$. Якщо $m=3$, то підмножини описуються числами вигляду $3k, 3k+1, 3k+2$ за цілих k і т. ін. Множина цілих чисел, які належать одній і тій же підмножині, називається **класом розбиття $\mathbf{Z}$**. Представники одного й того ж класу розбиття називаються **порівнянними,** або **конгруентними** (від лат. *congruens* – відповідний, що узгоджується), а розділ теорії чисел, у якому вивчаються властивості класів, має назву **теорія порівнянь** [1; 5; 8]. Формалізуємо означення основних понять теорії порівнянь.

Два цілих числа a і b називаються **конгруентними за модулем $\boldsymbol{m}$**, якщо їх різниця $a-b$ ділиться на m. Висловлення «a і b конгруентні за модулем m» записується у вигляді $a \equiv b (\operatorname{mod} m)$, тобто:

$$\frac{a-b}{m} = c \in \mathbf{Z} \quad \rightleftharpoons \quad a \equiv b (\operatorname{mod} m). \tag{4.4}$$

Як бачимо, порівнянність чисел a і b за модулем m рівносильна можливості подати число a у вигляді:

$$a = b + mc, \ c \in \mathbf{Z}. \tag{4.5}$$

Із (4.4) випливають властивості порівнянь:

1) рефлексивність: $a \equiv a (\bmod m)$;

2) симетричність: $a \equiv b (\bmod m) \quad \Leftrightarrow \quad b \equiv a (\bmod m)$;

3) транзитивність: $(a \equiv b (\bmod m),\ b \equiv c (\bmod m)) \quad \Rightarrow \quad a \equiv c (\bmod m)$.

Наведені властивості порівнянь дають змогу підсумувати, що кожне ціле число попадає в один, і тільки один клас попарно конгруентних між собою цілих чисел. Ці класи називаються **класами лишків за модулем m** чи просто **класами за модулем m**. Кожне ціле число конгруентне за модулем m тільки з одним із чисел ряду $0, 1, \ldots, m-1$.

Будь-яка сукупність чисел, що взяті по одному з кожного класу, називається **повною системою лишків** (**ПСЛ**) за модулем m. Наприклад, числа $0, 1, \ldots, m-1$ утворюють повну систему лишків. Повною системою лишків є кортеж $1, 2, \ \ldots, m$; за непарного $m = 2k+1$ повною системою лишків буде кортеж $-k, \ \ldots, -1, 0, 1, \ldots, k,$ і т. ін.

Наведемо арифметичні властивості порівнянь і дефініції дій над класами.

1^0. Якщо $a_1 \equiv a_2 (\bmod m)$ і $b_1 \equiv b_2 (\bmod m)$, то

$$a_1 \pm b_1 \equiv a_2 \pm b_2 (\bmod m)$$

2^0. Якщо $a_1 \equiv a_2 (\bmod m)$ і $b_1 \equiv b_2 (\bmod m)$, то $a_1 b_1 \equiv a_2 b_2 (\bmod m)$.

Зокрема, якщо $a_1 \equiv a_2 (\bmod m)$ і c – будь-яке ціле, то $a_1 c \equiv a_2 c (\bmod m)$.

3^0. Якщо $ca_1 \equiv ca_2 (\bmod m)$ і число c взаємно просте з m, то $a_1 \equiv a_2 (\bmod m)$. $1\,T3(\bmod 4)$.

Тобто обидві частини порівняння можна скоротити на множник, що взаємно простий із модулем. Без виконання умови $(c, m) = 1$ цього, взагалі кажучи, робити не можна. Так, $2 \equiv 6 (\bmod 4)$, але $1 \not\equiv 3 (\bmod 4)$.

Сумою двох класів за модулем m називається клас за модулем m, до якого належить сума яких-небудь чисел із класів, що додаються.

Добутком двох класів за модулем m називається клас за модулем m, до якого належить добуток яких-небудь чисел із класів, що перемножуються.

На підставі властивостей 1^0, 2^0 ці означення коректні, оскільки, які б числа з двох даних класів ми не вибрали, їх сума й їх добуток належатимуть цілком визначеним класам, що не залежать від вибору чисел серед цих класів.

Дії додавання і множення над класами за модулем мають властивості: асоціативність, комутативність, дистрибутивність множення відносно додавання.

Зведеною системою лишків (ЗСЛ) за модулем m називається сукупність цілих чисел, яка містить точно по одному представникові з класу лишків взаємно простих із m.

У термінах теорії порівнянь **функцією Ейлера** називають функцію $\varphi(m)$, визначену на множині натуральних чисел, значеннями якої є кількість невід'ємних елементів зведеної системи лишків за модулем m, менших за m.

Звичайно, якщо одне з чисел класу за модулем m взаємно просте з m, то й усі числа цього класу взаємно прості з m.

Класи, що складаються з чисел, взаємно простих із модулем, називаються **примітивними класами.** Для будь-якого модуля m примітивні класи існують. Такими будуть, зокрема, класи, представниками яких є числа, конгруентні одиниці і $(m-1)$. Кількість примітивних класів за модулем m визначається функцією Ейлера $\varphi(m)$.

Мовою теорії порівнянь T-розбиття натуральних у. а. п. на кортеж арифметичних прогресій (див. (3.21)):

$$f^i(n) = a(i) + D\cdot(n-1),\;\; a(i) = a(i+T),\; i = \overline{1,T}\,,$$

є не що інше, як поділ у. а. п. на класи, усі елементи яких конгруентні між собою за модулем D.

Логічна сума T-розкладу є вихідною у. а. п.: $f(n) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{T} f^i(n)$.

Якщо розглядати у. а. п. $(s_k(n), T_k, D_k)$, то функція $s_k(n)$ – розв'язок рівняння (4.1) – на відрізку в один період: $n = i \in [1, T_k]$, визначає ЗСЛ за модулем D_k:

$$(s_k(1),\ s_k(2),...,s_k(T_k - 1),\ s_k(T_k)) = (1,\ p_{k+1},...,\ D_k - p_{k+1},\ D_k - 1). \quad (4.6)$$

Кортеж

$$(D_k - s_k(1),\ D_k - s_k(2),...,\ D_k - s_k(T_k - 1),\ D_k - s_k(T_k)) \quad (4.7)$$

теж визначає зведену систему невід'ємних лишків за модулем D_k, менших за D_k. Отже, (4.6) і (4.7) описують одну й ту саму систему лишків. На цій підставі отримуємо примітну особливість функції $s_k(n)$:

$$s_k(i) = D_k - s_k(T_k - i + 1) \quad \Leftrightarrow \quad s_k(i) + s_k(T_k - i + 1) = D_k,\ i = \overline{1, T}. \quad (4.8)$$

Простежимо виконання (4.8), повертаючись до прикладу 4.1:

$$\begin{array}{l} n: 1\quad 2\quad 3\quad 4\quad 5\quad 6\quad 7\quad 8\ ... \\ s_3(n): 1_6 7_4 11_2 13_4 17_2 19_4 23_6 29_2 ... . \end{array} \quad (4.9)$$

Дійсно, $s_3(1) + s_3(8) = s_3(2) + s_3(7) = s_3(3) + s_3(6) = s_3(4) + s_3(5) = 30$.

Як наслідок із (4.8), отримуємо симетрію часткових різниць $d_k(i)$ відносно $d_k(T_k/2)$ (див. (4.9)):

$$\underbrace{s_k(i+1) - s_k(i)}_{d_k(i)} = \underbrace{s_k(T_k - i + 1) - s_k(T_k - i)}_{d_k(T_k - i)},\ i = \overline{1, T-1}. \quad (4.10)$$

Результати (4.8) і (4.10) узагальнюються на довільне m-розширення послідовності $s_k(n)$ (тут m уже не означає модуль порівняння), а саме:

$$s_k(i)+s_k(mT_k-i+1)=mD_k,\ i=\overline{1,mT_k},$$
$$s_k(i+1)-s_k(i)=s_k(mT_k-i+1)-s_k(mT_k-i),\ i=\overline{1,mT_k-1}. \quad (4.11)$$

Підсумок. Функція $s_k(n)\ \ \forall n\in\mathbf{N}$ визначає послідовності елементів усіх ЗСЛ за майже простим модулем D_k: $s_k(n+T_k)\equiv s_k(n)(\operatorname{mod} D_k)$.

Деякі важливі теоретико-числові функції, зв'язок із ними послідовностей зведених систем лишків за модулем D_k

Однією з функцій, яка знайшла широке застосування в різних питаннях теорії чисел, вже була введена в розгляд – це функція Антьє. Із властивості $[x+c]=[x]+c$, $x\in\mathbf{R}$, $c\in\mathbf{Z}$, випливає, що функція $[n/t]$, $t\in\mathbf{Z}$, – це у. а. п. із періодом $T=|t|$ і різницею $D=1(-1)$, якщо $t>0(t<0)$.

Окремим прикладом застосування функції виділення цілої частини є визначення загальної кількості входжень α простого числа p до $n!$:

$$\alpha=[n/p]+[n/p^2]+...+[n/p^k],\ p^k<n,\ \text{а}\ p^{k+1}>n.$$

Наведемо твердження, яке називають **основною теоремою арифметики:** будь-яке натуральне число n, більше від одиниці, однозначно, з точністю до порядку співмножників розкладається в добуток простих чисел:

$$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}...p_k^{\alpha_k},\ \text{де}\ \alpha_i\in\mathbf{N},\ i=\overline{1,k}.$$

Таке подання натурального числа називають його **канонічним** розкладом, **або факторизацією.**

У теорії чисел важливими є так звані "мультиплікативні функції" Арифметична функція $f(n)$ називається **мультиплікативною**, якщо її значення від добутку двох взаємно простих натуральних чисел a, b дорівнює добутку її значень від співмножників:

$$(a,b)=1\ \Rightarrow\ f(a\cdot b)=f(a)\cdot f(b);\ \text{покладають}\ f(1)=1.$$

Функція Мебіуса $\mu(n)$ – функція натурального аргументу, яка задається рівностями:

$$\mu(n)=\begin{cases}1, & n=1\\ (-1)^k, & n=p_1p_2\ldots p_k,\ p_i - \text{різні прості числа},\ i=\overline{1,k},\\ 0, & \text{у решті випадків}\end{cases} \qquad (4.12)$$

Із цього означення випливає, що $\mu(p)=-1,\ \mu(p^{\alpha})=0$, якщо $\alpha>1,\ \alpha\in\mathbf{N}$.

Функція Мебіуса має властивості [1; 5; 8]:

1) $\mu(a\cdot b)=\mu(a)\cdot\mu(b)$, тобто $\mu(n)$ – мультиплікативна функція;

2) $\sum\limits_{d|n}\mu(d)=\begin{cases}0, & n>1\\ 1, & n=1\end{cases}$, символ $d|n$ означає, що d ділить n.

3) $\sum\limits_{d|n}\dfrac{\mu(d)}{d}=\begin{cases}\prod\limits_{i=1}^{k}\left(1-\dfrac{1}{p_i}\right), & n>1\\ 1, & n=1,\end{cases}$

де $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_k^{\alpha_k}$ – канонічний розклад числа n, а суми беруться за всім дільниками d числа n.

Функція Ейлера $\varphi(n)$, означена раніше, в явному вигляді описується формулою:

$$\varphi(n)=n\cdot\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=n\cdot\prod_{i=1}^{k}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)=\prod_{i=1}^{k}(p_i^{\alpha_i}-p_i^{\alpha_i-1}). \qquad (4.13)$$

Основні властивості [8]:

1) $\varphi(n)$ – мультиплікативна функція;

2) $\varphi(p)=p-1$, p – просте число;

3) $\varphi(p^{\alpha}) = p^{\alpha} - p^{\alpha-1} = p^{\alpha-1}(p-1) = p^{\alpha}\left(1-\dfrac{1}{p}\right)$;

4) $\varphi(n) = \sum\limits_{d|n} \mu(d)\dfrac{n}{d}$, d – дільники числа n.

Узагальненням функції $\varphi(n)$ є **функція** $\boldsymbol{\varphi(x,a)}$, $x \in \mathbf{R}$, $a \in \mathbf{N}$, – кількість натуральних чисел, що не перевищують x, і взаємно простих з a.

Основні властивості $\varphi(x,a)$ [1]:

1) $\varphi(x,a) = \sum\limits_{d|a} \mu(d)\left[\dfrac{x}{d}\right]$, d – дільники числа a;

2) $\varphi(x, p_1 p_2 ... p_k) = \varphi(x, p_1 p_2 ... p_{k-1}) - \varphi\left(\dfrac{x}{p_k}, p_1 p_2 ... p_{k-1}\right)$,

p_i – різні прості числа, $i = \overline{1,k}$;

3) якщо $x = n = p_1 p_2 ... p_k \cdot m + b$, $m, b \in \mathbf{N}$, то

$$\varphi(n, p_1 p_2 ... p_k) = m(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_k - 1) + \varphi(b, p_1 p_2 ... p_k).$$

Особливий інтерес у подальшому розгляді викликає функція $\varphi(x,a)$ за умови, що $a = D_k = p_1 p_2 ... p_k$ – добуток k послідовних простих чисел, а x – натуральне: $\varphi(n, D_k)$. Позначимо її через $\varphi_k(n)$.

Теорема 4.1 (*про зворотність* $\varphi_k(n)$). Функція $\varphi_k(n) = \varphi(n, D_k)$ – узагальнена арифметична прогресія з періодом $T_{\varphi_k} = D_k$ і різницею $D_{\varphi_k} = \varphi(D_k) = T_k$.

Доведення. На підставі властивості 3 маємо:

$$\varphi(n + D_k, D_k) = (p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_k - 1) + \varphi(n, D_k).$$

Але згідно з (4.13)

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1)...(p_k - 1) = \varphi(D_k),$$

отже,

$$\varphi(n+D_k, D_k) = \varphi(D_k) + \varphi(n, D_k),$$

або

$$\varphi_k(n+D_k) - \varphi_k(n) = \varphi(D_k). \tag{4.14}$$

Таким чином, маємо зворотну послідовність – у. а. п. $(\varphi_k(n),\ D_k, T_k)$.

Зауваження:

1) належність $\varphi_k(n)$ множині натуральних у. а. п. випливає також із першої властивості функції $\varphi(x,a)$ за $x=n$, $a=D_k$ із урахуванням арифметичних властивостей у. а. п.; якщо $k=0$, то $D_0=1$, а $\varphi_0(n)=n$;

2) для довільного a отримуємо послідовність $(\varphi(n,a), a, \varphi(a))$.•

Функція $\pi(x)$ – функція, яка визначає кількість простих чисел, що не перевищують x, $x \in \mathbf{R}$.

Значення цієї функції знаходяться за формулою:

$$\pi(x) = K + \pi(\sqrt{x}) - 1, \tag{4.15}$$

де K – число, на одиницю більше від кількості простих чисел p, таких, що $\sqrt{x} < p \le x$. Це число підраховується за формулою Лежандра [24]:

$$K = [x] - \sum_{p_i \le x} \left[\frac{x}{p_i}\right] + \sum_{p_i p_j \le x} \left[\frac{x}{p_i p_j}\right] - \sum_{p_i p_j p_k \le x} \left[\frac{x}{p_i p_j p_k}\right] + \ldots, \tag{4.16}$$

Якщо врахувати першу властивість функції Мебіуса, коли $a = D_k$:

$$\varphi(x, D_k) = \sum_{d|D_k} \mu(d) \left[\frac{x}{d}\right],$$

де $D_k = p_1 p_2 \ldots p_k$ – добуток простих чисел, не більших від $\sqrt{x}$, і $p_k \le \sqrt{x}$, то формула (4.16) набуває більш зручної форми запису:

$$\pi(x) = \pi(\sqrt{x}) - 1 + \varphi([x], D_k). \tag{4.17}$$

Формула Лежандра (4.16) малопридатна для практичних розрахунків, оскільки потребує значного обсягу обчислювальної роботи. Її покращенням займалися видатні та знані вчені-математики, і для функції $\pi(x)$ були знайдені різні асимптотичні наближення (чого порушувати не будемо).

Теорема 4.2 (*про взаємну оберненість* $s_k(n)$ *і* $\varphi_k(n)$). Загальні члени у. а. п. $(s_k(n), T_k, D_k)$ і $(\varphi_k(n), D_k, T_k)$ є взаємно оберненими функціями.

Доведення. Ключем до встановлення зазначеного взаємозв'язку є така обставина: члени послідовності $s_k(n)$ природно впорядковані, тому номер кожного з них указує на кількість чисел, взаємно простих із D_k і таких, що не перевищують D_k, тобто $\varphi_k(s_k(n)) = n$. А це означає, що композиція $(\varphi_k \circ s_k)(n)$ є тотожним перетворенням множини $\mathbf{N}$. Отже, $\varphi_k : rng\, s_k \to \mathbf{N}$ є лівою оберненою функцією до функції $s_k : \mathbf{N} \to rng\, s_k$, що рівносильне твердженню [5] – функція s_k оборотна, і тому $s_k(\varphi_k(m)) = m$, де $rng\, s_k = dom\ \varphi_k$.

Таким чином,

$$\varphi_k(s_k(n)) = n \ \ \forall n \in \mathbf{N}, \ \ s_k(\varphi_k(n)) = n \ \ \forall n \in \{m : (m, D_k) = 1\} \tag{4.18}$$

Установлений зв'язок добре простежується у процесі зображення у. а. п. $s_\circ(n)$ і $\varphi_k(n)$ нескінченновимірними векторами:

$$\begin{gathered} s_\circ = (s_k(1), 2, \ldots, s_k(2)-1, s_k(2), s_k(2)+1, \ldots, s_k(n)-1, s_k(n), \ldots), \\ \varphi_k = (1, \ \ 1, \ldots, 1, \quad 2, \quad 2, \ldots, n-1, n, \ldots). \end{gathered} \tag{4.19}$$

Якщо функція $s_\circ(n)$ набуває значення, що дорівнює $s_k(n)$, то відповідне значення функції $\varphi_k(n)$ здійснює стрибок на одиницю порівняно з попереднім значенням, тобто $\varphi_k(n)$ є кусково-сталою функцією; область її значень $rng\, \varphi_k$ збігається з областю визначення $s_k(n)$: $dom\, s_k$.

Наслідок. Припускаючи в (4.17) $x = s_k(n)$, отримуємо:

$$\pi(s_k(n)) = \pi(\sqrt{s_k(n)}) - 1 + \varphi_k(s_k(n)) = n - 1 + \pi(\sqrt{s_k(n)})$$
$$\forall n < \varphi_k(s_k^2(2)) = \varphi_k(p_{k+1}^2)\,.\bullet \tag{4.20}$$

Теорема 4.3 (*про арифметичний зв'язок* $s_k(n)$ *і* $\varphi_k(n)$). Функції $s_k(n)$ *і* $\varphi_k(n)$ пов'язані співвідношенням:

$$\varphi_k(n) = \sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{n + s_k(i)}{D_k}\right] \;\forall n \in \mathbf{N}\,. \tag{4.21}$$

Доведення. Перший член послідовності $(\varphi_k(n), D_k, T_k)$ дорівнює одиниці, а її часткові різниці – нулі й одиниці (див. (4.19)). Часткові різниці, що дорівнюють одиниці, в межах першого періоду φ_k мають для таких номерів членів:

$$s_k(2)-1,\; s_k(3)-1,\ldots,s_k(T_k+1)-1,$$

тому

$$\varphi_k(n) = 1 + \sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{n + D_k - s_k(i+1)}{D_k}\right].$$

Оскільки

$$1 + \left[\frac{n-1}{D_k}\right] = \left[\frac{n + D_k - 1}{D_k}\right],\; s_k(i) + s_k(T_k - i + 1) = D_k\,,\; i = \overline{1, T_k}\,,$$

то

$$\varphi_k(n) = \sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{n + D_k - s_k(i)}{D_k}\right] = \sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{n + s_k(i)}{D_k}\right].$$

Теорема доведена.

Наслідки:

1) функцію $\varphi_k(n)$ можна записати, не залучаючи функцію Мебіуса:

$$\sum_{d|D_k}\mu(d)\left[\frac{n}{d}\right]=\varphi_k(n)=\sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{n+s_k(i)}{D_k}\right]\ \forall n\in\mathbf{N}, \tag{4.22}$$

(окремий випадок формули (4.22) (якщо $k=3$) знайдено в роботі [13]);

2) якщо в (4.22) замість n взяти $s_k(n)$, то:

$$\sum_{d|D_k}\mu(d)\left[\frac{s_k(n)}{d}\right]=\sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{s_k(n)+s_k(i)}{D_k}\right]=n; \tag{4.23}$$

3) з урахуванням (4.23) формула для $\pi(x)$ набуває вигляду:

$$\pi(x)=\pi(\sqrt{x})-1+\sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{x+s_k(i)}{D_k}\right]; \tag{4.24}$$

4) якщо в (4.24) замість x взяти $s_k(n)$, то:

$$\forall n<\varphi_k(s_k^2(2))=\varphi_k(p_{k+1}^2):\ \pi(s_k(n))=k+n-1, \tag{4.25}$$

оскільки $\pi(\sqrt{s_k(n)})=k$.•

Приклад 4.2. Обчисліть $\pi(s_3(10))$.

Розв'язання. За формулою (4.21) підраховуємо кількість елементів $s_3(n)$, які передують числу p_4^2: $\varphi_3(p_4^2)=\varphi_3(49)=14$. Оскільки $n=10<14$, застосовуємо безпосередньо (4.25): $\pi(s_3(10))=3+10-1=12$.•

Зауваження. Якщо $n>\varphi_k(s_k^2(2))=\varphi_k(p_{k+1}^2)$, то слід зменшити праву частину в (4.25) на число, що дорівнює кількості елементів, які задовольняють умову $p_{k+1}s_k(i)<s_k(n)$, тобто з $i<\varphi_k(s_k(n)/p_{k+1})$.

4.2. Решето Ератосфена та його розвиток: короткий огляд

Щоб зберегти злагодженість викладу, досі не порушувалися питання, пов'язані з послідовністю простих чисел. Зробимо це тепер і зіставимо отримані результати з відомими. Нижченаведені історичні дані запозичені з робіт [29; 48; 51], де наводяться численні посилання на згадуваних у викладі авторів.

Дослідницькі роботи в сучасній теорії чисел ведуться за допомогою декількох фундаментальних методів, найбільш універсальним із них є метод "решета". Вважають, що перша теоретична розробка його розпочата лише в 1919 році норвезьким математиком В. Бруно.

Виникнення ж цього методу сягає часів давньогрецького вченого Ератосфена Киренського, який запропонував прийом виділення простих чисел із ряду натуральних, що ще за його життя (III–II ст. до н. е.) був названий "решетом Ератосфена". Полягає цей метод у такому: з натурального ряду чисел $1, 2, 3, \ldots$ викреслюють усі числа, які діляться на два (крім двійки), діляться на три (крім трійки) і т. д. Залишаються після цієї операції решета тільки прості числа й одиниця. Давній метод дожив до наших днів, зазнавши чимало перетворень. У XIII ст., наприклад, існувала така модифікація решета:

а) якщо в послідовності натуральних чисел $2, 3, 4, 5, ..., n, ...$ закреслити числа, кратні першим простим числам $2, 3, 5, 7, ..., p_k$, то перше (найменше) незакреслене число буде простим;

б) у разі викреслення всіх чисел, кратних всім простим числам до $\sqrt{n}$, зі збереженням самих простих чисел, числа, які залишилися до n, будуть простими.

Питання встановлення критерію простоти натурального числа, з'ясування дільників цілих чисел, визначення аналітичного виразу кількості простих чисел заданого проміжку, складання таблиць простих чисел тощо із XVI ст. пов'язувалося з різного роду видозмінами решета Ератосфена. Історія видозмін решета може бути класифікована таким чином: 1) арифметичні видозміни; 2) підходи до точного і наближеного визначення $\pi(x)$ – кількості простих чисел, що не перевищують x.

Зупинимося на кожному з пунктів окремо. Спочатку арифметичні видозміни решета пов'язані з визначенням простих чисел у прогресіях.

Якщо Ератосфен визначав прості числа в прогресії з різницею, що дорівнює одиниці (натуральний ряд), то Нікомах розглядав прогресії з різницею, що дорівнює двом; Г. В. Лейбніц пропонував визначати прості числа, крім двійки і трійки, в прогресії з різницею, що дорівнює шести $(6n+1, 6n+5)$. Наступний етап, що можна розглядати як продовження ідеї Лейбніца, належить Л. Ейлеру, який запропонував визначати всі прості числа, крім двійки і трійки, з прогресій $30n+r$, де $(30, r)=1$, тобто $r=1, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29$. Цей прийом мав і теоретичне значення. Самому Ейлеру належить застосування його до питання про визначення кількості чисел, взаємно простих із заданим числом і меншим за нього. Згодом така функція К. Ф. Гауссом була названа ім'ям Ейлера і позначена через $\varphi(n)$. Решето Ейлера стало стимулом для дослідження питання про розподіл простих чисел у арифметичних прогресіях $m\cdot n+r,\ 0<r<m,\ (m, r)=1$. Задача ця була розв'язана спеціальними "неелементарними" методами П. Лежен-Діріхле [11; 48]. Поширенню принципу Ератосфена для визначення простих чисел у прогресіях з великою різницею присвячені роботи В. А. Лебега.

Однак дослідження подібного роду не вплинули на розвиток теоретичних питань, вони слугували лише основою для складання та збільшення меж таблиць простих чисел і дільників складених чисел. Тому пізніше питанням, пов'язаним із розглядом арифметичних прогресій з великими різницями, займалися обчислювачі.

Поряд зі знаходженням простих чисел у прогресіях видозміни решета Ератосфена стосувалися вирішення інших завдань арифметики. У цьому відношенні важливі дослідження російських математиків XIX ст. Ф. А. Слудський активно закликав до занять із теорії чисел, проповідував ідею решета Ератосфена і його можливостей. Йому належить подальший розвиток ідеї визначення простих чисел, за винятком декількох заздалегідь обраних, а саме: пошук простих чисел, укладених між $\sqrt{n}$ і n. Цю задачу він зводить до розв'язання системи порівнянь першого степеня за простими модулями. Е. К. Шпачинський подібним чином наводить спосіб знаходження простих чисел у довільному числовому проміжку. Видозміну решета стосовно чисел арифметичних прогресій з різницею, що дорівнює десяти, запропонував український математик В. Я. Буняковський. Спосіб Буняковського викликав появу великої кількості наукових досліджень у Росії і за кордоном.

П. С. Порецький присвятив свою роботу "До вчення про прості числа" [28] теоретичному обґрунтуванню і узагальненню раніше відомих модифікацій решета Ератосфена зі з'ясуванням сфери застосування до теоретичних і практичних питань теорії чисел. Дослідження П. С. Порецького дали поштовх до знаходження "великих" простих чисел і визначення дільників "великих" чисел. Цим питанням присвячені роботи Е. Лебега, Ж. Мохеда, Л. Дайніса.

Важливою виявилася видозміна решета, яка була запропонована А. Поліньяком [60]. У решеті Поліньяка вивчаються послідовності натуральних чисел, що починаються з нуля, при цьому особлива увага приділяється кількості чисел, які знаходяться між двома не закресленими числами, або, за виразом Поліньяка, "відстані" між двома числами, які збереглися. Такі послідовності він назвав діатомічними. Вивчаючи властивості діатомічних послідовностей (особливо їх періодичність), він прийшов до формули, яку незалежно від нього встановив П. Л. Чебишов і застосував її для доведення постулату Ж. Бертрана про існування простого числа між a і $2a-2$ для всіх $a \geq 2$. Поліньяк за допомогою цієї формули довів теореми: а) між простим числом і його квадратом завжди є принаймні одне просте число; б) між двома послідовними степенями одного й того ж числа є принаймні одне просте число.

Такі основні, але далеко не всі, віхи на шляху арифметичних видозмін решета Ератосфена.

Що стосується дослідження функції $\pi(x)$, то, як зазначено в [48], у цьому полягає основна проблема теорії чисел. Важливий крок Ейлера щодо встановлення точної формули для $\varphi(n)$ став стимулом для появи точної формули для $\pi(x)$ – формули Лежандра (4.16), яку називають аналітичним записом решета Ератосфена. Формула Лежандра була перевідкрита Е. Жонкьєром. Як найбільш повне втілення звичайного решета Ератосфена ця формула має декілька істотних недоліків. По-перше, відбувається збільшення числа доданків у разі зростанні x, по-друге, під знаком суми знаходиться символ цілої частини і, по-третє, вона вимагає відомостей про прості числа, що не перевищують $\sqrt{x}$. Спроба позбавлення формули для $\pi(x)$ від одних недоліків приводила до появи інших. Так, наприклад, позбавлення формули Лежандра від знака цілої частини засобами, якими користувалися Л. Кронеккер, В. І. Романовський і Ж. Мерлен, призводило до тривіальної оцінки, і успіхів не було досягнуто.

Друга половина XIX ст. відзначилася узагальненням аналітичного подання різних модифікацій решета і його застосувань. Ж. Сильвестр зауважує, що формула Лежандра є безпосереднім наслідком добре відомої логічної теореми, що згодом отримала назву принципу перекриття Сильвестра. Цей принцип дає метод розгляду множини елементів, які можуть мати ряд властивостей, підраховувати кількість елементів, що не мають жодної з цих властивостей. Ж. Сильвестру належить ще два узагальнення формули Лежандра, одне з яких він застосував до підрахунку сум простих чисел, що не перевищують заданого числа.

Зменшення кількості простих чисел, за допомогою яких просіваються прості числа, привело до встановлення вченими Е. Мейселем і Ф. Рогелем рекурентних співвідношень для $\pi(x)$ [5].

На початку XX ст. з'ясувалося, що всі відомі результати щодо $\pi(x)$ можуть бути отримані єдиним теоретико-функціональним підходом, що ґрунтується на вивченні поведінки сум спеціальних функцій, введених і вивчених Н. В. Бугаєвим.

Принцип ератосфенового решета в роботах Ж. Мерло, В. І. Романовського застосовувався також для вирішення знаменитої проблеми "близнюків" (про нескінченність кількості пар простих чисел, різниця між якими дорівнює двом) і доведення не менш відомої гіпотези Ейлера – Гольдбаха (будь-яке парне число, крім двійки, є сумою двох простих). Істотне зрушення у вирішенні цих (та інших) питань, але вже іншим шляхом, було зроблене В. Бруно.

З решетом Бруно пов'язують перший інтенсивний період розвитку методу решета. Він знайшов основи нового решета (узагальнення ератосфенового), надавши решету Ератосфена таку форму: нехай дано арифметичні прогресії

$$D(n-1)+\Delta, \quad p_i(n-1)+a_i, \quad i=\overline{1,k},$$

де Δ, a_i – цілі числа ($0<\Delta\le D$, $0<a_i\le p_i$);

$(D, p_i)=1$, $p_1, p_2, \ldots, p_k$ – прості числа.

Ставиться задача знайти кількість членів першої прогресії, які не перевищують даного x і відмінні від членів інших прогресій.

Розв'язок цієї задачі було знайдено у вигляді рекурентної формули, за допомогою якої отримано ряд важливих результатів. Зокрема, це стосується і проблем "близнюків", і Ейлера – Гольдбаха, досліджених за допомогою так званого двовимірного решета Бруно.

Покращення результатів досліджень В. Бруно отримали його численні послідовники: Г. Радемахер, Л. Г. Шнирельман, М. П. Романов, О. А. Бухштаб, Ю. В. Лінник, В. А. Тарковський та інші дослідники.

Другий період інтенсивного розвитку методу решета почався наприкінці першої половини XX ст. і триває до сьогодні. У цей період з'являються решето А. Сельберга і велика кількість робіт, присвячених його трактуванню, тлумаченню та опису. Решето Сельберга, як і решето Бруно, є узагальненням решета Ератосфена. Але якщо В. Бруно розглядає арифметичні прогресії, то А. Сельберг – довільно задану послідовність (скінченну) не обов'язково різних і додатних цілих чисел і послідовність різних простих чисел, розташованих у порядку зростання.

Ставиться задача пошуку кількості тих елементів першої послідовності, які не діляться ні на яке просте з другої. На основі методу Сельберга (за допомогою отриманих ним оцінок шуканої в поставленій задачі величини) і досліджень ряду авторів – І. В. Чулановського, В. В. Левіна, О. А. Бухштаба, А. І. Виноградова – щодо застосування цього методу до арифметичних задач отримано істотні результати у проблемі Ейлера – Гольдбаха і "близнюків".

Метод решета застосовувався також у поєднанні з іншими методами. Так, наприклад, І. М. Виноградов використовує його в поєднанні з розробленим ним потужним методом тригонометричних сум під час вирішення проблеми Ейлера – Гольдбаха.

До різновидів решета слід віднести спосіб, розроблений індійським студентом С. П. Сундарамом [17], а також різноманітні алгоритми пошуку простих чисел на різних відрізках ряду натуральних чисел, наприклад, решето Аткіна [54] та ін.

Такий в основних рисах шлях розвитку одного з фундаментальних методів сучасної теорії чисел, біля витоків якого – решето Ератосфена.

На жаль, на цьому шляху, незважаючи на всі зусилля дослідників, ні проблема "близнюків", ні проблема Ейлера – Гольдбаха досі не вирішені в їх початковій постановці. Е. Ландау на конгресі математиків у Кембриджі (1912 р.) сказав, що він вважає їх неприступними для сучасного стану науки.

Наприкінці стислого огляду методів решета слід зауважити, що останнім часом значна робота щодо вдосконалення алгоритмів просіювання простих чисел проведена обчислювачами. Але як би там не було, просіювання простих чисел залишається завданням, яке збуджує думки багатьох дослідників. Значний результат у цьому плані отримав Чжан Ітан – американський математик китайського походження. У 2013 році Чжан довів, що існує нескінченно багато пар послідовних простих чисел з різницею, не більш як 70 мільйонів. Різниця-межа постійно зменшувалася і до кінця 2015 року досягла 246. Це, звичайно, не двійка, але цей доказ може розглядатися як вирішення спрощеного варіанта задачі про прості числа-близнюки.

Дві тисячі років тому Евклід довів, що запас простих чисел невичерпний. Чи правильно те ж саме для простих чисел-близнюків? Це завдання не підкорилося Ератосфену. На сучасному етапі "проблема близнюків" залишається єдиною не розв'язаною задачею, яка дісталася нам від античності [2]. Чи впораються з нею математики XXI ст., через 22 століття після Ератосфена? Сподіваємося…

4.3. Формула зведених систем лишків за майже простим модулем

Загальний член числової послідовності $s_k(n)$, поданий функціональним рівнянням (4.1), дає змогу для кожного k записати послідовність зведених систем лишків (ЗСЛ) за модулем D_k, відштовхуючись від універсуму $s_\circ = s_\circ(n) = n$ як у. а. п., з періодом і різницею, що дорівнюють одиниці: $T_0 = D_0 = 1$, і залучаючи алгебру послідовностей [33; 36].

Стисло процес побудови ЗСЛ за модулем D_k, $k \in \mathbf{N}$, виглядає так:

$$\begin{gathered} s_\circ(n) = n, \\ s_1(n) = s_\circ(n) \mathsf{L} (p_1 s_\circ(n)), \\ s_2(n) = s_1(n) \mathsf{L} (p_2 s_1(n)), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ s_k(n) = s_{k-1}(n) \mathsf{L} (p_k s_{k-1}(n)). \end{gathered} \tag{4.26}$$

Нагадаємо, що в (4.26) символ $\llcorner$ означає логічну різницю, яка зводиться до перетину першого операнда з s-доповненням $\urcorner$ другого:

$$f_1(n) \llcorner f_2(n) = f_1(n) \sqcap (\urcorner f_2(n)).$$

Рівності в (4.26) тлумачаться так: щоб знайти ЗСЛ для наступного k, треба із послідовності $s_{k-1}(n)$ вилучити елементи, які не є взаємно простими з D_k, тобто члени вигляду $p_k s_{k-1}(n)$ – від'ємники в кожній рівності.

Послідовність $\bar{s}_{k-1} = p_k s_{k-1}(n)$ – у. а. п. з періодом T_{k-1} і різницею $p_k D_{k-1} = D_k$. Ця послідовність є підпослідовністю $s_{k-1}(n)$ з нумератором $\bar{\nu}_{k-1}(n) = \varphi_{k-1}(\bar{s}_{k-1}(n))$, де $\varphi_{k-1}(n)$ – кількість чисел, які взаємно прості з D_{k-1} і не перебільшують n. За теоремою 3.11 (*про зв'язок між* $\nu(n)$ *і* $\bar{\nu}(n)$) нумератор $\bar{\nu}_{k-1}(n)$ – у. а. п. $(\bar{\nu}_{k-1}(n), T_{k-1}, p_k T_{k-1})$.

Нумератор для $s_k(n)$ (позначимо його через $\nu_k(n)$) як підпослідовності відносно $s_{k-1}(n)$ є s-доповненням $\bar{\nu}_{k-1}(n)$, тобто $\nu_k(n) = \urcorner \bar{\nu}_{k-1}(n) = \nu_0(n) \llcorner \bar{\nu}_{k-1}(n)$, $\nu_0(n) = n$ – універсум нумераторів, який у нашому випадку співпадає з універсумом множини $M(s)$ всіх натуральних у. а. п.; $\nu_k(n)$ – у. а. п. $(\nu_k(n), T_k, p_k T_{k-1})$.

На підставі наведеного можна записати ланцюжок:

$$\begin{aligned} s_k(n) &= s_{k-1}(n) \llcorner s_{k-1}(\bar{\nu}_{k-1}(n)) = s_{k-1}(\nu_0(n)) \llcorner s_{k-1}(\bar{\nu}_{k-1}(n)) = \\ &= s_{k-1}(\nu_0(n) \llcorner \bar{\nu}_{k-1}(n)) = s_{k-1}(\nu_k(n)) \quad \Rightarrow \quad s_k(n) = (s_{k-1} \circ \nu_k)(n). \end{aligned} \tag{4.27}$$

Згідно з (3.61а) за умови, що $\bar{T} = T_{k-1}$, $T = T_k$, отримуємо:

$$s_k(n) = s_{k-1}(\nu_k(n)) = s_{k-1}\left(n + T_{k-1} + \sum_{i=1}^{T_{k-1}} \left[\frac{1}{T_k}(n - 1 - (\bar{\nu}_{k-1}(i) - i)) \right] \right) – \tag{4.28}$$

загальний член послідовності ЗСЛ за модулем D_k.

Наведемо для значень $k=0,1,2,3$ вигляд $s_k(n)$, параметри T_k, D_k, нумератори $\bar{\nu}_{k-1}(n), \nu_k(n)$, відрізки послідовностей, часткові різниці (елементи, що вилучаються, – підкреслені; часткові різниці першого періоду охоплюються фігурною дужкою):

$$s_\circ(n)=n,\ T_0=D_0=1,$$

$$s_\circ(n)=(1\,\underbrace{{}_1}\,\underline{2}\,{}_1\,3\,{}_1\,\underline{4}\,{}_1\,5\,{}_1\,\underline{6}\,{}_1\,7\,{}_1\ldots),\ \bar{\nu}_0(n)=2n,\ \nu_1(n)=2n-1;$$

$$s_1(n)=s_\circ(\nu_1(n))=s_\circ(2n-1)=2n-1,\ \ T_1=1, D_1=2,$$

$$s_1(n)=(1\,\underbrace{{}_2}\,\underline{3}\,{}_2\,5\,{}_2\,7\,{}_2\,\underline{9}\,{}_2\,11\,{}_2\,13\,{}_2\,\underline{15}\,{}_2\ldots),\ \bar{\nu}_1(n)=3n-1,\ \nu_2(n)=n+[n/2];$$

$$s_2(n)=s_1(\nu_2(n))=s_1(n+[n/2])=2(n+[n/2])-1,\ \ T_2=2, D_2=6,$$

$$\bar{\nu}_2(n)=3n-1+4[n/2],\ \nu_3(n)=n+[(n+6)/8]+[n/8],$$

$$s_2(n)=(1\,\underbrace{{}_4\,\underline{5}\,{}_2}\,7\,{}_4\,11\,{}_2\,13\,{}_4\,17\,{}_2\,19\,{}_4\,23\,{}_2\,\underline{25}\,{}_4\,29\,{}_2\ldots);$$

$$s_3(n)=s_2(\nu_3(n))=2[3/2(n+[(n+6)/8]+[n/8])-1,\ \ T_3=8, D_3=30,$$

$$s_3(n)=(1\,\underbrace{{}_6\,\underline{7}\,{}_4\,11\,{}_2\,13\,{}_4\,17\,{}_2\,19\,{}_4\,23\,{}_6\,29\,{}_2}\,31\,{}_6\,37\,{}_4\,41\,{}_2\,43\,{}_4\,47\,{}_2\,\underline{49}\,{}_4\ldots).$$

Нескладно помітити, що послідовне визначення ЗСЛ за модулем D_k має тісний зв'язок із решетом Ератосфена, з тією різницею, що $s_k(n)$ не зберігає просіяні раніше прості числа, оскільки перша часткова різниця для всіх k дорівнює $p_{k+1}-1$. Однак $s_k(n)$ відразу визначає всі прості числа проміжку $[p_{k+1},\ p_{k+1}^2]$, причому обчисленням за формулою (!), а не закреслюванням складених чисел. Інакше кажучи, (4.28) дає рекурентне подання всіх простих чисел від p_{k+1} до p_{k+1}^2, $k=0,1,\ldots$.

З іншого боку, для кожного k за $n=2$ послідовність $s_k(n)$ визначає просте число, тому послідовність усіх простих чисел описується дуже нескладною за виглядом формулою:

$$p_n = s_{n-1}(2)\ \ \forall n \in \mathbf{N}. \tag{4.29}$$

Формула (4.28), як і формула Лежандра [24], містить функцію Антьє, зі збільшенням k швидко зростає кількість доданків нумератора $\nu_k(n)$, тому вона малопридатна для практичних цілей – добування простих чисел. Проте в теоретичному плані може бути корисною.

