МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

**Методичні рекомендації
до практичних завдань
для студентів усіх спеціальностей
першого (бакалаврського) рівня**

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2019

УДК 519.87(07.034)
Д70

Укладачі: Л. М. Малярець
О. В. Мартинова

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики та економіко-математичних методів.
Протокол № 3 від 10.10.2018 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Д70 **Дослідження** операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних завдань для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. Л. М. Малярець, О. В. Мартинова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 85 с.

Метою роботи є надання студентам допомоги в засвоєнні теоретичних знань і набутті практичних навичок із навчальної дисципліни. Подано вправи та наведено приклади й основні теоретичні відомості, що необхідні для їхнього розв'язання.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня.

УДК 519.87(07.034)

Вступ

Сьогодні використання економіко-математичних методів і побудованих на їх основі моделей стає характерною особливістю розвитку інструментів дослідження соціально-економічних процесів і явищ на різних рівнях їх управління.

Сучасна математика підіймає економічну науку на якісно новий рівень. Дослідження операцій та методи оптимізації є методами досліджень складних економічних проблем, які дають можливість формалізувати опис суттєвих зв'язків змінних та об'єктів в економіці, виявити особливі ознаки функціонування об'єкта дослідження та дати їм оцінку, передбачити майбутні зміни характеристик його розвитку, сформувати обґрунтовані висновки, які адекватні ситуації, та отримати нові знання про об'єкт дослідження.

Наведені приклади складають методичні рекомендації та положення щодо розв'язання завдань з дослідження операцій та методів оптимізації. Вони не тільки роз'яснюють загальнотеоретичні положення, але й наочно показують можливі сфери застосування в економічному аналізі. Самостійне розв'язання запропонованих завдань сприяє закріпленню теоретичної бази знань і формуванню практичних навичок, які необхідні для розв'язку питань, пов'язаних з дослідженням економічних процесів і явищ, а також дає можливість виявити якість засвоєння матеріалу.

У результаті вивчення навчальної дисципліни студенти набувають компетенцій загальної технології моделювання та оволодівають сучасними методами побудови моделей об'єктів, явищ, процесів у економіці в різних умовах визначеності та в умовах ризику; навчаються класифікувати типи задач оптимізації та обирати математичні моделі та методи для їх розв'язання; вивчають основні математичні методи оптимізації, за допомогою яких розробляються економіко-математичні моделі для обґрунтування управлінських рішень в економіці; розв'язують економічні задачі за допомогою різних економіко-математичних методів. Набуті студентами в результаті вивчення викладеного матеріалу знання, навички та вміння формування моделей та розв'язування задач, аналіз результатів складають фундамент компетентностей сучасного економіста.

Практичне заняття 1
Оптимізаційні економіко-математичні методи та моделі

1.1. Приклади розв'язання завдань

Велику групу математичних методів в економіці утворюють оптимізаційні методи, оскільки перед менеджерами, економістами, працівниками системи управління, інженерами різного рівня виникають проблеми прийняття рішення, які вимагають оптимізації результатів різних видів діяльності з урахуванням наявних ресурсів. Процес розроблення моделі передбачає використання різних математичних методів для пошуку найкращого рішення.

Типовими оптимізаційними завданнями є задачі оптимального планування, в яких виділяють змінні та параметри (кількість купованих продуктів, кількість виробленої продукції, кількість перевезеного вантажу), мети, якої бажають досягти (функція цілі) та яку слід оптимізувати (мінімізувати витрати на споживання, максимізувати прибуток підприємства, мінімізувати вартість перевезень) і обмеження, тобто умови, що обмежують можливості досягнення бажаної цілі (в раціоні повинні бути визначені компоненти, обмежені ресурси підприємства, кількість перевезеного товару).

Загальну задачу оптимізації формулюють таким чином: необхідно знайти екстремум (максимум чи мінімум залежно від практичного сенсу задачі) функції

$$Z_{extr} = f(x_1, x_2, ..., x_n). \tag{1.1}$$

$$\begin{aligned} &\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) \le (\ge, =) b_i, \ i = \overline{1, m}; \\ &x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Функція (1.1) називається *функцією цілі*.