Оскільки $s_k(n)$ – у. а. п. з періодом T_k і різницею D_k, то її, як і кожну іншу у. а. п., можна подати кортежем арифметичних прогресій (3.21), тобто здійснити T_k-розклад $s_k(n)$:

$$s_k^{(i)}(n) = s_k(i) + D_k(n-1) = D_k n + (s_k(i) - D_k), \; i = \overline{1, T_k}. \tag{4.30}$$

Проробимо це для $s_3(n)$. Спочатку, для наочності, наведемо відрізок послідовності:

$$s_3(n) = (1\,_6\,7\,_4\,11\,_2\,13\,_4\,17\,_2\,19\,_4\,23\,_6\,29\,_2\,31\,_6\,37\,_4\,41\,_2\,43\,_4\,47\,_2\,49\,_4\ldots),$$

а далі за формулою (4.30) і сам T_k-розклад:

$$\begin{array}{ll} s_3^{(1)}(n) = 1 + 30(n-1) = 30n - 29, & s_3^{(5)}(n) = 17 + 30(n-1) = 30n - 13, \\ s_3^{(2)}(n) = 7 + 30(n-1) = 30n - 23, & s_3^{(6)}(n) = 19 + 30(n-1) = 30n - 11, \\ s_3^{(3)}(n) = 11 + 30(n-1) = 30n - 19, & s_3^{(7)}(n) = 23 + 30(n-1) = 30n - 7, \\ s_3^{(4)}(n) = 13 + 30(n-1) = 30n - 17, & s_3^{(8)}(n) = 29 + 30(n-1) = 30n - 1. \end{array} \tag{4.31}$$

Перші члени прогресій $s_k^{(i)}(n)$, $i = \overline{1, T_k}$, охоплюють перший період послідовності $s_k(n)$, другі – другий період і т. д. Кожний наступний крок по k додає ще одне просте число до тих, які були вилучені раніше. Але за умови зліченності множини простих чисел ті, що залишилися, все одно складають нескінченну множину. Це цілком узгоджується з теоремою знаного французького математика Лежен-Діріхле [11]: якщо перший член і різниця арифметичної прогресії взаємно прості числа, то вона містить нескінченну множину простих чисел.

4.4. Зв'язок між послідовністю простих чисел і послідовністю зведених систем лишків за майже простим модулем

Структура послідовності простих чисел

У книзі А. Пойа [26] наведено мемуар Л. Ейлера (оригінал французькою в роботі [55]), в якому він коментує знайдену індуктивним способом "надзвичайно дивну" формулу для опису послідовності сум дільників цілого числа і висловлює свою думку стосовно послідовності простих чисел: "До цих пір математики марно намагалися виявити в послідовності простих чисел будь-який порядок, і ми маємо підстави вірити, що тут існує якась таємниця, якої людський розум ніколи не збагне. Щоб переконається, слід тільки поглянути на таблицю простих чисел, ... і усвідомити, що тут немає ніякого порядку і ніякого правила".

Проте аналіз послідовності $(s_k(n), T_k, D_k)$, яка визначає всі числа, взаємно прості з D_k, і, водночас, прості числа відрізка $[p_{k+1},\ p_{k+1}^2]$ для номерів $n = 2, 3, \ldots, \varphi_k(s_k^2(2)) - 1$, дає змогу описати аналітично послідовність простих чисел у термінах у. а. п. Для цього залучимо функцію $\varphi_k(n) = \varphi(n, D_k)$ – узагальнення функції Ейлера $\varphi(n)$ (див. зауваження до теореми 4.1), – що визначає кількість натуральних чисел, взаємно простих з D_k, які не перебільшують n. Нагадаємо також:

$$k = 0 \ \Rightarrow \ D_0 = 1 \ \Rightarrow \ \varphi_0(n) = \varphi(n, 1) = n.$$

Відрізок $[p_{k+1},\ p_{k+1}^2]$ включає в себе всі прості числа попереднього відрізка $[p_k,\ p_k^2]$, крім p_k. Щоб на кожному наступному кроці отримати "нові" прості числа, номери членів n у $s_k(n)$ треба брати, починаючи з $\varphi_k(p_k^2) + 1$, і до $\varphi_k(p_{k+1}^2) + 1$, тоді сукупність кортежів:

$$\begin{gathered}(s_0(1),\ s_0(2)),\ (s_1(3),\ s_1(4)),\ (s_2(5), \ldots, s_2(9)),\ \ldots,\\ (s_k(\varphi_k(p_k^2)+1), \ldots, s_k(\varphi_k(p_{k+1}^2)-1)),\ k = 0, 1, 2, \ldots,\end{gathered} \tag{4.32}$$

даватиме послідовність простих чисел.

Позначимо загальний член послідовності через $p(n)$, а кортежі (4.32) назвемо $\boldsymbol{p}$**-кортежами**. Тоді

$$p(n)=\begin{cases} s_0(n+1), & 1\le n\le 2, \quad (2,\,3), \\ s_1(n), & 3\le n\le 4, \quad (5,\,7), \\ s_2(n-1), & 5\le n\le 9, \quad (11,\,13,\,17,\,19,\,23), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ s_k(n-k+1), & \pi(p_k^2)+1\le n\le \pi(p_{k+1}^2), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \end{cases} \tag{4.33}$$

Опишемо (4.33). У першому стовпці наведено послідовності $s_k(n)$ зі зсуненим аргументом: $s_k(n-k+1)$, крім $s_1(n)$; у другому – відповідні проміжки значень n; у третьому – відповідні p-кортежі. Щоб рядок $s_k(n-k+1),\ \pi(p_k^2)+1\le n\le\pi(p_{k+1}^2)$ для $k=0$ визначав відповідний проміжок для значень n, домовимось, що $p_0=1$; тоді $\pi(p_0^2)=\pi(1)=0$, оскільки простих чисел, які не перевищують одиницю, немає.

Подання (4.33) узгоджується з (4.32). Дійсно, перші елементи p-кортежів – це елементи ЗСЛ, які йдуть за p_k^2, бо $s_k(\varphi_k(p_k^2))=p_k^2$, адже за теоремою 4.2 $s_k(n)$ і $\varphi_k(n)$ взаємно обернені функції; а останні елементи p-кортежів – це елементи ЗСЛ, які передують елементові p_{k+1}^2, оскільки $s_k(\varphi_k(p_{k+1}^2))=p_{k+1}^2$.

Приклад 4.2. Знайдемо p-кортеж, який містить у собі послідовність ЗСЛ $(s_3(n),T_3,D_3)=(s_3(n),8,30)$.

Розв'язання. Розглядаємо відрізок $[1,\,p_{k+1}^2]=[1,7^2]=[1,49]$:

$$s_3(n)=(1\,{}_6\,7\,{}_4\,\underbrace{11\,{}_2\,13\,{}_4\,17\,{}_2\,19\,{}_4\,23}\,{}^{\overbrace{}^{25}}_{6}\,29\,{}_2\,31\,{}_6\,37\,{}_4\,41\,{}_2\,43\,{}_4\,47\,{}_2\,\underline{49}\,{}_4\ldots).$$

Фігурна дужка охоплює p-кортеж, який включає $s_2(n)$. Праворуч вгорі показано $p_3^2=25$, а $p_4^2=49$ підкреслено. Числа, розташовані між ними, визначають шуканий p-кортеж: $(29,31,37,41,43,47)$.•

Стисло $p(n)$ описується таким чином:

$$p(n)=s_k(n-k+1), \quad \pi(p_k^2)+1 \le n \le \pi(p_{k+1}^2), \; k=0, 1, 2, \dots \; . \qquad (4.34)$$

Якщо задано деяке фіксоване значення $n=n_0$, то відповідне просте число знаходиться так: надаємо k послідовно значення $0,1,2,\dots,k_0$, де k_0 – найбільше із значень k, для яких $n_0>\pi(p_{k+1}^2)$, і тоді

$$p(n_0)=s_{k_0+1}(n_0-k_0). \qquad (4.35)$$

Приклад 4.3. Знайдемо дванадцяте за номером просте число.

Розв'язання. За умовою $n_0=12$. Знаходимо значення k_0 згідно з нерівністю $n_0>\pi(p_{k+1}^2)$:

$$k=0: \pi(p_1^2)=\pi(2^2)=\pi(4)=2;$$

$$k=1: \pi(p_2^2)=\pi(3^2)=\pi(9)=4;$$

$$\underline{k=2}: \pi(p_3^2)=\pi(5^2)=\pi(25)=9;$$

$$k=3: \pi(p_4^2)=\pi(7^2)=\pi(49)=15.$$

Найбільшим з усіх k, що задовольняють умову $n_0>\pi(p_{k+1}^2)$, виявилося $k=k_0=2$ (воно підкреслене), тому за формулою (4.35) маємо: $p(12)=s_3(12-2)=s_3(10)=37$, що відповідає дійсності (див. приклад 4.2).•

На підставі аналізу розглянутого робимо **висновок:** за структурою послідовність простих чисел – кускова узагальнена арифметична прогресія, складена з відрізків послідовностей ЗСЛ за майже простим модулем.

Гадаємо, що це не той результат, якого б хотів Л. Ейлер, але він дає правило, за яким можливо на аналітичному рівні описати загадкову послідовність.

Рекурентна формула (4.28): $s_k(n) = s_{k-1}(\nu_k(n))$, надто громіздка для ефективної чисельної реалізації. Головною, обтяжливою обставиною є те, що для отримання послідовності ЗСЛ для наступного k вона потребує знання всіх попередніх простих чисел, оскільки $D_{k+1} = D_k p_{k+1}$.

Можливо, саме це було основною перешкодою на шляху відкриття формули простих чисел. Тому історично склалося так, що всі зусилля вчених були спрямовані на знаходження асимптотичних законів розподілу простих чисел.

Формула простих чисел відрізка $[1, p^2]$. *Аналітичний опис решетування за Ератосфеном*

У процесі переходу від послідовності $s_k(n)$ до послідовності $s_{k+1}(n)$ вилучаються всі числа, кратні p_{k+1}, починаючи з p_{k+1}. Поставимо завдання зберегти на кожному кроці по k другий член у. а. п. $s_k(n)$, тобто p_{k+1}, але виключити одиницю. Інакше кажучи, треба описати послідовність, перші $k+1$ членів якої – прості числа $p_1, p_2, ..., p_k$, а інші є членами послідовності $s_k(n+1)$.

Позначимо загальний член такої послідовності через $s_0^k(n)$, де нижній і верхній індекси означають, що задіяні у. а. п. від $s_0(n)$ до $s_k(n)$. Тоді послідовність $s_0^k(n)$ у символах запишеться так:

$$s_0^k(n) = \begin{cases} p_n, & n \le k \\ s_k(n-k+1), & n > k \end{cases}, \tag{4.36}$$

де p_n – прості числа.

Зауважимо, що, коли $n > k$, виконується рівність

$$s_0^k(n+k) = s_k(n+1). \tag{4.37}$$

Оскільки $s_k(n)$ – у. а. п., то із (4.36) випливає, що $s_0^k(n)$ – мішана у. а. п. (3.88), доперіодична частина якої містить k членів.

Нехай $\nu_0^{k+1}(n)$ – нумератор підпослідовності $s_0^{k+1}(n)$ в $s_0^k(n)$, а $\nu_{k+1}(n)$ – нумератор підпослідовності у. а. п. $s_{k+1}(n)$ в $s_k(n)$.

Тоді

$$s_0^{k+1}(n) = s_0^k(\nu_0^{k+1}(n)) =$$

$$= \begin{cases} p_n, & n \le k+1 \\ s_{k+1}(n-k), & n > k+1 \end{cases} = \begin{cases} p_n, & n \le k+1 \\ s_k(\nu_{k+1}(n-k)), & n > k+1 \end{cases}. \qquad (4.38)$$

Для $n \le k+1$ члени нумератора $\nu_0^{k+1}(n)$ збігаються з n, а для $n > k+1$ він виражається через $\nu_{k+1}(n)$. Дійсно, на підставі того, що $s_0^k(n+k) = s_k(n+1)$ (4.37), маємо:

$$s_k(\nu_{k+1}(n-k)) = s_k((\nu_{k+1}(n-k)-1)+1) = s_0^k(\nu_{k+1}(n-k)+k-1),$$

а з урахуванням (4.38) –

$$\nu_0^{k+1}(n) = \nu_{k+1}(n-k)+k-1), \; n > k+1. \qquad (4.39)$$

Таким чином,

$$s_0^{k+1}(n) = \begin{cases} s_0^k(n), & n \le k+1 \\ s_0^k(\nu_0^{k+1}(n)), & n > k+1 \end{cases} – \qquad (4.40)$$

рекурентна формула простих чисел відрізка $[1, p^2]$.

За допомогою (4.37) знайдемо нумератор $\overline{\nu}_0^k(n)$ – послідовність номерів членів, які треба видалити із $s_0^k(n)$ для отримання $s_0^{k+1}(n)$:

$$s_k(n+1)=s_0^k(n+k) \quad\Rightarrow\quad p_{k+1}s_k(n+1)=p_{k+1}s_0^k(n+k) \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \bar{\nu}_k(n+1)=\varphi_k(p_{k+1}s_k(n+1))=\varphi_k(p_{k+1}s_0^k(n+k))=\bar{\nu}_0^k(n).$$

Отже,

$$\bar{\nu}_0^k(n)=\varphi_k(p_{k+1}s_0^k(n+k)). \tag{4.41}$$

За теоремою 3.11 (*про зв'язок між нумераторами* $\nu(n)$ *і* $\bar{\nu}(n)$) нумератор $\nu_0^{k+1}(n)$ подається формулою:

$$\nu_0^{k+1}(n)=n+T_k+\sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{1}{T_{k+1}}(n-k-(\bar{\nu}_0^{k+1}(i)-i))\right],\ n>k+1. \tag{4.42}$$

Тоді, у розгорнутому вигляді:

$$s_0^{k+1}(n)=\begin{cases} s_0^k(n), & n\le k+1 \\ s_0^k\left(n+T_k+\sum\limits_{i=1}^{T_k}\left[\dfrac{1}{T_{k+1}}(n-k-(\bar{\nu}_0^k(i)-i))\right]\right), & n>k+1 \end{cases}. \tag{4.43}$$

Для спрощення (4.43) скористаємось функцією Антьє-плюс:

$$[x]_+=\begin{cases} 0, & x<0 \\ [x], & x\ge 0 \end{cases}=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ [x], & x>0 \end{cases}, \tag{4.44}$$

і отримаємо:

$$s_0^{k+1}(n)=s_0^k\left(n+T_k+\sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{1}{T_{k+1}}(n-k-(\bar{\nu}_0^k(i)-i))\right]_+\right),\ k=0,1,2,\ldots, \tag{4.45}$$

де $\bar{\nu}_0^k(i)=\varphi_k(p_{k+1}s_0^k(k+i))$.

Для значень n, які належать проміжку $[1,\ \pi(p_{k+2}^2)]$, формула дає всі прості числа відрізка $[1,\ p_{k+2}^2]$.

Зауваження. До того ж результату приходимо, не спираючись на послідовності $s_k(n)$, а дотримуючись відомого алгоритму (4.26):

$$s_0^{k+1}(n) = s_0^k(n) \mathbf{L}\ p_{k+1} s_0^k(n+k),\ s_0^0(n) = n+1,\ k = 0,1,2,\ldots.$$

Приклад 4.4. Знайдемо послідовність $s_0^k(n)$ для $k = 0,1,2,3$.

Розв'язання. Застосовуємо (4.45), замінивши $k+1$ на k (числа p_{k+1}, p_{k+1}^2 підкреслюються; фігурною дужкою позначені ті елементи $s_0^k(n)$, які належать $s_k(n+1)$):

$$s_0^0(n) = s_\circ(n+1) = n+1,$$

$$s_0^0(n) = (2\ \ \underbrace{3\ 4\ 5\ 6\ 7\ 8\ 9\ 10\ldots}\,),$$

$$s_0^1(n) = s_0^0(n+[n-2]_+) = n+1+[n-2]_+,$$

$$s_0^1(n) = (2\ \ \underbrace{\underline{3}\ 5\ 7\ \underline{9}\ 11\ 13\ 15\ldots}\,),$$

$$s_0^2(n) = s_0^1\left(n + \left[\frac{n-3}{2}\right]_+\right) = n+1+\left[\frac{n-3}{2}\right]_+ + \left[\left[\frac{n-3}{2}\right]_+ + n-2\right]_+,$$

$$s_0^2(n) = (2\ \ 3\ \ \underbrace{\underline{5}\ 7\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ \underline{25}\ldots}\,).$$

$$s_0^3(n) = s_0^2\left(n + \left[\frac{n-2}{8}\right]_+ + \left[\frac{n-4}{8}\right]_+\right),$$

$$s_3(n) = (2\ \ 3\ \ 5\ \underbrace{\underline{7}\ 11\ 13\ 17\ 19\ 23\ 29\ 31\ldots\ 47\ \underline{49}\ldots}\,).$$

(Вирази під знаком Антьє-плюс навмисно не спрощувались, щоб легше зрозуміти "що і як".)•

Якщо у формулі (4.45) залишати після кожного кроку за k одиницю, тобто починати з універсуму $s_0^0(n)=n$, а не з $s_0^0(n)=n+1$, то отримаємо формулу, яку природно назвати **аналітичним записом решетування за Ератосфеном,** або коротко – **формулою Ератосфена:**

$$E_{k+1}(n)=E_k\left(n+T_k+\sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{1}{T_{k+1}}(n-k-(\overline{\nu}_0^k(i)-i))\right]_+\right),\ k=0,1,2,\ldots, \qquad (*)$$

де $\overline{\nu}_0^k(i)=\varphi(p_{k+1}E_k(k+i),D_k)$.

Функції $s_k(n)$, $E_k(n)$ мають, на жаль, ті ж недоліки, що й формула Лежандра для $\pi(n)$, а тому мало застосовні для практичних цілей, але як виявляється, придатні для теоретичних досліджень. Так, наприклад, з аналізу (4.34) випливає, що послідовність простих чисел з її глибокими і складними властивостями "недалеко відійшла" від добре вивчених зворотних послідовностей: $p(n)$ – кусково зворотна.

Авторові відомі три роботи, які мають тісний зв'язок із проведеними дослідженнями. Найбільш виразні результати щодо знаходження вигляду функції $s_k(n)$, отримані в роботі П. С. Порецького [28], який виходив із таких міркувань: якщо є функція $\varphi(m)$ – кількість чисел, взаємно простих із m і менших від нього, то повинна існувати функція (позначена ним через $\psi(m)$), що виражає самі числа, взаємно прості з m і які не перевищують його. Символ $\psi(m)$ він розуміє як багатозначну функцію аргументу m. Якщо відомі значення такої функції, то $\psi(m)+n\cdot m$, $n=0,1,2,\ldots$ дає всі числа, взаємно прості з m. Далі вказується, яке значення може мати ця функція для вчення про прості числа. Запропонована формула мала суттєвий недолік: вона не давала природно впорядковані значення функції.

Перші евристичні відомості про значення $s_k(n)$ знаходимо в роботі [57] А. Дюпре. Робота Е. Дормуа [56] мала такий самий недолік, як і робота [28], крім того, формули були занадто складні, важкі для візуального сприйняття. Це зводило нанівець їх практичне і теоретичне застосування.

4.5. Тригонометрична форма послідовностей зведених систем лишків за майже простим модулем

Установимо вигляд тригонометричної форми (див. (3.35)) для спеціальних натуральних у. а. п. (4.1): $s_k(n+T_k)-s_k(n)=D_k$. З метою зменшити громіздкість викладу поки що пропустимо індекс k, а при нагоді повернемось до нього.

Знайдемо загальні вирази для коефіцієнтів послідовності $s(n)$. Щоб уникнути колізій у позначеннях, замінимо в (3.35) індекс підсумовування k на m. Тоді $s(n)$ набуде вигляду:

$$s(n)=\frac{D}{T}(n-1)+B_0+\sum_{m=1}^{T-1}B_m\left(\cos\frac{2\pi m}{T}(n-1)+i\cdot\sin\frac{2\pi m}{T}(n-1)\right). \qquad (4.46)$$

Для визначення коефіцієнта B_0 візьмемо послідовно $n=1,2,\ldots,T$, $T\geq 2$, і складемо ліві та праві частини отриманих рівностей, ураховуючи тотожності [27; 31]:

$$\cos x+\cos 2x+\ldots+\cos nx=\cos\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}\Big/\sin\frac{x}{2},\ x\neq 2\pi m; \qquad (4.47)$$

$$\sin x+\sin 2x+\ldots+\sin nx=\sin\frac{n+1}{2}x\cdot\sin\frac{nx}{2}\Big/\sin\frac{x}{2},\ x\neq 2\pi m. \qquad (4.48)$$

у яких відповідно до (4.46) беремо $x=\dfrac{2\pi m}{T}$, $n=T-1$.

За таких x і n сума "синусів" дорівнює нулеві, а для "косинусів" маємо:

$$\cos\frac{n+1}{2}x=\cos\pi m=(-1)^m,$$

крім того,

$$\sin\frac{nx}{2}=\sin(T-1)\frac{\pi m}{T}=(-1)^{m-1}\sin\frac{\pi m}{T}, \qquad (4.49)$$

$$\sin\frac{nx}{2}\Big/\sin\frac{x}{2}=(-1)^{m-1}\sin\frac{\pi m}{T}\Big/\sin\frac{\pi m}{T}=(-1)^{m-1}.$$

Тоді завдяки (4.49) тригонометричні суми при B_m, $m=\overline{1,T-1}$, дорівнюють нулеві, дійсно: перший доданок – одиниця, а сума інших – мінус одиниця.

Наприклад, для коефіцієнта при B_2 маємо:

$$\cos\frac{2\pi\cdot 0}{T}2+\cos\frac{2\pi\cdot 1}{T}2+\cos\frac{2\pi\cdot 2}{T}2+\ldots+\cos\frac{2\pi\cdot(T-1)}{T}2=$$

$$=\cos\frac{4\pi}{T}0+\cos\frac{4\pi}{T}1+\cos\frac{4\pi}{T}2+\ldots+\cos\frac{4\pi}{T}(T-1)=0,$$

оскільки $\cos 0=1$ (перший доданок), а сума інших з урахуванням (4.49) дає одиницю з мінусом: $1+(-1)^m\cdot(-1)^{m-1}=0$.

Таким чином,

$$\sum_{n=1}^{T}s(n)=\sum_{n=1}^{T}\frac{D}{T}(n-1)+T\cdot B_0 \;\Rightarrow\; D\cdot\frac{T}{2}=\frac{D}{T}\cdot\frac{(T-1)T}{2}+T\cdot B_0 \;\Rightarrow\; B_0=\frac{D}{2T}.$$

З урахуванням формул зведення:

$$\cos\frac{2\pi}{T}(T-m)(n-1)=\cos\frac{2\pi}{T}m(n-1),$$

$$\sin\frac{2\pi}{T}(T-m)(n-1)=-\sin\frac{2\pi}{T}m(n-1),$$

у сумі за m в (4.46) можна зменшити кількість доданків:

$$\sum_{m=1}^{T-1}B_m\left(\cos\frac{2\pi m}{T}(n-1)+i\cdot\sin\frac{2\pi m}{T}(n-1)\right)=$$

$$=(B_1+B_{T-1})\cos\frac{2\pi}{T}\cdot 1(n-1)+(B_2+B_{T-2})\cos\frac{2\pi}{T}\cdot 2(n-1)+\ldots+$$

$$+B_{T/2}\cos\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}(n-1)+i(B_1-B_{T-1})\sin\frac{2\pi}{T}\cdot 1(n-1)+$$

$$+i(B_2-B_{T-2})\sin\frac{2\pi}{T}\cdot 2(n-1)+\ldots+iB_{T/2}\sin\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{T}{2}(n-1).$$

Зауважимо, що тригонометричні множники при $B_{T/2}$ і $iB_{T/2}$ обчислюються відразу: $\cos\pi(n-1)=(-1)^{n-1}$, $\sin\pi(n-1)=0$.

Введемо позначення: $B_m+B_{T-m}=a_m$, $i(B_m-B_{T-m})=b_m$ (тут m змінюється від одиниці до $T/2-1$), тоді (4.46) набуде вигляду:

$$s(n)=\frac{D}{T}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\sum_{m=1}^{T/2}a_m\cos\frac{2\pi m}{T}(n-1)+\sum_{m=1}^{T/2-1}b_m\sin\frac{2\pi m}{T}(n-1). \qquad (4.50)$$

Верхні межі підсумовування по m в обох сумах можна брати від $m=1$ до $m=T/2$, зважаючи на те, що $\sin\pi(n-1)=0$.

Обчислення коефіцієнта a_1 не викликає труднощів, якщо $T=2$ (це коли $D=6$), оскільки перша сума міститиме тільки один доданок:

$$s(1)=3\cdot 0{,}5+a_1 \quad\Rightarrow\quad a_1=1-1{,}5=-0{,}5. \qquad (4.51)$$

Загалом коефіцієнти a_m, $m=1,2,\ldots,T/2$ знайдемо за допомогою прийому, який використовується у тригонометричній інтерполяції [49]: помножимо послідовно ліві та праві частини рівностей, отриманих на основі (4.50) для всіх m, на $\cos 2\pi l/T(n-1)$, $1\le l\le m$, для кожного $n=1,2,\ldots,T$ і складемо їх.

При цьому враховується, що:

$$\sum_{\nu=0}^{T-1}\cos\frac{2\pi m}{T}\nu\cdot\cos\frac{2\pi l}{T}\nu=\frac{1}{2}\cdot\sum_{\nu=0}^{T-1}\left(\cos\frac{2\pi}{T}(m+l)\nu+\cos\frac{2\pi}{T}(m-l)\nu\right)=$$

$$=\left[\begin{array}{l}0, \text{ якщо } m\ne l\\ T/2, \text{ якщо } m=l\end{array}\right.;$$

$$\sum_{\nu=0}^{T-1} \sin\frac{2\pi m}{T}\nu\cdot\cos\frac{2\pi l}{T}\nu = \frac{1}{2}\cdot\sum_{\nu=0}^{T-1}\left(\sin\frac{2\pi}{T}(m-l)\nu + \sin\frac{2\pi}{T}(m+l)\nu\right) = 0,$$

як коли $m \neq l$, так і коли $m = l$.

Таким чином, лише коефіцієнт при a_m виявляється відмінним від нуля, а саме дорівнюватиме $T/2$. Тепер уже легко знайти, що

$$a_m = \frac{2}{T}\sum_{l=0}^{T-1}\left(s(l+1) - \frac{D}{T}l\right)\cdot\cos\omega_m l, \text{ де } \omega_m = \frac{2\pi m}{T},\ m = \overline{1, T/2}. \qquad (4.52)$$

Цілком аналогічно знайдемо коефіцієнти b_m, $m = 1, 2, \ldots, T/2$: помножимо послідовно ліві та праві частини рівностей, отриманих на основі (4.50) для всіх m, на $\sin 2\pi l / T(n-1)$, $1 \leq l \leq m$, для кожного $n = 1,\ 2,\ \ldots,\ T$ і складемо їх.

При цьому враховується, що

$$\sum_{\nu=0}^{T-1} \sin\frac{2\pi m}{T}\nu\cdot\sin\frac{2\pi l}{T}\nu = \frac{1}{2}\cdot\sum_{\nu=0}^{T-1}\left(\cos\frac{2\pi}{T}(m-l)\nu + \cos\frac{2\pi}{T}(m+l)\nu\right) =$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{якщо } m \neq l \\ T/2, & \text{якщо } m = l \end{cases}.$$

У підсумку отримаємо:

$$b_m = \frac{2}{T}\sum_{l=0}^{T-1}\left(s(l+1) - \frac{D}{T}l\right)\cdot\sin\omega_m l, \text{ де } \omega_m = \frac{2\pi m}{T},\ m = \overline{1, T/2-1}. \qquad (4.53)$$

Вирази для a_m в (4.52) і для b_m в (4.53) значно спрощуються за допомогою згортання тригонометричних сум [27]:

$$\cos x + 2\cos 2x + \ldots + n\cos nx =$$
$$= ((n+1)\cos nx - n\cos(n+1)x - 1) \big/ (4\sin^2(x/2)),\ x \neq 2\pi m, \qquad (4.54)$$

$$\sin x + 2\sin 2x + \ldots + n\sin nx =$$
$$= ((n+1)\sin nx - n\sin(n+1)x) \Big/ (4\sin^2(x/2)),\ x \neq 2\pi m\ . \tag{4.55}$$

Дійсно, візьмемо в (4.54) $n = T-1,\ x = 2\pi m/T$, тоді

$$\sum_{l=0}^{T-1} l\cos\omega_m l = \frac{T\cos((T-1)2\pi m/T) - (T-1)\cos 2\pi m - 1}{4\sin^2(\pi m/T)} =$$

$$= -T\,\frac{1-\cos(2\pi m/T)}{4\sin^2(\pi m/T)} = \left| 1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha \right| = -\frac{T}{2}\ .$$

Формула (4.52) набуває вигляду:

$$a_m = \frac{2}{T}\left(\frac{D}{2} + \sum_{l=0}^{T-1} s(l+1)\cdot\cos\omega_m l\right),\ \text{де}\ \omega_m = \frac{2\pi m}{T},\ m = \overline{1, T/2}. \tag{4.56}$$

Аналогічно, залучаючи (4.55), підраховуємо суму

$$\sum_{l=0}^{T-1} l\cdot\sin\frac{2\pi m}{T} l = \frac{T\sin((T-1)2\pi m/T) - (T-1)\sin(T\cdot 2\pi m/T)}{4\sin^2(\pi m/T)} =$$

$$= \frac{-T\sin(2\pi m/T) - (T-1)\sin 2\pi m}{4\sin^2(\pi m/T)} = \left| \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \right| = -\frac{T}{2}\, ctg\frac{\pi m}{T}\ .$$

Таким чином,

$$b_m = \frac{2}{T}\left(\frac{D}{2} ctg\frac{\pi m}{T} + \sum_{l=0}^{T-1} s(l+1)\cdot\sin\omega_m l\right),\ m = \overline{1, T/2-1}. \tag{4.57}$$

(Якщо $m = T/2$, то перший доданок у (4.57) є нулем.)

Надалі повернемо символам $s(n)$, D, T індекс k. Крім того, введемо позначення: $\omega_m = 2\pi m/T$. Тоді (4.50) набуде вигляду:

$$s_k(n) = \frac{D_k}{T_k}\left(n - \frac{1}{2}\right) + \sum_{m=1}^{T_k/2} (a_m \cos\omega_m(n-1) + b_m \sin\omega_m(n-1)). \quad (4.58)$$

Розглянемо ілюстративний приклад опису ЗСЛ за модулем D_k.

Приклад 4.5. Знайти тригонометричну форму послідовностей $s_2(n)$, $s_3(n)$ і порівняти їх із поданням за формулою (3.71).

Розв'язання. Беремо послідовно $k = 2, 3$, визначаємо різницю D_k, період T_k, обчислюємо a_m, b_m і записуємо результат згідно з (4.58).

$$\underline{k=2} \quad \Rightarrow \quad (D_2 = 2\cdot 3 = 6,\ T_2 = 1\cdot 2 = 2).$$

Коефіцієнт a_1 вже знайдено (див. (4.51): $a_1 = -0{,}5$.

Звертаємось до формули (4.57)

$$b_m = \frac{2}{T_k}\left(\frac{D_k}{2} ctg\frac{\pi m}{T_k} + \sum_{l=0}^{T_k-1} s_k(l+1)\cdot \sin\omega_m l\right),\quad m = \overline{1, T/2-1},$$

і обчислюємо b_1:

$$b_1 = \left(3ctg\frac{\pi}{2} + s_2(1)\sin(\pi\cdot 0) + s_2(2)\sin(\pi\cdot 1)\right) = 0.$$

Таким чином,

$$s_2(n) = 3(n - 1/2) - 1/2\cos\pi(n-1). \quad (4.59)$$

Знайдемо тепер подання $s_2(n)$ через базисні індикатори згідно з (3.14) і (3.71):

$$s_2(n) = D_2\left[\frac{n-1}{T_2}\right] + \sum_{i=1}^{T_2} f(i) e_i(n, T_2),\ D_2 = 6,\ T_2 = 2. \quad (4.60)$$

Розгортаємо (4.60) і спрощуємо з урахуванням, що $e_1(n)+e_2(n)=1$, $[n/2]+[(n-1)/2]=n-1$:

$$s_2(n)=6\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]+\sum_{i=1}^{2}s_2(i)e_i(n,2)=6\left[\frac{n-1}{2}\right]+1\cdot e_1(n,2)+5\cdot e_2(n,2)=$$

$$=6\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]+1+4\cdot\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)=2\cdot\left[\frac{n-1}{2}\right]+1+4\cdot\left[\frac{n}{2}\right].$$

Остаточно

$$s_2(n)=2(n+[n/2])-1. \tag{4.61}$$

Зіставляємо (4.59) із (4.61):

$$s_2(n)=3(n-1/2)-1/2\cos\pi(n-1) \;\Leftrightarrow\; s_2(n)=2(n+[n/2])-1,$$

і отримуємо тотожність:

$$\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{1}{4}(2n-1+(-1)^n). \tag{4.62}$$

Переходимо до розгляду $s_3(n)$.

$$\underline{k=3} \;\Rightarrow\; (D_3=2\cdot 3\cdot 5=30,\; T_3=1\cdot 2\cdot 4=8).$$

За формулою (4.52) або (4.56) знаходимо a_m, $m=\overline{1,T_2/2}=1,2,3,4$ (технічний бік пропускаємо):

$$a_1=\frac{1}{4}(2\sqrt{2}-1),\; a_2=-\frac{1}{4},\; a_3=-\frac{1}{4}(2\sqrt{2}+1),\; a_4=-\frac{1}{8}.$$

За формулою (4.53) або (4.57) підраховуємо b_m, $m=1, 2, 3$:

$$b_1=\frac{1}{4}(\sqrt{2}+3),\ \ b_2=-\frac{1}{4},\ \ b_3=\frac{1}{4}(\sqrt{2}-3).$$

Якщо $k=3$, то $\omega_m=\frac{\pi m}{4}$, і вираз для $s_3(n)$ матиме вигляд:

$$s_3(n)=\frac{15}{4}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\sum_{m=1}^{4}a_m\cos\frac{\pi}{4}m(n-1)+\sum_{m=1}^{4}b_m\sin\frac{\pi}{4}m(n-1).$$

Розкриваємо суми:

$$s_3(n)=\frac{15}{4}\left(n-\frac{1}{2}\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left((\sqrt{8}-1)\cos\frac{\pi}{4}(n-1)-\cos\frac{\pi}{2}(n-1)-(\sqrt{8}+1)\cos\frac{3\pi}{4}(n-1)-\frac{1}{2}\cos\pi(n-1)\right)+$$

$$+\frac{1}{4}\left((\sqrt{2}+3)\sin\frac{\pi}{4}(n-1)-\sin\frac{\pi}{2}(n-1)+(\sqrt{2}-3)\sin\frac{3\pi}{4}(n-1)\right).$$

Як бачимо, натуральнозначна функція подається через квадратичні ірраціональності і трансцендентні функції.

Подання $s_3(n)$ через базисні індикатори (3.14) і (3.71) таке (технічний бік пропускаємо):

$$s_3(n)=4n-3+2\left(\left[\frac{n+6}{8}\right]-\left[\frac{n+4}{8}\right]-\left[\frac{n+2}{8}\right]+\left[\frac{n}{8}\right]-\left[\frac{n-1}{8}\right]\right).$$

Звичайно, з точки зору складності обчислень перевагу слід віддати поданню $s_3(n)$ через Антьє.•

Тригонометрична форма подання часткових різниць послідовності ЗСЛ

Установимо формулу для часткових різниць у. а. п. $s_k(n)$: $d_k(n) = s_k(n+1) - s_k(n)$, у межах одного періоду за допомогою власти- вості (4.8):

$$s_k(n) + s_k(T_k - n + 1) = D_k, \ n = \overline{1, T}. \quad (4.63)$$

Записуємо $s_k(n)$:

$$s_k(n) = \frac{D_k}{T_k}(n-1) + \frac{D_k}{2T_k} + \sum_{m=1}^{T_k/2} (a_m \cos \omega_m (n-1) + b_m \sin \omega_m (n-1)), \quad (4.64)$$

тоді $s_k(T_k - n + 1)$ з урахуванням, що за формулами зведення

$$\cos \omega_m (T_k - n) = \cos \omega_m n, \ \sin \omega_m (T_k - n) = -\sin \omega_m n,$$

$s_k(n)$ набуває вигляду:

$$s_k(T_k - n + 1) = \frac{D_k}{T_k}(T_k - n) + \frac{D_k}{2T_k} + \sum_{m=1}^{T_k/2} (a_m \cos \omega_m n - b_m \sin \omega_m n). \quad (4.65)$$

Залучаємо (4.63):

$$D_k = s_k(n) + s_k(T_k - n + 1) \quad \Rightarrow \quad D_k = D_k - \frac{D_k}{T_k} + \frac{D_k}{2T_k} + \frac{D_k}{2T_k} +$$

$$+ \sum_{m=1}^{T_k/2} a_m (\cos \omega_m (n-1) + \cos \omega_m n) + b_m (\sin \omega_m (n-1) - \sin \omega_m n),$$

звідки

$$\sum_{m=1}^{T_k/2} a_m (\cos \omega_m (n-1) + \cos \omega_m n) + b_m (\sin \omega_m (n-1) - \sin \omega_m n) = 0. \quad (4.66)$$

Тепер знаходимо різницю:

$$d_k(n) = s_k(n+1) - s_k(n) =$$

$$= \frac{D_k}{T_k} + \sum_{m=1}^{T_k/2} a_m(\cos\omega_m n - \cos\omega_m(n-1)) + b_m(\sin\omega_m n - \sin\omega_m(n-1)).$$

Але за (4.66)

$$0 = \sum_{m=1}^{T_k/2} a_m(\cos\omega_m(n-1) + \cos\omega_m n) + b_m(\sin\omega_m(n-1) - \sin\omega_m n),$$

тому, складаючи праві частини двох попередніх рівностей, отримуємо:

$$d_k(n) = \frac{D_k}{T_k} + 2\sum_{m=1}^{T_k/2} a_m \cos\omega_m n = 2\left(\frac{D_k}{2T_k} + \sum_{m=1}^{T_k/2} a_m \cos\omega_m n\right).$$

Позначаючи $D_k/(2T_k)$ через a_0, остаточно маємо:

$$d_k(n) = 2\sum_{m=0}^{T_k/2} a_m \cos\omega_m n. \qquad (4.67)$$

Наслідки з формули часткових різниць (властивості a_k):

1) $n = T_k$: $2 = 2\sum_{m=0}^{T_k/2} a_m \cdot 1 \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{m=0}^{T_k/2} a_m = 1,\ \sum_{m=1}^{T_k/2} a_m = 1 - \frac{D_k}{2T_k}\right);$

2) $n = T_k/2+1$: $s_k(T_k/2+1) = \frac{D_k}{2} + 2 = \frac{D_k}{T_k}\cdot\frac{T_k}{2} + \frac{D_k}{2T_k} +$

$$+\sum_{m=1}^{T_k/2}(a_m\cos\pi m - b_m \sin\pi m) \quad \Rightarrow \quad \sum_{m=1}^{T_k/2}(-1)^m a_m = 2 - \frac{D_k}{2T_k};$$

3) із першого і другого наслідків:

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{m=1}^{T_k/2} a_m = 1 - \frac{D_k}{2T_k}, \\ &\sum_{m=1}^{T_k/2} (-1)^m a_m = 2 - \frac{D_k}{2T_k}. \end{aligned}\right] \Rightarrow \left[\begin{aligned} &\sum_{q=1}^{T_k/4} a_{2q} = \frac{1}{2}\left(3 - \frac{D_k}{T_k}\right), \\ &\sum_{q=1}^{T_k/4} (-1)^q a_{2q-1} = -\frac{1}{2}; \end{aligned}\right.$$

Зауваження. Спираючись на формулу (4.67), можна отримати інший вигляд загального члена $s_k(n)$. Будемо виходити з подання його саме через $d_k(n)$ (3.62):

$$s_k(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_k(i) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1}\left(2\sum_{m=0}^{T_k/2} a_m \cos\omega_m i\right) =$$

$$= 1 + 2\sum_{m=0}^{T_k/2}\left(a_m \sum_{i=1}^{n-1}\cos\omega_m i\right).$$

Згорнемо суму за i за формулою (4.47), коли $x = \omega_m = 2\pi m / T_k$:

$$\sum_{i=1}^{n-1}\cos\omega_m i = \cos\frac{\pi m}{T_k} n \cdot \sin\frac{\pi m}{T_k}(n-1) \Big/ \sin\frac{\pi m}{T_k}, \ (x \neq 2\pi m, \ m \neq 0),$$

тоді, зважаючи на те, що $a_0 = D_k/(2T_k)$,

$$s_k(n) = 1 + \frac{D_k}{T_k}(n-1) + 2\sum_{m=1}^{T_k/2}\left(a_m \cos\frac{\omega_m}{2} n \cdot \sin\frac{\omega_m}{2}(n-1) \Big/ \sin\frac{\omega_m}{2}\right),$$

або, позначаючи $a_m / \sin(\omega_m/2)$ через α_m,

$$s_k(n) = 1 + \frac{D_k}{T_k}(n-1) + 2\sum_{m=1}^{T_k/2} \alpha_m \sin\frac{\omega_m}{2}(n-1) \cdot \cos\frac{\omega_m}{2} n. \tag{4.68}$$

Формулу (4.68) можна записати більш компактно, якщо застосувати перетворення добутку "синуса" і "косинуса":

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \sin\frac{\omega_m}{2}(n-1)\cdot\cos\frac{\omega_m}{2}n=\frac{1}{2}(\sin\frac{\omega_m}{2}(2n-1)+\sin\frac{\omega_m}{2}).$$

Дійсно, тоді

$$s_k(n)=1+\frac{D_k}{T_k}(n-1)+\sum_{m=1}^{T_k/2}\alpha_m\sin\frac{\omega_m}{2}(2n-1)-\sum_{m=1}^{T_k/2}a_m,$$

де за першим наслідком із (4.67) від'ємник дає $1-D_k/(2T_k)$.

Отже, остаточно

$$s_k(n)=\frac{D_k}{T_k}\left(n-\frac{1}{2}\right)+\sum_{m=1}^{T_k/2}\alpha_m\sin\omega_m\left(n-\frac{1}{2}\right), \qquad (4.69)$$

де $\alpha_m=a_m/\sin(\omega_m/2)$.

Без сумніву, з (4.69) можна отримати формулу (4.67) для $d_k(n)$.

Тригонометрична формула простих чисел

Формула часткових різниць $d_k(n)$ дає можливість отримати рекурентну формулу простих чисел, якщо взяти $n=2$:

$$d_k(2)=p_{k+1}-1=2\sum_{m=0}^{T_k/2}a_m\cos 2\omega_m.$$

Таким чином,

$$p_{k+1}=2\sum_{m=0}^{T_k/2}a_m\cos 2\omega_m+1,\ k=2,3,\ldots, - \qquad (4.70)$$

рекурентна формула простого числа в тригонометричній формі, або коротше – **тригонометрична формула простих чисел.**

Щоб отримати перші два простих числа (при $k=0, 1$), верхню межу суми слід брати під знаком Антьє: $[T_k/2]$.

Приклад 4.6. Знайдіть за формулою (4.70) просте число p_4.

Розв'язання. Беремо $k=3$, тоді $D_3=2\cdot 3\cdot 5=30$, $T_3=1\cdot 2\cdot 4=8$, $T_3/2=4$; коефіцієнти a_m, де $m=0,1,2,3,4$, уже підраховані.

Розкриваємо суму і отримуємо:

$$p_4=2\left(\frac{15}{8}+\frac{1}{4}\left((\sqrt{8}-1)\cos\frac{\pi}{4}-\cos\frac{\pi}{2}-(\sqrt{8}+1)\cos\frac{3\pi}{4}-\frac{1}{2}\cos\pi\right)\right)+1=$$

$$=2\left(\frac{15}{8}+\frac{1}{4}\left(2-\frac{1}{\sqrt{2}}-1\cdot 0+2+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2}\right)\right)+1=7.\bullet$$

Так само, як і рекурентна формула (4.29), тригонометрична формула знаходження кожного наступного простого числа потребує знання всіх попередніх простих чисел. Гадаємо, що ця обставина є основною причиною труднощів вивчення властивостей відповідної послідовності.

Зауваження. Корені зворотного рівняння (3.32) з характеристичним рівнянням (3.33), тобто корені n-го степеня з одиниці, можна також записати в показниковій формі:

$$\sqrt[n]{1}:\ q_k=e^{\frac{2\pi k\cdot i}{n}},\ \ k=0,1,2,\ldots,n-1. \tag{4.71}$$

Тоді за формулами Ейлера:

$\cos\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}+e^{-i\varphi}}{2}$, $\sin\varphi=\dfrac{e^{i\varphi}-e^{-i\varphi}}{2i}$, можна перейти до показникової форми у. а. п. $s_k(n)$ і досліджувати її, але не будемо цього робити.

4.6. Аналітичний опис послідовності простих чисел-близнюків

Дослідження множини простих чисел-близнюків будемо проводити, вивчаючи пари $(\beta_k(n), \gamma_k(n))$ послідовності ЗСЛ за модулем D_k: $s_k(n)$, яка задовольняє умову – в неї входять тільки елементи пари із ЗСЛ, різниця між якими дорівнює двом: $\gamma_k(n) - \beta_k(n) = 2$.

Перш за все, зупинимося на функції $\varphi_k^{(2)}(p_k)$, що визначає кількість пар чисел, взаємно простих із p_k, різниця між якими дорівнює двом і де першим елементом пари є p_k:

$$\varphi_k^{(2)}(p_k) = \begin{cases} \varphi_k(p_k) = p_k - 1, \text{ якщо } (2,\ p_k) \neq 1 \\ \varphi_k(p_k) = p_k - 2, \text{ якщо } (2,\ p_k) = 1 \end{cases}, \tag{4.72}$$

слушність якої випливає із властивості функції Ейлера [8]: $\varphi(p) = p - 1$, p – будь-яке просте число.

Оскільки функція $\varphi_k^{(2)}(p_k)$ мультиплікативна, то

$$\varphi_k^{(2)}(D_k) = (p_1 - 1)(p_2 - 2)\ldots(p_k - 2) = \Gamma_k,\ k \in \mathbf{N}, \tag{4.73}$$

де Γ_k – стисле позначення $\varphi_k^{(2)}(D_k)$, і приймемо $\Gamma_0 = T_0 = p_0 = 1$.

Отже, дослідимо послідовність $\beta_k(n)$, яка є у. а. п., що описується функціональним рівнянням:

$$\beta_k(n + \Gamma_k) - \beta_k(n) = D_k, \tag{4.74}$$

де $D_k = p_1 p_2 \ldots p_k$ – різниця у. а. п.;

$\Gamma_k = \varphi_k^{(2)}(D_k)$ – її період;

$\varphi_k^{(2)}(a) = \varphi^{(2)}(a, D_k)$ – кількість пар чисел, взаємно простих із D_k, різниця між якими дорівнює двом і де перший елемент пари дорівнює a.

$$\nu_k^i(n) = i + \Gamma_k(n-1),\ i = \overline{1, \Gamma_k}, \tag{4.75}$$

назвемо **базисними нумераторами у. а. п. $\boldsymbol{\beta_k(n)}$,** а всю їх сукупність – **$\boldsymbol{T_\nu}$-базисом** нумераторів.

Загальний член подається, як для інших у. а. п., у вигляді:

$$\beta_k(n) = a(n) + D_k \cdot \left\lfloor \frac{n-1}{\Gamma_k} \right\rfloor,$$

де $a(n)$ – періодична складова: $a(n+\Gamma_k) = a(n)$; $a(i) = \beta_k(i)\ \forall i = \overline{1, \Gamma_k}$.

Умова, яка накладається на $\beta_k(n)$ порівняно із $s_k(n)$, дає змогу описати її індикатор:

$$\mu_k(n) = \begin{cases} 1, \text{ якщо } \varphi_k(\ \beta_{k-1}(n) + 2) > \varphi_k(\beta_{k-1}(n)) \\ 0, \text{ якщо } \varphi_k(\ \beta_{k-1}(n) + 2) = \varphi_k(\beta_{k-1}(n)) \end{cases}. \tag{4.76}$$

Покажемо, що $\mu_k(n)$ – періодична функція з періодом $T_\mu = p_k\Gamma_{k-1}$. За формулою (4.14) $\varphi_k(n)$ описується трійкою $(\varphi_k(n), D_k, T_k)$, тобто $\varphi_k(n+D_k) - \varphi_k(n) = T_k$. Оскільки $\beta_{k-1}(n+p_k\Gamma_{k-1}) = \beta_{k-1}(n) + \underbrace{p_k D_{k-1}}_{D_k})$, то

$$\mu_k(n+p_k\Gamma_{k-1}) = \varphi_k(\beta_{k-1}(n+p_k\Gamma_{k-1})+2) - \varphi_k(\beta_{k-1}(n+p_k\Gamma_{k-1})) =$$

$$= \varphi_k(\beta_{k-1}(n) + 2 + D_k) - \varphi_k(\beta_{k-1}(n) + D_k) =$$

$$= \varphi_k(\beta_{k-1}(n) + 2) - \varphi_k(\beta_{k-1}(n)).$$

Отже,

$$\mu_k(n+p_k\Gamma_{k-1}) = \mu_k(n) \quad \Rightarrow \quad T_\mu = p_k\Gamma_{k-1} = \Gamma_k + 2\Gamma_{k-1}. \tag{4.77}$$

Відповідні нумератори $\nu_k(n)$ знайдемо за теоремою 3.12 (*формулою обернення*) згідно з формулами (3.63), (3.64) і (3.67), у яких для $\beta_k(n)$: $T_\mu = p_k\Gamma_{k-1}$, $T_\nu = \Gamma_k$, а суму елементів $\mu_k(n)$:

$$\sum_{j=1}^{i}\mu_k(j) = \sum_{j=1}^{i}(\varphi_k(\beta_{k-1}(j)+2)-\varphi_k(\beta_{k-1}(j))),$$

для скорочення запису позначимо через $\psi_k(\beta_{k-1}(i))$.

Остаточно $\nu_k(n)$ запишеться у вигляді:

$$\nu_k(n) = \sum_{i=1}^{p_k\Gamma_{k-1}}\left[\frac{1}{\Gamma_k}(n+\Gamma_k-1-\psi_k(\beta_{k-1}(i)))\right]+1. \qquad (4.78)$$

Теорема 4.4 (*про* Γ_k*-розклад*). Композиції у. а. п. $\beta_k(n)$ і базисних нумераторів $\nu_k^i(n)$, $i=\overline{1,\Gamma_k}$ є арифметичними прогресіями з першим членом $a(i)$ і різницею D_k.

Доведення. Позначимо композицію послідовності $(\beta_k(n), \Gamma_k, D_k)$ з нумератором $\nu_k^i(n) = i+\Gamma_k(n-1)$ через $\beta_k^i(n)$.

Залучимо $\beta_k(n)$ у вигляді (4.75), тоді:

$$\beta_k^i(n) = (\beta_k \circ \nu_k^i)(n) = a(i+\Gamma_k(n-1)) + D_k \cdot \left[\frac{i+\Gamma_k(n-1)-1}{\Gamma_k}\right].$$

Завдяки періодичності ч/п $a(n)$ і властивості **1⁰** Антьє (п. 3.1) маємо:

$$\beta_k^i(n) = a(i) + D_k\cdot(n-1) \;\Leftrightarrow\; (\beta_k^i(n), 1, D_k),\; i=\overline{1,\Gamma_k}, - \qquad (4.79)$$

кортеж арифметичних прогресій – $\boldsymbol{\Gamma_k}$**-розклад**, або $\boldsymbol{\Gamma_k}$**-розбиття,** у. а. п. $\beta_k(n)$, яка описує послідовність перших елементів пар чисел-близнюків.•

Наведемо далі для $k=1, 2, 3, 4, 5$ різниці D_k і періоди Γ_k (за домовленістю $D_0=\Gamma_0=p_0=1$):

$$D_1=2,\ \Gamma_1=1;\ D_2=2\cdot3=6,\ \Gamma_2=1;\ D_3=2\cdot3\cdot5=30,\ \Gamma_3=3;$$

$$D_4=2\cdot3\cdot5\cdot7=210,\ \Gamma_4=3\cdot5=15;$$

$$D_5=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=2310,\ \Gamma_5=3\cdot5\cdot9=135.$$

У якості $\beta_0(n)$ виступає універсум $s_\circ(n)=n$, $n\neq1$, а всі наступні загальні члени послідовності $\beta_k(n)$ визначаються як композиції з відповідними нумераторами $\nu_k(n)$: $\beta_k(n)=(\beta_{k-1}\circ\nu_k)(n)$, а саме:

$$\beta_0(n)=s_\circ(n)=n,\ n\neq1.$$

$$\beta_1(n)=\beta_0(\nu_1(n))=\nu_1(n)$$

$$\beta_2(n)=\beta_1(\nu_2(n)),$$

....

$$\beta_k(n)=\beta_{k-1}(\nu_k(n)).$$

Нумератори підраховуємо за формулою (4.78):

$$(k=1,\ \Gamma_1=1):\ \beta_1(n)=\beta_0(\nu_1(n))=\nu_1(n)=2n-1=$$

$$=(1,\ \underline{3},\ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27, 29, 31, 33, 35, 37, 39, 41,\ ...).$$

Відлік починаємо з підкресленої трійки. Одиниця не вважається простим числом, оскільки у протилежному випадку ціле число безліччю способів розкладалося б на добуток простих чисел, що не узгоджується з основною теоремою арифметики [11].

$$(k=2,\ \Gamma_2=1):\ \beta_2(n)=\beta_1(\nu_2(n))=\beta_1(3n)=6n-1=$$

$$=(5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29,\ 35, 41, 47, 53,\ 59, 65,\ 71, 77, 83, 89, 95, 101, ...).$$

Отже, $(D_2=6,\ \Gamma_2=1)$: $\beta_2(n)=6n-1.$

Як бачимо, для $\Gamma_1 = \Gamma_2 = 1$ отримуємо лише по одній арифметичній прогресії.

$$(k=3,\ \Gamma_3=3):\ \beta_3(n)=\beta_2(\nu_3(n))=\beta_2\left(2n-\left[\frac{n+1}{3}\right]\right).$$

Три арифметичні прогресії опишемо, якщо для значень n переберемо всі повні системи лишків за модулем три: $n=3t-2$, $n=3t-1$, $n=3t$, t – натуральне. За цієї умови нумератори ν_3^i, $i=\overline{1,\Gamma_3}$, виглядають так:

$$\nu_3(n)=n+\left[\frac{n+2}{3}\right]+\left[\frac{n}{3}\right]=2n-\left[\frac{n+1}{3}\right] \ \Leftrightarrow \ \left[\begin{array}{l} \nu_3^1(n)=5n-3, \\ \nu_3^2(n)=5n-2, \quad n\in\mathbf{N}; \\ \nu_3^3(n)=5n, \end{array}\right.$$

Зауважимо, що для кожного фіксованого n маємо n-й елемент кожного нумератора; а сам Γ_k -розклад матиме вигляд:

$$\beta_3(n)=\left[\begin{array}{l} \beta_2(5n-3)=\beta_3^1(n)=30\ n-19, \\ \beta_2(5n-2)=\beta_3^2(n)=30\ n-13, \\ \beta_2(5n)=\beta_3^3(n)=30\ n-1, \end{array}\right. \text{ а } \gamma_3(n)=\left[\begin{array}{l} \gamma_3^1(n)=30n-17, \\ \gamma_3^2(n)=30n-11, \\ \gamma_3^3(n)=30n+1, \end{array}\right.$$

тобто

$$(D_3=30,\ \Gamma_3=3):\ \beta_3(n)=\left[\begin{array}{l} \beta_3^1=(11,\ 41,\ 71,\ 101,\ 131,\ 161,\ 191,\ \ldots), \\ \beta_3^2=(17,\ 47,\ 77,\ 107,\ 137,\ 167,\ 197,\ \ldots), \\ \beta_3^3=(29,\ 59,\ 89,\ 119,\ 149,\ 179,\ 209,\ \ldots), \end{array}\right.$$

або

$$\beta_3(n)=(11, 17, 29, 41, 47, 59, 71, 77, 89,$$
$$101, 107, 119, 131, 137, 149, 161, 167, 179, 191, 197, 209, \ldots) –$$

у. а. п. із частковими різницями: $d_1(\beta_3)=6,\ d_2(\beta_3)=12, d_3(\beta_3)=12$, сума яких дорівнює різниці $\beta_3(n)$.

$$(k=4,\ \Gamma_4=15):\ \nu_4(n)=n+\left[\frac{n+10}{15}\right]+\left[\frac{n+4}{15}\right]+2\left(\left[\frac{n+8}{15}\right]+\left[\frac{n+6}{15}\right]\right).$$

Як і в попередньому випадку, переберемо всі повні системи лишків, але вже за модулем 15: $n=15t-j$, $j=\overline{0,14}$, t – натуральне, і опишемо нумератори $\nu_4^i, i=\overline{1,\Gamma_4}$. Зауважимо, що із повної системи лишків за модулем 21 випадають лишки, які визначаються від'ємниками, що збігаються з доданками у чисельнику під знаком Антьє в $\nu_4(n)$; таких доданків шість: 10, чотири, дві вісімки, дві шістки, їм відповідають числа п'ять, вісім, дев'ять, 12, 13, 15 і залишаються потрібні 15 нумераторів:

$$\nu_4(n)=n+\left[\frac{n+10}{15}\right]+\left[\frac{n+4}{15}\right]+2\left(\left[\frac{n+8}{15}\right]+\left[\frac{n+6}{15}\right]\right)\ \Leftrightarrow\ \left[\begin{array}{l}\nu_4^1=21n-20\,,\\ \nu_4^2=21\,n-19\,,\\ \dots\dots\dots\dots\\ \nu_4^{15}=21\,n\,.\end{array}\right.$$

Сам Γ_k -розклад матиме вигляд:

$$\beta_4(n)=\left[\begin{array}{l}\beta_3(21n-20)=\beta_4^1(n)=210\,n-199,\\ \beta_3(21n-19)=\beta_4^2(n)=210\,n-193,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \beta_3(21n)=\beta_4^{15}(n)=210\,n-1,\end{array}\right.$$

$$(D_4=210,\ \Gamma_4=15):$$

$$\beta_4(n)=\left[\begin{array}{l}\beta_4^1=(\ 11,\ 221, 431, 641,\ 851, 1061,\ 1271\,,\ \dots),\\ \beta_4^2=(\,17, 227,\ 437, 647, 857,\ 1067, 1277\,,\ \dots),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \beta_4^{15}=(\ 209, 419,\ 629,\ 839, 1049,\ 1259, 1469,\ \dots).\end{array}\right.$$

Наведемо перший період елементів $\beta_4(n)$ і часткові різниці:

$$\beta_4(n) = \beta_3(\nu_4(n)) = (\ 11\,\underline{_6}\ 17\,_{12}\ 29\,_{12}\ 41\,_{18}\ 59\,_{12}\,71\,_{30}\ 101\,_{6}\ 107\,_{30}$$
$$137\,_{12}\ 149\,_{18}\ 167\,_{12}\ \ 179\,_{12}\,191\,_{6}\ 197\,_{12}\ \ 209\,_{12}\ 221\,\underline{_6}\,227, \ldots),$$

де перші часткові різниці першого і другого періодів підкреслені; часткові різниці всього періоду (їх 15) у сумі дають різницю у. а. п. $\beta_k(n)$: $D_4 = 210$.

Покроковий процес – $k = 1, 2, 3, 4, \ldots$ – отримання послідовностей $\beta_k(n)$ є по суті аналітичним решетуванням послідовності ЗСЛ за модулем D_k, який поступово пропускає зайве – очищує від "домішок", – залишаючи основне – пари-близнюки $(\beta_k(n), \gamma_k(n))$.

Підіб'ємо підсумки проведеного дослідження.

Теорема 4.5 (*про потужність множини простих чисел-близнюків*). Множина простих чисел-близнюків зліченна.

Доведення. Припустимо, що в процесі аналітичного решетування після деякого $k = k_0$ не залишилося жодної простої пари $(\beta_k(n), \gamma_k(n))$, тобто для всіх $k > k_0$ серед членів послідовності $\beta_k(n)$ або $\gamma_k(n)$ будуть складені числа. Але це суперечить теоремі Лежена-Діріхле [12; 48], за якою кожна з арифметичних прогресій $\beta_k^i(n)$ і $\gamma_k^i(n)$, $i = \overline{1, \Gamma_k}$, містить нескінченно багато простих чисел, адже $(\beta_k^i(n), D_k) = 1$ і $(\gamma_k^i(n), D_k) = 1$. Таким чином, припущення про скінченність множини простих чисел-близнюків хибне.

Числа-близнюки "ходять" поруч, і перше з них для кожного значення k не має перевищувати $p_{k+1}^2 - 4$, тому що пара $(p_{k+1}^2 - 2,\ p_{k+1}^2)$ не є парою близнюків; отже, $\beta_k(n) \in [\,p_{k+1},\ p_{k+1}^2 - 4\,]$. •

Позначимо множину перших елементів чисел-близнюків через $\mathbf{B^1}$ та наведемо кортежі з перших елементів пар простих близнюків (у кожній ч/п $\beta_k(n)$ числа p_{k+1} і p_{k+1}^2 підкреслені):

$$k = 1:\ \beta_1(n) = (1, \underline{3}, 5, 7, \underline{9}, \ldots)\ \Rightarrow\ \{3, 5\} \subset \mathbf{B^1}, \text{ бо } 3^2 - 4 = 5;$$

$$k=2:\ \beta_2(n)=(\underline{5},\ 11,\ 17,\ 23,\ ^{\underline{25}}\ 29,\ldots)\ \Rightarrow\ \{5,11,17\}\subset\mathbf{B}^{\mathbf{1}},\text{ бо } 5^2-4=21;$$

$$k=3:\ \beta_3(n)=(\ ^{\underline{7}}11,\ 17,29,41,47,^{\underline{49}}\ 59,\ldots)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \{11,17,29,41\}\subset\mathbf{B}^{\mathbf{1}},\text{ бо } 7^2-4=45;$$

$$k=4:\ \beta_4(n)=(\ \underline{11},\ 17,29,41,59,71,101,107,^{\underline{121}}137,\ldots)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \{11,\ 17,29,41,59,71,101,107\}\subset\mathbf{B}^{\mathbf{1}},\text{ бо } 11^2-4=117;\ \ldots\ .$$

У процесі такого решетування на кожному наступному кроці отримуємо скінченну множину простих чисел-близнюків, але кількість їх збільшується, адже $p_{k+2}^2-4>p_{k+1}^2-4$. За необмеженого зростання k приходимо до зліченної множини скінченних множин, тобто до зліченної множини. Як і послідовність простих чисел, ч/п $\beta_k(n)$ кусково-зворотна.

Інший опис у. а. п. $\beta_k(n)$ отримаємо, якщо виходити не з композицій $\beta_k(n)=\beta_{k-1}(\nu_k(n))$, а з композицій $\beta_k(n)=s_k(\nu_k(n))$.

Тоді

$$\nu_k(n)=\sum_{i=1}^{T_k}\left[\frac{1}{\Gamma_k}(n+\Gamma_k-1-\psi_k(s_k(i)))\right]+1, \tag{4.80}$$

де $\psi_k(s_k(i))=\sum_{j=1}^{i}\mu_k(j)$, $\mu_k(n)=\varphi_k(s_{k-1}(n)+2)-\varphi_k(s_{k-1}(n))$.

Для кожного k функція $\beta_k(n)$, як і з нумератором (4.78), за умови $1\le n\le\psi_k(p_{k+1}^2-4)\ne 0$, дає той самий відрізок послідовності простих чисел-близнюків. (Детально такий підхід розглядати не будемо.)

Зауваження. Запропоноване решетування послідовності ЗСЛ за модулем D_k без принципових змін переноситься на інші часткові різниці між простими числами.

У загальному випадку, для дослідження послідовностей пар простих чисел з різницею між ними, що дорівнює парному числу $2r$, $r\in\mathbf{N}$, слід розглядати у. а. п., які описуються функціональним рівнянням:

$$s_k^{(2r)}(n+T_k^{(2r)})-s_k^{(2r)}(n)=D_k, \tag{4.81}$$

де $D_k=p_1p_2\ldots p_k$ – різниця у. а. п., як і для чисел-близнюків;

$T_k^{(2r)}$ – період послідовності: $T_k^{(2r)} = \psi_k^{(2r)}(D_k)$;

$\psi_k(a) = \psi(a, D_k)$ – кількість пар чисел, взаємно простих із D_k, різниця між якими дорівнює $2r$ і перший елемент пари не перевищує a.

Загальний член послідовності (4.81) в алгебраїчній формі такий:

$$s_k^{(2r)}(n) = D_k \left[\frac{n-1}{T_k^{(2r)}} \right] + \sum_{i=1}^{T_k^{(2r)}} s_k^{(2r)}(i)\, e_i(n, T_k^{(2r)}), \qquad (4.82)$$

де $e_i(n, T_k^{(2r)})$ – базисні індикатори (3.10), (3.14) з періодом $T_k^{(2r)}$.

За таких умов $\mu_k(n) = \varphi_k(\beta_{k-1}(n) + 2r) - \varphi_k(\beta_{k-1}(n))$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Величину $2r$ назвемо **мірою близькості** сусідніх простих чисел. Наприклад, можна розглядати пари з мірою близькості $4, 6, 8, \ldots$, тобто пари $(p, p+6)$, $(p, p+8)$, $(p, p+10)$, $\ldots$.

Уважаємо, що на цьому ж шляху лежить доведення гіпотези А. Поліньяка про те, що міра близькості між двома простими числами може виражатися будь-яким парним числом.

Більше того, за допомогою відповідного решетування послідовності ЗСЛ за модулем D_k можна розв'язати задачу аналітичного опису простих чисел-триплетів: $(p, p+2, p+6)$, $(p, p+4, p+6)$, часткові різниці яких відповідно двійка і четвірка, четвірка і двійка. Індикатори таких трійок є добутками індикаторів першого і другого, другого і третього елементів триплету. Наприклад, для першої трійки

$$\left.\begin{array}{r} \mu_k^1(n) = \underbrace{\varphi_k(\beta_{k-1}(n)+2) - \varphi_k(\gamma_{k-1}(n))}_{\Delta_1} \\ \mu_k^2(n) = \underbrace{\varphi_k(\beta_{k-1}(n)+6) - \varphi_k(\gamma_{k-1}(n)+2))}_{\Delta_2} \end{array}\right] \Rightarrow \quad \mu_k(n) = \Delta_1 \cdot \Delta_2 . \qquad (4.83)$$

Аналогічно описуємо індикатор другого триплету.

Запропонований алгебро-логічний підхід до вивчення властивостей натуральних зростальних підпослідовностей ряду натуральних чисел названо **методом аналітичного решетування** (**МАР**). Теоретичною основою МАР є послідовнісна модель булевої алгебри – S-алгебра.

4.7. Тригонометрична форма подання послідовності простих чисел-близнюків

Установимо вигляд тригонометричної форми (див. (3.35)) для у. а. п.

$$\beta_k(n+\Gamma_k)-\beta_k(n)=D_k\,, \tag{4.84}$$

де $D_k=p_1p_2...p_k$, $\Gamma_k=\varphi_k^{(2)}(D_k)=(p_1-1)(p_2-2)\ldots(p_k-2)$.

Наведемо значення D_k, Γ_k для $k=1,2,3,4,5,6,7$:

$$\Gamma_1=\Gamma_0=p_0=1;$$

$$\begin{gathered}
D_1=2,\ \Gamma_1=1;\ D_2=2\cdot3=6,\ \Gamma_2=1;\ D_3=2\cdot3\cdot5=30,\ \Gamma_3=3;\\
D_4=2\cdot3\cdot5\cdot7=210,\ \Gamma_4=3\cdot5=15;\\
D_5=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11=2310,\ \Gamma_5=3\cdot5\cdot9=135;\\
D_6=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13=30030,\ \Gamma_6=3\cdot5\cdot9\cdot11=1485;\\
D_7=2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17=510510,\ \Gamma_7=3\cdot5\cdot9\cdot11\cdot15=22275.
\end{gathered} \tag{4.85}$$

З метою зменшити можливу громіздкість викладу поки що пропустимо індекс k, а при нагоді повернемось до нього.

Теорема 4.6 (*про зворотність послідовності* $\beta(n)$). У. а. п. $\beta(n)$ є зворотною послідовністю $(\Gamma+1)$-го порядку.

Доведення. Збільшимо в рівнянні (4.84) номер n на одиницю:

$$\beta(n+\Gamma)-\beta(n)=D\ \Rightarrow\ \beta(n+1+\Gamma)-\beta(n+1)=D.$$

Прирівнюючи ліві частини рівнянь, отримаємо зворотне рівняння:

$$\beta(n+\Gamma+1)=\beta(n+\Gamma)+\beta(n+1)-\beta(n) \tag{4.86}$$

з характеристичним рівнянням

$$q^{n+\Gamma+1}=q^{n+\Gamma}+q^{n+1}-q^n\quad(q\neq0),\ \text{або}\ (q-1)(q^{\Gamma}-1)=0. \tag{4.87}$$

Корені (4.83) такі:

$$q=1,\ q_k=\sqrt[\Gamma]{1}=\cos\frac{2\pi k}{\Gamma}+i\cdot\sin\frac{2\pi k}{\Gamma}\quad (i=\sqrt{-1}),\ k=0,1,\ldots,\Gamma-1. \qquad (4.88)$$

Слід зауважити, що одиниця є двократним коренем, тоді загальний член послідовності слід шукати у вигляді [23]:

$$\beta(n)=A_0(n-1)+B_0+\sum_{m=1}^{\Gamma-1}B_m\left(\cos\frac{2\pi m}{\Gamma}(n-1)+i\cdot\sin\frac{2\pi m}{\Gamma}(n-1)\right), \qquad (4.89)$$

де $A_0,\ B_k$, $k=0,1,\ldots,\Gamma-1$, – сталі, що підлягають визначенню.•

Формула (4.89) – **тригонометрична форма подання у. а. п.** $\boldsymbol{\beta(n)}$.

Знайдемо загальні вирази для коефіцієнтів послідовності $\beta(n)$. Щоб уникнути колізій у позначеннях, замінимо в (3.35) індекс підсумовування k на m.

Рівняння (4.86) не містить параметра D, тому під час його розв'язання необхідно враховувати вихідне функціональне рівняння.

Коефіцієнт A_0 знаходимо з урахуванням вихідного рівняння. Згідно з (4.89) маємо:

$$\beta(n+\Gamma)=A_0\Gamma+A_0(n-1)+B_0+\sum_{m=1}^{\Gamma-1}B_m\left(\cos\frac{2\pi m}{\Gamma}(n-1)+i\cdot\sin\frac{2\pi m}{\Gamma}(n-1)\right),$$

тоді $\beta(n+\Gamma)-\beta(n)=A_0\Gamma=D$, звідки $A_0=D/\Gamma$.

Для перших семи значень k відповідно маємо:

k	1	2	3	4	5	6	7
A_0	2	6	10	14	154/9	182/9	3094/135

Коефіцієнти B_m, $m=0,1,\ldots,\Gamma-1$, визначаються за відомими значеннями перших Γ членів послідовності – її періодичної складової.

Як це здійснюється, покажемо спочатку на конкретному прикладі.

Приклад 4.7. Знайдіть коефіцієнти у. а. п. $\beta(n)$ для $k=1, 2, 3.$

Розв'язання. За формулою (4.89) отримуємо:

$$k=1:\ \beta_1(n)=A_0(n-1)+B_0 \ \Rightarrow\ \beta_1(1)=A_0(1-1)+B_0 \ \Rightarrow\ B_0=1 \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \beta_1(n)=2(n-1)+1=2n-1;$$

$$k=2:\ \beta_2(n)=6\,(n-1)+B_0 \ \Rightarrow\ 5=6\,(1-1)+B_0 \ \Rightarrow\ B_0=5 \ \Rightarrow\ \beta_2(n)=6n-1;$$

$$k=3:\ \beta_3(n)=A_0\,(n-1)+B_0+$$

$$+B_1(\cos\frac{2\pi}{3}(n-1)+i\cdot\sin\frac{2\pi}{3}(n-1))+B_2(\cos\frac{4\pi}{3}(n-1)+i\cdot\sin\frac{4\pi}{3}(n-1)).$$

За формулами зведення

$$\beta_3(n)=10\,(n-1)+B_0+(B_1+B_2)\cos\frac{2\pi(n-1)}{3}+(B_1-B_2)\,i\cdot\sin\frac{2\pi(n-1)}{3}.$$

Позначимо: $B_1+B_2=a_1$, $(B_1-B_2)\cdot i=b_1$, і знайдемо коефіцієнти B_0, a_1, a_2 за відомими $\beta_1=11$, $\beta_2=17$, $\beta_3=29$, і $A_0=D/\Gamma=3$:

$$\left|\begin{array}{l} n=1 \\ n=2 \\ n=3 \end{array}\right| \begin{cases} B_0+a_1=11 \\ 10+B_0-1/2a_1+\sqrt{3}/2b_1=17 \\ 20+B_0-1/2a_1-\sqrt{3}/2b_1=29 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} B_0=9 \\ a_1=2 \\ b_1=-2\sqrt{3}/3 \end{cases}.$$

Таким чином,

$$\beta_3(n)=10n-1+2\cos(2\pi(n-1)/3)\ -2/\sqrt{3}\sin(2\pi(n-1)/3)=$$

$$=(\ 11,\ 17, 29, 41, 47,\ 59, 71, 77, 89, \tag{4.90}$$

$$101, 107, 119, 131, 137, 149, 161, 167, 179, 191, 197, 209, \ldots).\bullet$$

Загальні формули для коефіцієнтів A_0, B_0, a_m, b_m, $m=\overline{1,\Gamma_k-1}$, знаходимо за тією ж методикою, що і для $s_k(n)$, і вони мають такий самий вигляд, за винятком B_0, оскільки часткові різниці послідовності $\beta_k(n)$ не симетричні відносно півперіоду (Γ_k – непарне число).

З урахуванням формул зведення:

$$\cos(\Gamma-m)\frac{2\pi}{\Gamma}(n-1)=\cos m\frac{2\pi}{\Gamma}(n-1),$$

$$\sin(\Gamma-m)\frac{2\pi}{\Gamma}(n-1)=-\sin m\frac{2\pi}{\Gamma}(n-1),$$

у сумі за m в (4.89) можна зменшити кількість доданків:

$$\sum_{m=1}^{\Gamma-1}B_m\left(\cos\frac{2\pi m}{\Gamma}(n-1)+i\cdot\sin\frac{2\pi m}{\Gamma}(n-1)\right)=$$

$$=(B_1+B_{\Gamma-1})\cos\frac{2\pi}{\Gamma}\cdot 1(n-1)+(B_2+B_{\Gamma-2})\cos\frac{2\pi}{\Gamma}\cdot 2(n-1)+\ldots+$$

$$+(B_{(\Gamma-1)/2}+B_{(\Gamma+1)/2})\cos\frac{2\pi}{\Gamma}\cdot\frac{\Gamma-1}{2}(n-1)+i\,(B_1-B_{\Gamma-1})\sin\frac{2\pi}{\Gamma}\cdot 1(n-1)+$$

$$+i(B_2-B_{\Gamma-2})\sin\frac{2\pi}{\Gamma}\cdot 2(n-1)+\ldots+i(B_{(\Gamma-1)/2}-B_{(\Gamma+1)/2})\sin\frac{2\pi}{\Gamma}\cdot\frac{\Gamma-1}{2}(n-1).$$

Введемо позначення: $B_m+B_{\Gamma-m}=a_m$, $i(B_m-B_{\Gamma-m})=b_m$ (тут m змінюється від одиниці до $(\Gamma-1)/2$, тоді (4.89) набуде вигляду:

$$\beta(n)=A_0(n-1)+B_0+\sum_{m=1}^{(\Gamma-1)/2}\left(a_m\cos\frac{2\pi m}{\Gamma}(n-1)+b_m\sin\frac{2\pi m}{\Gamma}(n-1)\right). \quad (4.91)$$

Відповідні формули для коефіцієнтів після спрощення за допомогою (4.54), (4.55) мають вигляд (індекси в D, Γ, β пропускаються):

$$A_0 = \frac{D}{\Gamma}, \; B_0 = \frac{1}{\Gamma}\left(\sum_{n=1}^{\Gamma}\beta(n) - D\right); \tag{4.92}$$

$$a_m = \frac{2}{\Gamma}\left(\frac{D}{2} + \sum_{l=0}^{\Gamma-1}\beta(l+1)\cdot\cos\omega_m l\right), \; \omega_m = \frac{2\pi m}{\Gamma}, \; m = \overline{1, (\Gamma-1)/2}. \tag{4.93}$$

$$b_m = \frac{2}{\Gamma}\left(\frac{D}{2} ctg\frac{\pi m}{\Gamma} + \sum_{l=0}^{\Gamma-1}\beta(l+1)\cdot\sin\omega_m l\right), \; m = \overline{1, (\Gamma-1)/2}. \tag{4.94}$$

Зауваження 1. Якщо зіставляти послідовності $\beta_k(n)$, отримані в алгебраїчному описі відповідної у. а. п. (див. п. 4.6), з їх тригонометричною формою подання, то, як і слід було чекати, вони збігаються.

Принципова відмінність підходів полягає в тому, що на кожному наступному кроці за k у п. 4.6 здійснювалася композиція попереднього результату з відповідним нумератором: $\beta_k(n) = (\beta_{k-1} \circ \nu_k)(n)$, тобто використовувався результат попереднього кроку, а тригонометрична форма цього не робить, вона потребує розв'язання зворотного рівняння (4.86) заново, до того ж повинні бути відомі значення перших Γ_k членів послідовності. Ця обставина є обтяжливою з точки зору обсягу обчислювальної роботи стосовно підрахунку коефіцієнтів a_m, b_m за формулами (4.93) і (4.94), тим паче, що вони містять трансцендентні функції.

Якому ж підходу слід віддати перевагу під час дослідження послідовності простих чисел – алгебраїчному (через Антьє) чи тригонометричному (через "синус" із "косинусом")? На думку автора – другому, оскільки апарат тригонометричних функцій більш "гнучкий" і може розкрити більше таємниць загадкової послідовності.

Зауваження 2. За допомогою ЗСЛ за майже простим модулем D_k у загальному випадку, для послідовностей пар простих чисел з різницею між ними, що дорівнює парному числу $2r$, $r \in \mathbf{N}$, слід розглядати у. а. п., які описуються функціональним рівнянням:

$$\beta_k^{(2r)}(n+T_k^{(2r)})-\beta_k^{(2r)}(n)=D_k\,, \tag{4.95}$$

де $D_k = p_1 p_2 \ldots p_k$ – різниця у. а. п., як і для чисел-близнюків;

$T_k^{(2r)}$ – період послідовності: $T_k^{(2r)}=\varphi_k^{(2r)}(D_k)$;

$\varphi^{(2r)}(a,D_k)=\varphi_k^{(2r)}(a)\,\psi(a,D_k)=\psi_k(a)$ – кількість пар чисел, взаємно простих з D_k, із різницею $2r$ і перший елемент дорівнює a.

Загальний член послідовності $\beta_k^{(2r)}(n)$ в тригонометричній формі такий:

$$\beta_k^{(2r)}(n)=A_0(n-1)+B_0+\sum_{m=1}^{(T_k^{(2r)}-1)/2}(a_m\cos\omega_m(n-1)+b_m\sin\omega_m(n-1)), \tag{4.96}$$

де $\omega_m = 2\pi m / T_k^{(2r)}$.

Коефіцієнти в (4.96): A_0, B_0, a_m, b_m, $m=\overline{1,T_k^{(2r)}-1}$, визначаються аналогічно до розглянутого випадку $r=1$.

Зауваження 3. Якщо продивитись історію арифметичних видозмін решета Ератосфена (п. 4.2), то помітимо, що послідовності ЗСЛ за модулем D_k, які описуються функцією $s_k(n)$, $k=1,2,3,\ldots$, і які є джерелом для добування простих чисел, вбирають в себе, власне, решето Ератосфена, йому відповідає $s_{\text{o}}(n)$ – натуральний ряд ($D_0=1$), ($s_1(n)$, $D_1=2$) – решето Нікомаха, ($s_2(n)$, $D_2=6$) – решето Лейбніца, ($s_3(n)$, $D_3=30$) – решето Ейлера.

В. Я. Буняковський запропонував видозміну решета стосовно чисел арифметичних прогресій із різницею, що дорівнює десяти. Такому решету відповідають чотири прогресії: $10n-7,\ 10n-3,\ 10n-1,\ 10n+1$. Воно теж описується в аналітичному вигляді, якщо застосувати логічні операції: знайти логічну суму – s-об'єднання (⊔) – прогресій, а потім вилучати (L) числа, кратні трьом, семи, одинадцяти, … .

Насамкінець стисло опишемо пройдений шлях до дослідження послідовності простих чисел (рис. 4.1).

s-алгебра → у. а. п. → $s_k(n)$-зсл → $(s_k \circ \nu_k)(n)$

Рис. 4.1. **Шлях добування простих чисел**

Розроблено основи булевої алгебри послідовностей – s-алгебри, *знайдено* функціонально замкнену множину відносно логічних операцій – узагальнені арифметичні прогресії (у. а. п.), *здійснено* аналітичний опис – $s_k(n)$ – усіх зведених систем лишків (ЗСЛ) за майже простим модулем, *виокремлено* підпослідовності ЗСЛ із заданими властивостями: $(s_k \circ \nu_k)(n)$.

Вправи і задачі

1. Якій із двох рекурентних формул – (4.29) чи (4.35) – слід віддати перевагу під час знаходження простого числа за його номером?

2. За допомогою ЗСЛ за майже простим модулем D_k побудуйте формулу для добування простих чисел з відрізка $[a, b]$, де a, b – довільні дійсні додатні числа. (Вона буде вашим особистим "решетом".)

3. Виведіть формулу простих чисел відрізка $[1, p^2]$ за допомогою алгоритму (4.26).

4. Доведіть, що між квадратами двох послідовних непарних чисел: $2n-1, (2n-1)^2$, $n \geq 3$, знаходиться принаймні п'ять простих чисел.

5. Який вигляд мають праві частини формул: а) (4.47) і (4.48); б) (4.54) і (4.55), якщо $x = 2\pi m$?

6. Покажіть, що тригонометрична форма ЗСЛ за модулем D_2 така:

$$s_2(n) = 0{,}5 \cdot (3(2n-1) + \cos \pi n).$$

7. Який вигляд має індикатор триплету $(p,\ p+4,\ p+6)$ (див. (4.83))?

8. Знайдіть послідовності $\beta_k(n)$, $k = 1, 2, 3$, використовуючи (4.80).

9. Здійсніть аналітичний опис решета В. Я. Буняковського.

Розділ 5. Підсумовування кусково-визначених числових послідовностей

Серед чисел існує така досконалість
і згода, що нам треба міркувати дні і ночі
над їх дивовижною закономірністю.
Стевін

Поринув я в безодню чисел,
і звідти вибратись бракує сил.
Н. П. Шивдук

5.1. Основні поняття. Підсумовування кусково-стаціонарних числових послідовностей

Числову послідовність $\{a_n\}$ називають **стаціонарною**, якщо всі її елементи рівні між собою, тобто $a_n = a - const \quad \forall n \in \mathbf{N}$. Послідовність $\{a_n\}$ називається **кусково-стаціонарною** (**к.-с. п.**), якщо вона складена зі скінченних стаціонарних послідовностей (стаціонарних кортежів).

Стаціонарні кортежі назвемо **серіями** елементів к.-с. п. Серії, які складають деяку підпослідовність к.-с. п., підкоряються одному й тому ж законові залежно від номера серії, називаються **однотипними**. Кусково-стаціонарні послідовності будемо називати також **серійними** послідовностями.

Нехай, наприклад, елементами числової послідовності $\{a_n\}$ є нулі (0) і одиниці (1). Тоді можна розглядати два типи серій – серії нулів (0-серії) і серії одиниць (1-серії).

Одним із витоків побудови (нескінченних) послідовностей, що містять серії двох типів – серії нулів і одиниць, є знайомий базисний індикатор (3.10):

$$e_1(n,2) = \left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} 1, \; n - \text{непарне}\,(n = 2m-1) \\ 0, \; n - \text{парне}\,(n = 2m) \end{cases} \quad \forall m \in \mathbf{N}, \qquad (5.1)$$

і його узагальнення:

$$\left[\frac{\varphi(n)+a}{c}\right]-\left[\frac{\varphi(n)+b}{c}\right]=\begin{cases}0, & \alpha_1-\alpha_2=(a-b)/c\\ 1, & \alpha_1-\alpha_2=(a-b)/c-1\end{cases}, \qquad (5.2)$$

де $\varphi(n)$ – певна функція натурального аргументу;

a, b, c – сталі із $\mathbf{N}$; $a>b,\ c>1$;

$\alpha_1\,(\alpha_2)$ – дробова частина числа, яка визначається для кожного n виразом, що стоїть під знаком функції Антьє у зменшуваному (від'ємнику) лівої частини співвідношення (5.2).