Будь-який розв'язок системи (1.2), який задовольняє умови невід'ємності, називається *допустимим розв'язком*.

А розв'язок, який задовольняє умови (1.1), (1.2), називається *оптимальним розв'язком*.

Оптимізаційні задачі за видом цільової функції та за виглядом обмежень класифікують на групи. Якщо функція цілі та система обмежень є лінійними, то говорять про лінійне програмування, в іншому випадку виникає задача нелінійного програмування. У разі квадратичної функції цілі та лінійної системи обмежень задачу оптимізації називають задачею квадратичного програмування. Якщо функцію цілі можна подати у вигляді суми таких функцій, що кожна з них залежить тільки від однієї змінної, то розглядають задачу сепарабельного програмування. Якщо керовані змінні принципово можуть бути тільки цілими, то таку задачу оптимізації називають цілочисельною.

За інформаційними властивостями оптимізаційні задачі розрізняють на статичні та динамічні. Крім наведених моделей до оптимізаційних відносять імітаційні моделі та евристичні.

Розглянемо приклади побудови математичних моделей різних економічних задач.

Приклад 1.1. *Задача про оптимальне використання ресурсів*

Фірма випускає два види деталей (А, В). Для виготовлення використовуються два види вихідних ресурсів, витрати яких на одну деталь і добові запаси вихідних продуктів дані в табл. 1.1.

Таблиця 1.1

Вихідні дані

Ресурси	Витрати ресурсу на виготовлення 1 механізму		Запас, кг
	А	В	
Ресурс 1	2	3	130
Ресурс 2	1	5	200

Вивчення ринку збуту показало, що добовий попит на першу деталь перевищує попит на другу не більше ніж на 15 кг. Крім того, установлено, що попит на другу деталь не перевищує 30 на добу.

Відпускна ціна 1 кг першої деталі 6 грошових одиниць, другої – 21 грошова одиниця.

Потрібно визначити, яку кількість механізмів кожного виду повинна виробляти фірма, щоб дохід від реалізації продукції був максимальним.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі.

Позначимо: x_1 – добовий обсяг випуску першої деталі; x_2 – добовий обсяг випуску другої. Змінні повинні бути невід'ємні за своїм економічним змістом.

Тоді цільова функція та система обмежень будуть такі:

$$Z_{\max}(x_1, x_2) = 6x_1 + 21x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 130, \\ x_1 + 5x_2 \le 200, \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Приклад 1.2. *Задача найдешевшого раціону*

У ході відгодування тварин кожна тварина щоденно повинна отримати не менше 60 од. поживної речовини А, не менше 50 од. речовини В і не менше 12 од. речовини С. Зазначені поживні речовини містять три види корму. Вміст одиниці поживних речовин в 1 кг кожного з видів кормів наведено в табл. 1.2

Таблиця 1.2

Вихідні дані

Поживні речовини	Кількість одиниць поживних речовин в 1 кг корму виду		
	I	II	III
A	1	3	4
B	2	4	2
C	1	4	3

Складіть денний раціон, що забезпечує отримання необхідної кількості поживних речовин за мінімальних грошових витрат, якщо ціна 1 кг корма I виду складає 5 грн, корму II виду – 15 грн і корму III виду – 10 грн.

Розв'язання

Позначимо через x_1, x_2, x_3 кількість корму кожного виду, відповідно. Оскільки вказана необхідна кількість поживних речовин для кожної тварини, то змінні можуть приймати тільки невід'ємні значення та повинні задовольняти системі обмежень щодо отримання поживних речовин. Загальна вартість денного раціону тварини має бути мінімальною.

Отже, математична модель задачі має вигляд:

$$Z_{\min} = 5x_1 + 15x_2 + 10x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 4x_3 \geq 60, \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 \geq 50, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 \geq 12. \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \ i = \overline{1,3}.$$

Приклад 1.3. *Нелінійна оптимізаційна задача*

Комбінат реалізує продукцію двома способами: у роздріб через магазин та оптом через торгівельних агентів.