Залежно від закону φ і вибору параметрів a, b, c отримуємо ті чи інші серії одиниць і нулів. Наприклад, якщо взяти: $a=2,\ b=1,\ c=5$, $\varphi(n)=3n,$ то отримаємо послідовність, у якої серії з одиниць одноелементні, а серії з нулів – чотириелементні:

$$a_n=\left[\frac{3n+2}{5}\right]-\left[\frac{3n+1}{5}\right]=\begin{cases}1, & n=5m-4\\ 0, & n=m+[(m+3)/4]\end{cases}: \qquad (5.3)$$

$$1,\ 0, 0,\ 0, 0,\ 1, \ldots \forall m\in\mathbf{N}.$$

Умова-послідовність $n=m+[(m+3)/4]$, яка визначає номери n для серій нулів, є інверсією (s-доповненням) послідовності $n=5m-4$: $\neg(5m-4)=m+[(m+3)/4]$, тобто $(5m-4)\sqcup(m+[(m+3)/4])=m$, де $\sqcup$ – символ логічної суми (s-об'єднання) послідовностей. На відміну від умови $n\neq 5m-4$, яка не є конструктивною, умова $n=\neg(5m-4)$ дозволяє відразу встановити номери n для серій нулів.

Серії (кортежі) позначатимемо трійками $K=(m, l_m, a_m)$, де m – **номер** серії, l_m – **довжина** серії (кількість елементів у ній), a_m – **закон** залежності елементів серії від її номера m.

Розглядаючи елементи серійної послідовності як скінченні різниці $d_n=S_{n+1}-S_n$, $n=1, 2, 3, \ldots,$ іншої послідовності $S_n=S(n)$ із заданим першим членом $S_1=S(1)$, можна (за відомими законами утворення серій) знайти загальний член $S(n)$ у замкненому вигляді, тобто у вигляді формули, за співвідношенням (3.62) [11]:

$$S_n = S_1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = S_1 + (S_2 - S_1) + (S_3 - S_2) + ... + (S_n - S_{n-1}) . \qquad (5.4)$$

Знаходження загального члена $S(n)$ згідно з (5.4), що зводиться до розв'язання різницевих рівнянь першого порядку, назвемо **відновленням** послідовності за її скінченними різницями.

За довільно обраного n проміжок $[1, n]$ цілих чисел може включати деякі серії (у певній кількості) повністю, а деякі частково. Тому будемо розрізнювати, відповідно, **повні** й **неповні серії.** В одноелементних кортежів неповні серії відсутні.

Підсумовування серійних послідовностей здійснюється в такому порядку:

описуємо m-серії $K = (m, l_m, a_m)$, залучаючи подвійні нерівності, які визначаються межами змінювання номерів n для кожного типу серії: $\varphi_1(m) \le n \le \varphi_2(m)$;

знаходимо за номером n кількість повних серій на відрізку $[1, n]$ і кількість елементів у них, а також кількість елементів неповної серії;

підраховуємо суми елементів повних серій $S^{\text{п}}$ і неповної серії $S^{\text{н}}$;

записуємо загальний член послідовності n-х часткових сум $S(n)$.

Приклад 5.1. Відновимо послідовність за скінченними різницями (5.3), якщо її перший член дорівнює одиниці:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
d_n	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	…

.

Розв'язання. Маємо серії одиниць (U) і серії нулів (V). Зазначаємо межі l і r кожної серії одиниць (1-серій) і кожної серії нулів (0-серій):

$n \in [l, r]$	$[1,1]$	$[2,5]$	$[6,6]$	$[7,10]$	$[11,11]$	$[12,15]$	$[16,16]$	…
d_n	1	0	1	0	1	0	1	…

.

Описуємо їх трійками. Для U отримуємо: $K_u = (m, l_m, a_m) = (m, 1, 1)$. Номери n, що відповідають одиницям, залежно від m описуються рівністю: $n = 5m - 4$.

V-серії визначаються нерівностями: $5m-3 \le n \le 5m$; звідки знаходимо довжину кожної серії: $l_m = 5m-(5m-3)+1=4$ (це узгоджується з вихідними даними задачі), $a_m = 0$. Таким чином, $K_v = (m, l_m, a_m) = (m, 4, 0)$.

Кількість повних серій (u) для заданого n, кількість елементів у повних серіях ($|u|$) і кількість елементів ($|\bar{u}|$) відрізка $[1, n]$, які не належать серії U, описуються відповідно рівностями:

$$n = 5m-4 \;\Rightarrow\; u = [(n+4)/5],\; |u| = \sum_{m=1}^{u} l_m = \sum_{m=1}^{u} 1 = u,\; |\bar{u}| = n-u. \qquad (5.5)$$

Підрахуємо кількість повних серій (v) і кількість елементів у них ($|v|$), а також кількість елементів ($|\bar{v}|$), які не належать серії V:

$$n = 5m \Rightarrow m = \frac{n}{5} \Rightarrow v = \left[\frac{n}{5}\right],\; |v| = \sum_{m=1}^{v} l_m = \sum_{m=1}^{v} 4 = 4v,\; |\bar{v}| = n-4v. \qquad (5.6)$$

Обчислимо для заданого n суми елементів повних серій і неповної серії. У разі повних серій U і V виконується умова: $n = |u| + |v| = u + 4v$, і тоді:

$$S_u^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{u} a_m l_m = \sum_{m=1}^{u} 1 \cdot 1 = u,\; S_v^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{v} a_m l_m = \sum_{m=1}^{v} 0 \cdot 4 = 0, \qquad (5.7)$$

і отримуємо суму елементів повних серій: $S^{\text{п}} = S_u^{\text{п}} + S_v^{\text{п}} = u$.

Якщо $n \ne u + 4v$, то проміжок $[1, n]$ включає неповні серії, стосовно підрахунку сум елементів яких можливі випадки:

неповною є серія U (за умови, що вона не одноелементна), тоді $u = v$;

неповною є серія V, тоді $u = v + 1$.

У прикладі, що розглядається, $a_m = 0$, тому $S_v^{\text{н}} = 0$; а повна сума $S^{\text{п}} = u = [(n+4)/5]$.

Отже, сума $S(n)$ на цілому відрізку $[1, n]$ визначається за формулою:

$$S(n) = 1 + S^{\text{П}}(n-1) = 1 + [(n+3)/5]: (1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3,\ \ldots) \qquad (5.8)$$

За умови, що серії U не одноелементні, а серії V не нульові, сума скінченних різниць d_i, $i = \overline{1,n}$, у вигляді одного аналітичного виразу через суми елементів повних і неповних серій запишеться так:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = S_u^{\text{П}} + S_v^{\text{П}} + ((u-v)S_v^{\text{Н}} + (v-u+1)S_u^{\text{Н}}) \cdot (n-u-4v)\,. \bullet \qquad (5.9)$$

Задача підсумовування (обчислення часткових сум) послідовності (5.8) розв'язується за тим самим алгоритмом.

5.2. Метод повних і неповних сум підсумовування кусково-визначених послідовностей

Запропонований у п. 5.1 спосіб відновлення кусково-стаціонарних послідовностей за їх скінченними різницями названо **методом повних і неповних сум** (ПНС). Без принципових змін він застосовний до більш широкого класу числових послідовностей, що складені з відрізків (кусків) послідовностей, закони утворення яких піддаються аналітичному опису в замкненому вигляді (формулою). Такі послідовності називаються **кусково-визначеними** (к.-в. п.).

Приклад 5.2. Знайдіть методом ПНС загальний член послідовності n-членних відрізків $[1, n]$, $\forall n \in \mathbf{N}$, ряду натуральних чисел:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
S_n	1	1	2	1	2	3	1	2	3	4	1	…

.

Розв'язання. Підраховуємо скінченні різниці d_n:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
d_n	0	1	-1	1	1	-2	1	1	1	-3	1	…

.

Маємо серії двох типів (серії відокремлюються комами), а саме:

$$U=\{0,\ -1,\ -2,\ -3,\ \ldots\};\ \ V=\{1,\ 11,\ 111,\ 1111,\ \ldots\}.$$

Визначаємо межі l і r кожної серії:

$n\in[l,r]$	$[1,1]$	$[2,2]$	$[3,3]$	$[4,5]$	$[6,6]$	$[7,9]$	$[10,10]$	…
d_n	0	1	-1	1	-2	1	-3	…

.

Описуємо серії трійками. $K_u=(m,\ l_m,\ a_m)=(m,1,1-m)$, а номери n, що відповідають елементам серії U залежно від m, є числами вигляду: $n=m(m+1)/2$. Далі визначаємо величини (див. приклад 5.1) u, $|u|$, $|\bar{u}|$:

$$n=\frac{m^2+m}{2}\ \Rightarrow\ u=\left\lfloor\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right\rfloor,\ |u|=\sum_{m=1}^{u}l_m=\sum_{m=1}^{u}1=u,\ |\bar{u}|=n-u. \quad (5.10)$$

$K_v=(m,\ l_m,\ a_m)=(m,m,1)$, а межі кортежів V-серії описуються подвійними нерівностями: $(m-1)(m+2)/2\le n\le m(m+3)/2$. Визначаємо величини v, $|v|$, $|\bar{v}|$:

$$n=\frac{m^2+3m}{2}\Rightarrow v=\left\lfloor\frac{\sqrt{8n+9}-3}{2}\right\rfloor,\ |v|=\sum_{m=1}^{v}m=\frac{v(v+1)}{2},\ |\bar{v}|=n-|v|. \quad (5.11)$$

Обчислимо для заданого n суми елементів повних серій і неповної серії на відрізку $[1,n]$. У разі повних серій U і V виконується умова: $n=|u|+|v|$, тоді:

$$S_u^{\text{п}}=\sum_{m=1}^{u}a_m l_m=\sum_{m=1}^{u}(1-m)=-\frac{u(u-1)}{2},\ S_v^{\text{п}}=\sum_{m=1}^{v}a_m l_m=\sum_{m=1}^{v}m=\frac{v(v+1)}{2}, \quad (5.12)$$

і отримуємо суму елементів повних серій:

$$S^{\text{п}}=S_v^{\text{п}}+S_u^{\text{п}}=\frac{v(v+1)}{2}-\frac{u(u-1)}{2},$$

яка за $u=v$ дорівнюватиме кількості елементів у кожній серії: $S^{\text{п}}=u$.

Якщо $n \neq |u|+|v|$, то проміжок $[1, n]$ включає неповні V-серії, а $u = v+1$. У цьому випадку

$$S_v^{\text{н}} = n - u - v(v+1)/2 \text{, або } S_v^{\text{н}} = n - (v+1)(v+2)/2. \tag{5.13}$$

Сума ж усіх різниць на $[1, n]$ така:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = S^{\text{п}} + S_v^{\text{н}} = \frac{v(v+1)}{2} - \frac{u(u-1)}{2} + n - u - \frac{v(v+1)}{2} =$$

$$= n - u(u+1)/2.$$

Тоді

$$S(n) = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} d_i = n - u(u+1)/2.$$

де $u = \left[\dfrac{\sqrt{8n-7}-1}{2}\right]$ (у виразі для u в (11.9) замінюємо n на $(n-1)$).

Остаточно

$$S(n) = n - \frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{8n-7}-1}{2}\right] \cdot \left[\frac{\sqrt{8n-7}+1}{2}\right]. \bullet \tag{5.14}$$

Як бачимо, $S(n)$ виражається тільки через кількість повних серій типу V. Такий результат пояснюється тим, що за умови $u = v+1$ сума елементів обох повних серій у (5.14) дорівнює нулеві. Формула (5.14) без виведення (див. (3.94)) показана як окремий випадок кускових у. а. п.

Метод ПНС застосовний і до більш складних к.-в. п.

Приклад 5.3. Відновимо за скінченними різницями d_p підпослідовність натуральних чисел $n_p = n(p)$, $p \in \mathbf{N}$, якщо її перший член дорівнює одиниці:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	…
d_p	3	9	5	16	7	7	25	9	9	9	36	…

.

Розв'язання. Аналізуємо початковий відрізок ч/п та визначаємо два типи серій, логічна сума яких дає послідовність d_p:

$U = \{3, 5, 77, 999, 11111111, \ldots\}$; $V = \{9, 16, 25, 36, \ldots\}$ (підкреслені серії),

і дiємо згідно з порядком підсумовування к.-с. п. (деталі викладу пропускаємо).

Описуємо m-серії:

$$K_u = (m, l_m, a_m) = \left(m, \begin{bmatrix} 1 & , \ m=1 \\ m-1, & m>1 \end{bmatrix}, \ 2m+1 \right),$$

межам кортежів U-серії, крім $m=1$, відповідають подвійні нерівності:

$$m(m-1)/2 + 2 \le p \le m(m+1)/2, \text{ якщо } m>1;$$

$$K_v = (m, l_m, a_m) = (m, 1, (m+2)^2),$$

а номери p, що відповідають елементам серії V, залежно від m такі: $p = m(m+1)/2 + 1$.

Знаходимо величини u, $|u|$, $|\bar{u}|$ і v, $|v|$, $|\bar{v}|$:

$$u = \left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2} \right], \ |u| = \sum_{m=1}^{u} l_m = 1 + \frac{u(u+1)}{2}, \ |\bar{u}| = p - \frac{u(u+1)}{2}; \tag{5.15}$$

$$v = \left[\frac{\sqrt{8p-7}-1}{2} \right], \ |v| = v, \ |\bar{v}| = p - v. \tag{5.16}$$

Підраховуємо суми елементів повних серій і неповної U-серії:

$$S_u^{\text{п}} = 3 + \frac{u}{6}(4u^2 + 3u - 7), \ S_v^{\text{п}} = \frac{v}{6}(2v^2 + 15v + 37),$$
$$S_u^{\text{н}} = (2u+3)(p - v - 1 - u(u-1)/2). \tag{5.17}$$

Записуємо загальний член послідовності p-х часткових сум:

$$n(p) = 4 + \frac{1}{6}(u(4u^2 + 3u - 7) + v(2v^2 + 15v + 37)) + \\ + (2u+3)(p - 2 - v - u(u-1)/2), \quad (5.18)$$

або

$$n(p) = 4 - (u^3 + 11u + 18)/3 + v(2v^2 + 15v + 37)/6 + (2u+3)(p - v), \quad (5.19)$$

де $u = \left[\frac{\sqrt{8p-7} - 1}{2} \right]$, $v = \left[\frac{\sqrt{|8p-15|} - 1}{2} \right]$.

Операція взяття модуля під знаком радикала спричинена тим, що перша і друга U-серії одноелементні. Вона дає змогу уникнути непорозумінь зі значенням v, якщо $p = 1$, яке має дорівнювати нулеві, і описати всі значення v однією формулою.

Нижче наведено кілька перших членів відновленої послідовності:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
n_p	1	4	13	18	34	41	48	73	82	91	100	136	…

.

Аналогічно можна встановити вигляд логічного доповнення отриманої послідовності до послідовності натуральних чисел, скінченні різниці якого міститимуть серії одиниць і двійок.•

Висвітлений метод підсумовування к.-с. п. поширюється на випадки, коли її елементи не є цілими числами, аби тільки були відомі закони, яким підкоряються серії, і за якими можна знайти суми повних і неповних серій.

Запропонований підхід до відновлення послідовностей дає змогу здійснити нумерацію всіх точок прямокутної декартової площини, які мають цілі координати (тут **нумерація** точок – це встановлення взаємно однозначної відповідності – бієкції – між множиною всіх точок площини з цілими координатами x, y і множиною всіх натуральних чисел: $x = x(n), y = y(n)$).

Вправи і задачі

1. Обміркуйте, в чому полягає суттєва відмінність між кусково-сталою послідовністю (к.-с. п.) і кусково-визначеною (к.-в. п.).

2. Знайдіть методом ПНС загальний член к.-с. п.: а) послідовності, складеної чергуванням одного нуля і трьох одиниць: $\underline{0}\,1\,1\,1\,\underline{0}\,1\,1\,1...$; б) послідовності, складеної чередуванням п'яти одиниць і трьох двійок: $1\,1\,1\,1\,1\,2\,2\,2....$

3. Числова послідовність складена з пар непарних і парних чисел у порядку зростання: $\underline{1\,3}\,2\,4\,\underline{5\,7}\,6\,8\,\underline{9\,\,11}\,10\,12....$ Опишіть трійками відповідні серії U, V та відтворіть аналітичний опис такої к.-в. п.

4. За допомогою методу ПНС доведіть, що:

а) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\dfrac{i+1}{2}\right]=\dfrac{1}{2}\left(\left(4\left[\dfrac{n}{2}\right]+3\right)\cdot\left[\dfrac{n+1}{2}\right]-\dfrac{n(n+1)}{2}\right)$;

б) $\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\dfrac{i}{2}\right]=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3n(n+1)}{2}-\left(4\left[\dfrac{n}{2}\right]+3\right)\cdot\left[\dfrac{n+1}{2}\right]\right)$.

Вказівка: застосуйте тотожність $[(i+1)/2]+[i/2]=i$.

4. Послідовність $s=s(n)$ має вигляд: $\underline{1\,2\,3}\,\overbrace{3\,2\,1}\,\underline{1\,2\,3}\,\overbrace{3\,2\,1}....$ Опишіть її словесно та знайдіть аналітичне зображення (формулою) загального члена.

5. Числову послідовність задано двома трійками K_u і K_v: $K_u=(m,\,l_m,\,a_m)=(m,\,2,\,2)$, $K_v=(m,\,l_m,\,a_m)=(m,\,1,\,(-1)^m)$, а її перший член – п'ятірка. Як виглядає аналітичний опис такої послідовності, якщо а) K_u передує K_v; б) K_v передує K_u?

6. Установлено [24], що кількість цілих точок $F(n)$ першого квадранта площини, які належать області, обмеженій верхньою гілкою гіперболи $xy=n$ і осями координат $x=0,\ y=0$, визначається формулою: $F(n)=\sum\limits_{k\le n}[n/k]$. Спробуйте за допомогою методу ПНС згорнути суму доданків-Антьє.

Розділ 6. Цілочислові сітки на прямій і площині

Усе має бути зроблено настільки простим,
наскільки це можливо, але не простішим.
А. Ейнштейн

Єдине, що мені не набридає робити,
так це морочитися з числами.
Н. П. Шивдук

6.1. Нумерація цілих точок на прямій (в $\mathbf{Z}$)

Нумерацією називають [15] відображення певної підмножини натуральних чисел $\mathbf{N}$ на клас досліджуваних конструктивних об'єктів (формул, слів, матриць і т. ін.). У цьому пункті розглядаються відображення множини $\mathbf{N}$ в (на) множину $\mathbf{Z}$.

Під **цілочисловою сіткою** будемо розуміти підмножину нумерації, яка задовольняє певні умови.

Побудова цілочислових сіток (далі – просто сіток) здійснюється в два етапи [42], [43]:

1) *вибір схеми нумерації*, тобто правил, за якими здійснюється присвоєння натуральних номерів точкам цілочислового простору;

2) *установлення залежності* цілочислових координат точки від приписаного за схемою номера та відновлення за координатами номера цілої точки.

Виберемо одну з безлічі схем нумерації цілих точок (ЦТ) прямої (рис. 6.1). Нумерацію можна починати з будь-якої точки числової осі.

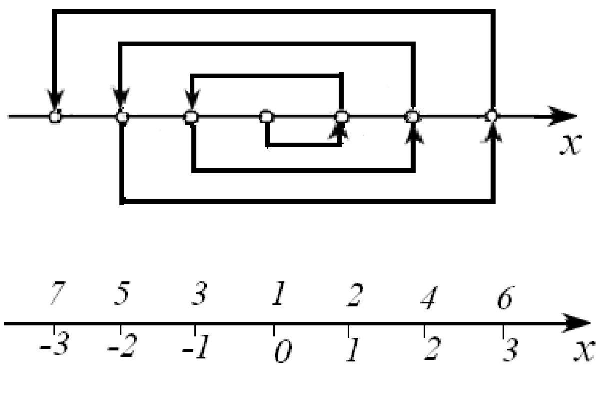


Рис. 6.1. **Схема нумерації $\mathbf{Z}$**

Стрілочками (від початку відліку) показана послідовність переходу від точки до точки.

Номери точок нанесено над віссю Ox. Аналіз схеми показує, що точка x і її номер n пов'язані бієкцією:

$$n \leftrightarrow x \iff n \leftrightarrow (-1)^n \cdot [\, n/2 \,].$$

Дійсно, кожній додатній точці x ставиться у відповідність парний номер, а від'ємним точкам і нулеві – непарний номер.

Метод ПНС дозволяє аналітичним шляхом отримати той самий результат: $x = x(n) = (-1)^n \cdot [\, n/2 \,]$, і він є **інструментом загального підходу** до нумерації.

За фрагментом таблиці бієктивної відповідності підраховуємо скінченні різниці $d_n = x_{n+1} - x_n$ (табл. 6.1).

Таблиця 6.1

Номери цілих точок, їх координати та відповідні скінченні різниці

n	1	2	3	4	5	6
x	0	1	-1	2	-2	3
d_n	1	-2	3	-4	5	-6

Різниці d_n визначають дві серії: U – одноелементна серія непарних чисел, V – одноелементна серія від'ємних парних чисел. Опишемо їх трійками.

$K_u = (m,\, l_m,\, a_m) = (m, 1, 2m-1)$. Кількість усіх повних серій (u) за заданим n, кількість елементів у повних серіях ($|u|$) і кількість елементів ($|\bar{u}|$) відрізка $[1,\, n]$, які не належать серії U, описуються відповідно рівностями:

$$n = 2m-1 \;\Rightarrow\; u = [\,(n+1)/2\,],\; |u| = \sum_{m=1}^{u} l_m = \sum_{m=1}^{u} 1 = u,\; |\bar{u}| = n-u. \tag{6.1}$$

$K_v = (m,\, l_m,\, a_m) = (m, 1, -2m)$. Підрахуємо кількість повних серій (v) і кількість елементів у них ($|v|$), а також кількість елементів ($|\bar{v}|$), які не належать серії V:

$$n = 2m \;\Rightarrow\; v = [\,n/2\,],\; |v| = \sum_{m=1}^{v} l_m = v,\; |\bar{v}| = n-v. \tag{6.2}$$

Обчислимо для даного n суми елементів повних серій (неповних немає). Якщо U і V – повні серії, то виконується умова: $n=|u|+|v|=u+v$, тоді:

$$S_u^{\text{п}}=\sum_{m=1}^{u}a_m l_m=\sum_{m=1}^{u}(2m-1)=u^2,\ \ S_v^{\text{п}}=\sum_{m=1}^{v}a_m l_m=-2\sum_{m=1}^{v}m=-v(v+1). \qquad (6.3)$$

У разі, коли $u=v$, отримуємо суму елементів повних серій: $S^{\text{п}}=S_u^{\text{п}}+S_v^{\text{п}}=-u$. За умови, що $u=v+1$, маємо:

$$S^{\text{п}}=S_u^{\text{п}}+S_v^{\text{п}}=u^2-(u-1)u=u. \qquad (6.4)$$

Таким чином,

$$x_n=x_1+\sum_{i=1}^{n-1}d_i=0+(u-v)u+(v+1-u)(\text{-}u)=u(2(u-v)-1). \qquad (6.5)$$

Підставимо в (6.5) із (6.1), (6.2) замість u, v їх вирази від $(n-1)$:

$$x_n=x(n)=\left[\frac{n}{2}\right]\cdot\left(2\left(\left[\frac{n}{2}\right]-\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)-1\right)=(-1)^n\cdot\left[\frac{n}{2}\right]. \qquad (6.6)$$

Вибір схеми нумерації залежить від того, які цілі вона переслідує. Наприклад, можна було б нумерацію $\mathbf{Z}$ (див. рис. 6.1) здійснювати за годинниковою стрілкою або наступну ЦТ брати не поруч із попередньою, а через кілька точок, і т. ін. Крім того, за допомогою логічних операцій можливі об'єднання, перетин чи доповнення різних нумерацій до універсуму – послідовності натуральних чисел. Наприклад, розглянемо такі відображення $\mathbf{N}$ в $\mathbf{N}$: $f_1(n)=n(n-1)+1$, $f_2(n)=n^2+1$.

Наведемо початкові відрізки та знайдемо логічну суму $f_1(n)$, $f_2(n)$.

f_1:

n	1	2	3	4	5…
$f_1(n)$	1	3	13	13	21…

,

f_2:

n	1	2	3	4	5…
$f_2(n)$	2	5	10	17	26…

.

Логічну суму (s-об'єднання) отримаємо за допомогою базисних індикаторів (див. (3.10) і (3.14)):

$$f(n) = f_1(n) \sqcup f_2(n) = e_1(n,2) \cdot f_1\left(\frac{n+1}{2}\right) + e_2(n,2) \cdot f_2\left(\frac{n+1}{2}\right),$$

де $e_1(n,2) = \left[\frac{n+1}{2}\right] - \left[\frac{n}{2}\right]$, $e_2(n,2) = \left[\frac{n}{2}\right] - \left[\frac{n-1}{2}\right]$.

Після тотожних перетворень за властивостями Антьє (див. п. 3.1) маємо (деталі викладу пропускаємо):

$$f_1(n) \sqcup f_2(n) = \left[\frac{n}{2}\right] \cdot \left[\frac{n+1}{2}\right] + 1.$$

Результатом логічного перетину є порожня послідовність:

$$f_1(n) \sqcap f_2(n) = s_{\varnothing},$$

оскільки рівняння $n(n-1) = m^2$ не має натуральних розв'язків.

Залежно від того, для розв'язання якої прикладної задачі використовується нумерація, бажано, щоб відповідна сітка задовольняла умови поставленої задачі, сприяла більш ефективній, за швидкістю, чисельній реалізації.

Особливо це важливо, коли йдеться про багатовимірні сітки.

6.2. Нумерація цілих точок першого квадранта площини (в $\mathbf{Z}_{+}^{2}$)

Для нумерації ЦТ двовимірного простору виберемо декартову координатну площину xOy, на абсцисі якої – осі Ox – здійснено нумерацію (див. рис. 6.1). Для опису сітки як деякої підмножини $\mathbf{Z}^{2}$ виберемо на Ox цілочисловий відрізок $[-a, a]$, який міститиме $(2a+1)$-у точку, і розглянемо вертикальну смугу шириною $w=2a+1$. На рис. 6.2 $a=3$. Щоб отримати наступний шар точок, від точки з найбільшим номером (на рис. 6.2 це точка $x=-3$ з номером $n=7$) переходимо до точки на Oy із ординатою $y=1$, приписуємо їй черговий номер $n=8$ і далі діємо за тією ж схемою. Множину точок, яка відповідає кожному фіксованому значенню y, назвемо **шаром** точок.

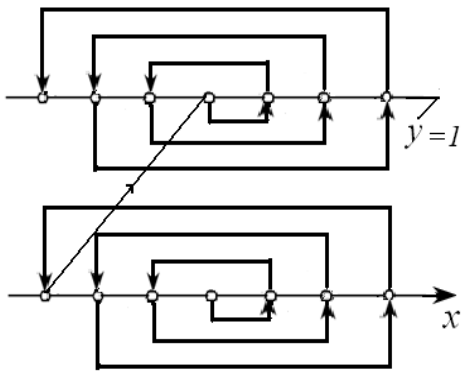


Рис. 6.2. **Побудова шарів ЦТ**

Послідовність нумерації точок вертикальної смуги на рис. 6.2 показано стрілочками.

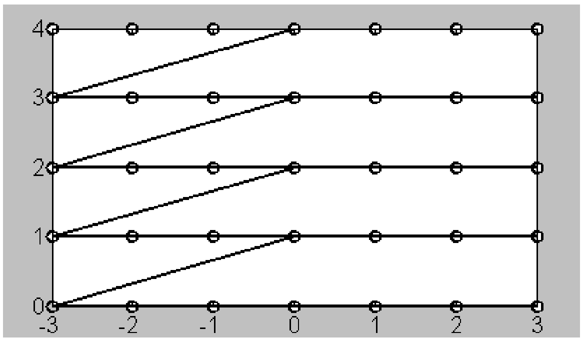
У процесі нумерації чітко простежуються два етапи:

1) *обведення* точок шару;

2) *перехід* (по похилій) до наступного шару.

Наведемо побудовану засобами ППП MatLab [21] смугу шириною $w=7$, яка містить п'ять шарів ЦТ (рис. 6.3).

Аналітичний опис смуги здійснювався за формулами:



$$x(n)=(-1)^{n-w\cdot[(n-1)/w]}\times$$
$$\times[(n-w\cdot[(n-1)/w)])/2],$$
$$y(n)=[(n-1)/w],$$

де $w=7$ – ширина смуги;

$n=\overline{1,35}$ – кількість точок.

Рис. 6.3. **Побудова шарів ЦТ**

Аналогічним чином будуються сітки з від'ємними ординатами, і сітки, абсциси та ординати яких невід'ємні або недодатні. У будь-якому разі паралельним перенесенням (зсувом) можна завжди перейти до точок з невід'ємними координатами. Проте тоді нумерація кожного шару починатиметься з його середини, а не з нульової абсциси. До речі, від цілочислової нумерації легко перейти до нумерації точок з довільним дробовим кроком, що є важливим з точки зору застосування таких сіток, про що йдеться в десятому розділі.

Квадратна нумерація* (*К-нумерація*) *в $\mathbf{Z}_+^2$

Розглянемо нумерацію першого квадранта декартової площини, яка здійснюється за схемою, поданою на рис. 6.4 згідно з табл. 6.2, яка названа **квадратною.**

Перший і другий стовпці табл. 6.2 визначають номер n і координати точки x, y відповідно.

Нумерацію цілих точок, починаючи з точки O, будемо проводити по ламаній, якій належать точки сторін квадратів величини один, два, три, чотири,… (див. рис. 6.4).

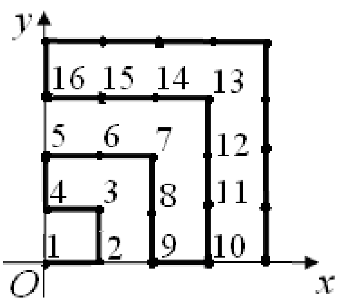


Рис. 6.4. **Схема К-нумерації**

Таблиця 6.2

Фрагмент таблиці нумерації ЦТ

n	(x, y)	$x+y$	S^+	$x-y$	S^-
1	0 0	0	1	0	1
2	1 0	1	1	1	1
3	1 1	2	1	0	3
4	0 1	1	3	-1	5
5	0 2	2	3	-2	7
6	1 2	3	3	-1	7
7	2 2	4	3	0	7
8	2 1	3	5	1	7
9	2 0	2	7	2	7
10	3 0	3	7	3	7
11	3 1	4	7	2	9
12	3 2	5	7	1	11
13	3 3	6	7	0	13
14	2 3	5	9	-1	15
15	1 3	4	11	-2	17
16	0 3	3	13	-3	19

І. Координати точки як функції номера точки. Для встановлення зв'язку між номерами цілих точок n та їх координатами – $x = x(n)$, $y = y(n)$ – вводимо в розгляд суму $(x + y)$ та різницю $(x - y)$ координат, і відповідно доданки $S^+ = S^+(n)$ і $S^- = S^-(n)$, які доповнюють суму та різницю координат до номера n (див. табл. 6.2):

$$x + y + S^+ = n, \; x - y + S^- = n. \tag{6.7}$$

Вирази для S^+, S^- знайдемо за їх скінченними різницями d^+, d^-, які складають кортежі (серії) нулів і двійок, за методом ПНС.

Аналізуємо у світлі сказаного послідовності $d^+ = d^+(n)$, $d^- = d^-(n)$ (табл. 6.3):

Таблиця 6.3

Скінченні піврізниці послідовностей S^+, S^-

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$d^+(n)/2$	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0
$d^-(n)/2$	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1

.

Для $d^+(n)/2$ маємо:

початок серій нулів (0-серій): $1, 4, 9, \ldots, m^2, \ldots$ (m – номер серії);

кінець серій нулів: $2, 6, 12, \ldots \; m(m+1), \ldots$.

Таким чином, для 0-серій $m^2 \le n \le m(m+1)$, звідки знаходимо довжину кожної серії l_m, кількість повних серій u і кількість елементів у них $|u|$, а також – у неповній серії $|\bar{u}|$:

$$l_m = m+1, \; u = [(\sqrt{4n+1} - 1)/2], \; |u| = \sum_{m=1}^{u} l_m = u(u+3)/2,$$
$$|\bar{u}| = n - u(u+3)/2. \tag{6.8}$$

Суми елементів повних 0-серій і неповної серії є нулями:

$$S_u^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{u} a_m l_m = 0;\ S_u^{\text{н}} = 0,\ |\bar{u}| = 0. \tag{6.9}$$

Аналогічним чином для серій одиниць (1-серій) маємо (див. табл. 6.2):

початок 1-серій: $3, 7, 13, 21, \ldots, m(m+1)+1, \ldots$;

кінець серій одиниць: $3, 8, 15, \ldots\ m(m+2), \ldots$.

Таким чином, для 1-серій $m(m+1)+1 \le n \le m(m+2)$, звідки знаходимо довжину кожної серії l_m, кількість повних серій v і елементів у них $|v|$, а також кількість елементів неповної серії $|\bar{v}|$:

$$l_m = m,\ \ v = [\sqrt{n+1}] - 1,\ |v| = \sum_{m=1}^{v} m = v\,(v+1)/2,\ \bar{v}\,| = n - v\,(v+1)/2. \tag{6.10}$$

Підраховуємо суми елементів повних 1-серій і неповної 1-серії:

$$S_v^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{v} a_m l_m = \sum_{m=1}^{v} m = \frac{v(v+1)}{2};$$

$$\forall(u=v):\ S_v^{\text{н}} = 0;\ \forall(u=v+1):\ S_v^{\text{н}} = n - \frac{v(v+1)}{2} - \frac{u(u+3)}{2}. \tag{6.11}$$

Таким чином, загальний член послідовності $d^+(n)$ має вигляд:

$$d^+(n) = v(v+1) + (u-v)(2n - u(u+3) - v(v+1)),$$

або

$$d^+(n) = (2n - u(u+3))(u-v) - v(v+1)(u-v\text{-}1),$$

а загальний член послідовності $S^+(n)$ описується формулою:

$$S^+(n) = 1 + (2(n-1) - u(u+3))(u-v) + v(v+1)(1+v\text{-}u), \tag{6.12}$$

де u і v підраховуються для $n-1$: $u = [(\sqrt{4n-3}-1)/2],\ \ v = [\sqrt{n}] - 1$.

Аналогічні міркування (деталі викладу наводити не будемо) приводять до формули загального елемента послідовності $S^{-} = S^{-}(n)$.

Для $d^{-}(n)/2$ маємо:

початок 0-серій: $1, 5, 17, \dots, 4(m-1)^2+1, \dots$;

кінець серій нулів: $1, 9, 25, \dots\ (2m+1)^2, \dots$.

Таким чином, для 0-серій $4(m-1)^2+1 \le n \le (2m+1)^2$, звідки знаходимо довжину кожної серії l_m, кількість повних серій u і елементів у них $|u|$, а також кількість елементів неповної серії $|\bar{u}|$:

$$l_m = 4m-3,\ \ u = [(\sqrt{n}+1)/2],\ \ |u| = \sum_{m=1}^{u} l_m = u(2u-1),$$
$$|\bar{u}| = n - u(2u-1),\ S_u^{\text{п}} = S_u^{\text{н}} = 0. \tag{6.13}$$

Аналогічним чином для серій одиниць (1-серій) маємо (див. табл. (6.3)):

початок 1-серій: $2, 10, 26, \dots, (2m-1)^2+1, \dots$;

кінець серій одиниць: $4, 16, 36, \dots\ 4m^2, \dots$.

Таким чином, для 1-серій $(2m-1)^2+1 \le n \le 4m^2$, звідки знаходимо довжину кожної серії l_m, кількість повних серій v і елементів у них $|v|$, а також кількість елементів неповної серії $|\bar{v}|$:

$$l_m = 4m-1,\ \ v = [\sqrt{n}/2],\ \ |v| = v\,(2v+1),\ \ |\bar{v}| = n - v\,(2v+1).$$

Підраховуємо суми елементів повних 1-серій і неповної 1-серії:

$$S_v^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{v} a_m l_m = \sum_{m=1}^{v} (4m-1) = v(2v+1);$$
$$\forall(u=v):\ S_v^{\text{н}} = 0;\ \forall(u=v+1):\ S_v^{\text{н}} = n - u(2u-1) - v(2v+1). \tag{6.14}$$

Таким чином, загальний член послідовності $d^{-}(n)$ має вигляд:

$$d^{-}(n) = 2\left(v(2v+1) + (u-v)(n-u(2u-1) - v(2v+1)) \right),$$

або

$$d^{-}(n) = 2\left((n-u(2u-1))(u-v) - v(2v+1)(u-v-1) \right),$$

а загальний член послідовності $S^{+}(n)$ описується формулою:

$$S^{-}(n) = 1 + 2((n-1-u(2u-1))(v-u) + v(2v+1)(1+v-u)), \qquad (6.15)$$

де u і v підраховуються для $n-1$: $u=[(\sqrt{n-1}+1)/2]$, $v=[\sqrt{n-1}/2]$.

На підставі (6.7), (6.12) і (6.15) отримуємо:

$$x = x(n) = n - \frac{1}{2}(S^{+}(n) + S^{-}(n)), \quad y = y(n) = \frac{1}{2}(S^{-}(n) - S^{+}(n)) \text{ –} \qquad (6.16)$$

формули визначення координат точки $(x,\ y)$ за її номером n.

На рис. 6.4 зображено сітку, побудовану засобами ППП MatLab [20].

Співвідношення (6.16):

$$x = x(n),\ y = y(n),$$

є параметричними рівняннями координат точки, де роль параметра відіграє її номер.

Функції $x(n)$ і $y(n)$ називають також **координатними функціями.**

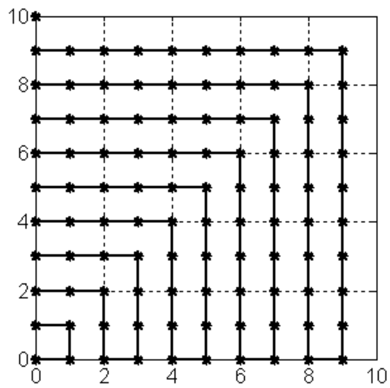


Рис. 6.5. **К-нумерація: сто одна точка**

Другий варіант установлення **координатних функцій** $x = x(n)$, $y = y(n)$ зводиться до знаходження сум S_n^{+}, S_n^{-}, що визначають рівності:

$$S_n^{+} = x + y + n, \quad S_n^{-} = x - y + n; \qquad (6.17)$$

їх ми знайдемо, аналізуючи табл. 6.4, побудовану за схемою нумерації.

Таблиця 6.4

Спочатку установлюємо загальні члени послідовностей скінченних різниць d_n^+, d_n^- відповідно для S_n^+, S_n^-, а потім складаємо формули загальних членів.

Послідовності скінченних піврізниць (табл. 6.5), як і для сум S^+, S^-, є серійними (кусково-стаціонарними) і тому легко підсумовуються.

Фрагмент таблиці нумерації точок

n	(x, y)	S_n^+	S_n^-	n	(x, y)	S_n^+	S_n^-
1	0 0	1	1	14	2 3	19	13
2	1 0	3	3	15	1 3	19	13
3	1 1	5	3	16	0 3	19	13
4	0 1	5	3	17	0 4	21	13
5	0 2	7	3	18	1 4	23	15
6	1 2	9	5	19	2 4	25	17
7	2 2	11	7	20	3 4	27	19
8	2 1	11	9	21	4 4	29	21
9	2 0	11	11	22	4 3	29	23
10	3 0	13	13	23	4 2	29	25
11	3 1	15	13	24	4 1	29	27
12	3 2	17	13	25	4 0	29	29
13	3 3	19	13	26	5 0	31	31

Із формули (6.17) отримаємо:

$$x=(S_n^+ + S_n^-)/2-n\,,\;\; y=(S_n^+ - S_n^-)/2\,. \qquad (6.18)$$

Таблиця 6.5

Скінченні піврізниці послідовностей S_n^+, S_n^-

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
$d_n^+(n)/2$	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	1
$d_n^-(n)/2$	1	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	1

Аналізуємо 1-серії послідовності піврізниць $d_n^+/2$:

початок: $1, 4, 9, 16, \ldots, m^2, \ldots$

кінець: $2, 6, 12, 20, \ldots, m(m+1), \ldots$

$$\Rightarrow\; m^2 \le n \le m^2+m\,.$$

Тоді

$$l_m = m+1,\ p=[(\sqrt{4n+1}-1)/2],$$

$$|\,p\,| = \sum_{m=1}^{p} l_m = p(p+3)/2,\ |\,\bar{p}\,| = n - p(p+3)/2.$$

Аналізуємо 0-серії послідовності піврізниць $d_n^+/2$:

початок: $3,\ 7,\ 13,\ 21,\ \ldots,\ m(m+1)+1,\ \ldots$

кінець: $3,\ 8,\ 15,\ 24, \ldots,\ (m+1)^2-1,\ \ldots$

$$\Rightarrow\ m^2+m+1 \le n \le m^2+2m\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ l_m = m,\ q=[\sqrt{n+1}-1],\ |\,q\,| = \sum_{m=1}^{q} l_m = q(q+1)/2,\ |\,\bar{q}\,| = n - q(q+1)/2.$$

Підраховуємо суми елементів повних і неповних 1-серій:

$$S_p^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{p} a_m l_m = \sum_{m=1}^{p} (m+1) = \frac{p(p+3)}{2};$$

$$\forall (p=q):\ S_p^{\text{н}} = n - \frac{p(p+3)}{2} - \frac{q(q+1)}{2};$$

$$\forall (p=q+1):\ S_p^{\text{н}} = 0;\ S_q^{\text{п}} = S_q^{\text{н}} = 0.$$

Отже,

$$d_n^+ = S_p^{\text{п}} + S_p^{\text{н}} = p(p+3) + (1+q-p)(2n - p(p+3) - q(q+1)) \qquad (6.19)$$

або

$$d_n^+ = (1+q-p)(2n - q(q+1)) + (p-q)p(p+3). \qquad (6.20)$$

Таким чином,

$$S_n^+ = 1 + (1+q-p)(2(n-1) - q(q+1)) + (p-q)p(p+3). \qquad (6.21)$$

де p і q підраховуються для $n-1$: $p=[(\sqrt{4n-3}-1)/2]$, $q=[\sqrt{n}]-1$.

Аналізуємо 1-серії послідовності піврізниць $d_n^-/2$:

початок: $1, 5, 17, 37, \dots, 4(m-1)^2+1, \dots$

кінець: $1, 9, 25, 49, \dots, (2m-1)^2, \dots$

$$\Rightarrow 4(m-1)^2+1 \le n \le (2m-1)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_m = 4m-3,\ p=[(\sqrt{n}+1)/2],\ |p| = \sum_{m=1}^{p} l_m = p(2p-1),\ |\bar{p}| = n - p(2p-1).$$

Аналізуємо 0-серії послідовності піврізниць $d_n^-/2$:

початок: $2, 10, 26, 50, \dots, (2m-1)^2+1, \dots$

кінець: $4, 16, 36, 64, \dots, 4m^2, \dots$

$$\Rightarrow (2m-1)^2+1 \le n \le 4m^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow l_m = 4m-1,\ q=[\sqrt{n}/2],\ |q| = \sum_{m=1}^{q} l_m = q(2q+1),\ |\bar{q}| = n - q(2q+1).$$

Підраховуємо суми елементів повних і неповних 1-серій:

$$S_p^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{p} a_m l_m = \sum_{m=1}^{p} (4m-3) = p(2p-1)\ \forall(p=q+1);$$
$$S_p^{\text{н}} = n - p(2p-1) - q(2q+1)\ \forall(p=q). \tag{6.22}$$

Отже,

$$d_n^- = S_p^{\text{п}} + S_p^{\text{н}} = 2(p(2p-1)(p-q)+$$
$$+(1+q-p)(n-p(2p-1)-q(2q+1))), \tag{6.23}$$

або

$$d_n^- = 2((n-q(2q+1))(1+q-p)+(p-q)p(2p-1)). \tag{6.24}$$

Таким чином,

$$S_n^- = 1 + 2((n-1-q(2q+1))(1+q-p) + (p-q)p(2p-1)), \qquad (6.25)$$

де p і q підраховуються для $n-1$: $p = [(\sqrt{n-1}+1)/2]$, $q = [\sqrt{n-1}/2]$.

Підставляючи S_n^+, S_n^- у формулу (6.18), отримаємо координатні функції $x = x(n)$, $y = y(n)$.

II. Номер точки як функція координат точки. Кожному квадратові на $\mathbf{Z}_+^2$, однією з вершин якого є початок O, поставимо у відповідність число k, прирівняне до довжини сторони квадрата, та назвемо його **номером квадрата**, а сам квадрат – $\boldsymbol{k}$**-квадратом**. Точці O – виродженому квадрату – припишемо номер 0 (нуль).

Візуальний аналіз показує (див. рис. 6.4), що номер квадрата визначається максимальною із координат точки (x, y): $k = \max(x, y)$, його можна подати також залежно від номера точки (табл. 6.6).

Таблиця 6.6

Номери квадратів залежно від номера точки

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$k = \max(x, y)$	0	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3
$d(n)$	1	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1

.

Дійсно, повні 1-серії визначаються нерівністю $m^2 \le n \le m^2$, звідки отримуємо кількість таких серій: $u = [\sqrt{n}]$, і залежність номера квадрата від номера точки:

$$k = \max(x, y) = [\sqrt{n-1}]. \qquad (6.26)$$

Оскільки

$$\max(x, y) + \min(x, y) = x + y = n - S^+,$$
$$\max(x, y) - \min(x, y) = |x - y| = |n - S^-|,$$

то з урахуванням (6.17) маємо для $\min(x, y)$ і $|x-y|$ вирази через n і S^+:

$$\min(x, y) = n - [\sqrt{n-1}] - S^+, \quad |x-y| = 2[\sqrt{n-1}] - n + S^+, \tag{6.27}$$

і тотожність:

$$n - S^+ + |n - S^-| = 2[\sqrt{n-1}]. \tag{6.28}$$

Завдяки зв'язку між номером n, сумами S^+, S^- і сумою та різницею координат (див. (6.7) і (6.16)) отримуємо:

$$\begin{aligned} x \geq y:\ & 2n - (S^+ + S^-) = 2[\sqrt{n-1}] \ \Rightarrow\ x = k = [\sqrt{n-1}]; \\ x < y:\ & S^- - S^+ = 2[\sqrt{n-1}] \ \Rightarrow\ y = k = [\sqrt{n-1}]. \end{aligned} \tag{6.29}$$

Номер квадрата: $k = \max(x, y)$, є однією з ключових величин (окрім координат конкретної точки) для знаходження номера точки як функції двох змінних: $n = n(x, y)$.

Теорема 6.1. Номер точки як функція її координат визначається формулою:

$$n = n(x, y) = k^2 + k + 1 + (-1)^k sign(x-y)(2k - (x+y)), \tag{6.30}$$

де $sign(t)$ – (двозначна) сигнум-функція: $sign(t) = \left[\begin{array}{l} 1,\ t \geq 0 \\ -1,\ t < 0 \end{array}\right.$.

Доведення проведемо, спираючись на: симетрію точок квадранта відносно прямої $y = x$, властивості квадрата, схему нумерації.

Нехай $n(x, y)$, $n(y, x)$ – номери симетричних точок відносно $y = x$.

Для визначеності вважатимемо, що для точки (x, y) абсциса не більша від ординати: $x \leq y$. Підрахуємо для кожного k-квадрата суму та різницю: $n(x, y) \pm n(y, x)$, які позначимо відповідно через s і r (табл. 6.7).

Таблиця 6.7

Фрагмент таблиці сум і різниць номерів симетричних точок

k	1	2	3	4	5
s	6	14	26	42	62
r	2	-4, -2	6, 4, 2	-8, -6, -4, -2	10, 8, 6, 4, 2

Для кожного k суми номерів симетричних відносно бісектриси $y = x$ точок однакові, послідовність: 6, 14, 26, 42, 62, ..., є добутком двійки з послідовністю: 3, 7, 13, 21, 31, кожний елемент якої – сума пронік-числа з одиницею (пронік-число означає добуток двох послідовних натуральних чисел):

$$1\cdot 2+1,\ 2\cdot 3+1,\ 3\cdot 4+1,\ 4\cdot 5+1,\ 5\cdot 6+1,\ \ldots,\ k(k+1)+1,\ \ldots .$$

Отже,

$$s = 2(k(k+1)+1)\,. \tag{6.31}$$

Різниці r залежно від k почергово змінюють знак і для одного й того ж k не однакові, вони є функціями координат точок:

$$r = (-1)^{k+1} 2\,(2k-(x+y))\,, \tag{6.32}$$

де множник $(2k-(x+y))$ відповідає за модуль різниці.

Складаємо систему рівнянь відносно $n(x,\ y)$, $n(y,\ x)$ і розв'язуємо її:

$$\begin{cases} n(x,\ y)+n(y,\ x)=s \\ n(x,\ y)-n(y,\ x)=r \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} n(x,\ y)=(s+r)/2 \\ n(y,\ x)=(s-r)/2 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n(x,\ y)=k(k+1)+1+(-1)^{k+1}(2k-(x+y)) \\ n(y,\ x)=k(k+1)+1-(-1)^{k+1}(2k-(x+y)) \end{cases}.$$

Об'єднуючи дві формули в одну, остаточно отримуємо (6.30):

$$n(x,\ y)=k(k+1)+1+(-1)^{k}(2k-(x+y))sign\ (x-y)\ –$$

формула номера точки $\boldsymbol{n = n\,(x,\ y)}$ за її координатами $\boldsymbol{x,\ y}$.

Нескладно переконатися, що її задовольняють і точки бісектриси:

$$(x = y = k) \;\Rightarrow\; n(x, x) = x^2 + x + 1. \qquad (6.33)$$

Наслідок із (6.30) – послідовності номерів точок, що належать координатним осям:

$$Ox: n(x, 0) = x^2 + x + 1 + (-1)^x x;\; Oy: n(0, y) = y^2 + y + 1 - (-1)^y y. \bullet \qquad (6.34)$$

Квадратно-трикутна нумерація (КТН)

Нумерацію ЦТ (табл. 6.8) будемо проводити, починаючи з точки O, по ламаній, що має точки самоперетину.

Ламаній належать точки квадратів зі сторонами 1, 2, 3, … і прямокутних трикутників, гіпотетенузи яких є ланками ламаної (рис. 6.5).

Запропоновану нумерацію точок назвемо **квадратно-трикутною** (**КТ-нумерацією**).

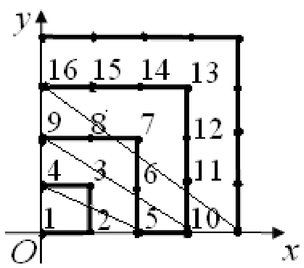


Рис. 6.6. **Схема КТ-нумерації**

Таблиця 6.8

Фрагмент таблиці нумерації точок

n	(x, y)	S^+	S^-	S_n^+	S_n^-
1	0 0	1	1	1	1
2	1 0	1	1	3	3
3	1 1	1	3	5	3
4	0 1	3	5	5	3
5	2 0	3	3	7	3
6	2 1	3	5	9	7
7	2 2	3	7	11	7
8	1 2	5	9	11	7
9	0 2	7	11	11	7
10	3 0	7	7	13	7
11	3 1	7	9	15	13
12	3 2	7	11	17	13
13	3 3	7	13	19	13
14	2 3	9	15	19	13

За аналогією з квадратною нумерацією знайдемо доданки $S^+(n)$, $S^-(n)$, які відповідно доповнюють суму і різницю координат x, y до номера точки n (коментарі наводити не будемо):

$$S^{+}(n)=1+(2(n-1)-u(u+3))(u-v)+(1+v-u)v(v+1),$$
$$S^{-}(n)=1+2(n-1)-w(w+1), \tag{6.35}$$

де $u=[(\sqrt{4n-3}-1)/2]$, $v=[\sqrt{n}]-1$, $w=[\sqrt{n-1}]$;

$$x=x(n)=n-(S^{+}+S^{-})/2,\quad y=y(n)=(S^{-}-S^{+})/2. \tag{6.36}$$

Залежність номера точки від координат виглядає так:

$$n(x,y)=k(k+1)+1+sign(y-x)(2k-(x+y)), \tag{6.37}$$

де, як і раніше, $k=\max(x,y)$ – номер квадрата; $sign(t)=\begin{cases}1, & t\geq 0\\ 0, & t<0\end{cases}$ – сигнум-функція.

Формули (6.35), (6.36), (6.37) запрограмовані в ППП MatLab, п'ятдесят цілих точок зображено на рис. 6.6.

Якщо порівнювати квадратну нумерацію з квадратно-трикутною, то перевагу слід віддати останній, оскільки вона містить три, а не чотири параметри, які визначають кількість повних серій, і формула для $S^{-}(n)$ значно простіша.

Для побудови потрібної сітки паралельним перенесенням осей координат початок O можна помістити в будь-яку дійсну точку площини.

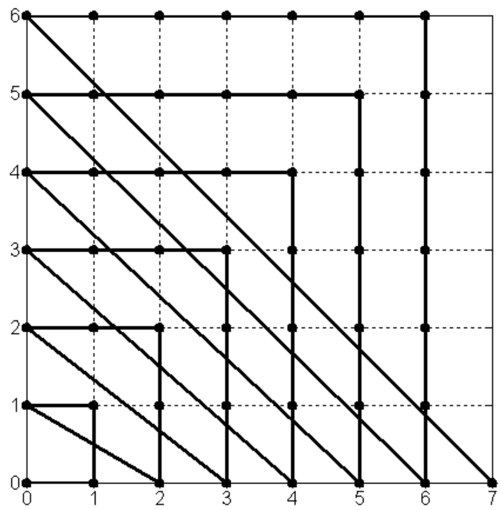


Рис. 6.6. **КТ-нумерація: 50 точок**

Зауваження. Розглянуті конфігурації, звичайно, не охоплюють усе розмаїття способів нумерації та побудови сіток. Вибір схеми нумерації залежить від умов конкретної прикладної задачі. Для певного типу задач доцільність використання тієї чи іншої сітки можна встановити за допомогою числового експерименту. Це питання поки що залишається відкритим.

6.3. Нумерація цілих точок на площині (в $\mathbb{Z}^2$)

Здійснимо нумерацію всієї цілочислової площини, схема якої, без аналітичного опису, наведена в роботі В. Серпінського [46]. Автором знайдено два варіанти (за формою подання) координатних функцій для опису цієї схеми.

За Серпінським нумерація проводиться по **квадратній спіралі** – ламаній, кожний звій якої складений із відрізків прямої одиничної довжини, починаючи з точки O, рухом послідовно вгору, вліво, вниз, вправо і т. д. (рис. 6.7). У табл. 6.9 наведені номери ЦТ n і відповідні пари координат $(x,\ y)$.

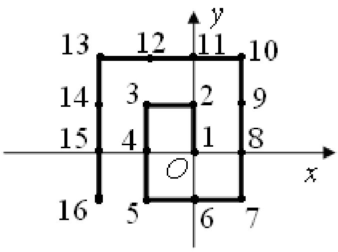


Рис. 6.7. **Схема нумерації**

Таблиця 6.9

Фрагмент таблиці нумерації ЦТ

n	$(x,\ y)$	$x+y$	S^+	$x-y$	S^-
1	0 0	0	1	0	1
2	0 1	1	1	-1	3
3	-1 1	0	3	-2	5
4	-1 0	-1	5	-1	5
5	-1 -1	-2	7	0	5
6	0 -1	-1	7	1	5
7	1 -1	0	7	2	5
8	1 0	1	7	1	7
9	1 1	2	7	0	9
10	1 2	3	7	-1	11
11	0 2	2	9	-2	13
12	-1 2	1	11	-3	15
13	-2 2	0	13	-4	17
14	-2 1	-1	15	-3	17
15	-2 0	-2	17	-2	17
16	-2 -1	-3	19	-1	17

У процесі переходу за схемою від попередньої точки до наступної одна з координат збільшується або зменшується на одиницю. Це, у свою чергу, тягне, відповідно, збільшення або зменшення на одиницю суми й різниці координат ЦТ: $x+y$ і $x-y$ (див. табл. 6.9).

Для встановлення зв'язку між номерами ЦТ n і координатами – $x=x(n)$, $y=y(n)$ – введемо в розгляд, відповідно, доданки $S^+=S^+(n)$, $S^-=S^-(n)$, які доповнюють суму і різницю координат до номера n:

$$x+y+S^+=n,\ x-y+S^-=n. \tag{6.38}$$

Відзначимо деякі властивості $S^+(n)$ і $S^-(n)$:

1) якщо точка (x, y) належить бісектрисі $y=-x$ ($y=x$), то S^+ (S^-) співпадає з номером точки: $S^+=n$ ($S^-=n$);

2) номери точок бісектрис є квадратичними функціями параметра m – номера точки ($m\in\mathbf{Z}$), починаючи рахунок від початку координат (скінченні різниці цієї послідовності складають арифметичну прогресію, різниця якої дорівнює восьми):

$$y=-x\ (x\ge 0)\ \Rightarrow\ S^+=2(2m-1)(m-1)+1;$$
$$y=-x\ (x\le 0)\ \Rightarrow\ S^+=2(2m-3)(m-1)+1; \tag{6.39}$$

$$y=x\ (x\ge 0)\ \Rightarrow\ S^-=(2m-1)^2;$$
$$y=x\ (x\le 0)\ \Rightarrow\ S^-=4(m-1)^2+1; \tag{6.40}$$

Установлюємо сегменти $[n_{\text{п}}, n_{\text{к}}]$ ($n_{\text{п}}$ – початок, $n_{\text{к}}$ – кінець) кожної серії з одиниць $(+1)$ або одиниць із мінусом (-1).

Для скінченних різниць суми координат (r_+) маємо:

$[n_{\text{п}}, n_{\text{к}}]$	$[1,1]$	$[2,4]$	$[5,9]$	$[10,16]$	$[17,25]$	$[26,36]$	$[37,49]\ldots$
r_+	1	-1	1	-1	1	-1	$1\ldots$

.

Застосовуємо метод ПНС підсумовування к.-с. п., розглядаючи послідовність різниць r_+ як послідовність серій одного типу – типу U.

$$K_u^+=(m, l_m, a_m)=(m, 2m-1, (-1)^{m-1}):\ m^2-2m+2\le n\le m^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (u=[\sqrt{n}],\ |u|=\sum_{m=1}^{u} l_m=u^2,\ |\bar{u}|=n-u^2)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (S_u^{\text{п}}=\sum_{m-1}^{u} l_m a_m=(-1)^{u\text{-}1}2[(u+1)/2]-[(u+1)/2]+[u/2],$$

$$S_u^{\text{н}}=(-1)^u(n-1-u^2)).$$

Заміною в $S_u^{\text{п}}$ і $S_u^{\text{н}}$ номера n на $(n-1)$ отримуємо:

$$S^{+}=S^{+}(n)=((-1)^{u\text{-}1}2-1)[(u+1)/2]+[u/2]+(-1)^{u}(n-1-u^{2})\,. \qquad (6.41)$$

Аналогічно діємо, відшукуючи S^{-}. Для скінченних різниць різниці координат (r_{-}) маємо:

$[n_{\text{п}}, n_{\text{к}}]$	$[1, 2]$	$[3, 6]$	$[7, 12]$	$[13, 20]$	$[21, 30]$	$[31, 42]$	$[43, 56]\ldots$
r_{-}	-1	1	-1	1	-1	1	$-1\ldots$

;

$$K_v^{-}=(m,\, l_m, a_m)=(m,\, 2m,\, (-1)^{m}):\ m^{2}-m+1\le n\le m^{2}+m\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (v=[(\sqrt{4n+1}-1)/2],\ |v|=\sum_{m=1}^{v} l_m=v(v+1),\ |\overline{v}|=n-v(v+1))\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (S_v^{\text{п}}=2\sum_{m=1}^{v}(-1)^{m}m=(-1)^{v}2[(v+1)/2],\ S_v^{\text{н}}=(-1)^{v+1}(n-v(v+1))).$$

Заміною в $S_v^{\text{п}}$ і $S_v^{\text{н}}$ номера n на $(n-1)$ отримуємо:

$$S^{-}=S^{-}(n)=(-1)^{v}(2[(v+1)/2]-(n-1-v(v+1)). \qquad (6.42)$$

Згідно з (6.38) **координатні функції** мають вигляд:

$$x=x(n)=n-\frac{1}{2}(S^{+}+S^{-}),\ y=y(n)=\frac{1}{2}(S^{-}-S^{+})\,. \qquad (6.43)$$

Для встановлення залежності номера ЦТ від координат: $n=n(x,y)$, введемо деякі допоміжні поняття. Усю сукупність цілих точок площини можна розглядати як об'єднання множин точок із цілими координатами, які лежать на сторонах квадратів із центром симетрії у початку координат зі сторонами (див. рис. 6.7): $2,\ 4,\ 6,\ \ldots\ 2k,\ \ldots,\ k\in\mathbf{N}$. Число k, прирівняне половині сторони квадрата, назвемо **номером квадрата**. Точці $(0, 0)$ – виродженому квадрату – припишемо **номер нуль** (0).

Формулу, що виражає залежність номера точки сітки від координат, виведемо, спираючись на результат розв'язку системи двох рівнянь (для сітки, що на рис. 6.7):

$$\begin{cases} n(x,\ y)+n(y,\ x)=8k^2+2 \\ n(x,\ y)-n(y,\ x)=4k+2(x+y) \end{cases}, \tag{6.44}$$

де $n(x,\ y), n(y,\ x)$ – номери точок, симетричних відносно бісектриси першого і третього координатних кутів: $y=x$;

$n(x,\ y)$ відповідає $x \ge y$; k – номер квадрата.

Праві частини рівнянь – закони, яким підкоряються сума та різниця номерів симетричних точок; вони встановлюються детальним аналізом схеми нумерації.

Із (6.44) маємо:

$$n(x,\ y)=4k^2+1+(2k+x+y),\ \ n(y,\ x)=4k^2+1-(2k+x+y). \tag{6.45}$$

Об'єднуючи дві формули в одну, остаточно отримуємо:

$$n(x,\ y)=4k^2+1+sign\,(x-y)(2k+x+y), \tag{6.46}$$

де $sign\,(x-y)=1$, якщо $x-y\ge 0$, і $sign\,(x-y)=0$, якщо $x-y<0$;

$k=\max\{|x|,|y|\}$ – номер квадрата, $k=0, 1, 2,\ldots$.

Формула (6.46) – **формула визначення номера точки $\boldsymbol{n=n\,(x,\ y)}$ за її координатами $\boldsymbol{x,\ y}$**.

Нескладно переконатися, що її задовольняють і точки, які належать самій бісектрисі:

$$|x|=|y|=k\ \ \Rightarrow\ \ \left[\begin{array}{l} x=y>0 \Rightarrow\ n(x,\ y)=4k^2+1+4k=(2k+1)^2 \\ x=y<0 \Rightarrow\ n(x,\ y)=4k^2+1 \end{array}\right. .$$

Справедливість цих співвідношень випливає із властивостей сум $S^+=S^+(n)$, $S^-=S^-(n)$ (див. (6.40)) за умови, що $y=x$.

З урахуванням того, що в межах кожного k-квадрата модулі координат x і y не перевищують $k = \max(|x|, |y|) = [(\sqrt{n-1}+1)/2]$, формули (6.43) допускають спрощення поданням у вигляді:

$$x = \pm(k-C),\ y = \pm(k-D), \tag{6.47}$$

де C, D – величини, які для кожного n знаходяться за відомими x, y і k, а розміщення з повтореннями зі знаків "плюс" і "мінус" визначають чотири різновиди спіралі. Ще чотири різновиди спіралі отримаємо, якщо нумерацію точок проводити за рухом годинникової стрілки.

Для визначеності вибору знаків правих частин у (6.47) введемо в розгляд поняття "індикатора" ЦТ.

Кожний k-квадрат, утворений звоєм спіралі, центром симетрії якого є початок $O(0,0)$, вміщує **підквадрат** – квадрат зі стороною $2k-1$ ($k>0$) із центром симетрії в точці $(-0{,}5;\ 0{,}5)$. ЦТ підквадратів розташовані на прямій $y = x+1$ і вище від неї, а самих k-квадратів – на бісектрисі $y = x$ і нижче від неї (рис. 6.8).

Індикатором цілої точки з номером n називають число $a = [\sqrt{n-1}]$, прирівняне до довжини сторони підквадрата (або усього k-квадрата), стороні якого належить точка. Площа S_a відповідного квадрата описується формулою $S_a = a^2$ (або $S_k = 4k^2$). Номер квадрата k та індикатор ЦТ a пов'язані співвідношенням: $k = [(a+1)/2]$.

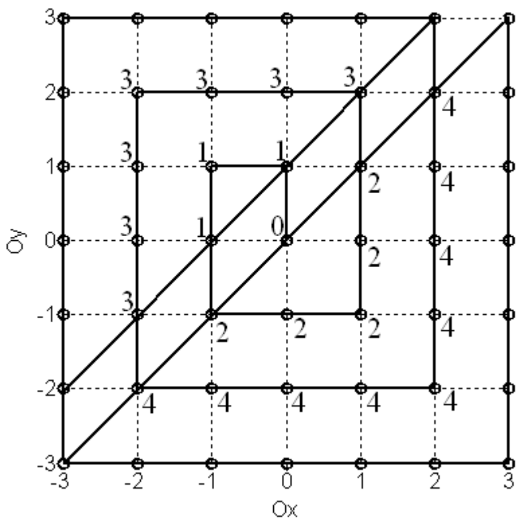


Рис. 6.8. **Індикатори ЦТ**

Згідно з рис. 6.8 нанесені індикатори точок для $k = 1, 2$. Відзначимо, що на бісектрисі $y = x$ лежать точки з такими номерами: $n = (2k-1)^2$, $n = (2k-1)^2 + 1$, а на прямій $y = x+1$ – із номерами: $n = 4k^2$, $n = 4k^2 + 1$; індикатори ЦТ підквадратів непарні, а k-квадратів, без точок підквадратів – парні.

У співвідношеннях (6.47) "регулятор" знака для координати x візьмемо у вигляді степеня $(-1)^a$, а для y – $(-1)^{a+1}$ (такий вибір відповідає спіралі, зображеній на рис. 6.8), тоді:

$$C = k-(-1)^a x,\ D = k-(-1)^{a+1} y\,. \tag{6.48}$$

Описуємо послідовність $C = C(n)$, аналізуючи різниці rC:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
C	0	1	0	0	2	1	0	0	0	3	2	1	0	0	0
rC	1	–1	0	2	–1	–1	0	0	3	–1	–1	–1	0	0	0

.

Послідовність різниць rC є логічною сумою серій трьох типів: $U = \{1, 2, 3, \ldots\}$; $V = \{-1,\ -1-1,\ -1-1-1,\ \ldots\}$, $W = \{0,\ 00, 000,\ \ldots\}$.

Описуємо їх трійками $K = (m,\ l_m, a_m)$ і відновлюємо $C = C(n)$:

$$U:\ K_u = (m, 1, m):\ m^2 \le n \le\ m^2\ \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (u = [\sqrt{n}],\ |u| = u\,,\ |\bar{u}| = n-u)\ \ \Rightarrow\ \ S_u^{\text{п}} = u(u+1)/2\,;$$

$$V:\ K_v = (m, m, -1):\ m^2+1 \le n \le m^2+m\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (v = [(\sqrt{4n+1}-1)/2],\ |v| = v(v+1)/2\,,\ |\bar{v}| = n-|v|)\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ \ S_v^{\text{п}} = -v(v+1)/2\,;$$

$$W:\ K_w = (m, m, 0):\ m^2+m+1 \le n \le m^2+2m\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (w = [\sqrt{n+1}-1],\ |w| = w(w+1)/2\,,\ |\bar{w}| = n-|w|)\ \ \Rightarrow\ \ S_w^{\text{п}} = 0\,.$$

Аналізуючи $S_u^{\text{п}}$, $S_v^{\text{п}}$, $S_w^{\text{п}}$ і порядок слідування серій, приходимо до висновку:

$$C = C(n) = (u(u+1)-n+1)(u-v), \tag{6.49}$$

де $u = [\sqrt{n-1}] = a$, $v = [(\sqrt{4n-3}-1)/2]$.

Таким чином,

$$x(n) = (-1)^a (k + (a - v)(n - a(a+1) - 1)). \qquad (6.50)$$

Описуємо послідовність $D = D(n)$, аналізуючи різниці rD:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
D	0	0	0	1	0	0	0	1	2	0	0	0	0	1	2
rD	0	0	1	-1	0	0	1	1	-2	0	0	0	1	1	1

.

Послідовність rD є логічною сумою серій трьох типів: $U = \{00, 00, 000, 0000, \ldots\}$; $V = \{1, 11, 111, \ldots\}$, $W = \{-1, -2, -3, \ldots\}$.

Описуємо кожну з них трійками $K = (m, l_m, a_m)$ і методом ПНС відновлюємо $D = D(n)$:

$$U:\ K_u = (m, l_m, 0), \text{ де } l_m = \begin{bmatrix} 1, & m=1 \\ m^2+1, & m \ge 2 \end{bmatrix}: \ l_m \le n \le m^2 + m \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (u = [(\sqrt{4n+1} - 1)/2],\ |u| = u(u+1)/2 + 1,\ |\bar{u}| = n - |u|)\ \Rightarrow\ S_u^{\text{п}} = 0;$$

$$V:\ K_v = (m, m, 1):\ m^2 + m + 1 \le n \le m^2 + 2m\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (v = [\sqrt{n+1} - 1],\ |v| = v(v+1)/2,\ |\bar{v}| = n - |v|)\ \Rightarrow\ S_v^{\text{п}} = v(v+1)/2;$$

$$W:\ K_w = (m, 1, -m):\ (m+1)^2 \le n \le (m+1)^2\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ (w = [\sqrt{n} - 1],\ |w| = w,\ |\bar{w}| = n - w)\ \Rightarrow\ S_w^{\text{п}} = -w(w+1)/2.$$

Аналізуючи $S_u^{\text{п}}$, $S_v^{\text{п}}$, $S_w^{\text{п}}$ і порядок слідування серій, отримуємо:

$$D = D(n) = (n - (w+1)(w+2) - 1)(u - w),$$

де $u = [(\sqrt{4n-3} - 1)/2]$, $w = [\sqrt{n-1} - 1] = a - 1$.

Оскільки u збігається з v у описі $C = C(n)$, а $w = [\sqrt{n-1} - 1] = a - 1$, то $D(n)$ запишеться у вигляді:

$$D = D(n) = (n - a(a+1) - 1)(v - a - 1), \qquad (6.51)$$

і тоді отримуємо:

$$y(n) = (-1)^{a+1}(k - (v - a + 1)(n - a(a+1) - 1)). \qquad (6.52)$$

Праві частини формул (6.50) і (6.52) більш прості порівняно з правими частинами співвідношень (6.43), якщо замість S^+ і S^- підставити їх вирази (див. (6.41) і (6.42)).

Введемо в розгляд величини: $b = a + 1 = [\sqrt{n-1}] + 1$, $B = (b-1)b + 1$, залежні від номера точки, і залучимо R_1-функції (див. (2.8)). Остаточно **координатні функції** виглядатимуть так:

$$\begin{aligned} x &= (-1)^{b-1}([b/2] + \min(0, n - B)), \\ y &= (-1)^{b}([b/2] - \max(0, n - B)). \end{aligned} \qquad (6.53)$$

Формули запрограмовані у вигляді m-файла в пакеті MatLab [21]. На рис. 6.9 зображена сітка, яка охоплює 50 точок.

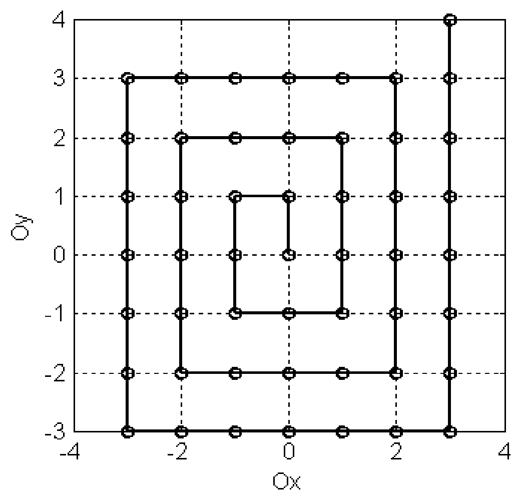


Рис. 6.8. **Квадратна сітка ЦТ: 50 точок**

Якщо в (6.47) замінити x на y і навпаки, то нумерація точок спіралі буде здійснюватись за рухом годинникової стрілки.

Схожі за виглядом формули, отримані іншим шляхом, за допомогою залучення функцій комплексної змінної, знайдені в роботі [3].

Залежно від потреб дослідника за розглянутою методикою будуються сітки, розташовані нижче або вище від бісектриси першого і третього кутів: $y = x$, у вигляді вертикальних чи горизонтальних смуг і т. ін.

У процесі нумерації в $\mathbf{Z^3}$ та побудови сітки на відміну від нумерації ЦТ площини додається ще один, так би мовити, "ступінь волі" – третя координата, що дає можливість ускладнювати сітки-"візерунки".

Вправи і задачі

1. На противагу схемі нумерації, зображеній на рис. 6.1, здійсніть нумерацію $\mathbf{Z}$ за рухом годинникової стрілки.

2. За аналогією з рис. 6.2 зобразіть схему нумерації смуги в $\mathbf{Z}^2$ з від'ємними та додатними ординатами й опишіть її аналітично.

3. Покажіть, що суми S^+ (6.12), S^- (6.15), S_n^+ (6.21), S_n^- (6.25) задовольняють співвідношення:

$$S^+ + S_n^+ = S^- + S_n^-; \;\; n = (S^+ + S_n^+)/2 = (S^- + S_n^-)/2\,.$$

4. Наведіть геометричну інтерпретацію часткових випадків опису $n(x, y)$ (6.37): а) номерів точок, які належать координатним осям: $n(x,0)$, $n(0,y)$; б) суми та різниці номерів: $n(x,0) \pm n(0,y)$.

5. Відштовхуючись від рис. 6.7, зобразіть усі вісім різновидів квадратної спіралі.

6. Побудуйте цілочислові сітки за наведеними на рис. 6.9 схемами.

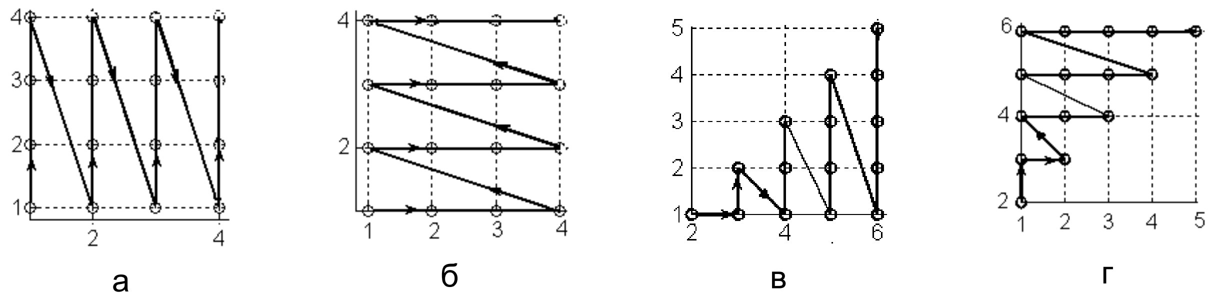


Рис. 6.9. **Сітки: а) горизонтальна смуга; б) вертикальна смуга; в) смуга-кут між $\boldsymbol{y = x - 1}$ і $\boldsymbol{y = 1}$; г) смуга-кут між $\boldsymbol{x = y - 1}$ і $\boldsymbol{y = 2}$**

7. Переконайтеся, що в умовах задачі 6а координатні функції і залежність номера точки від її координат: $n = n(x,y)$, мають вигляд:

$$x = x(n) = [(n-1)/a] + 1; \;\; y = y(n) = n - [(n-1)/a],$$

$$n = n(x,y) = a(x-1) + y\,,\;\; a \text{ – ширина смуги.}$$

Знайдіть формули для $n = n(x,y)$ у випадках б), в) і г).

Розділ 7. Цілочислові сітки у просторі

Як ставитися до труднощів? У сфері невідомого треба розглядати труднощі як прихований скарб! Зазвичай, чим важче, тим корисніше. Не так цінно, якщо труднощі виникають від твоєї боротьби з самим собою. Але коли труднощі лунають із боку щораз більшого опору предмету – це прекрасно!!

О. І. Солженіцин

Крапля довбає камінь не силою, а частим падінням.

Овідій

7.1. Нумерація цілих точок у $\mathbf{Z}_{+}^{3}$

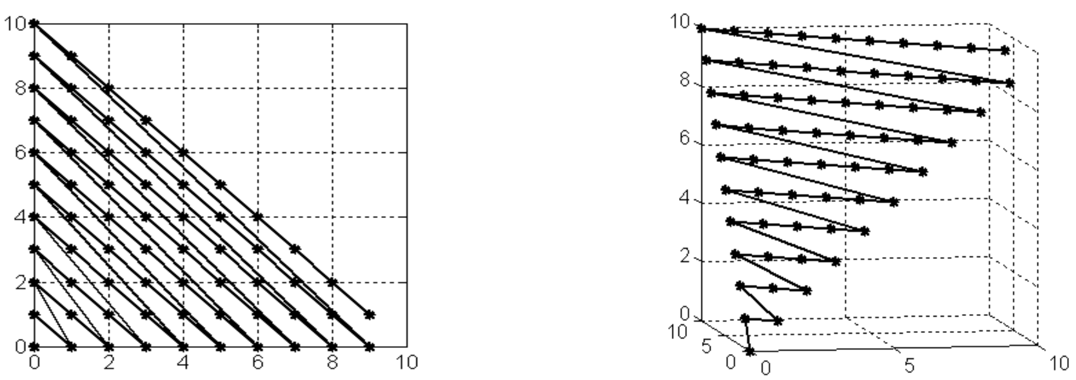
Відома канторова нумерація першого квадранта площини xOy [15], за допомогою якої доведено зліченність множини раціональних чисел:

$$C(x, y) = (x + y + 1)(x + y)/2 + x \quad (x \geq 0,\ y \geq 0),$$

дозволяє, маючи нумерацію пар натуральних чисел, ввести нумерацію n-ок натуральних чисел для довільного $n > 2$. Так, наприклад, для $n = 3$

$$C_3(x, y, z) = C_2(C(x, y), z),$$

але трійки (x, y, z) належать поверхні, а не просторовому тілу (рис 7.1).



а б

Рис. 7.1. **Нумерація Г. Кантора: а) плоска; б) просторова**

Якщо кожну ЦТ плоскої нумерації піднімати по осі Oz послідовно, з одиничним кроком, до $z = h - const$, то отримаємо цілочислову "призму". Проте така сітка не завжди є зручною для опису опуклих областей у задачах дискретного математичного програмування чи кристалографії; більш придатною є сітка із ЦТ у 3-вимірному паралелепіпеді (див. п. 1.2), зокрема, в 3-кубі.

Для здійснення нумерації ЦТ простору $\mathbf{Z}_+^3$ будемо відштовхуватись від К-нумерації першої чверті площини (див. рис. 6.4). За аналогією з нумерацією в $\mathbf{Z}_+^2$ множинам цілих точок із $\mathbf{Z}_+^3$ поставимо у відповідність куби з довжиною ребра k і назвемо їх $\boldsymbol{k}$**-кубами.**

На рис. 7.2 наведено зображення точок 2-куба і ламану, якій належать усі його цілі точки.

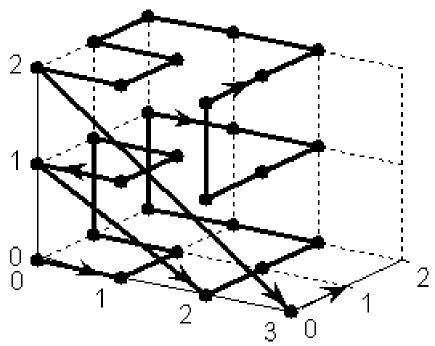


Рис. 7.2. **Порядок нумерації точок 2-куба**

Стрілочками, починаючи з точки $(0,0,0)$, показано напрям просування по ламаній, а за похилими ланками ламаної здійснюється перехід до точок наступного куба.

Кожен k-куб визначається $(k+1)$-м перерізом: $z = 0, 1, 2, ..., k$, і містить у собі всі попередні (за номером) куби.

У процесі нумерації чітко простежуються чотири етапи:

1) *обведення* ЦТ першого перерізу куба, що не належать $(k-1)$-кубу;

2) *піднімання* на одиницю (до другого перерізу);

3) *обведення* точок другого перерізу куба, що не належать $(k-1)$-кубу. (Названі етапи повторюються до обведення точок $(k+1)$-го перерізу, останньою з яких є точка $(0, 0, k)$);

4) *спускання* по похилій на k одиниць (у точку $(k+1, 0, 0)$) для обведення точок першого перерізу $(k+1)$-куба, що не належать k-кубу.

Запропонований підхід до нумерації названо методом **обведення-піднімання-спускання (ОПС)** [44; 45].

Нумерація ЦТ кожного k-куба починається з номера $n = k^3 + 1$, звідки отримуємо залежність номера куба від номера будь-якої його точки:

$$n = k^3 + 1 \quad \Rightarrow \quad k = [\sqrt[3]{n-1}]. \tag{7.1}$$

З іншого боку, номер куба визначається найбільшою з координат будь-якої точки, яка йому належить:

$$k = \max\{x, y, z\}. \tag{7.2}$$

Для визначення аплікати ЦТ підемо таким шляхом. Відновимо методом ПНС за скінченними різницями d_p підпослідовність натуральних чисел $S_p = S(p)$, $p \in \mathbf{N}$, члени якої вказують на номери точок, у яких координата z збільшується на одиницю:

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	…
S_p	4	13	18	34	41	48	73	82	91	100	…
d_p	$\underline{9}$	5	$\underline{16}$	7	7	$\underline{25}$	9	9	9	$\underline{36}$	…

.

Розглянемо послідовність номерів d_p як об'єднання одноелементних серій (U) – квадратів $9, 16, 25, 36, 49, \ldots$ – і серій V: $5,\ 7\ 7,\ 9\ 9\ 9,\ 11\ 11\ 11\ 11,\ \ldots$, тобто

$$K_u = (m, l_m, a_m) = (m, 1, (m+2)^2);\ K_v = (m, m, 2m+3).$$

Кількість повних серій типу U, V залежно від параметра p описується, відповідно, формулою:

$$u = \left[\frac{\sqrt{8p+1}-1}{2}\right];\ v = \left[\frac{\sqrt{8p+9}-3}{2}\right]. \tag{7.3}$$

Суми елементів повних серій такі:

$$S_u^{\text{П}} = \sum_{m=1}^{u}(m+2)^2 = \frac{u}{6}(2u^2+15u+37) \text{ (для } U\text{)},$$

$$S_v^{\text{П}} = \sum_{m=1}^{v}m(2m+3) = \frac{v}{6}(4v^2+15v+11) \text{ (для } V\text{)},$$

а сума елементів неповних серій V знаходиться за формулою:

$$S_v^{\text{н}} = (u-v)(2v+5)(n-1-u-v(v+1)/2).$$

Таким чином, для заданого p сума членів послідовності номерів S_p цілих точок визначається співвідношенням:

$$S_p = S_u^{\text{П}} + S_v^{\text{П}} + S_v^{\text{н}}. \tag{7.4}$$

Апліката z відновлюється за різницями

$$dz = \begin{cases} -k_t, & n=(k_t+1)^3 \\ 1, & n=S_p \\ 0, & \text{в інших випадках} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad z = \sum_{n=1}^{N-1} dz, \tag{7.5}$$

де $k_t = 0, 1, 2, \ldots, k$ – поточні номери кубів, які не перевищують k;

$N = (k+1)^3 + 1$ – число, на одиницю більше кількості точок k-куба.

Візуалізація нумерації здійснювалася в ППП MatLab [21] залученням послідовностей $\sigma_1(n) = k(n)+m(n)$, $\sigma_2(n) = k^2(n)+m(n)$:

$$z = m-1 = \sigma_1(n) - (\sqrt{D}+3)/2,$$

де m – номер перерізу куба, $D = 4(\sigma_2-\sigma_1)+1$.

7.2. Нумерація цілих точок у $\mathbf{Z}^3$

У запропонованій роботі для відображення $\mathbf{Z}^3$ в $\mathbf{N}$ використовується нумерація простору $\mathbf{Z}^2$ за схемою В. Серпінського (див. рис. 6.7) згідно з (6.53), а саме: на координатній прямокутній декартовій площині xOy, починаючи з точки $(0, 0)$, будується квадратна ламана-спіраль із вершинами в ЦТ. Нагадаємо, що кожному звою ламаної-спіралі ставиться у відповідність k-квадрат зі стороною 0 (квадрат, вироджений у точку), $2, 4, \ldots, 2k, \ldots$. Квадрат, сторона якого прирівняна до одиниці, називають **коміркою**. Кількість комірок k-квадрата дорівнює $4k^2$.

Нумерація значень аплікат z здійснюється так, щоб кожному плоскому звою площини $z=0$ відповідали плоскі витки площин $z=\mp h$, де $h=1, 2, 3, \ldots$. Такий підхід до нумерації ЦТ названо методом **обведення-спускання-пронизування (ОСП)**.