За умови продажу x_1 кг продукції через магазин витрати на реалізацію становлять $(x_1 + 2)^2$ грош. од., а продажу x_2 кг продукції за допомогою торговельних агентів – ${x_2}^2$ грош. од.

Побудуйте математичну модель для визначення кількості продукції, яке варто продавати кожним способом, щоб витрати на реалізацію були мінімальними, якщо в добу для продажу виділяється 2 000 кг продукції.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі: мінімум сумарних витрат

$$Z_{\min} = (x_1 + 2)^2 + {x_2}^2$$

за обмеженнями $\quad x_1 + x_2 = 2000, \quad x_{1,2} \geq 0$.

Приклад 1.4. *Дробово-лінійна оптимізаційна задача*

Для виробництва двох виробів A і B підприємство використовує три типи технологічного обладнання. Кожен з виробів повинен пройти обробку на кожному типі обладнання. Час обробки кожного з виробів і витрати, пов'язані з виробництвом одного виробу, наведено у табл. 1.3.

Обладнання 1-го і 3-го типів підприємство може використовувати не менше 48 і 6 год., відповідно, а обладнання 2-го типу не більше 50 год.

Визначте обсяг виробництва продукції за умови найменшої середньої собівартості одного виробу.

Таблиця 1.3

Вихідні дані

Типи обладнання	Витрати часу на обробку одного виробу, год.	
	A	B
1	12	4
2	10	5
3	1	1
Витрати на вир-во одного виробу, тис. грн	1	2

Розв'язання

Побудуємо економіко-математичну модель задачі.

Нехай x_1, x_2 – кількість виробів виду A і B, відповідно.

Загальні витрати на виробництво складають $x_1 + 2x_2$ тис. грн, а середня собівартість одного виробу буде дорівнювати $\frac{x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2}$.

Економіко-математична модель задачі має вигляд:

$$Z_{\min} = \frac{x_1 + 2x_2}{x_1 + x_2}$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \geq 48, \\ 10x_1 + 5x_2 \leq 50, \\ x_1 + x_2 \geq 6, \\ x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0 \end{cases}$$

Приклад 1.5. *Цілочисельна оптимізаційна задача*

Підприємство виготовляє дизельні двигуни. Для виготовлення двох основних видів дизельних двигунів HDI та TDI підприємство використовує три види допоміжних деталей (циліндри, поршні, клапани). Прибуток від реалізації одного двигуна кожного виду, запаси та витрати деталей на виготовлення одного двигуна кожного виду відповідно до прийнятої технології подані в табл. 1.4.

Таблиця 1.4

Вихідні дані

Різновиди допоміжних деталей	Затрати на виготовлення одного дизельного двигуна, шт.		Запас деталей, шт.
	HDI	TDI	
I	12	4	100
II	4	4	200
III	3	12	330
Прибуток від реалізації двигуна, у. о.	1 000	1 150	max

Побудуйте математичну модель для визначення оптимального плану виробництва дизельних двигунів двох типів, за яким підприємство отримає максимальний прибуток від їх реалізації.

Розв'язання

За вихідними даними укладемо математичну модель задачі.

Якщо через x_1 позначити кількість двигунів першого типу HDI, а через x_2 – двигунів TDI, то загальний прибуток Z від реалізації є функцією двох змінних: $Z = 1000\,x_1 + 1150\,x_2$. Цільова функція повинна сягати максимального значення.

Оскільки витрати деталей на виготовлення двигунів не може перевищувати їх запасів, а кількість готової продукції повинна бути невід'ємною та цілою, математична модель задачі має вигляд:

$$Z_{\max} = 1000x_1 + 1150x_2$$

$$\begin{cases} 12x_1 + 4x_2 \le 100, \\ 4x_1 + 4x_2 \le 200, \\ 3x_1 + 12x_2 \le 330, \\ x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0 - \text{цілі}. \end{cases}$$

Приклад 1.6. *Транспортна задача*

Підприємство має три цеха (A_1, A_2, A_3) і чотири склади (B_1, B_2, B_3). Перший цех виробляє 50 тис. шт. виробів, другий – 60 тис. шт. виробів, третій – 10 тис. шт. виробів. Пропускна здатність складів характеризується показниками (у тис. шт.): склад 1 – 10, склад 2 – 30, склад 3 – 40, склад 4 – 30. Вартість перевезення з першого цеху до складів 1, 2, 3, 4 за одну тисячу штук виробів складає, відповідно 2, 3, 2, 4 грн; з другого – 3, 2, 5,1 грн;, з третього – 4, 3, 2, 6 грн. Скласти такий план перевезення виробів, за якого витрати на перевезення були б найменшими.