Опишемо суть методу для випадку $k=1$. На рис. 7.3 подається плоска геометрична інтерпретація нумерацій для $k=0,1,2$, які називаються **розгортками просторової нумерації.** Кожний наступний орланцюг (шлях) відділяється від попереднього напівжирною точкою.

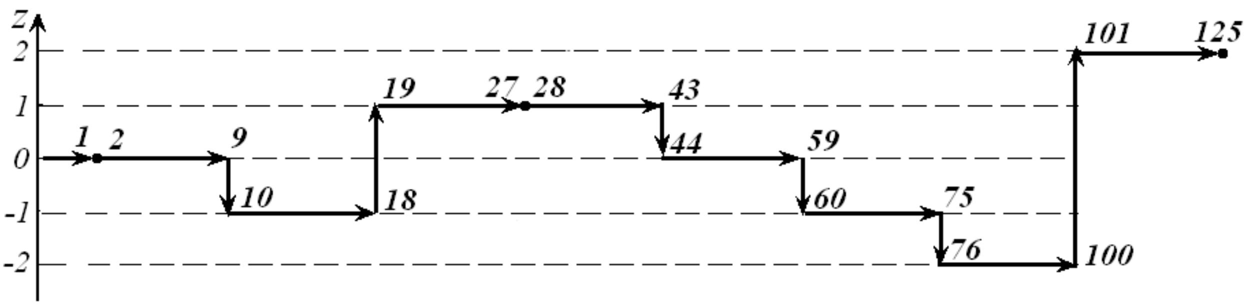


Рис. 7.3. **Розгортки нумерації в $\mathbf{Z}^3$ для $k=0,1,2$**

Перелічення точок здійснюється в такому порядку.

1-й етап. *Перебираємо* в додатному напрямі – проти напряму руху годинникової стрілки – у площині $z=0$ точки ламаної-звою, що відповідають нульовому і першому квадратові, тобто від першої до дев'ятої вершини (він – виток – зображений також на рис. 7.3).

2-й етап. *Переходимо* на площину $z=-1$ і обводимо точки звою, який є проекцією звою у площині $z=0$, у від'ємному напрямі –

за напрямом руху годинникової стрілки, тобто перебираємо цілі точки від 10-ї до 18-ї.

3-й етап. *Підіймаємось* угору – на площину $\boldsymbol{z=+1}$ – і обходимо в додатному напрямі точки звою, проекцією якого на xOy є вихідний звій, тобто перебираємо цілі точки від 19-ї до 27-ї.

Далі, відштовхуючись від точки з номером 28, здійснюємо описані три етапи і отримуємо нумерацію цілих просторових точок для $k=2$. Занумерованими будуть цілі точки від 28-ї до 125-ї (див. рис. 7.3). Повторюючи послідовно етапи **1, 2, 3,** припишемо номер будь-якій ЦТ.

За аналогією з нумерацією в $\mathbf{Z}^2$, коли кожному звою ламаної-спіралі ставився у відповідність квадрат зі стороною 0 (квадрат, вироджений у точку), $2, 4, \ldots, 2k, \ldots$, отриманим для кожного k-квадрата множинам цілих точок із $\mathbf{Z}^3$ поставимо у відповідність куби з довжиною ребра $2k$ і центром симетрії в початку координат $(0,0,0)$, і назвемо їх $\boldsymbol{k}$**-кубами.**

Число k, прирівняне до половини ребра куба, називається **номером куба**. Виродженому кубу припишемо **номер нуль** (0). Номер куба визначається як найбільший із модулів координат точок, які він включає: $k=\max\{|x|,|y|,|z|\}$. Буде також показано, що номер куба можна встановити за номером довільної точки, що йому належить.

На рис. 7.4 подається візуалізація нумерації ЦТ в $\mathbf{Z}^3$ для $k=1$.

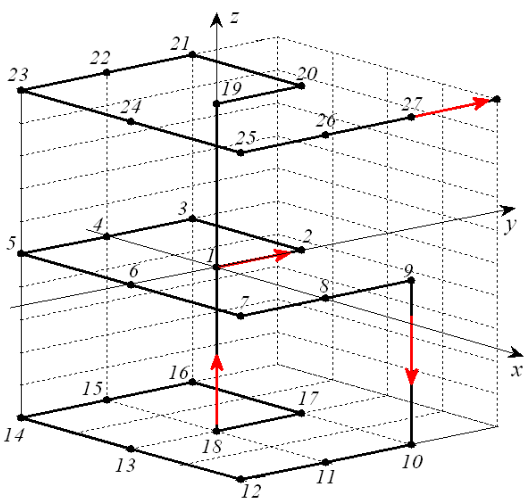


Рис. 7.4. **Нумерація ЦТ в $\mathbf{Z}^3$**

Стрілочками показано напрям руху за методом ОСП для перелічення всіх точок 1-куба від початку координат (це точка з номером 1) до точки з номером 27.

У більш загальному випадку не обов'язково будувати куб. Це може бути пряма призма, причому не симетрична відносно площини $z=0$, тобто аплікати її точок змінюються від $z=-h_1$ до $z=+h_2$, де $h_1 \neq h_2$.

На підставі розглянутого робимо висновок: для побудови наступного тривимірного куба, ($k+1$)-куба, починаючи з нульового, робимо таке: у площині $z=k\in\mathbf{Z}$ ***обводимо*** точки, що належать попередньому плоскому звою, та інші, до отримання ($k+1$)-квадрата; потім здійснюємо послідовно, з кроком 1, ***спуск*** вниз до площини $z=-(k+1)$, при цьому після кожного кроку також будуємо ($k+1$)-квадрат; і ***пронизуємо*** k-куб, переходячи в точку $(0, 0, k+1)$ для обведення точок ($k+1$)-квадрата у площині $z=(k+1)$.

Для аналітичного опису запропонованого підходу до нумерації точок $\mathbf{Z}^3$ проаналізуємо етапи побудови k-куба.

Насамперед відзначимо, що:

1) кожна сторона k-квадрата включає $(2k+1)$-у ЦТ (оскільки відрізок довжиною $2k$ містить на одиницю більше цілих точок, ніж кількість одиничних відрізків);

2) перерізами k-куба площинами від $z=-k$ до $z=+k$ є k-квадрати, в кожному з яких $(2k+1)^2$ ЦТ (оскільки кожна сторона k-квадрата включає $(2k+1)$-у цілу точку);

3) k-куб охоплює $(2k+1)^3$ ЦТ простору (згідно з перерізами: $z=-k,\ -k+1,\ ...,0,1,2,\ ...,k$, у кількості $2k+1$).

Якщо точки, що належать площині $z=0$, тобто початковому плоскому звою, обходити за рухом годинникової стрілки, то матимемо інший варіант просторової нумерації; його отримання рівносильне взаємній заміні осей координат Ox і Oy.

Позначимо номер перерізу k-куба ($k\geq 1$) площинами, паралельними xOy, через m, починаючи з другого зверху: $m=1,2,3,\ldots,2k+1$ (для 0-куба $m=1$), і за рис. 7.3 або за рис. 7.4 наведемо (табл. 7.1) значення координати z як функції номера куба k і номера перерізу m; крім того, відобразимо відповідні проміжки $[l, r]$ номерів цілих точок.

Таблиця 7.1

Таблиця значень аплікати залежно від параметрів k, m

k	0	1			2				
m	1	1	2	3	1	2	3	4	.
$[l, r]$	$[1,1]$	$[2,9]$	$[9,18]$	$[19,27]$	$[28,43]$	$[44,59]$	$[60,75]$	$[76,100]$	.
$z(k,m)$	0	0	-1	1	1	0	-1	-2	.

Нумерація цілих точок кожного k-куба ($k \geq 1$) починається (після етапу пронизування) з номера $n=(2k-1)^3+1$, звідки отримуємо співвідношення, за яким для точок з номерами $n=1,\ 2,\ \ldots$ визначається відповідний номер куба:

$$n=(2k-1)^3+1 \;\Rightarrow\; (2k-1)^3=n-1 \;\Rightarrow\; 2k-1=\sqrt[3]{n-1} \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\; k=\left[\left(\sqrt[3]{n-1}+1\right)/2\right]. \qquad (7.6)$$

Теорема 7.1 (*про нумерацію перерізів*). Для заданого номера куба k і відповідних номерів його перерізів m (горизонтальними площинами) згідно з методом ОСП цілі точки нумеруються за формулою:

$$z(k,\,m)=k-m+(2k+1)\left[\frac{m}{2k+1}\right],\; m=\overline{1,2k+1}\;\; \forall k \in \mathbf{N}\bigcup\{0\}. \qquad (7.7)$$

Доведення здійснюється із залученням тотожності Ерміта (див. п. 3.1, властивість **3⁰**):

$$\sum_{i=1}^{T-1}\left[x+\frac{i}{T}\right]=[x]+\left[x+\frac{1}{T}\right]+\left[x+\frac{2}{T}\right]+\ldots+\left[x+\frac{T-1}{T}\right]=[xT],$$

де $x \in \boldsymbol{R}$; $T \in \boldsymbol{N}$.

Зокрема, для $x = \dfrac{m}{T}$ маємо:

$$\sum_{i=0}^{T-1}\left[\frac{m+i}{T}\right] = \left[\frac{m}{T}\right] + \left[\frac{m+1}{T}\right] + \ldots + \left[\frac{m+(T-1)}{T}\right] = m,$$

звідки

$$\sum_{i=1}^{T-1}\left[\frac{m+T-(i+1)}{T}\right] = \left[\frac{m+T-2}{T}\right] + \ldots + \left[\frac{m+1}{T}\right] = m - 1 - \left[\frac{m}{T}\right]. \qquad (7.8)$$

Використаємо також запис загального члена числової послідовності, позначимо його через $S(m)$, за відомим першим елементом і скінченними різницями між наступними та попередніми елементами: $d_i = S(i+1) - S(i)$, а саме:

$$S(m) = S(1) + \sum_{i=1}^{T-1} d_i \left[\frac{m+T-(i+1)}{T}\right]. \qquad (7.9)$$

За методом ОСП перший член послідовності значень координати z дорівнює $(k-1)$; на етапі *спуску* (на один крок) $d_i = -1$ для всіх $i = \overline{1,2k}$, а на етапі *пронизування* відбувається "стрибок" аплікати від $z = -k$ до $z = k$. Нижче наведена відповідна таблиця, що ілюструє цей процес (табл. 7.2).

Таблиця 7.2

Номери перерізів, значення аплікат і їх різниці

k -куб								
m	1	2	3	4	5	…	$2k$	$2k$+1
$z(k, m)$	k-1	k-2	k-3	k-4	k-5	…	-k	k
$d_m z(k, m)$	-1	-1	-1	-1	-1	…	$2k$	

У світлі (7.9) приймаємо $T=2k+1$ і згідно з трьома етапами методу ОСП за фіксованого k для послідовності $z(k, m)$ маємо:

$$z(k, m)=(k-1)-\left(\left[\frac{m+T-2}{T}\right]+\left[\frac{m+T-3}{T}\right]+\ldots+\left[\frac{m+1}{T}\right]\right)+2k\left[\frac{m}{2k+1}\right],$$

а з урахуванням (7.6) отримуємо:

$$z(k, m)=(k-1)-\left(m-1-\left[\frac{m}{T}\right]\right)+2k\left[\frac{m}{2k+1}\right],$$

звідки й випливає (7.7):

$$z(k, m)=k-m+(2k+1)\left[\frac{m}{2k+1}\right],$$

де k – номер куба (половина ребра): $k=[(\sqrt[3]{n-1}+1)/2)]$ (див. (7.6));

m – параметр, залежний від k $(k\geq 0)$, – номер перерізу (шару точок), починаючи з другого зверху $(\forall k: m=\overline{1,2k+1})$, $(2k+1)$ – кількість перерізів. •

Перейдемо до аналітичного опису етапу *обведення* методу ОСП.

Теорема 7.2. Для заданого номера куба k і відповідних номерів його перерізів m (горизонтальними площинами) згідно з методом ОСП ліва і права межі відрізків $[l, r]$ (див. табл. 7.2) описуються формулами:

$$l(k, m)=(2k-1)^3+1+8k(m-1)+(2k-1)^2\left[\frac{m}{2k+1}\right]; \tag{7.10}$$

$$r(k, m)=(2k-1)^3+8km+(2k-1)^2\left(\left[\frac{m+1}{2k+1}\right]+\left[\frac{m}{2k+1}\right]\right). \tag{7.11}$$

Доведення зводиться до аналізу розгорток нумерацій для $k = 0,1,2$, з урахуванням логіки методу ОСП (див. рис. 7.3). На етапі обведення аплікати залишаються сталими, тому слід розглядати присвоєння номерів точкам у кожному перерізі.

Нижче наведена відповідна ілюстративна таблиця (табл. 7.3), в якій для заданого k і відповідних m зображено вигляд послідовності $l(k, m)$.

Таблиця 7.3

Послідовності номерів лівих кінців відрізка $[\boldsymbol{l}, \boldsymbol{r}]$

k-куб ($k>0$)				
m	1	2	3	…
$l(k,m)$	$(2k-1)^3+1$	$(2k-1)^3+8k+1$	$(2k-1)^3+16k+1$	…
m	$2k$-1	$2k$	$2k+1$	
$l(k,m)$	$(2k-1)^3+16k(k-1)+1$	$(2k-1)^3+1+8k(2k-1)$	$(2k-1)^3+1+16k^2+(2k-1)^2$	

Номери перерізів $m = 2k$ і $m = 2k+1$ відповідають площинам $z = -k$ і $z = +k$, тобто етапу пронизування.

Для лівих кінців відрізка $l(k,m)$ перший член послідовності такий: $l(k,1) = (2k-1)^3 + 1$; він на одиницю більший від своєрідного об'єму (за місткістю цілих точок) попереднього куба, а кожний наступний відрізняється від нього на величину $8k(m-1)$ доти, поки не перейдемо до перерізу $z = -k$, якому відповідає $m = 2k$ (див. табл. 10.3).

Тепер скористаємося співвідношеннями (7.8) і (7.9):

$$l(k, m) = (2k-1)^3 + 1 +$$

$$+8k\left(\left[\frac{m+T-2}{T}\right]+\left[\frac{m+T-3}{T}\right]+\ldots+\left[\frac{m+1}{T}\right]\right)+(2k+1)^2\left[\frac{m}{2k+1}\right],$$

де T – параметр, який визначає найбільше значення m: $T = 2k+1$.

Суму в круглих дужках згідно з (7.8) запишемо так:

$$\sum_{i=1}^{T-1}\left[\frac{m+T-(i+1)}{T}\right]=m-1-\left[\frac{m}{T}\right],$$

тоді

$$l(k,\,m)=(2k-1)^3+1+8k\left(m-1-\left[\frac{m}{T}\right]\right)+(2k+1)^2\left[\frac{m}{2k+1}\right],$$

звідки й отримуємо формулу (7.10).

Для правих кінців відрізка $r(k,m)$ перший член послідовності виглядає так: $r(k,1)=(2k-1)^3+8k$, він на такий самий крок відступає від відповідного члена $l(k,1)$, як і інші члени послідовності $r(k,m)$, а саме на величину $(8k-1)$ доти, поки не перейдемо до перерізів $z=-k$ і $z=+k$, яким відповідають значення m до і після етапу пронизування: $m=2k$ і $m=2k+1$ (див. рис. 7.3); на цих перерізах різниці між наступним і попереднім членами послідовності відрізняються від попередніх різниць на величину $(2k-1)^2$, що відповідає звоям нижньої і верхньої граней куба, що розглядається.

Зауважимо: незважаючи на те, що послідовності $l(k,m)$ і $r(k,m)$ подаються залежними від двох параметрів, k і m, а з урахуванням (7.6) – від n і m, вони дозволяють указати номер n аплікати будь-якої цілої просторової точки (x,y,z).

Наведена відповідна ілюстративна таблиця (табл. 7.4), в якій для заданого k і m зображено вигляд членів послідовності $r(k,m)$.

Таблиця 7.4

Послідовності номерів правих кінців відрізка $[\boldsymbol{l},\boldsymbol{r}]$

k-куб ($k>0$)				
m	1	2	3	…
$r(k,\,m)$	$(2k-1)^3+8k$	$(2k-1)^3+16k$	$(2k-1)^3+24k$	…

Закінчення табл. 7.4

m	$2k$-1	$2k$	$2k+1$	…
$r(k, m)$	$(2k-1)^3+8k(2k-1)$	$(2k-1)^3+16k^2+(2k-1)^2$	$(2k-1)^3+8k(2k+1)+$ $+2(2k-1)^2$	…

Далі, як і під час розгляду $l(k, m)$, скористаємося співвідношеннями (7.8) і (7.9):

$$r(k, m)=(2k-1)^3+$$

$$+8k\left(\left[\frac{m+T-1}{T}\right]+\ldots+\left[\frac{m+2}{T}\right]\right)+(2k+1)^2\left(\left[\frac{m+1}{2k+1}\right]+\left[\frac{m}{2k+1}\right]\right),$$

де T – параметр, який визначає найбільше значення m: $T=2k+1$.

Суму в круглих дужках згідно з (7.8) запишемо так:

$$\sum_{i=1}^{T-2}\left[\frac{m+T-i}{T}\right]=m-\left[\frac{m}{T}\right]-\left[\frac{m+1}{T}\right],$$

тоді

$$r(k, m)=(2k-1)^3+8k\left(m-\left[\frac{m+1}{T}\right]-\left[\frac{m}{T}\right]\right)+(2k+1)^2\left(\left[\frac{m+1}{2k+1}\right]+\left[\frac{m}{2k+1}\right]\right),$$

звідки і отримуємо формулу (7.11).

Наслідок: різниця між межами відрізка $[l, r]$ описується формулою:

$$d(k, m)=8k+(2k-1)^2\left[\frac{m+1}{2k+1}\right]-1.\bullet \qquad (7.12)$$

Якщо відрізки $[l, r]$, що відповідають етапові обведення (на них z набуває сталого значення), занумерувати, починаючи з 0-куба, то номер перерізу m можна подати як функцію номера відрізка.

Нехай p – номер проміжку, k_p – відповідний номер куба, тоді $k_p = [\sqrt{p-1}]$, а його квадрат у сумі з номером перерізу дає номер проміжку:

$$k_p^2 + m = p, \text{ або } m = p - k_p^2. \tag{7.13}$$

Дійсно, якщо p більше на одиницю від квадрата деякого числа a: $p = a^2 + 1$, то

$$m = a^2 + 1 - \left[\sqrt{a^2}\,\right]^2 = 1.$$

У разі збільшення p від'ємник залишається сталим, тому m послідовно набуватиме значення $1, 2, \ldots, 2a+1$, аж поки зменшуване не набуде значення наступного квадрата a, збільшеного на одиницю: $p = (a+1)^2 + 1$.

За цієї умови знову отримаємо $m = 1$:

$$m = (a+1)^2 + 1 - \left[\sqrt{(a+1)^2}\,\right]^2 = 1.$$

Таким чином, для послідовності $a = 0, 1, 2, \ldots$ номер проміжку p набуває значень $1, 2, 5, \ldots, a^2+1, \ldots$, а m залежно від p описується послідовністю:

$$m = 1;\ 1, 2,\ 3;\ 1, 2, 3, 4, 5;\ \ldots;\ 1, 2, 3, \ldots, 2a+1; \ldots,$$

що цілком узгоджується з означенням перерізу.

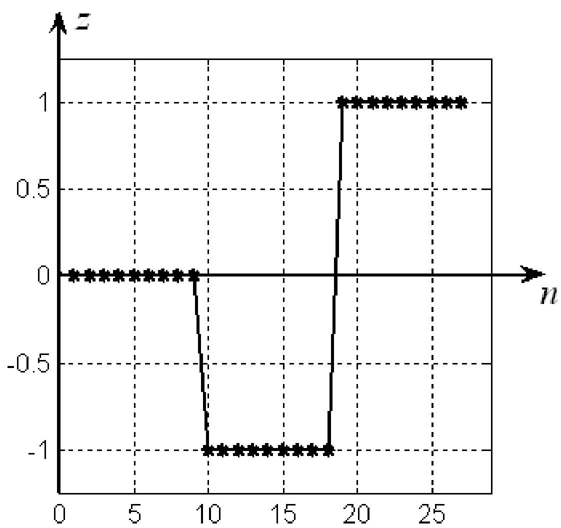
У табл. 7.5 для трьох кубів: $k=0,1,2$, наведені значення відповідних характеристик.

Таблиця 7.5

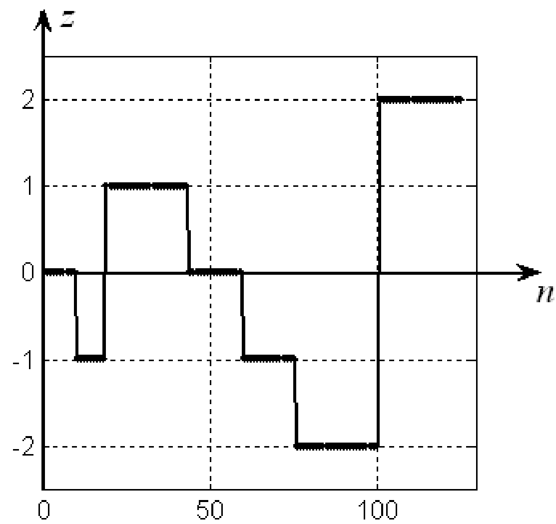
Відповідність між номерами відрізків етапу обведення p і номерами перерізів m

p	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$[l,r]$	$[1,1]$	$[2,9]$	$[10,18]$	$[19,27]$	$[28,43]$	$[44,59]$	$[60,75]$	$[76,100]$	$[101,125]$
k_p	0	1	1	1	2	2	2	2	2
m	1	1	2	3	1	2	3	4	5

На рис. 7.5 зображена геометрична інтерпретація нумерації. Рис. 7.5а – для 1-куба, рисунок 7.5б – для 2-куба; етапи *обведення* марковані.



а



б

Рис. 7.5. **Візуалізація нумерації аплікати: а) 1-куба; б) 2-куба**

Наостанок, залучаючи двовимірну нумерацію, що здійснюється згідно з (6.53), і результати проведених досліджень, побудуємо 2-куб, який у собі міститиме як складову зображений на рис. 7.4 1-куб.

На рис. 7.6 подано 2-куб просторової нумерації, який відповідає зображеній на рис. 7.5б візуалізації нумерації аплікат. Він охоплює 125 цілих точок із $\mathbf{Z}^3$. Вертикальними стрілочками, напрямленими вниз, показано три *спуски*, за ними можна простежити напрям *обведення*; напрямлена вгору стрілочка задає етап *пронизування,* а паралельна осі y указує на вхід до 3-куба.

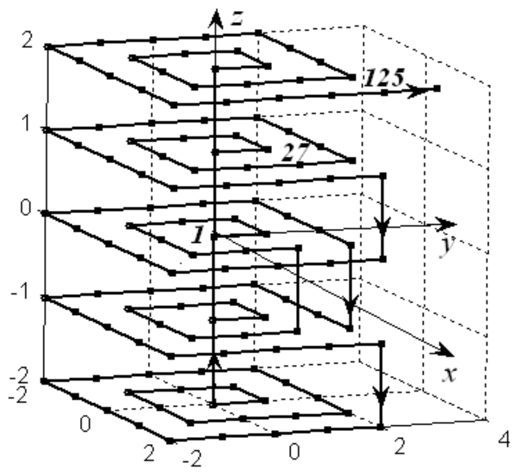


Рис. 7.6. **Зображення 2-куба**

Вправи і задачі

1. В умовах задачі 6 (див. *вправи і задачі* до розділу 6) побудуйте просторові цілочислові сітки з трьома шарами-перерізами: $z = 0,1,2$, за наведеними на рис. 7.7 схемами, залишаючи шар $z = 0$ без змін і піднімаючи всі його точки в напрямку осі z послідовно ще на дві одиниці.

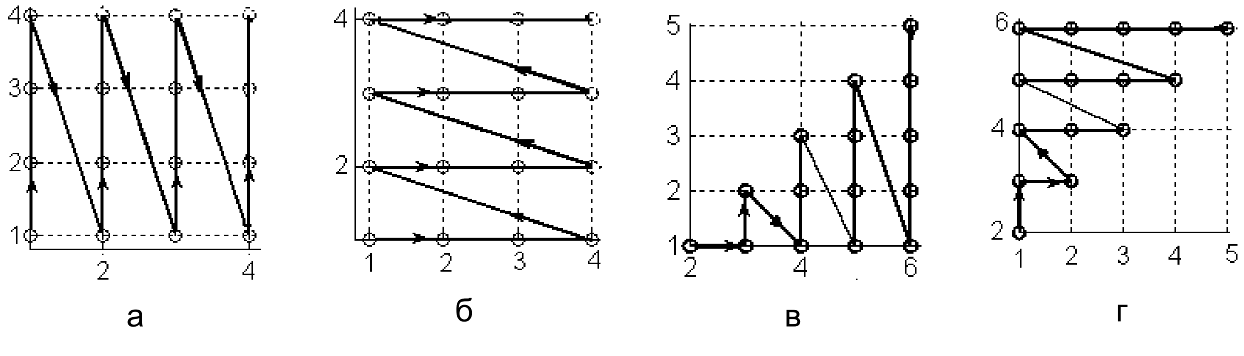


Рис. 7.7. **Сітки: а) горизонтальна смуга; б) вертикальна смуга; в) смуга-кут між $y = x-1$ і $y = 1$; г) смуга-кут між $x = y-1$ і $y = 2$**

2. Задано числовий параметр $p > 0$ (дійсне додатне число). Установіть, до чого приведе заміна трійок (x, y, z) на трійки (px, py, pz), якщо а) $p < 1$; б) $p > 1$. Що зміниться в геометричному зображенні сітки?

Розділ 8. Багатовимірні цілочислові сітки

І я найбільше ціную Аналогії,
моїх найвірніших учителів.
Вони знають про всі таємниці Природи,
і ними найменше слід нехтувати в Геометрії.
Йоганн Кеплер

У самій математиці головні засоби
досягти істини – індукція і аналогія.
П'єр-Симон Лаплас

8.1. Одновимірні, двовимірні та тривимірні числові бруси

У сьомому розділі в основу побудови просторових сіток була покладена нумерація за формулами (6.53). Узагальнюючи різні з точки зору вибору схеми підходи до нумерації, введемо деякі нові поняття.

Під **цілочисловим брусом** (далі – брусом) у просторі $\mathbf{Z^3}$ будемо розуміти множину цілих точок, яка включає в себе цілі точки внутрішності і повної поверхні прямокутного паралелепіпеда (див. п. 1.2). Цілочисловий куб є окремим випадком бруса.

Позначимо брус через $Bar(k,h)$, де k – номер квадрата, який покладено в його основу; h – висота бруса як кількість шарів цілих точок по вертикалі.

Бруси з невід'ємними аплікатами $z(n)$ описуються співвідношенням:

$$z(n)=[(n-1)/N_2]=[(n-1)/(2k+1)^2],\ n=1,2,3,\dots,h\cdot N_2, \tag{8.1}$$

де $N_2=(2k+1)^2$ – кількість точок вибраного k-квадрата – основи бруса.

За таких умов якщо $n\in[(h-1)\cdot(2k+1)^2,\ h\cdot(2k+1)^2]$, то для $h=1,2,3,\dots$ матимемо, відповідно, $z=h-1=0,1,2,\dots$.

Залучення в разі потреби тільки від'ємних або від'ємних і додатних аплікат простіше за все здійснюється зсувом брусу з невід'ємними аплікатами у від'ємному напрямі променя-півосі Oz: $[0,-\infty)$.

Якщо взяти $k=1,\ h=4$, то згідно з (8.1) кожен шар бруса міститиме 9 точок, а кількість шарів дорівнюватиме 4, тобто всього матимемо 36 цілих точок (рис. 8.1).

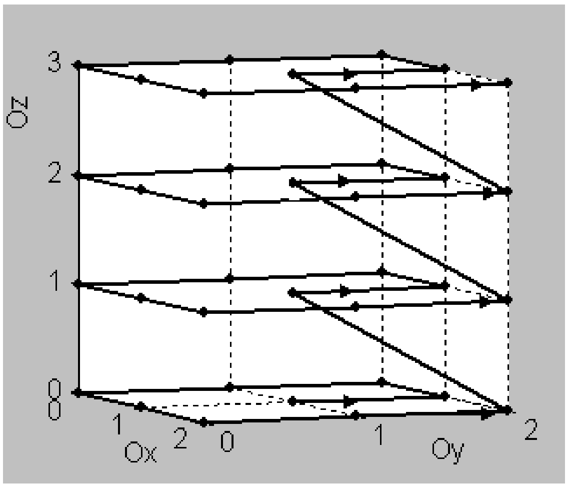


Рис. 8.1. **Зображення бруса $Bar(1,\ 4)$**

Брус побудований засобами MatLab. За стрілочками можна простежити порядок присвоєння номерів цілим точкам, починаючи з центра шару на площині xOy.

У процесі нумерації чітко простежуються два етапи:

обведення точок кожного шару,

підіймання на одиницю (по похилій) до чергового шару.

Якщо за основу взяти рис. 6.3 із шостого розділу, то відповідний брус виглядатиме так, як зображено на рис. 8.2.

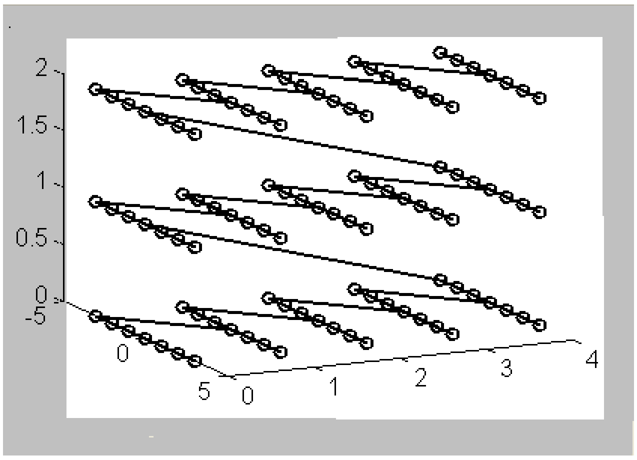


Рис. 8.2. **Зображення бруса з прямокутною основою**

Його основою є не квадрат, а прямокутник, що за певних умов виявляється більш прийнятним у задачах прикладного характеру, зокрема, в дискретній оптимізації.

Інше розташування сітки відносно осей координат досягається циклічним переставленням у трійці координат $(x,\ y,\ z)$.

До таких брусів теж можна застосовувати паралельне перенесення за вибраним напрямом.

Цілочислову сітку на прямій – підмножину $\mathbf{Z}$ – можна розглядати як одновимірний брус **(1-брус)**. Конкатенація (зчеплення) одновимірних брусів (див. рис. 8.2) породжує двовимірний брус **(2-брус)** в $\mathbf{Z}^2$, а зчеплення кількох таких брусів – тривимірний брус **(3-брус)** в $\mathbf{Z}^3$.

8.2. Побудова m-вимірних брусів ($m > 3$)

Конструктивний підхід до побудови сіток на прямій, на площині, у просторі $\mathbf{Z}^3$ без принципових змін узагальнюється на простори більшої вимірності: брусом цілих точок у $\mathbf{Z}^m$ є конкатенація брусів із $\mathbf{Z}^{m-1}$.

Основні етапи побудови такі:

обведення точок вихідного $(m-1)$-бруса;

конкатенація необхідної (заданої) кількості вихідних брусів.

Якщо за основу 3-бруса взяти нумерацію за координатними функціями (6.53), які описують 2-брус, то позначення m-бруса міститиме $(m-1)$ параметрів: $Bar\,(k, s_3, s_4,...,s_m)$, де $s_i, 3 \le i \le m$, якими, крім першого, визначається кількість операндів (шарів) зчеплення. Кількість точок шарів виміру $2, 3, ..., m$, підраховується за формулами:

$$N_2 = (2k+1)^2,\ n_2 = \overline{1, N_2};\ N_i = N_{i-1} \cdot s_i,\ n_i = \overline{1, N_i},\quad i = 3, 4, ..., m. \qquad (8.2)$$

Апробація алгоритму проведена на п'ятивимірному брусі $Bar(1, 2, 2, 3)$, в основу якого покладено 1-квадрат, зчепленням двох таких квадратів отримано тривимірний брус (3-брус із двох шарів), зчеплення двох тривимірних брусів дає чотиривимірний брус із двох шарів, і, нарешті, конкатенація трьох таких брусів приводить до п'ятивимірного брусу з трьох шарів. На жаль, зобразити його неможливо.

Вправи і задачі

1. В умовах задачі 6 (див. *вправи і задачі* до розділу 6) побудуйте просторові цілочислові сітки з трьома шарами-перерізами: $z = 0,1,2$, за наведеними на рис. 6.9 схемами, залишаючи шар $z = 0$ без змін, і піднімаючи всі його точки в напрямку Oz послідовно ще на дві одиниці.

2. Опишіть алгоритм побудови за вимірами a,b,c цілочислового прямокутного паралелепіпеда: $N_2 = a \cdot b$ ($N_3 = N_2 \cdot c$) – кількість ЦТ нижньої основи (всього тіла). Координатні функції візьміть такі: $x = [(n_2 - 1)/b]$, $y = n_2 - b \cdot [(n_2 - 1)/b]$, $z = [(n_3 - 1)/N_2]$, де $n_2 = 1 : N_2$ і $n_3 = 1 : N_3$ – перелік ЦТ, відповідно, нижньої основи і всього тіла.

Розділ 9. Цілочислове математичне програмування: короткий огляд

Оскільки будівля всього світу досконала і зведена велемудрим Творцем, то у світі не відбувається нічого, в чому б не було видно сенс якогось максимуму або мінімуму.
Леонард Ейлер

Поки не досягнуто числового визначення невідомих, доти розв'язок залишається неповним або марним, оскільки істина, яку ми хочемо відкрити, залишається настільки ж приховуваною в глибині аналітичних виразів, як і в самому фізичному питанні.
Шарль Фур'є

9.1. Математичне програмування: означення основних понять. Задача цілочислового програмування

Галузь математики, в якій розробляються теорія і чисельні методи розв'язування багатовимірних екстремальних задач – задач на знаходження екстремуму функції $Z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$ кількох незалежних змінних, з обмеженнями, що накладаються на область змінювання цих змінних, називають **математичним програмуванням** [16; 19; 23].

Функцію, екстремальне значення (максимум або мінімум) якої треба знайти, називають **критерієм оптимальності, показником ефективності** або **цільовою функцією**.

Той чи інший набір значень аргументів $x_j,\ j = \overline{1, n}$, викликає певне значення цільової функції. Кожний із наборів називають **вектором управління**, або **планом задачі:** $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Мовою математики обмеження описуються за допомогою співвідношень, пов'язаних символами $\gamma = \{\le, \ge, =\}$, тобто нерівностей і рівнянь: $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)\ \gamma\ b_i$, де $b_i, i = \overline{1, m}$, – це дійсні сталі, m – натуральне. Крім того, залежно від природи процесу, який досліджується, на деякі або на всі змінні $x_j,\ j \in \{1, 2, ..., n\}$, накладаються умови невід'ємності або цілочисловості.

Усю сукупність обмежень називають **областю допустимих розв'язків** і позначають через D. План задачі, який задовольняє область D, називають **допустимим.**

Допустимий план X, який забезпечує екстремальне значення функції цілі, називають **оптимальним** і позначають символом X^* або так: X_{opt} чи X_{min}, X_{max}, якщо йдеться тільки про мінімум або тільки про максимум. Екстремальне значення цільової функції $Z^* = z(X^*)$ і, відповідно, $Z_{min} = z(X_{min})$, $Z_{max} = z(X_{max})$.

Якщо цільова функція є функцією дискретних змінних і область D є скінченною дискретною множиною, то приходимо до **дискретного математичного програмування.** Окремим випадком дискретної оптимізації є **цілочислове програмування (цілочислова оптимізація).**

Ми зупинимося на задачі цілочислової оптимізації – це коли цільова функція є функцією цілочислових змінних і область D є скінченною цілочисловою множиною D^c.

Наведемо постановку **задачі цілочислового програмування** (**ЗЦП**) у словесно-символьному вигляді.

Знайти план (вектор управління) $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$, який визначає екстремальне значення цільової функції:

$$Z = z(x_1, x_2, ..., x_n) \quad \to \min(\max), \tag{9.1}$$

із заданими обмеженнями – областю D:

$$\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n)\ \gamma\ b_i,\ i = \overline{1, m},\ \gamma = \{\le,\ \ge,\ =),\tag{9.2}$$

за умови, що x_j, $i = \overline{1, n}$, цілочислові змінні:

$$x_j \ge 0,\ x_j \in \mathbf{Z}. \tag{9.3}$$

Зауважимо, якщо кількість змінних x_j невелика, то їх позначають різними буквами без індексів, наприклад: $Z = z(x, y)$ або $U = u(x, y, z)$.

9.2. Точні методи цілочислової оптимізації

Загальна ідея, на якій ґрунтується цілочислова оптимізація [19], полягає в такому. Поставлена задача розв'язується без урахування обмежень (9.3): змінні мають бути цілими. Якщо отриманий оптимальний план цілочисловий, то задача розв'язана. У протилежному випадку до обмежень (9.2) вихідної задачі додається нове обмеження з властивостями:

отриманий нецілочисловий план не задовольняє це обмеження;

будь-який цілочисловий допустимий план вихідної задачі завідома задовольняє і нове обмеження.

Потім задача розв'язується з урахуванням нового обмеження. У випадку необхідності (коли отриманий розв'язок нецілочисловий) додається ще одне обмеження і т. д.

Геометрично додавання кожного нового обмеження відповідає проведенню поверхні, яка відтинає від області допустимих розв'язків D деяку її частину з оптимальною точкою з нецілими координатами, але не зачіпає жодної з цілочислових точок області.

Отже, по суті, знаходження оптимального розв'язку зводиться до розв'язування декількох задач (і невідомо заздалегідь, скількох).

На сьогодні не виникає принципових труднощів стосовно розв'язання **задач лінійного програмування (ЗЛП)** [19] – задач, у яких змінні $x_j,\ i=\overline{1,n}$, у цільову функцію $Z = z(x_1, x_2, ..., x_n)$ і обмеження входять у першому степені:

$$\begin{gathered} Z=\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \to \min(\max), \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \ \gamma\ b_i,\ i=\overline{1,m},\ \gamma=\{\le,\ \ge,=\};\ x_{ij}\ge 0. \end{gathered} \tag{9.4}$$

де $c_j - const$, $j=\overline{1,n}$; a_{ij} і b_i – теж сталі величини.

Саме зважаючи на добре розроблені алгоритми розв'язання ЗЛП, для знаходження оптимальних планів задач цілочислового програмування (ЗЦП) застосовують оптимальний розв'язок ЗЛП, який знаходиться так званим *симплекс-методом* [16; 19; 23].

До точних методів розв'язання ЗЦП відносять дві групи методів [16] – *методи відтинання* і *комбінаторні методи.*

Ці методи називають **універсальними.** Крім них, існує багато спеціальних точних методів, які враховують специфіку задачі.

Однак виявилося, що точні методи мають слабку збіжність. У книзі [18] зазначається: "Чимало експериментальних і прикладних задач не вдалося розв'язати точними методами за десятки та сотні тисяч ітерацій, хоча їх скінченність теоретично доведена".

Труднощі машинної реалізації точних методів привели до появи різного роду наближених, побудованих на використанні особливостей конкретної задачі; їх висвітлювати не будемо.

І. Методи відтинання. За загальною ідеєю основою методів відтинання є поступове "звуження" області допустимих розв'язків розглядуваної задачі. Пошук цілочислового оптимуму починається з розв'язування задачі з так званими послабленими обмеженнями, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних (див. (9.4)). Далі введенням у модель спеціальних додаткових обмежень, що враховують цілочисловість змінних, многокутник (або многогранник) допустимих розв'язків послабленої задачі поступово зменшуємо доти, доки змінні оптимального розв'язку не набудуть цілочислових значень. До цієї групи належать методи розв'язання *повністю цілочислових* задач (дробовий алгоритм Гоморі); методи розв'язання *частково цілочислових задач*, це коли умова цілочисловості накладається не на всі змінні (другий алгоритм Гоморі).

Американський математик Р. Гоморі не тільки запропонував ряд збіжних алгоритмів розв'язання задач лінійного дискретного (цілочислового) програмування. Йому вдалося обґрунтувати правила побудови додаткових обмежень і довести скінченність відповідних алгоритмів за умови, що область D містить хоча б одну цілу точку.

ІІ. Комбінаторні методи – це методи, що зводяться до перебору всіх допустимих цілочислових розв'язків, однак, згідно з їх процедурою здійснюється цілеспрямований перебір усієї множини цілочислових розв'язків. Найпоширенішим у цій групі методів є *метод гілок і меж*. Методи відштовхуються від скінченності допустимих планів задачі, тому заміняють повний перебір усіх планів їх частковим напрямленим перебором. Ці методи значно меншою мірою піддаються в процесі обчислень впливу помилок округлення, тому є кращими порівняно з методами відтинання.

Суть методу гілок і меж полягає в такому. Пошук цілочислового оптимуму, як і в методах відтинання, починається з розв'язування так званої "послабленої" задачі, тобто без урахування вимог цілочисловості змінних (див. (9.3)). Нехай у результаті розв'язання послабленої задачі цілочислова змінна x_r отримала в оптимальному плані дробове значення x_r^*. Інтервал $([x_r^*],\ [x_r^*]+1)$ не містить допустимих цілочислових змінних, тому цілочислове значення x_r має задовольняти одну з нерівностей: $x_r \le [x_r^*]$ або $x_r \ge [x_r^*]+1$.

Введення цих умов у послаблену задачу породжує дві не пов'язані між собою задачі. У таких випадках кажуть, що вихідна задача розгалужується на дві підзадачі:

$$\begin{array}{c|c} Z=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \to \min(\max), & Z=\sum\limits_{j=1}^{n} c_j x_j \quad \to \min(\max), \\ X \in D,\ x_r \le [x_r^*]. & X \in D,\ x_r \ge [x_r^*]+1. \end{array} \tag{9.5}$$

Далі розв'язується кожна підзадача з цільовою функцією вихідної задачі, яка є лінійною функцією зі сталими коефіцієнтами $c_j,\ i=\overline{1,n}$.

Якщо отриманий оптимальний розв'язок виявляється допустимим для цілочислової задачі, то його фіксують як найкращий, і відпадає потреба в подальшому розгалуженні, оскільки покращити отриманий розв'язок не вдасться. У протилежному випадку підзадачу треба розбити на дві підзадачі і так далі. Як тільки отриманий допустимий цілочисловий розв'язок однієї з підзадач виявиться кращим від того, що вже маємо, то він фіксується замість зафіксованого розв'язку на попередньому кроці.