Розв'язання

Умова задачі в табличній формі подана в табл. 1.5.

Таблиця 1.5

Умова задачі

Цехи	Склади				Обсяги виробництва, тис. шт.
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	1	2	3	4	50
A_2	3	2	5	1	60
A_3	4	3	2	6	10
Місткість складів	10	30	40	30	

Позначимо: x_{ij} – кількість вантажу, який необхідно перевезти з цеху A_i до складу B_j щоб витрати перевезення були б найменшими.

Математична модель даної транспортної задачі: знайти мінімум лінійної функції цілі:

$$Z_{\min} = x_{11} + 2x_{12} + 3x_{13} + 4x_{14} + 3x_{21} + 2x_{22} + 5x_{23} + x_{24} + \\ + 4x_{31} + 3x_{32} + 2x_{33} + 6x_{34}$$

за обмежень-рівностей:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 50, \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 60, \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 10, \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10, \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 30, \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 40, \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 30, \end{cases}$$

$$x_{ij} \geq 0,\ i = \overline{1,3}, \quad j = \overline{1,4}.$$

1.2. Завдання для самостійної роботи

1.2.1. Аналітичний відділ складає план виробництва продукції двох типів на другий квартал поточного року з метою досягнення максимального прибутку та з урахуванням того, що використовуються тільки наявні запаси сировини чотирьох видів. Вихідні дані наведено в табл. 1.6. Побудуйте математичну модель задачі.

Таблиця 1.6

Вихідні дані

Види сировини	Норми витрат кг/м		Запаси сировини, кг
	Продукція I	Продукція II	
1	2	1	28
2	2	1	36
3	0	5	55
4	4	2	41
Прибуток	9	4	

1.2.2. Від пункту A до пункту B щоденно відправляються пасажирські та швидкі потяги. У табл. 1.7 вказано наявний парк вагонів різних типів, з яких щоденно можна комплектувати потяги, кількість пасажирів, що вміщуються в кожному з потягів. Побудуйте математичну модель визначення оптимальної кількості швидких і пасажирських потягів за умови, що кількість пасажирів, які перевозяться, досягає максимуму.

Таблиця 1.7

Вихідні дані

Потяги	Вагони				
	багажн.	пошт.	ж. плацк.	куп.	м'як.
Швидкий	1	1	5	6	3
Пасажирський	1	–	8	4	1
Кількість пасажирів	–	–	58	40	32
Парк вагонів	12	8	81	70	26

1.2.3. Кредитний відділ банку визначає оптимальний портфель інвестування на модернізацію обладнання та соціальні програми трьох підприємств, що забезпечить найменший рівень збитковості банку. Збитковість програми модернізації обладнання – 3 бали за 1 грош. од. інвестицій, соціальних програм – 7 балів. Інвестування здійснюється за умовою досягнення рівнів розвитку капіталу підприємств не менше, ніж 10, 7, 14 одиниць відповідно. У табл. 1.8 наведено величини зростання рівня розвитку капіталу підприємств за відповідним напрямом інвестування.

Таблиця 1.8

Вихідні дані

Підприємства	Зростання рівня розвитку капіталу	
	Модернізація обладнання	Соціальні програми
"Будмайстер"	2	1
СТО "Мотор"	4	5
"Чистий дім"	3	7

Побудуйте математичну модель інвестиційного портфеля.

1.2.4. Обсяг ресурсів хімічного заводу є обмеженим і складає 38 л розчину 1-го виду та 20 л розчину 2-го виду. Розчину 1-го виду витрачається на виробництво продукції типу А та типу В, відповідно, 8 л і 4 л; розчину 2-го виду, відповідно, 5 л і 2 л. Вартість 1 т продукції типу А – 7 грош. од., типу В – 3 грош. од. Побудуйте математичну модель визначення оптимального плану виробництва продукції кожного типу за умови максимізації прибутку.

1.2.5. Кредити на придбання 1 кв. м житла у центрі міста та 1 кв. м житла в передмісті забезпечують банку, відповідно, 6 тис. грн і 5 тис. грн прибутку. Операції кредитування здійснюють три агенції нерухомості, в яких працює, відповідно, 13, 10 і 18 спеціалістів. У табл. 1.9 наведено кількість робітників кожної агенції, яких необхідно залучити до укладання угоди кредитування на 1 кв. м житла, відповідно.

Таблиця 1.9

Вихідні дані

№ агенції	Кількість робітників	
	Житло в центрі міста	Житло в передмісті
1	2	3
2	3	2
3	2	1

Побудуйте математичну модель визначення оптимальної площі житла за умови максимізації прибутку.

Практичне заняття 2
Задача лінійного програмування та методи її розв'язання

2.1. Приклади розв'язання завдань

Зупинимось докладніше на математичній постановці задачі лінійного програмування (ЗЛП) і методах її розв'язання. Ця задача може бути сформульована таким чином:

Знайдіть найбільше (найменше) значення лінійної функції

$$Z_{\max\,(\min)} = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

із заданою системою обмежень:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \begin{smallmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{smallmatrix} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \begin{smallmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{smallmatrix} b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \begin{smallmatrix} \le \\ = \\ \ge \end{smallmatrix} b_m; \end{cases}$$

$$x_j \ge 0,\ j = \overline{1,n}.$$

Якщо задача лінійного програмування задана у двовимірному просторі, вона може бути розв'язана графічним методом.

План графічного методу розв'язання ЗЛП

1. Знаходимо багатокутник розв'язків, будуючи область припустимих рішень системи обмежень задачі.
2. Будуємо вектор $\overline{gradZ} = \overline{\nabla Z} = (c_1; c_2)$.
3. Проводимо лінію рівня $Z_0 \perp \overline{\nabla Z}$.
4. Лінію рівня пересуваємо за напрямом вектора $\overline{\nabla Z}$ для задач на максимум і за напрямом, протилежним до $\overline{\nabla Z}$, для задач на мінімум.

Пересування лінії рівня робиться доти, доки в ній залишиться тільки одна загальна точка з областю припустимих рішень (ОПР). Ця точка визначає єдине рішення задачі ЛП та екстремум.

Якщо виявиться, що лінія рівня паралельна одній зі сторін ОПР, то задача ЛП буде мати безліч рішень.

Якщо ОПР представляє необмежену область, то цільова функція може бути необмежена.

Задача лінійного програмування може бути нерозв'язаною, коли визначальні її обмеження виявляться суперечливими.

5. Знаходимо координати точки екстремуму й значення цільової функції в ній.

Приклад 2.1. Знайдіть оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування:

$$Z_{\max} = -x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 4 \\ x_1 - 2x_2 \le 2 \\ x_1 + x_2 \le 5 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

Для знаходження багатокутника планів у першій чверті координатної площини побудуємо прямі через дві точки, відповідно:

$$l_1:\ (2;0),\quad (0;-4);\quad l_2:\ (2;0),\quad (0;-1);\qquad l_3:\ (5;0),\quad (0;5).$$

Усі нерівності системи обмежень сумісні в межах багатокутника планів $ABCD$ (рис. 2.1).