Процес розгалуження продовжується доти, поки кожна з підзадач не приведе до цілочислового розв'язку або поки не буде встановлено неможливість покращення розв'язку, отриманого раніше.

Практика показує, що кількість ітерацій і підзадач, що розглядаються, залежить від вибору точки гілкування.

Наприклад, у підручнику [19] наведена ЗЦП із лінійною функцією цілі від двох змінних і чотирьох лінійних обмежень:

$$Z = 2x_1 + 3x_2 \quad \to \max, \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 35, \\ 4x_1 + 9x_2 \le 36, \\ x_1 \le 4,\ x_2 \le 2. \end{cases} \tag{9.6}$$

Для розв'язання цієї задачі довелося розглядати десять підзадач. На жаль, методом гілок і меж не можна передбачити, вибір якої гілки є більш вигідним порівняно з іншою.

Узагалі, незважаючи на те, що в задач дискретної оптимізації скінченна множина допустимих планів, які теоретично можна перебрати та вибрати найкращий, такий, що забезпечує мінімум або максимум цільової функції, на практиці ж це часто викликає значні ускладнення навіть для задач невеликої вимірності.

У монографії [18] доведено можливість точної лінійної апроксимації ЗЦП за допомогою задачі лінійного програмування, але це не дає практичного способу визначення множини цілих точок області D. Автори відзначають: "Виникає нова проблема: за заданим багатогранником знайти опуклу лінійну оболонку (множину. – *Автор*) його цілочислових точок. Ця проблема в загальному випадку, певно, не менш складна, ніж вихідна задача цілочислового програмування, і на сьогодні невідомі ефективні алгоритми її розв'язання". У десятому розділі запропонованої роботи ця проблема частково розв'язана за допомогою цілочислових сіток.

Вимоги дискретності змінних величин – числових характеристик досліджуваного об'єкта (процесу) – притаманні таким практичним задачам економіки, як вибір послідовності виробничих процесів, календарне планування роботи підприємства, планування та забезпечення матеріально-технічного постачання, розміщення підприємств, розподіл капіталовкладень, планування використання обладнання тощо.

Вправи і задачі

1. Установіть, якими мають бути найменші за значеннями параметри k і h бруса $Bar(k, h)$, щоб охопити всі цілі точки області допустимих планів D. (*Вказівка:* проаналізуйте рівняння / нерівності обмежень.)

2. В умовах задачі (9.6) побудуйте основу бруса $Bar(k, 1)$, яка міститиме всі цілі точки області обмежень D.

Розділ 10. Метод накладання цілочислової сітки в задачах цілочислової (дискретної) оптимізації

Головна сила математики полягає в тому,
що разом з розв'язанням однієї конкретної задачі
вона створює загальні прийоми і способи,
які застосовуються в багатьох ситуаціях,
які навіть не завжди можна передбачити.
М. Башмаков

10.1. Опис методу накладання цілочислової сітки

Ідея запропонованого підходу до цілочислової оптимізації полягає в тому, щоб оминути розв'язування послабленої ЗЦП.

Його основою є аналітичний опис цілочислових сіток у просторі $\mathbf{Z}^m$, $m \geq 2$, який дозволяє не здійснювати процес відтинання (в дробовому алгоритмі Гоморі) чи розгалуження (в комбінаторних методах) для переходу до наступної цілої точки та діагностики після кожного кроку отриманого допустимого плану на оптимальність. Відповідний спосіб оптимізації названо методом **накладання цілочислової сітки** (**НЦС**). Суть методу полягає в такому:

1) *описуємо* множину цілих точок D^c, яку включає вихідна область допустимих значень D (це здійснюється за допомогою однієї зі схем нумерації і відповідних формул згідно із заданими обмеженнями);

2) *обчислюємо* значення цільової функції на множині D^c і серед елементів отриманого числового масиву визначаємо *оптимальне* (що дозволяють реалізувати сучасні пакети прикладних програм ЕОМ);

3) *знаходимо* відповідний оптимальний план (або плани), тобто за відомим оптимумом установлюємо координати точок екстремуму.

Метод НЦС є методом повного перебору, який в криптографії називають ще методом "грубої сили" (від англ. *brute force*). Він передбачає пошук розв'язку вичерпуванням усіх варіантів. Стосовно НЦС мається на увазі "вичерпування" всіх цілих точок області допустимих планів D^c для знаходження оптимуму цільової функції серед числового масиву її значень, а потім знаходження власне оптимального плану X^* (або планів).

За відомими методами лінійного програмування знаходили оптимальні плани послабленої ЗЦП, а за ним – і сам оптимум (із подальшим просуванням до цілочислового плану). У методі НЦС навпаки: за оптимальним значенням цільової функції знаходяться відповідні – оптимальні – допустимі плани.

Розглянемо простенький приклад розв'язання лінійної ЗЦП в $\mathbf{Z}_{+}^{\mathbf{2}}$.

Постановка задачі:

$$z = 9x + 8y \to \max;$$

$$\begin{cases} 4x + 28y \le 77 \\ 36x + 28y \le 189 \end{cases};$$

$$x \ge 0,\ y \ge 0;\ x \in \mathbf{Z},\ y \in \mathbf{Z}.$$

Області D, D^c зображені на рис. 10.1.

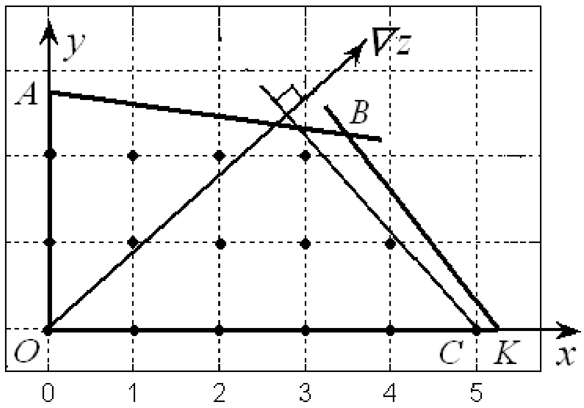


Рис. 10.1. **Область допустимих значень і цілочислова сітка**

Розв'язання лінійної ЗЦП здійснювалося в середовищі ППП MatLab із застосуванням К-нумерації за формулами (6.16).

На множині D^c максимальне значення цільової функції: $z = 45$, визначає цілочисловий план: $X_{\max}(5, 0)$. Оптимальний план послабленої ЗЦП визначається точкою $B(3{,}5;\ 2{,}25)$ (див. рис. 10.1).

Отже, не розв'язуючи послаблену ЗЦП, відразу отримуємо цілочисловий оптимум.

Для багатовимірних просторів залишається, безумовно, "прокляття вимірності" – проблема, пов'язана з експоненціальним зростанням кількості даних через збільшення вимірності простору.

Аналіз запропонованого алгоритму стосовно обсягу часових витрат проводити не будемо. Справа обчислювачів – з'ясувати, до якого класу складності слід віднести задачі, що розв'язуються методом НЦС: до класу P (задачі з поліноміальною складністю) чи до класу NP (задачі, що перевіряються поліноміально) [18]. Виявляється, що не будь-який алгоритм прямого перебору є експоненційним. Таким є, наприклад, загальновідомий алгоритм пошуку найбільшого елемента в масиві.

Оскільки алгоритм детермінований, то, незважаючи на його перебірний характер, він є не експоненційним, а лінійним. Порівнюючи методи відтинання та комбінаторні з НЦС, інтуїтивно перевагу слід віддати методу НЦС, оскільки обчислити значення цільової функції значно легше, ніж розв'язати нову задачу для знаходження чергової цілої точки.

Застосування лінійних моделей опису економічних процесів, апарат яких добре розроблений, для постановки і розв'язання багатьох важливих задач є неефективним. Однією із сучасних проблем управління підприємствами є моделювання нелінійних процесів в економіці, як і взагалі нелінійних динамічних процесів, і розроблення методів розв'язання відповідних математичних задач.

Метод НЦС без принципових змін поширюється на нелінійні задачі математичного програмування, його з успіхом можна застосовувати для моделювання нелінійних процесів не тільки в економіці, а й для математичного моделювання задач кристалографії й оптимального розкрою матеріалів, у задачах теорії чисел, теорії алгоритмів тощо.

Головні **переваги** методу полягають у такому:

цільовою функцією може бути будь-яка обмежена в заданій області функція (не неперервна і не диференційовна);

область допустимих значень – будь-яка замкнена область, у тому числі многозв'язна, з межею з кусків неперервних кривих чи поверхонь.

Для ефективної "боротьби" з "прокляттям вимірності", пов'язаним з експоненціальним зростанням кількості даних, слід запровадити **регіональний** метод НЦС. Суть його така:

розбивають область допустимих планів на підобласті (регіони);

розв'язують задачу на кожному регіоні;

знаходять оптимальне значення Z^* серед регіональних;

установлюють відповідний оптимальний план X^* (або плани).

Знаходження оптимумів цільової функції на регіонах доцільно здійснювати на декількох комп'ютерах одночасно.

Крім того, метод НЦС дозволяє розв'язувати задачі саме **дискретного**, а не цілочислового математичного програмування як його окремого випадку. Авторові не вдалося у науковій літературі знайти прикладу не цілочислової, а дискретної оптимізації. Конструктивні засоби побудови цілочислових сіток, а саме: координатні функції, дають можливість побудувати сітку з вузлами не тільки на координатних лініях.

Якщо це задача, наприклад, в $\mathbf{Z}^2$, то $x = x(n)$, $y = y(n)$. Для побудови дискретної сітки з кроком h: $h < 1$, достатньо взяти: $x_h = h \cdot x(n)$, $y_h = h \cdot y(n)$. Аналогічно для просторів більшої вимірності.

Можна запровадити також **локальний** метод НЦС, який передбачає дослідження цільової функції в околі оптимального цілочислового плану, якщо дослідника цікавлять її значення за умови нецілих координат допустимих змінних, звісно, із заданою точністю. Інакше кажучи, локальний метод НЦС дає змогу повернутися до розв'язання послабленої ЗЦП. Наостанок проілюструємо прикладами нелінійну оптимізацію в задачах математичного програмування.

10.2. Приклади числової реалізації в середовищі пакета прикладних програм MatLab

Задача 10.1 (*геометричне програмування*). Постановка задачі:

$$U = 40x^{-1}y^{-1/2}z^{-1} + 20xz + 20xyz \to \min;$$

$$1/3x^{-2}y^{-2} + 4/3y^{1/2}z^{-1} \le 1;$$

$$x > 0,\ y > 0,\ z > 0 \text{ – цілі числа.}$$

Розв'язання. Накладання цілочислового бруса на область, яка визначається обмеженнями, дозволяє розв'язати задачу геометричного програмування без переходу до двоїстої задачі і без розв'язування системи нелінійних алгебраїчних рівнянь [14].

На рис. 10.2 зображено відповідний брус; квадратиком відмічено точку мінімуму:

$$x_{\min} = 1,\ y_{\min} = 1,\ z_{\min} = 2;$$

$$U_{\min} = 100.$$

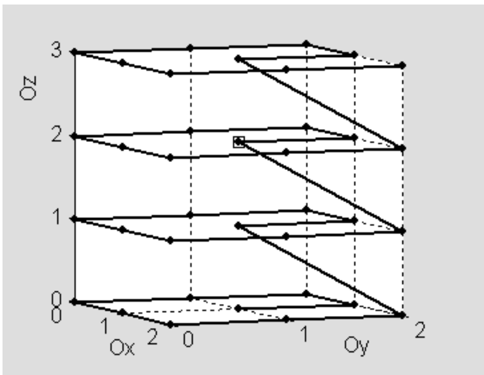


Рис. 10.2. **Зображення бруса $Bar(1, 4)$**

Задача 10.2 (*дробово-лінійне програмування*). Постановка задачі:

$$U = (-2x - y + z)/(x + 3y + 5z) \to \min;$$

$$\begin{cases} 6x - 3y + z \le 12 \\ 7x - y + 2z \le 12 \\ -4x + 2y - z \ge 1 \end{cases};$$

$x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0$ – цілі числа.

Розв'язання. Накладання цілочислового бруса на область, яка визначається обмеженнями, не потребує зведення шляхом заміни змінних задачі дробово-лінійного програмування до ЗЛП.

На рис. 10.3 зображено відповідний брус; квадратиком відмічено точку мінімуму:

$$x_{\min} = 2,\ y_{\min} = 5,\ z_{\min} = 0;$$

$$U_{\min} = -9/17.$$

Нумерація здійснювалася за схемою Серпінського.

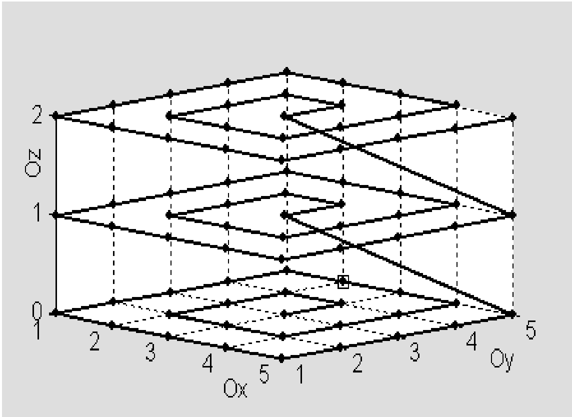


Рис. 10.3. **Зображення бруса $\mathbf{Bar(2, 3)}$**

Задача 10.3 (*нелінійне програмування з неопуклою областю*).

Постановка задачі:

$$U = x^2 + y^2 + z^3 - xy - 5x + 6z \to$$

$$\to \max(\min);$$

$$\begin{cases} z - 2{,}25 + \sqrt{0{,}5625 - (x - 1{,}5)^2 - (y - 1{,}5)^2} \le 0 \\ z - (x - 1{,}5)^2 - (y - 1{,}5)^2 \ge 0 \\ z - 2{,}25 \le 0 \\ x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0;\ x \in \mathbf{Z},\ y \in \mathbf{Z},\ z \in \mathbf{Z}. \end{cases}$$

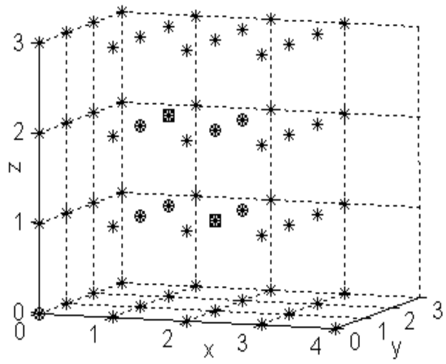


Рис. 10.4. **Накладання цілочислової сітки**

Розв'язання. Областю D є тіло, обмежене нижньою півсферою радіусом $0{,}75$ з центром у точці $(1{,}5;\,1{,}5;\,2{,}25)$, круговим параболоїдом із віссю симетрії $x=1{,}5;\ y=1{,}5;\ z=t$, $t\in(-\infty,+\infty)$, і площиною $z=2{,}25$.

На рис. 10.4 зображено: цілі точки 3-куба ($*$), цілі точки ($\circ$) в області обмежень (кружки накладені на зірочки); квадратиками відмічено оптимальні плани-точки $X_{\max}=(1,\ 2,\ 2)$ і $X_{\min}=(2,1,\ 1)$. Оптимуми цільової функції: $U_{\max}=18,\ U_{\min}=0$.

Зауважимо, що ця задача не піддається розв'язанню іншими точними методами математичного програмування.

Задача 10.4 (*дробово-нелінійне програмування з неопуклою областю*). Постановка задачі:

$$U=\frac{x^3y-y^2\ln(1+z)+arctg\,z}{e^x(1+|\cos z|)}\to\max\ (\min);$$

$$\begin{cases} z-3\le 0\\ z-\sqrt{(x-1{,}5)^2+(y-1{,}5)^2}\ge 0\\ z-3+\sqrt{0{,}25-(x-1{,}5)^2-(y-1{,}5)^2}\le 0\\ x\ge 0,\ y\ge 0,\ z\ge 0;\ x\in\mathbf{Z},\ y\in\mathbf{Z},\ z\in\mathbf{Z}. \end{cases};$$

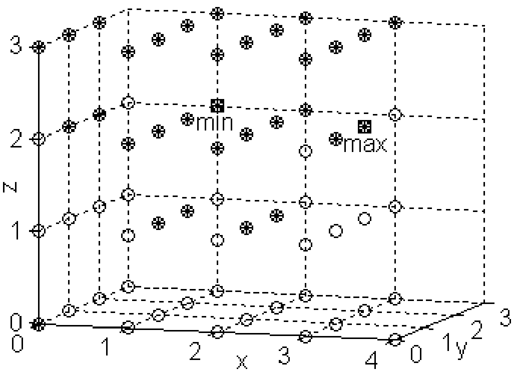


Рис. 10.5. **Накладання цілочислової сітки**

Розв'язання. Цільова функція раціонально залежна від основних елементарних функцій і не диференційовна (з огляду на наявність модуля) у точках із $z=\pi/2$.

На рис. 10.5 зображено: цілі точки 3-куба ($\circ$), цілі точки ($*$) в області обмежень (зірочки накладені на кружки); квадратиками позначено оптимальні плани-точки $X_{\max}=(3,\ 2,\ 2)$ і $X_{\min}=(1,\ 3,\ 2)$. Відповідні значення цільової функції: $U_{\max}=1483/306$, $U_{\min}=-643/1164$.

Насамкінець розв'яжемо задачу оптимізації широко відомої виробничої функції Кобба – Дугласа [58]: $Z=a_0x^{\alpha}y^{\beta}$, де x, y – обсяг використаної праці і капіталу, відповідно; a_0, α, β – сталі, що характеризують технологію виробництва.

Модель зі змінними коефіцієнтами α, β застосовувалася для дослідження економіки сільського господарства в Україні [21].

Задача 10.5 (*модель Кобба – Дугласа*). Постановка задачі:

$$Z = 3\sqrt{x \cdot y} \to \max Z$$

$$\begin{cases} x + y \geq 3,\ 0 \leq x \leq 10 \\ 2x - y \leq 6,\ 0 \leq y \leq 10 \end{cases};\ x \in \mathbf{Z},\ y \in \mathbf{Z}.$$

Розв'язання. За методом НЦС D^c – прямокутна цілочислова сітка. Відповідна область зображена на рис. 10.6; квадратиком відмічено оптимальний план:

$$\boldsymbol{x}_{\max} = 7,\ \boldsymbol{y}_{\max} = 9,\ \boldsymbol{Z}_{\max} = 3\sqrt{63} \approx 23{,}81.$$

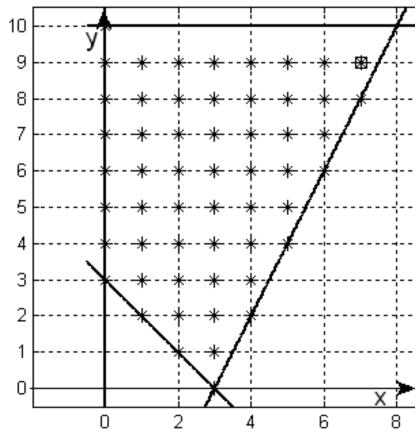


Рис. 10.6. **Накладання цілочислової сітки**

Зауваження: 1) сталі обмежень виражені в умовних одиницях;

2) якщо брати α, β змінними, то приходимо до часткової ЗЦП.

Сподіваємось, зважаючи на бурхливий розвиток електронної, і, разом із тим, обчислювальної техніки, що в методу НЦС як точного методу "грубої сили" є майбутнє.

Вправи і задачі

1. Обміркуйте, до чого зводиться, по суті, знаходження оптимальних планів ЗЦП X^*, якщо вже знайдено оптимум Z^*.

Вказівка: проаналізуйте співвідношення $z(x_1, x_2, \ldots, x_n) = Z^*$.

2. Розв'яжіть методом НЦС задачу лінійного програмування:

$$U = x_1 - 3x_2 - 3x_3 \to \max U;$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 4,\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 3 \\ 4x_1 - 3x_2 \qquad \leq 2,\ x_j \geq 0,\ j = \overline{1,3};\ x_j \in \mathbf{Z} \end{cases}.$$

3. В умовах задачі 2 знайдіть $\max U$: а) послабленої ЗЛП симплекс-методом; б) ЗЦП методом Гоморі; в) ЗЦП методом гілок і меж.

Післямова

Вища арифметика пропонує нам невичерпний запас цікавих істин – істин, які не стоять ізольовано, а з'єднані глибокими внутрішніми зв'язками і між якими в міру збільшення нашого знання ми постійно відкриваємо все нові й іноді повністю несподівані зв'язки.

К. Ф. Гаусс

Ми любимо все – і жар холодних числ,
і пафос безпристрасної логіки.

О. Блок ("Скіфи"), Б. В. Бірюков

Історично склалося так, що в теорії чисел системно проводилися дослідження стосовно отримання асимптотичних оцінок закону розподілу простих чисел, а задача знаходження формули послідовності простих чисел залишалася осторонь. Певною мірою можна провести аналогію з тим, як розв'язувались пряма і обернена задачі аналітичної геометрії: наголос робився на побудову ліній, поверхонь за заданим рівнянням, а складання рівнянь за заданим кресленням практично не проводилося. і те й інше пояснювалось відсутністю (до певного часу) конструктивних засобів, які б давали можливість описати єдиним аналітичним виразом послідовність простих чисел чи розв'язати обернену задачу аналітичної геометрії.

Відкриття В. Л. Рвачовим R-функцій дозволило подолати проблему аналітичної геометрії, а перенесення ідеї, за якою створені R-функції, на дискретні множини – описати структуру послідовності простих чисел.

Запропонована модель булевої алгебри, простими висловленнями якої є послідовності (не обов'язково числові), тобто S-алгебри, надала можливість узагальнити деякі відомі властивості послідовності простих чисел і відкрити нові. Це здійснено за допомогою класу функцій – узагальнених арифметичних прогресій, – замкнених відносно логічних операцій над послідовностями.

Є сподівання, що запропонований шлях дослідження допоможе розкрити багато глибоких таємниць і покладе початок *алгебро-логічного методу в теорії чисел* як поєднання існуючих її різноманітних методів із формальною логікою.

Щодо висловлювання Л. Ейлера (див. п. 4.4) про прості числа [26], [55], то як могло бути інакше? Алгебра Д. Буля (1815 – 1864) з'явилася близько століття після Л. Ейлера (1707 – 1783), а R-функції В. Л. Рвачова (1926 – 2005), які стали стимулом для проведення цих досліджень, – ще на сто років пізніше.

Стосовно нумерації точок цілочислових багатовимірних просторів $\mathbf{Z}^{m}$ ($m \geq 2$) після Г. Кантора досліджень із системним підходом, спрямованим на розроблення конструктивних засобів, у науковій літературі не було. Запропонована в монографії методика дозволяє будувати цілочислові сітки за різними схемами нумерації, що дало можливість упровадити її в цілочислове (дискретне) математичне програмування.

Метод накладання цілочислових сіток (НЦС) на область допустимих планів – точний метод "грубої сили" – застосовний до задач: із довільною обмеженою областю (опуклою, неопуклою; однозв'язною, многозв'язною); з будь-якою цільовою функцією (лінійною, нелінійною; неперервною, розривною; диференційовною, не диференційовною).

Узагалі, на думку автора, у перспективі доцільно буде порушити питання концептуальних основ аналітичної геометрії в $\mathbf{Z}^{2}$, $\mathbf{Z}^{3}$:

об'єкт – геометричні фігури на цілочисловій площині, в цілочисловому просторі та в координатних просторах;

предмет – вивчення властивостей об'єкта алгебраїчними та алгебро-логічними засобами;

основні задачі:

1) установлення наявності чи відсутності цілих точок на заданій лінії (поверхні) в $\mathbf{R}^{2}$ ($\mathbf{R}^{3}$) і визначення потужності відповідної множини;

2) підрахунок кількості точок, які лежать усередині заданої області, обмеженої зімкненою лінією (зокрема, ламаною з вершинами в цілих точках) чи замкненою поверхнею (зокрема, многогранною):

3) задача існування зімкненої чи незімкненої лінії (замкненої чи незамкненої поверхні), яка містить множину цілих точок заданої потужності;

4) задача існування в $\mathbf{R}^{2}$ ($\mathbf{R}^{3}$) такої зімкненої лінії (замкненої поверхні), що область, обмежена нею, містить задану кількість цілих точок.

Надалі – розроблення теорії цілочислових просторів $\mathbf{Z}^{m}$ ($m > 3$).

Автор

Використана література

1. Арнольд И. В. Теория чисел / И. В. Арнольд. – Москва : Учпедгиз, 1939. – 348 с.

2. Баяндин А. В. К вопросу о количественном содержании простых чисел близнецов в натуральном ряду чисел / А. В. Баяндин. – Новосибирск : ИФ и ПР СО РАН, 2004.– 56 с.

3. Берестовский В. Н. Целочисленные решетки и простые числа / В. Н. Берестовский, Е. А. Бумина // Вестник Омского университета. – 1998. – Вып. 3. – С. 13–15.

4. Биркгоф Г. Теория структур / Г. Биркгоф ; перевод с английского М. И. Граева. – Москва : ИЛ, 1952. – 408 с.

5. Бухштаб А. А. Теория чисел / А. А. Бухштаб. – Москва : Учпедгиз, 1939. – 376 с.

6. Виленкин Н. Я. Математический анализ. Введение в анализ / Н. Я. Виленкин, А. Г. Мордкович. – Москва : Просвещение, 1983. – 194 с.

7. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах / Н. Я. Виленкин. – 3-е издание – Москва : МЦМНО, 2005. – 150 с.

8. Виноградов И. М. Основы теории чисел / И. М. Виноградов. – Москва : Наука, 1981. – 176 с.

9. Гарднер М. Математические досуги / М. Гарднер ; перевод с англ. Ю. А. Данилова, под ред. Я. А. Смородинского. – Москва : Мир, 1972. – 496 с.

10. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – Москва : ГИФМЛ, 1959. – 400 с.

11. Гельфонд А. О. Элементарные методы в аналитической теории чисел / А. О. Гельфонд, Ю. В. Линник. – Москва : Физматгиз, 1962. – 272 с.

12. Гельфонд А. О. Решение уравнений в целых числах / А. О. Гельфонд. – Москва : Наука, 1978. – 64 с.

13. Голубев В. А. Число групп простых чисел и простых чисел степенных форм / В. А. Голубев // Изв. вузов. – 1962. – № 6 (31). – С. 28–33.

14. Даффин Р. Геометрическое программирование / Р. Даффин, Э. Питерсон, К. Зенер. – Москва : Мир, 1972. – 312 с.

15. Ершов Ю. Л. Теория нумераций / Ю. Л. Ершов. – Москва : Наука, 1977. – 416 с.

16. Корбут А. А. Дискретное программирование / А. А. Корбут, Ф. Ф. Финкельштейн ; под ред. Д. Б. Юдина. – Москва : Наука, 1969. – 368 с.

17. Кордемський Б. А. Математична кмітливість / Б. А. Кордемський. – Київ : Радянська школа, 1963. – 568 с.

18. Кормен Т. Алгоритмы: построение и анализ / Т. Кормен, Ч. Лейзерсон, Р. Ривест. – Москва : МЦНМО, 2001. – 960 с.

19. Кузнецов А. В. Высшая математика: Математическое программирование : учебник / А. В. Кузнецов, В. А. Сакович, И. И. Холод ; под ред. А. В. Кузнецова. – Минск : Вышейшая школа, 1994. – 286 с.

20. Курбатова Е. А. MATLAB 7. Самоучитель / Е. А. Курбатова. – Москва : Издательский дом "Вильямс", 2006. – 256 с.

21. Литвин О. М. Дивідіріальні та мультигральні числення : монографія / О. М. Литвин. – Київ : Наукова думка, 2006. – 144 с.

22. Маркушевич А. И. Возвратные последовательности / А. И. Маркушевич. – 2-е изд. – Москва : Наука, 1975. – 48 с.

23. Методы оптимизации : учебник / Р. Габасов, Ф. М. Кириллова, В. В. Альсевич и др. – Минск : Четыре четверти, 2011. – 474 с.

24. Ожигова Е. П. Что такое теория чисел / Е. П. Ожигова. – Москва : Знание, 1970. – 96 с.

25. Пелюх Г. П. Введение в теорию функциональных уравнений / Г. П. Пелюх, А. Н. Шарковский. – Київ : Наукова думка, 1974. – 120 с.

26. Пойа Д. Математика и правдоподобные рассуждения / А. Пойа ; перевод с англ. И. А. Ванштейна, под ред. С. Я. Яновской. – Москва : Наука, 1975. – 464 с.

27. Полиа Г. Задачи и теоремы из анализа : в 2 ч. / Г. Полиа, Г. Сеге ; перевод с нем. Д. А. Райкова. – Москва : Наука, 1978. Часть 2. – 432 с.

28. Порецкий Н. С. К учению о простых числах / Н. С. Порецкий. – Казань, 1889. – 89 с.

29. Прахар К. Распределение простых чисел / К. Прахар ; перевод с нем. А. А. Карацубы, под. ред. А. И. Виноградова. – Москва : Мир, 1967. – 512 с.

30. Рвачев В. Л. Теория R-функций и некоторые ее приложения / В. Л. Рвачев. – Киев : Наукова думка, 1982. – 552 с.

31. Рыбалко А. Ф. Математика : курс лекций для технических университетов. Часть 3 / А. Ф. Рыбалко. – Екатеринбург : ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2005. – 136 с.

32. Сачков В. Н. Введение в комбинаторные методы дискретной математики / В. Н. Сачков. – Москва : Наука, 1982. – 384 с.

33. Сенчуков В. Ф. Булева алгебра последовательностей и обобщенные арифметические прогрессии / В. Ф. Сенчуков ; Харк. інж.-екон. ін-т. – Харків, 1986. – 33 с. – Деп. в УкрНІІНТІ № 1951-Ук 86.

34. Сенчуков В. Ф. Некоторые приложения s-алгебры / В. Ф. Сенчуков; Харк. інж.-екон. ін-т. – Харків, 1987. – 20 с. – Деп. в УкрНІІНТІ № 961-Ук 87.

35. Сенчуков В. Ф. Последовательностная модель булевой алгебры / В. Ф. Сенчуков // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 2. – С. 20–23.

36. Сенчуков В. Ф. Логические операции над последовательностями и закон простых чисел / В. Ф. Сенчуков // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 6. – С. 20–23.

37. Сенчуков В. Ф. Логические свойства обобщенных арифметических прогрессий / В. Ф. Сенчуков // Докл. АН УССР. Сер. А. – 1988. – № 8. – С. 16–19.

38. Сенчуков В. Ф. Булева алгебра файлов последовательного доступа / В. Ф. Сенчуков, В. В. Федько ; Харк. інж.-екон. ін-т. – Харків, 1988. – 11 с. – Деп. в УкрНІІНТІ № 936-Ук 88.

39. Сенчуков В. Ф. Аналитическое описание процессов типа решета Эратосфена / В. Ф. Сенчуков // Конструктивні методи і алгоритми теорії чисел : тези доповіді Всесоюзної конф., Мінськ, 19–24 червня 1989 р. – 1989. – С. 131.

40. Сенчуков В. Ф. О последовательностной модели алгебры конечнозначной логики / В. Ф. Сенчуков // Математичні методи і фізико-механічні поля : республіканський міжвідомчий збірник. – Київ : Наукова думка, 1990. – Вип. 32. – С. 14–17.

41. Сенчуков В. Ф. Концептуальные основы теории невероятностей / В. Ф. Сенчуков // Економіка розвитку. – 2009. – № 2 (50). – С. 76–79.

42. Сенчуков В. Ф. Цілочислові сітки на площині в задачах дискретної оптимізації / В. Ф. Сенчуков // Економіка розвитку. – 2014. – № 3 (71). – С. 107–112.

43. Сенчуков В. Ф. Метод накладання цілочислових сіток в економічних задачах дискретної оптимізації / В. Ф. Сенчуков // Сучасні проблеми управління підприємствами: теорія та практика : матеріали Міжнародної науково-практичної конф., Харків, 26–27 березня 2015 р. – 2015. – С. 241–244.

44. Сенчуков В. Ф. Просторові цілочислові сітки в задачах дискретної оптимізації / В. Ф. Сенчуков // Управління розвитком. – 2015. – № 2 (180). – С. 116–123.

45. Сенчуков В. Ф. Тривимірні цілочислові бруси в економічних задачах дискретної оптимізації / В. Ф. Сенчуков // Сучасні проблеми управління підприємствами: теорія та практика : матеріали Міжнародної науково-практичної конф., Харків, 24–25 березня 2016 р. – С. 329–332.

46. Серпинский В. Сто простых, но одновременно трудных вопросов арифметики / В. Серпинский ; перевод с польского В. А. Голубева. – Москва : Учпедгиз, 1961. – 76 с.

47. Серпинский В. Что мы знаем и чего не знаем о простых числах / В. Серпинский ; перевод с польского И. Г. Мельникова. – Москва, Ленинград : ГИФМЛ, 1963. – 92 с.

48. Трост Э. Простые числа / Э. Трост ; перевод с нем. Н. И. Фельдмана под ред. А. О. Гельфонда. – Москва : ГИФМЛ, 1959. – 136 с.

49. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального интегрального исчисления. Т. 3 / Г. М. Фихтенгольц. – Ленинград : Физматгиз, 1963. – 656 с.

50. Шиханович Ю. А. Ведение в современную математику. Начальные понятия / Ю. А. Шиханович. – Москва : Наука, 1965. – 376 с.

51. Эльнатанов Б. А. Развитие метода решета / Б. А. Эльнатанов. – Душанбе : Дониш, 1984. – 148 с.

52. Яглом И. М. Выпуклые фигуры / И. М. Яглом, В. Г. Болтянский.– Москва і Ленинград : ГТТИ, 1951. – 344 с.

53. Яглом И. М. Необыкновенная алгебра / И. М. Яглом. – Москва : Наука, 1968. – 72 с.

54. Atkin A. O. L. Prime sieves using binary quadratic forms / A. O. L. Atkin, D. J. Bernstein // Math. Comp. – 2004. – 73. – P. 1023–1030.

55. Euler L. Decouverte d'une loi tout extraordinaire des hombres par rapport a la somme de leurs diviseurs / L. Euler // Opera Omnia. – 1747. – Ser. 1, vol. 2. – P. 241–253.

56. Dormoy E. Formule generale des nombres premiers / E. Dormoy // Comptes Rendus. – 1866. – T. 63. – P. 178–191.

57. Dupre A. Examen d'un proposition de Legendre / A. Dupre. – Paris : [s. n], 1859. – P. 69–72.

58. Cobb C. W. A Theory of Production / C. W. Cobb, P. H. Douglas // American Economic Review. – 1928. – P. 139–165.

59. F. Le Lionnais. Les Nombres Remarquables / F. Le Lionnais. – Paris : Hermann, 1983. – P. 88–144.

60. De Polignac A. Nouvelles recherches sur les nombres premiers / A. de Polignac // Journal de mathématiques pures et appliqués. – 1854. – 1re série, tome 19. – P. 305–333.

Додатки

Додаток А

Потужність множини простих чисел у многочленах

А.1. Короткі відомості з історії питання

Щодо простих чисел, досі існує багато відкритих питань, найбільш відомі з яких були перелічені Едмундом Ландау на П'ятому міжнародному математичному конгресі, який відбувся в 1912 році в Кембриджському університеті. У своєму виступі він запропонував список проблем теорії чисел, аналогічний до списку Гільберта. Жодна з чотирьох задач списку Ландау досі повністю не розв'язана. Одна з проблем, четверта, така: чи є нескінченною множина простих чисел вигляду x^2+1, де x – натуральне число?

Більш загальну постановку задачі знаходимо в роботах Вацлава Серпінського [46; 47] (див. літературу до основного тексту): чи існують многочлени, які для натуральних значень змінної дають нескінченну множину простих чисел? Існують многочлени першого степеня, наприклад, двочлен $2x+1$, що містить серед своїх значень усі прості числа, але невідомо жодного многочлена степеня, більшого від одиниці, який містив би зліченну множину простих чисел. Узагальненням четвертої проблеми Едмунда Ландау є припущення: для кожного натурального k існує нескінченно багато простих чисел вигляду x^2+k, де x – натуральне число.

Ще в першій половині XIX століття займались питанням: які із арифметичних прогресій включають нескінченну множину простих чисел.

Якщо є арифметична прогресія з першим членом a і різницею r, тобто прогресія:

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ a+3r,\ \ldots, \text{ або } a+kr, \text{ де } k=0,1,2,\ldots,$$

і якщо натуральні числа a і r мають спільний дільник $d=(a,r)>1$, то всі члени прогресії діляться на d. Отже, всі її члени, крім, можливо, першого, складені числа. Виникає природне питання, а який стан справ у разі коли $d=1$?

Знаний французький математик Лежен-Діріхле довів [12], що кожна арифметична прогресія $a+kr$ $(k=0,1,2,...)$, де k і r – взаємно прості числа, містить нескінченну множину простих чисел, але її доведення не є елементарним. Елементарне доведення теореми можна знайти у книзі Е. Троста [48].

У роботі В. Серпінського [46] відзначається, що не було б легше довести, що в кожній арифметичній прогресії, перший член і різниця якої суть взаємно прості числа, є принаймні одне просте число. Із цього твердження легко було б вивести теорему Лежен-Діріхле. Наведемо відповідний фрагмент із книги В. Серпінського, названий автором **теоремою Серпінського** (*про арифметичні прогресії*):

"Доведемо, що з теореми (А):

в кожній арифметичній прогресії, перший член і різниця якої – взаємно прості числа, існує (щонайменше) одне просте число,

випливає теорема Лежен-Діріхле:

в кожній арифметичній прогресії, перший член і різниця якої – взаємно прості числа, існує нескінченна множина простих чисел.

Нехай

$$a,\ a+r,\ a+2r,\ \ldots \qquad (1)$$

буде арифметичною прогресією, яка задовольняє умови кожної з названих теорем.

Кожна з прогресій

$$a+kr, (a+kr)+r,\ (a+kr)+2r, \ldots \text{ або } (a+kr)+mr, \qquad (2)$$

де $m=0,1,2,...$ і k – фіксоване натуральне число, яке задовольняє умову кожної з цих теорем. В кожній із арифметичних прогресій (2) на підставі теореми (А) є просте число, більше за k, оскільки перший член кожної з цих прогресій більший від k.

Прогресію (2) ми отримаємо з прогресії (1), пропускаючи k перших її членів. Отже, в прогресії (1) є просте число, більше від k, де k – довільне натуральне число; отже, простих чисел у ній нескінченна множина".

А.2. Невизначені рівняння другого степеня з двома змінними

Розглянемо параболічний випадок діофантового рівняння другого степеня з двома змінними x, y [12]:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \quad (А.1)$$

де A, B, C, D, E, F – сталі (коефіцієнти при невідомих), $B^2 - 4AC = 0$.

Для розв'язання рівняння (А.1) скористаємося вирішувачем, створеним відомим в Аргентині та за її межами інженером–електронником Даріо Алехандро Альперном (1969 р. н.) [1]*. Згідно з алгоритмом, за яким невідомі x і y можуть бути тільки цілими числами, позначено: $g = \gcd(A,C)$ – найбільший спільний дільник A і C, $a = A/g$, $b = B/g$, $c = C/g \geq 0$ (знак $\sqrt{c}$ визначається знаком дробу B/A); тоді $b^2/4 = ac$.

Відповідні розв'язки описуються співвідношеннями:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{c}g(\sqrt{a}E - \sqrt{c}D)t^2 - (E + 2\sqrt{c}gu_i)t - \frac{\sqrt{c}gu_i^2 + Eu_i + \sqrt{c}F}{\sqrt{c}D - \sqrt{a}E}, \\ y &= \sqrt{a}g(\sqrt{c}D - \sqrt{a}E)t^2 + (D + 2\sqrt{a}gu_i)t + \frac{\sqrt{a}gu_i^2 + Du_i + \sqrt{a}F}{\sqrt{c}D - \sqrt{a}E}, \end{aligned} \quad (А.2)$$

де t – будь-яке ціле додатне число (параметр);

u_i – скінченний кортеж сталих, які визначають серії розв'язків, за умови, що чисельники в останніх доданках (А.2) кратні знаменнику $\sqrt{c}D - \sqrt{a}E$; значення u_i належать діапазону $0 \leq u < |\sqrt{c}D - \sqrt{a}E|$.

Наприклад, для рівняння $8x^2 - 24xy + 18y^2 + 5x + 7y + 16 = 0$ маємо:

$\sqrt{c}\ D - \sqrt{a}\ E = -3 \cdot 5 - 2 \cdot 7 = -29$ і $\sqrt{a}gu^2 + Du + \sqrt{a}F = 4u^2 + 5u + 32$.

Значення u знаходимо в діапазоні $[0,29)$, для яких $4u^2 + 5u + 32$ кратне числу 29: $u_0 = 2$, $u_1 = 4$, і записуємо дві серії розв'язків:

для $u_0 = 2$: $\left[\begin{aligned} x &= -174t^2 - 17t - 2, \\ y &= -116t^2 - 21t - 2; \end{aligned}\right.$ для $u_1 = 4$: $\left[\begin{aligned} x &= -174t^2 - 41t - 4, \\ y &= -116t^2 - 37t - 4. \end{aligned}\right.$

А.3. Потужність множини простих чисел у формі x^2+1

Коли $x=1$, маємо єдине парне просте число – двійку. Непарні прості числа, якщо такі є, отримаємо за парних $x \in \mathbf{N}$, тому перейдемо до вивчення форми $f(x)=4x^2+1$. Вісім перших членів відповідної послідовності такі:

$$f=4x^2+1=(\underline{5}\ _{12}\ \underline{17}\ _{20}\ \underline{37}\ _{28}65\ _{36}\ \underline{101}\ _{44}145\ _{52}\ \underline{197}\ _{60}\ \underline{257}\ _{68}\ldots), \quad (А.3)$$

де між елементами ч/п зазначені перші скінченні різниці – різниці між наступними і попередніми членами, а прості числа підкреслені.

Зауважимо, що $5, 17, 101, 197$ є першими елементами пар простих близнюків, тому дослідження форми проведемо за допомогою послідовності $\beta_k(n)$ (див. п. 4.6 основного тексту). Перший член послідовності (А.3) дорівнює п'яти, тому почнемо з $k=2$, що відповідає у. а. п. із різницею $D_2=6$ і періодом $\Gamma_2=1$, яка містить усі перші елементи простих близнюків, крім трійки:

$$\beta_2(n)=6n-1=$$
$$=(\underline{5},\ \underline{11},\ \underline{17},\ 23,\ \underline{29},\ 35,\ \underline{41},\ 47, 53,\ \underline{59}, 65,\ \underline{71}, 77, 83, 89, 95,\ \underline{101}, \ldots). \quad (А.4)$$

Знайдемо s-перетин прогресії (А.4) і $f(x)$, для чого розв'яжемо діофантове рівняння другого степеня (параболічного типу):

$$f \sqcap \beta_2:\ 4x^2+1=6n-1 \ \Rightarrow\ 3n=2x^2+1 \ \Rightarrow\ 2x^2-3n+1=0. \quad (А.5)$$

Згідно з (А.2) рівняння (А.5) має дві серії розв'язків (тимчасово n замінимо на y):

а) $\left[\begin{array}{l} x=3t-2 \\ y=6t^2-8t+3 \end{array}\right.$; б) $\left[\begin{array}{l} x=3t-1 \\ y=6t^2-4t+1 \end{array}\right.$, t – натуральне.

Легко переконатися, що $x=3t$ не задовольняє рівняння з (А.5).

Розв'язки рівняння (А.5) визначають послідовності однакових елементів в обох формах. Припустимо, що після деякого $n=n_0$ прості числа у формі f вичерпалися (скінчилися). Це водночас означатиме, що для $n>n_0$ не знайдеться жодної пари простих чисел (β_2,γ_2), що неможливо з огляду на зліченність множини простих близнюків.

Висновок. Форма f містить нескінченну множину простих чисел.

Позначимо через P_∞ властивість «множина містить безліч простих чисел» тоді маємо:

$$rng\,\beta_2\,|\,P_\infty \quad\Rightarrow\quad rng\,f\,|\,P_\infty, \tag{А.6}$$

тобто зі зліченності простих чисел-близнюків випливає зліченність множини простих чисел у формі $f=x^2+1$.

Знайдемо загальний вигляд розв'язків рівнянь $f=\beta_k$, $k>2$:

$$4x^2+1=\beta_k^i(n)=\beta_k(i)+D_k(n-1)=D_k\cdot n-(D_k-\beta_k(i)),$$

де $\beta_k^i(n)$ – елементи Γ_k-розкладу послідовності $\beta_k(n)$, $i=\overline{1,\Gamma_k}$;

$\beta_k(i)$ – перший член i-ї арифметичної прогресії $\beta_k^i(n)$.

Це рівняння типу (А.1) – параболічне – з коефіцієнтами:

$$A=4,\ B=C=D=0,\ E=-D_k,\ F=D_k-\beta_k(i)+1,$$

тобто рівняння вигляду (тимчасово замінимо n на y):

$$4x^2+0xy+0y^2+0x-D_k y+(D_k-\beta_k(i)+1)=0.$$

Оскільки D_k парне, а $\beta_k(i)$ непарні, то діленням лівої і правої частини на двійку приходимо до рівняння

$$2x^2+0xy+0y^2+0x-D_k/2y+(D_k-\beta_k(i)+1)/2=0. \tag{А.7}$$

Обчислюємо сталі складові розв'язку:

$$g=\gcd(A,C)=\gcd(2,0)=2,\ a=A/g=1,\ b=B/g=0,\ c=C/g=0.$$

Співвідношення (А.2) набувають вигляду:

$$x = D_k / 2t + u_j, \quad y = D_k t^2 + 4u_j t + \frac{4u_j^2 + 1 + D_k - \beta_k(i)}{D_k}, \tag{А.8}$$

де u_j – скінченний кортеж сталих, які визначають серії розв'язків, за умови, що чисельник дробу у виразі для y кратний знаменнику D_k; значення u_j належать діапазону $0 \le u < D_k / 2$. (Щоб не виникло колізій стосовно позначень, індекс u в (А.2) з i змінено на j.)

Подальше решетування: $k = 3, 4, 5, \ldots$, вилучає з отриманих на попередньому кроці члени підпослідовностей, які не є першими елементами пар близнюків: (β_k, γ_k). Наприклад,

$$(k = 3, \Gamma_3 = 3): \ \beta_3(n) = \beta_2(\nu_3(n)) = \beta_2\left(2n - \left[\frac{n+1}{3}\right]\right). \tag{А.9}$$

Відповідні нумератори $\nu_3^i, i = \overline{1, \Gamma_3}$ і арифметичні прогресії $\beta_3^i, i = \overline{1, \Gamma_3}$, з (А.9) опишемо, якщо для значень n переберемо всі повні системи лишків за модулем три: $n = 3t - 2$, $n = 3t - 1$, $n = 3t$, t – натуральне. За цієї умови нумератори виглядають так (див. п. 4.6 основного тексту):

$$\nu_3(n) = n + \left[\frac{n+2}{3}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] = 2n - \left[\frac{n+1}{3}\right] \quad \Leftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \nu_3^1(n) = 5n - 3, \\ \nu_3^2(n) = 5n - 2, \quad n \in \mathbf{N}. \\ \nu_3^3(n) = 5n, \end{array}\right.$$

Зауважимо, що для кожного фіксованого n маємо n-й елемент кожного нумератора.

Подамо сам Γ_3 -розклад і відповідні діофантові рівняння:

$$\left[\begin{array}{l}\beta_2(5n-3)=\beta_3^1(n)=30\,n-19,\\ \beta_2(5n-2)=\beta_3^2(n)=30\,n-13,\\ \quad\beta_2(5n)=\beta_3^3(n)=30\,n-1.\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}4x^2+1=\beta_3^1=30\,n-19,\\ 4x^2+1=\beta_3^2=30\,n-13,\\ 4x^2+1=\beta_3^3=30\,n-1.\end{array}\right. \qquad (A.10)$$

Розв'язувалися рівняння вирішувачем Даріо Альперна [1]*. Для узгодження з ним у розв'язках рівнянь (А.10) тимчасово n замінено на y. Знаходимо s-перетин $f \sqcap \beta_3$:

$$4x^2+1=30n-19 \;\Rightarrow\; 2x^2-15n+10=0:$$

$$\left[\begin{array}{l}x=15t-10,\\ y=30t^2-40t+14.\end{array}\right.;\; \left[\begin{array}{l}x=15t-5,\\ y=30t^2-20t+4.\end{array}\right. \qquad (A.11)$$

$$4x^2+1=30n-13 \;\Rightarrow\; 2x^2-15n+7=0:$$

$$\left[\begin{array}{l}x=15t-13,\\ y=30t^2-52t+23.\end{array}\right.;\; \left[\begin{array}{l}x=15t-8,\\ y=30t^2-32t+9.\end{array}\right.; \qquad (A.12)$$

$$\left[\begin{array}{l}x=15t-7,\\ y=30t^2-28t+7.\end{array}\right.;\; \left[\begin{array}{l}x=15t-2,\\ y=30t^2-8t+1.\end{array}\right..$$

Для першого з рівнянь (А.12) на рис. А.1 наведено вікно вирішувача.

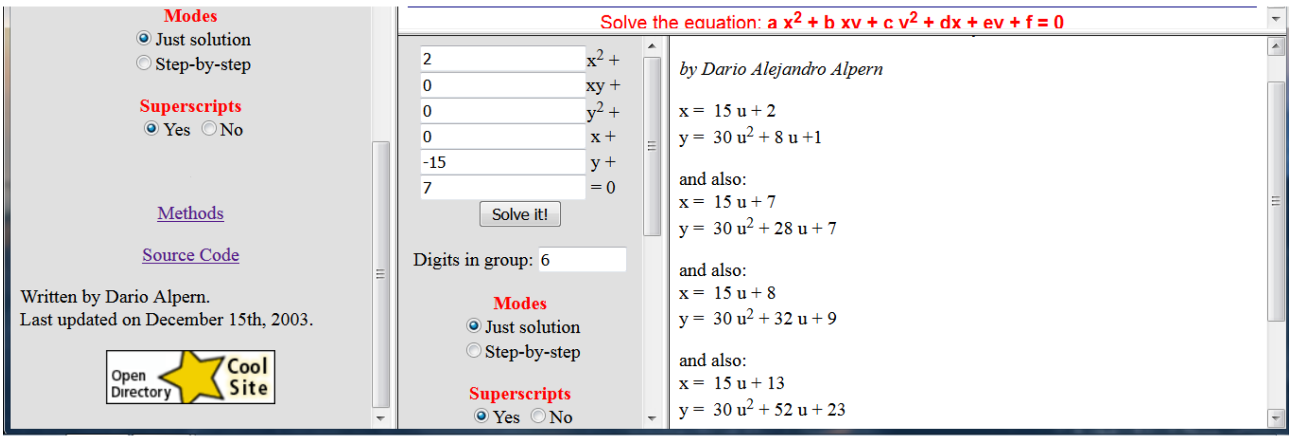


Рис. А.1. **Серії розв'язків рівняння $2x^2-15n+7=0$**

В (А.11) і (А.12) розв'язки подані через параметр t: $u=t-1,\ t\in\mathbf{N}$.

Такому решетуванню послідовності $\beta_2(n)$, а разом з тим і форми f, можна поставити у відповідність граф-дерево, вершини і рівні якого відповідають значенням $k=2,3,\ldots$, а гілками є відповідні розв'язки діофантових рівнянь. Це дерево природно назвати **деревом сумісності** форми f і послідовності $\beta_k(n)$. Зі зростанням k кількість гілок зростатиме.

Як **підсумок** розглянутого стверджуємо, що четверту і другу проблеми списку Едмунда Ландау можна замінити однією – другою: "чи нескінченна множина простих близнюків – пар простих чисел, різниця між якими дорівнює 2?", оскільки справедливість четвертої випливає зі справедливості другої.

Вважаємо, що на розглянутому шляху лежать рішення для інших теоретико-числових проблем щодо потужності множини простих чисел у многочленах. Зокрема, "чи існує для кожного натурального k нескінченно багато простих чисел вигляду $f=x^2+k$, де x – натуральне число" – узагальнення четвертої проблеми списку Едмунда Ландау. Для застосування розглянутої методики таку форму слід розбити на дві:

1) x парне, k непарне: $f=4x^2+2k-1$;

2) x непарне, k парне: $f=(2x-1)^2+2k=4x(x-1)+2k+1$.

Технічний бік питання висвітлювати не будемо.

А.4. Потужність множини простих чисел у многочлені Ейлера

Многочленом Ейлера називають тричлен $f=x^2-x+41$. Відомо, що за $x=1,2,\ldots,40$ він дає різні прості числа [59]:

$$f=(41_2\,43_4\,47_6\,53_8\,61_{10}71_{12}83_{14}\,97_{16}113_{18}131_{20}\ldots_{78}1601). \quad \text{(А.13)}$$

Висловлено припущення [13], що існує безліч натуральних x, для яких f є простим числом. Покажемо, що це дійсно так.

За аналогією з (А.7) складемо рівняння $f=\beta_k$, $k\geq 2$:

$$x^2-x+41=D_k\cdot n-(D_k-\beta_k(i)) \;\Rightarrow\; |\text{ замінимо } n \text{ на } y\,| \;\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x^2 - x - D_k y + (D_k - \beta_k(i) + 41) = 0,\ i = \overline{1, \Gamma_k}. \qquad \text{(А.14)}$$

Це рівняння типу (А.1) із коефіцієнтами:

$$A = 1,\ B = C = 0,\ D = -1,\ E = -D_k,\ F = D_k - \beta_k(i) + 41.$$

Обчислюємо сталі складові розв'язку:

$$g = \gcd(A, C) = \gcd(1, 0) = 1,\ a = A/g = 1,\ b = B/g = 0,\ c = C/g = 0.$$

Співвідношення (А.2) набувають вигляду:

$$x = D_k t + u_j,\quad y = D_k t^2 + (2u_j - 1)t + (u_j^2 - u_j - \beta_k(i) + 41)/D_k + 1, \qquad \text{(А.15)}$$

де, як і в (А.8), u_j – скінченний кортеж сталих, які визначають серії розв'язків, за умови, що чисельник дробу у виразі для y кратний знаменнику D_k; значення u_j належать діапазону $0 \le u < D_k$.

Візьмемо $k = 2$, тоді $D_2 = 6$, $\beta_2(1) = 5$, і за (А.15) отримаємо:

$$x = 6t + u_j,\quad y = 6t^2 + (2u_j - 1)t + (u_j^2 - u_j)/6 + 7. \qquad \text{(А.16)}$$

Знаходимо $u_j = 0, 1, 3, 4$. Отже, рівняння (А.14) для $k = 2$ має чотири серії розв'язків, у першій із яких, тобто для $u_0 = 0$, параметр t береться додатним, оскільки x має бути натуральним, а в інших $t \ge 0$:

для $u_0 = 0$: $\left[\begin{array}{l} x = 6t \\ y = 6t^2 - t + 7 \end{array}\right.$; для $u_1 = 1$: $\left[\begin{array}{l} x = 6t + 1 \\ y = 6t^2 + t + 7 \end{array}\right.$; для $u_2 = 3$: $\left[\begin{array}{l} x = 6t + 3 \\ y = 6t^2 + 5t + 8 \end{array}\right.$; для $u_3 = 4$: $\left[\begin{array}{l} x = 6t + 4 \\ y = 6t^2 + 7t + 9 \end{array}\right.$.

Розв'язки узгоджуються з результатами вирішувача (рис. А.2).

x = 6�u y = 6�u^2 - �u + 7	x = 6�u + 1 y = 6�u^2 + �u + 7	x = 6�u + 3 y = 6�u^2 + 5�u + 8	x = 6�u + 4 y = 6�u^2 + 7�u + 9

Рис. А.2. **Серії розв'язків рівняння $x^2 - x - 6y + 42 = 0$**

Розв'язки рівняння (А.14) визначають послідовності однакових елементів у формі $f = x^2 - x + 41$ і арифметичній прогресії $\beta_2^1(n) = 6n - 1$. Припустимо, що після деякого $n = n_0$ прості числа у формі f вичерпалися (скінчилися). Це водночас означатиме, що для $n > n_0$ не знайдеться жодної пари простих чисел (β_2, γ_2), що неможливо з огляду на зліченність множини простих близнюків.

Висновок. Форма f містить нескінченну множину простих чисел.

Перші, для $t \in [0{,}7]$, елементи кожної з серій наведені в табл. А.1.

Таблиця А.1

Фрагмент послідовності спільних елементів форм $f(x)$ і $\beta_2^1(n)$

u \ t		0	1	2	3	4	5	6	7…
$u_0 = 0$	$f = \beta_2^1$		71	173	347	593	911	1301	1763…
$u_1 = 1$		41	83	197	383	641	971	1373	1847…
$u_2 = 3$		47	113	251	461	743	1097	1523	2021…
$u_3 = 4$		53	131	281	503	797	1163	1601	2111…

За стовпцями та рядками числа розташовуються в порядку зростання. Складені числа підкреслені. На кожному наступному кроці решетування: $k = 3, 4, 5, \ldots$, вилучаються і прості, і складені числа, не взаємно прості з різницею D_k, але й тих, і інших залишається нескінченно багато, адже множина чисел близнюків зліченна.

Гадаємо, що численні нові результати щодо потужності множини простих чисел у многочленах отримаємо, якщо залучити до розгляду степеневі лишки за майже простим модулем D_k.

Інформаційні ресурси

*1. Alpern, Dario. Quadratic Diophantine Equation Solver [Electronic resource] / Dario, Alpern. – Access mode: ww.alpertron.com.ar/quad.htm.

Узагальнені арифметичні прогресії і дискретні перетворення Лапласа та Лорана

Розглядається застосування дискретних перетворень Лапласа – D-перетворення і Лорана – z-перетворення [1*] до вивчення властивостей числових послідовностей як розв'язків диференціально-різницевих рівнянь, пов'язаних із функцією Антьє $\left[\frac{n}{T}\right]$; $n \in \mathbf{N}$, $1 < T \in \mathbf{N}$.

Б.1. D-перетворення узагальнених арифметичних прогресій

Нехай $x = f(n)$ – числова послідовність, яка задовольняє функціональне рівняння

$$f(n+T) - f(n) = D;\ T,\ D \text{ – натуральні числа,} \tag{Б.1}$$

тобто є узагальненою арифметичною прогресією (у. а. п.) з періодом T і різницею D.

Елемент послідовності з номером n позначатимемо через x_n, або f_n, $n \in N_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

За означенням D-перетворення описується співвідношенням:

$$F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-pn} f_n, \tag{Б.2}$$

де $F(p)$ – зображення оригіналу $f(n)$, є функцією комплексної змінної p.

Якщо $x_n \risingdotseq X$, то за теоремою випередження:

$$x_{n+T} \risingdotseq e^{pT}\left(X - \sum_{r=0}^{T-1} e^{-pr} x_r\right), \tag{Б.3}$$

а рівняння (Б.1) у множині зображень – операторне рівняння – матиме вигляд:

$$e^{pT}\left(X-\sum_{r=0}^{T-1}e^{-pT}x_r\right)-X=D\,\frac{e^p}{e^p-1}\,. \qquad \text{(Б.4)}$$

Звідки

$$X=D\,\frac{e^p}{e^p-1}\cdot\frac{1}{e^{pT}-1}+\sum_{r=0}^{T-1}\frac{e^{p(T-r)}}{e^{pT}-1}\,x_r\,. \qquad \text{(Б.5)}$$

За формулами обернення отримуємо:

$$\frac{e^p}{e^p-1}=\frac{1}{p}\ \div\ \eta(n)=\begin{cases}1, & n\geq 0\\ 0, & n<0;\end{cases}$$

$$\frac{1}{e^{pT}-1}=\Phi(p)\ \div\ \varphi(n)=l_T(n)=\left[\frac{n-T}{T}\right]-\left[\frac{n-T-1}{T}\right];$$

$$\frac{e^{p(T-r)}}{e^{pT}-1}=\Psi_r(p)\ \div\ \psi_r(n)=l_r(n)=\left[\frac{n-r}{T}\right]-\left[\frac{n-r-1}{T}\right].$$

Тоді

$$x_n=D\left(\eta_n*\varphi_n\right)+\sum_{r=0}^{T-1}x_r\,l_r(n). \qquad \text{(Б.6)}$$

Оскільки згортка $\eta_n*\varphi_n$ дає $[n/T]$, то остаточно загальний член у. а. п. виглядає так:

$$x_n=D\left[\frac{n}{T}\right]+\sum_{r=0}^{T-1}x_r\,l_r(n). \qquad \text{(Б.7)}$$

Б.2. Зображення числових послідовностей від аргументу $\left[\dfrac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{T}}\right]$, $\boldsymbol{T} \in \boldsymbol{N}$

Теорема Б.1. Має місце співвідношення:

$$f(n) \dot{\to} F(p) \Rightarrow \ f\left(\left[\frac{n}{T}\right]\right) \dot{\to} \frac{1-e^{-pT}}{1-e^{-p}} F(pT). \qquad \text{(Б.8)}$$

Доведення. За означенням D-перетворення:

$$f(n) \dot{\to} F(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-pn} = f_0 + f_1 e^{-p} + \ldots + f_n e^{-pn} + \ldots; \qquad \text{(Б.9)}$$

$$f([n/T]) \ \dot{\to} \ \Phi(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f_{[n/T]} e^{-pn} = f_0 \cdot (1 + e^{-p} + \ldots + e^{-p(T-1)}) +$$

$$+ f_1 \cdot (e^{-pT} + \ldots + e^{-p(2T-1)}) + \ldots + f_n \cdot (e^{-npT} + \ldots + e^{-p((n+1)T-1)}) + \ldots =$$

$$= (1 + e^{-p} + \ldots + e^{-p(T-1)}) \cdot (f_0 + f_1 e^{-pT} + \ldots + f_n e^{-npT} + \ldots).$$

Отже,

$$\Phi(p) = \frac{1-e^{-pT}}{1-e^{-p}} \sum_{n=0}^{\infty} f_n e^{-npT} = \frac{1-e^{-pT}}{1-e^{-p}} F(pT). \qquad \text{(Б.10)}$$

Теорему доведено. •

Згідно з (Б.10) для послідовності непарних чисел маємо:

$$f(n) = 2n+1 \ \dot{\to} \ F(p) = \frac{1+e^{-p}}{(1-e^{-p})^2} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \varphi(n) = f\left(\left[\frac{n}{T}\right]\right) = 2\left[\frac{n}{T}\right] + 1 \ \dot{\to} \ \Phi(p) = \frac{1 + e^{-pT}}{(1 - e^{-p})(1 - e^{-pT})}.$$

Зауваження. Для послідовностей $\varphi(n \pm k) = f\left(\left[\frac{n \pm k}{T}\right]\right)$, де $k - const$, знаходження зображення $\Phi(p)$ потребує застосування теорем випередження та загаювання відповідно.

Б.3. Оригінал зображення від аргументу *pT*

Теорема Б.2. Має місце співвідношення:

$$F(p) \dot{\to} f(n) \Rightarrow \Psi(p) = F(pT) \ \dot{\to} \ \psi_n = \begin{cases} f\left(\left[\frac{n}{T}\right]\right), & n = mT \\ 0, & n \neq mT;\ m \in N_0. \end{cases} \qquad (Б.11)$$

Доведення. У ряд для $F(pT)$ між кожним попереднім і наступним членами внесемо доданки у кількості $(T-1)$, що дорівнюють нулю:

$$f_n \cdot e^{-n\,pT} + 0 + \ldots + 0 + f_{n+1} \cdot e^{-(n+1)\,pT}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots .$$

Таке перетворення не впливає на збіжність ряду до $\Psi(p) = F(pT)$). З іншого боку, отриманий ряд можна тлумачити як зображення послідовності $\psi(n)$, яка утворюється із $f(n)$ "розрідженням її нулями"

$$\{f_0, 0, \ldots, 0, f_1, 0, \ldots, 0, f_2, \ldots\} \Rightarrow \psi_n = \begin{cases} f([n/T]), & n = mT \\ 0, & n \neq mT;\ m \in N_0 \end{cases}.$$

Теорему доведено.●

Зауваження:

1. У фізичному смислі "розрідження нулями" відповідає відсутності сигналу в певні моменти умовного часу.

2. Умова $n \neq mT$ рівносильна умові $n = m + [m/(T-1)] + 1$.

Б.4. Зв'язок між функцією [n/T] та коренями *T*-го степеня з одиниці

Образом D-перетворення одиничної функції – функції Хевісайда –

$\eta(n) = \begin{cases} 1, & n \geq 0 \\ 0, & n < 0 \end{cases}$ є функція $1(p) = \dfrac{e^p}{e^p - 1} = \dfrac{1}{1 - e^{-p}}$, а для $\left[\dfrac{n}{T}\right]$ маємо:

$$f(n) = \left[\frac{n}{T}\right] \risingdotseq F(e^p) = \frac{e^p}{e^p - 1} \cdot \frac{1}{e^{pT} - 1}. \qquad \text{(Б.12)}$$

Позначаючи e^p через z, отримуємо відповідність $f(n) \risingdotseq F(z)$, яка визначається рядом:

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \cdot z^{-n} = \frac{z}{(z-1)(z^T - 1)} = \frac{z}{(z-1)^2 (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_{T-1})}, \qquad \text{(Б.13)}$$

де $1 = z_0, z_1, z_3, \ldots, z_{T-1}$ – корені степеня T з одиниці.

Функція $F(z)$ є правильною частиною ряду Лорана функції $f(n)$ в околі точки $z = \infty$ і зображенням z-перетворення оригіналу $f(n)$.

Оригінал для такого зображення відновимо за відповідними формулами розкладу, застосовуючи лишки або використовуючи розклад зображення $F(z)$ на елементарні дроби:

$$F(z)=\frac{A}{(z-z_0)^2}+\frac{A_0}{z-z_0}+\frac{A_1}{z-z_1}+\ldots+\frac{A_{T-1}}{z-z_{T-1}}=\frac{A}{(z-z_0)^2}+\sum_{k=0}^{T-1}\frac{A_k}{z-z_k}. \quad (Б.14)$$

Коефіцієнти розкладу (Б.14) знаходяться стандартним чином і мають вигляд:

$$A=\frac{1}{T},\quad A_k=\frac{z_k}{(z_k-1)^2\Pi_k},\ k=1,2,\ldots,T-1, \quad (Б.15)$$

де

$$T=2:\ \Pi_1=1;\ \ T>2:\ \Pi_k=\sum_{l=1}^{T-1}(z_k-z_l)\ \ \forall l\neq k. \quad (Б.16)$$

Коефіцієнт A_0 знаходимо за умови, що $z=0$:

$$A_0=A-\sum_{k=1}^{T-1}\frac{A_k}{z_k}=\frac{1}{T}-\sum_{k=1}^{T-1}\frac{1}{(z_k-1)^2\Pi_k}. \quad (Б.17)$$

Зважаючи на те, що:

$$z_k=\sqrt[T]{1}=e^{i\cdot 2\pi k/T},\quad k=\overline{0,\ T-1}, \quad (Б.18)$$

$$\frac{1}{z-1}=\frac{1}{e^p-1}\ \dot{\to}\ 1,\quad \frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{(e^p-1)^2}\ \dot{\to}\ (n-1), \quad (Б.19)$$

$$\frac{1}{z-z_k}=\frac{1}{e^p-e^{i\cdot 2\pi k/T}}\ \dot{\to}\ e^{i\cdot 2\pi k/T(n-1)}=z_k^{n-1}, \quad (Б.20)$$

приходимо до такого подання функції $f(n) = [n/T]$:

$$\left[\frac{n}{T}\right] = A(n-1) + \sum_{k=1}^{T-1} A_k \, e^{i\cdot 2\pi k/T(n-1)}, \tag{Б.21}$$

а з урахуванням співвідношень (Б.15), (Б.17) отримуємо:

$$\left[\frac{n}{T}\right] = \frac{n}{T} - \sum_{k=1}^{T-1} \frac{1-z_k^n}{(1-z_k)^2 \Pi_k}. \tag{Б.22}$$

Приклад Б.1. Дано $T = 2$. Запишемо формулу для $[n/T]$.

Розв'язання. Знаходимо корені $\sqrt{1}$: $z_0 = 1, z_1 = -1$, тоді згідно з (Б.22) маємо:

$$\left[\frac{n}{2}\right] = \frac{n}{2} - \frac{1-z_1^n}{(1-z_1)^2} = \frac{n}{2} - \frac{1-(-1)^n}{4} \;\Rightarrow\; \left[\frac{n}{2}\right] = \begin{cases} (n-1)/2, & n - \text{непарне} \\ n/2, & n - \text{парне} \end{cases} \bullet$$

Б.5. Подання дробової частини раціонального дробу через корені з одиниці

За означенням дробова частина числа є різницею між числом та його цілою частиною. Отже, формула (Б.22) – зображення функції Антьє через корені одиниці – дає одночасно формулу подання дробової частини раціонального числа через корені одиниці, а саме:

$$\left\{\frac{n}{T}\right\} = \frac{n}{T} - \left[\frac{n}{T}\right] = \sum_{k=1}^{T-1} \frac{1-z_k^n}{(1-z_k)^2 \Pi_k}. \tag{Б.23}$$

Висновок. Будь-який правильний нескоротний раціональний дріб можна подати єдиним чином через корені одиниці степеня, що дорівнює знаменнику дробу.

Фіксуючи в (Б.23) вартості n або T, отримуємо різноманітні співвідношення між коренями з одиниці і дробовими частинами, наприклад:

$$n=1:\left\{\frac{1}{T}\right\}=\frac{1}{T} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{T-1}\frac{1}{(1-z_k)\Pi_k}=\frac{1}{T},\ T\geq 2, \qquad \text{(Б.24)}$$

$$n=2:\left\{\frac{2}{T}\right\}=\frac{2}{T}\ \forall T>2 \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{T-1}\frac{1+z_k}{(1-z_k)\Pi_k}=\frac{2}{T},\ \forall\, T>2. \qquad \text{(Б.25)}$$

Приклад Б.2. Дано $T=3$. Підрахуємо $\{2/T\}$ за формулою (Б.25).

Розв'язання. Знаходимо корені $\sqrt[3]{1}$:

$$z_0=1,\ z_1=(-1+\sqrt{3}i)/2,\ z_2=(-1-\sqrt{3}i)/2,$$

тоді

$$1+z_1=(1+\sqrt{3}i)/2,\ \ 1+z_2=(1-\sqrt{3}i)/2;$$

$$1-z_1=(3-\sqrt{3}i)/2,\ \ 1-z_2=(3+\sqrt{3}i)/2;$$

$$\Pi_1=z_1-z_2=\sqrt{3}i,\ \ \Pi_2=z_2-z_1=-\sqrt{3}i.$$

Залучаємо формулу (Б.25):

$$\sum_{k=1}^{2}\frac{1+z_k}{(1-z_k)\Pi_k}=\frac{1+z_1}{(1-z_1)\Pi_1}+\frac{1+z_2}{(1-z_2)\Pi_2}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}i}{(3-\sqrt{3}i)\sqrt{3}i}+\frac{1-\sqrt{3}i}{(3+\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}i)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}.\bullet$$

Зі співвідношень (Б.24) і (Б.25) знаходимо:

$$\sum_{k=1}^{T-1} \frac{1}{\Pi_k} = 2\left\{\frac{1}{T}\right\} - \left\{\frac{2}{T}\right\} = \begin{cases} 1, \text{ якщо } T=2 \\ 0, \text{ якщо } T \neq 2 \end{cases}. \qquad \text{(Б.26)}$$

Приклад Б.3. Дано $T=4$. Підрахуємо ліву частину формули (Б.26).

Розв'язання. Знаходимо корені $\sqrt[4]{1}$: $z_0 = 1, z_1 = i$, $z_2 = -1$, $z_3 = -i$, тоді:

$$\Pi_1 = (z_1 - z_2)(z_1 - z_3) = (i+1)2i, \;\; \Pi_2 = (z_2 - z_1)(z_2 - z_3) = -(i+1)(-1+i) = 2,$$

$$\Pi_3 = (z_3 - z_1)(z_3 - z_2) = -2i(-i+1) = 2,$$

$$\frac{1}{\Pi_1} + \frac{1}{\Pi_2} + \frac{1}{\Pi_3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{i-1} + 1 - \frac{1}{i+1}\right) = 0. \; \bullet$$

Отримані результати можуть бути з успіхом використані в задачах аналізу і синтезу імпульсних систем для розвитку методу дослідження систем переривчастого (дискретного) автоматичного регулювання.

За відомих умов узагальненими арифметичними прогресіями описуються стаціонарні ($T=1, D=0$) і періодичні ($T \neq 1, D=0$) послідовності, а в загальному випадку, змінюючи перші члени заданого періоду T за деяким законом, можна змінювати режим регулювання.

Відзначимо, що до лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами зводиться розв'язання задач теорії інтерполяції, автоматичного управління з цифровим обчислювальним пристроєм (різницевим рівнянням описується програма цифрового обчислювального пристрою).

Література

1*. Мартыненко В. С. Операционное исчисление / В. С. Мартыненко. – Київ : Вища школа, 1990. – 360 с.

33. Сенчуков В. Ф. Булева алгебра последовательностей и обобщенные арифметические прогрессии / В. Ф. Сенчуков ; Харьк. инж.-экон. ин-т. – Харьков, 1986. – 33 с. – Деп. в УкрНИИНТИ № 1951-Ук 86.

До опису послідовності сум дільників цілого числа за формулою Ейлера

Рекурентна послідовність Ейлера [26] сум дільників цілих чисел має вигляд:

$$\begin{aligned}\sigma(n)&=\sigma(n-1)+\sigma(n-2)-\sigma(n-5)-\sigma(n-7)+\\&+\sigma(n-12)+\sigma(n-15)-\sigma(n-22)-\sigma(n-26)+\ldots,\end{aligned} \tag{В.1}$$

де від'ємники двочленів у круглих дужках є так званими п'ятикутними числами, які подаються двома формулами: $S(n)=n(3n\mp 1)/2$, і знаки доданків попарно чергуються; приймають також, що $\sigma(0)=n$.

Формула (В.1) спочатку була отримана за індукцією, а потім доведена не елементарним шляхом – із залученням математичного аналізу. Достоїнством формули є те, що вона не потребує факторизації чисел – розкладання на прості множники. Проте вона не зовсім зручна для використання. Ставиться задача описати формулу у вигляді, більш прийнятному для чисельної реалізації.

В.1. Подання послідовності п'ятикутних чисел одним аналітичним виразом

Задача В.1. Описати за скінченними різницями d_n послідовність п'ятикутних чисел одним аналітичним виразом:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
S_n	1	2	5	7	12	15	22	26	35	40	51	57	…
d_n	1	3	2	5	3	7	4	9	5	11	6	13	…

.

Розв'язання. Аналізуємо третій рядок таблиці і приходимо до висновку: маємо одноелементні серії двох типів – послідовність чисел натурального ряду (U), починаючи з одиниці, і послідовність непарних чисел натурального ряду (V), починаючи з трійки.

Підраховуємо кількість серій u (v) для заданого n, кількість елементів у серіях $|u|$ ($|v|$) і кількість елементів $|\overline{u}|$ ($|\overline{v}|$) відрізка $[1, n]$, які не належать серії U (V), попередньо описуючи кожний тип серій.

Для U $K_u = (m, l_m, a_m) = (m, 1, m)$. Номери n, що відповідають серіям типу U, залежно від m описуються рівністю $n = 2m-1$, тоді:

$$n = 2m-1 \;\Rightarrow\; u = \left[\frac{n+1}{2}\right],\ |u| = \sum_{m=1}^{u} l_m = \sum_{m=1}^{u} 1 = u,\ |\overline{u}| = n-u. \qquad \text{(В.2)}$$

Для V-серій $K_v = (m, l_m, a_m) = (m, 1, 2m+1)$. Номери n, що відповідають серіям типу V, залежно від m описуються рівністю $n = 2m$, тоді:

$$n = 2m \;\Rightarrow\; v = \left[\frac{n}{2}\right],\ |v| = v,\ |\overline{v}| = n-v. \qquad \text{(В.3)}$$

Обчислимо для заданого n суми елементів серій:

$$S_u^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{u} a_m l_m = \sum_{m=1}^{u} m \cdot 1 = \frac{u(u+1)}{2},\ S_v^{\text{п}} = \sum_{m=1}^{v} (2m+1) = v\,(v+2). \qquad \text{(В.4)}$$

Отже, сума $S(n)$ на цілому відрізку $[1, n]$ має вигляд:

$$S(n) = 1 + \frac{u(u+1)}{2} + v(v+2), \qquad \text{(В.5)}$$

де $u = [n/2]$, $v = [(n-1)/2]$.

В еквівалентній формі $S(n)$ зображується так:

$$S(n) = \frac{1}{2}\left(n(n+1) - \left[\frac{n}{2}\right]\left(\left[\frac{n}{2}\right]+1\right)\right). \qquad \text{(В.6)}$$

В.2. Аналітичний опис послідовності знаків у формулі Ейлера

Для регулювання знаків доданків у формулі Ейлера знайдемо аналітичний опис відповідної послідовності.

Задача В.2. Знайти загальний член послідовності за заданими скінченними різницями:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
S_n	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	1	1	-1	-1	…
d_n	0	-2	0	2	0	-2	0	2	0	-2	0	2	…

.

Розв'язання. Задана послідовність періодична: $T=4$. З таким самим періодом є і послідовність її скінченних різниць.

Довільна періодична послідовність описується за допомогою базисних індикаторів (див. (3.12) основного тексту):

$$S_n = 1\cdot e_1(n,4) + 1\cdot e_2(n,4) - 1\cdot e_3(n,4) - 1\cdot e_4(n,4) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow S_n = (1,1,-1,-1,1,1,-1,-1,\ldots).$$

Таке подання $S(n)$ вже є конструктивним, оскільки воно дає можливість за заданим номером указати відповідний елемент послідовності.

Зведемо його до більш зручного для використання вигляду: побудуємо загальний член послідовності за формулою (3.62), для чого підрахуємо суми скінченних різниць:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	…
$\sum_{i=1}^{n-1} d(i)$	0	-2	-2	0	0	-2	-2	0	0	-2	-2	0	…

.

Описуємо скінченні різниці, розкриваючи вирази для $e_i(n,\,4),\ i=\overline{1,4}$:

$$d_n = 0\cdot e_1(n,\,4) - 2\cdot e_2(n,\,4) - 2\cdot e_3(n,\,4) + 0\cdot e_4(n,\,4) =$$

$$= -2\cdot(e_2(n,\,4)+e_3(n,\,4)) = -2\cdot\left(\left[\frac{n+2}{4}\right]-\left[\frac{n+1}{4}\right]+\left[\frac{n+1}{4}\right]-\left[\frac{n}{4}\right]\right)=$$

$$= -2\cdot([(n+2)/4]-[n/4]).$$

Будь-який член послідовності за заданим номером знаходиться за формулою:

$$S(n) = 1-2\cdot\big([(n+1)/4]-[(n-1)/4]\big).\bullet \qquad \text{(В.7)}$$

Висновок. На підставі співвідношень (В.6) і (В.7), у яких замінимо n на k, формула Ейлера набуває вигляду, який більш зручний для чисельної реалізації:

$$\sigma(n) = \sum_{\forall k:(n-S_k)\ge 0}\left(1-2\left(\left[\frac{k+1}{4}\right]-\left[\frac{k-1}{4}\right]\right)\right)\cdot\sigma(n-S_k), \qquad \text{(В.8)}$$

де $S(k)=\dfrac{1}{2}\left(k(k+1)-\left[\dfrac{k}{2}\right]\left(\left[\dfrac{k}{2}\right]+1\right)\right)$ – послідовність п'ятикутних чисел.

Приклад В.1. Знайдіть суму дільників числа $n=4$.

Розв'язання. Установлюємо кількість додатних різниць $(n-S_k)$:

$$4-S(1)=4-1=3>0,\ 4-S(2)=4-2=2>0,\ 4-S(3)=4-5=-1<0.$$

Їх виявилося дві, отже:

$$\sigma(4) = \big(\sigma(n-1)+\sigma(n-2)\big)\Big|_{n=4} = \sigma(3)+\sigma(2) =$$

$$= \left|\begin{array}{l}\sigma(2)=\sigma(1)+\sigma(0)=1+2=3\\ \sigma(3)=\sigma(2)+\sigma(1)=3+1=4\end{array}\right| = 3+4=7.\bullet$$

Додаток Г

Таблиця деяких формул, що містять функцію Антьє

№ п/п	Вихідна сума $S(n)$	Серії K_m	Кількість серій (u) на $[1,\ n]$	Згорнута сума $S(n)$
1	$\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\sqrt{2i}+\frac{1}{2}\right]$	$(m,\ m,\ m)$	$\left[\frac{\sqrt{8n+1}-1}{2}\right]$	$(u+1)(n-u(u+2)/6)$
2	$\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{\sqrt{8i+1}-1}{2}\right]$	$(m,\ m+1,\ m)$	$\left[\frac{\sqrt{8n+9}-3}{2}\right]$	$(u+1)(n-u(u+5)/6)$
3	$\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{\sqrt{8i+9}-3}{2}\right]$	$(m,\ m+1,\ m-1)$	$\left[\frac{\sqrt{8n+17}-3}{2}\right]$	$u(n-u-(u^2-1)/6)$
4	$\sum\limits_{i=1}^{n}[\sqrt{i}]$	$(m,\ 2m+1,\ m)$	$[\sqrt{n+1}-1]$	$(u+1)(n-u(2u+7)/6)$
	Формула логічного доповнення		Назва формули	
5	$\neg n^2=n+\left[\frac{\sqrt{4n-3}+1}{2}\right]$		S-доповнення квадратів (формула неквадратів)	
6	$\neg(n^2+1)=n+\left[\frac{\sqrt{[4n-7]_+}+1}{2}\right]$		S-доповнення квадратів у сумі з одиницею	
7	$\neg n^3=n+\left[\frac{A}{6}+\frac{2}{A}\right]$, де $A=\sqrt[3]{108n+12\sqrt{81n^2-12}}$		S-доповнення кубів (формула некубів)	
	Згорнуті суми без параметрів і сума з параметром t			
8	$\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{i}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\frac{3n(n+1)}{2}-\left(4\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)$			
9	$\sum\limits_{i=1}^{n}\left[\frac{i+1}{2}\right]=\frac{1}{2}\left(\left(4\left[\frac{n}{2}\right]+3\right)\cdot\left[\frac{n+1}{2}\right]-\frac{n(n+1)}{2}\right)$			
10	$\sum\limits_{i=t}^{n}\left[\frac{i}{t}\right]=\left[\frac{n+1}{t}\right]\cdot\left(n-\frac{t}{2}\left(\left[\frac{n+1}{t}\right]+1\right)+1\right)$			

Покажчик позначень

$\rightleftharpoons$ – еквівалентність за означенням, 22

$(B; \vee, \wedge, {}^{-})$ – булева алгебра висловлень, 23

$(M(s); \sqcup, \sqcap, \urcorner)$. – булева алгебра послідовностей (s-алгебра), 23

$\varnothing$ – порожня множина, 23

$\sqcup$ – логічна сума послідовностей (s-об'єднання), 23

$\sqcap$ – логічний добуток послідовностей (s-перетин), 23

$\llcorner$ – логічна різниця послідовностей (s-різниця), 23

$\urcorner$ – логічне доповнення послідовності (s-інверсія), 23

$[x]$ $(E(x))$ – ціла частина дійсного числа x (Антьє), 31

$\mathbf{N}$ – множина всіх натуральних чисел, 31

$f(n): \mathbf{N} \to \mathbf{N}$ – перетворення множини натуральних чисел, 39

$D_k = p_1 p_2 \ldots p_k$ – добуток простих чисел від p_1 до p_k, 86

$a \equiv b (\mathrm{mod}\, m)$ – конгруентність цілих a і b за модулем m, 87

$s_k(n)$ – зведена система лишків за модулем $m = D_k$, 91

$(\beta_k(n), \gamma_k(n))$ – пара зі $s_k(n)$ така, що $\gamma_k(n) - \beta_k(n) = 2$, 128

$K = (m, l_m, a_m)$ – кортеж кусково-визначеної послідовності, 145

$x = x(n)$, $y = y(n)$ – координатні функції нумерації цілих точок, 163

$n = n(x, y)$ – номер цілої точки як функції координат, 168

$Bar(k, h)$ – брус з основою k і висотою h, 197

$Z = z(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – цільова функція в МП, 200

$X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ – вектор управління (план задачі), 200

X^* (Z^*) – оптимальний план (оптимум цільової функції), 201

Зміст

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

Сенчуков Віктор Федорович

ЦІЛОЧИСЛОВІ СІТКИ: ПОБУДОВА ТА ЗАСТОСУВАННЯ

Монографія

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Відповідальний редактор *М. М. Оленич*

Редактор *О. С. Новицька*

Коректор *О. С. Новицька*

План 2017 р. Поз. № 27-ЕНВ.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру ***ДК № 4853 від 20.02.2015 р.***