Побудуємо вектор $\overline{gradZ} = (-1;1)$, який визначає напрям найбільш швидкого зростання цільової функції, і перпендикулярно йому через початок координат проведемо лінію рівня $Z_0 \perp \overline{\nabla Z}$. Пересуваючи лінію рівня в напрямі градієнта, визначимо, що MN – опорна пряма, а вона визначає точку максимуму A. Визначаємо координати точки A з системи рівнянь сторін AB і AD:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 5, \\ x_1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0, \\ x_2 = 5, \quad A(0;5). \end{cases}$$

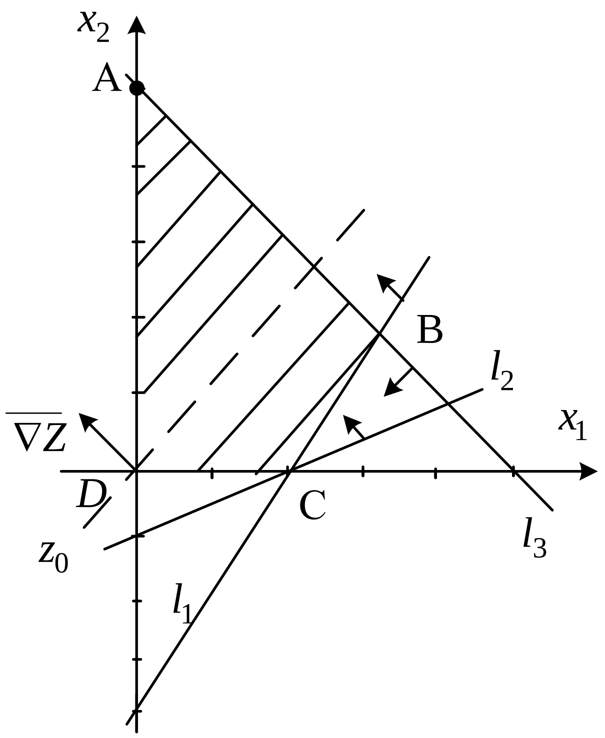

Рис. 2.1. **Графічне розв'язання задачі**

Отже, маємо оптимальний план $\mathbf{X}^* = (0;\,5)$, якому відповідає максимальне значення цільової функції: $Z_{\max} = Z(\mathbf{X}^*) = -1 \cdot 0 + 1 \cdot 5 = 5.$

Приклад 2.2. Знайдіть оптимальний розв'язок ЗЛП:

$$Z_{\min} = 2x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 18 & (1) \\ 3x_1 - x_2 \le 0 & (2) \\ x_1 + x_2 \ge 5 & (3) \\ -7x_1 + 8x_2 \ge 0 & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

Будуємо область припустимих планів D, що задовольняють системі обмежень задачі (рис. 2.2).

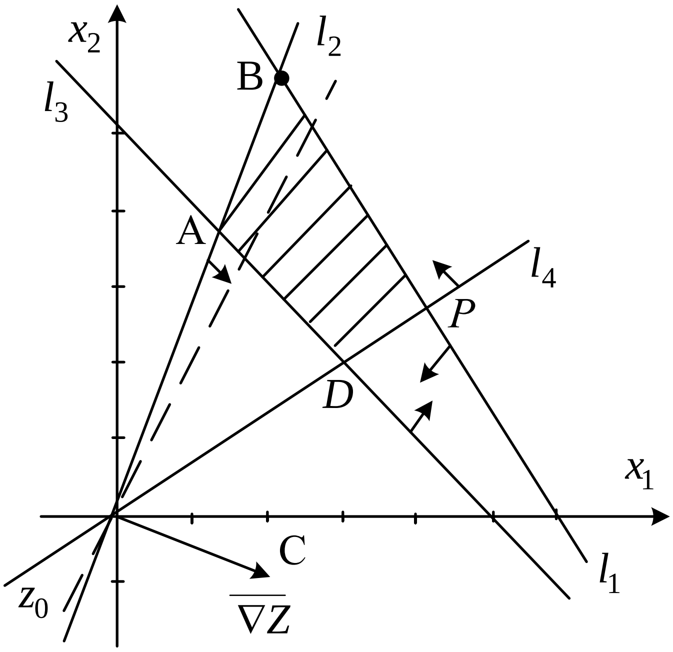

Рис. 2.2. **Область припустимих планів**

Знаходимо вектор $\overline{gradZ} = (2;-1)$. Будуємо лінію рівня $Z_0 \perp \overline{\nabla Z}$ і пересуваємо її в протилежному від градієнта напрямі до крайньої точки області $ABPD$. Бачимо, що точкою мінімуму є точка B. Визначимо її координати, розв'язуючи спільне рівняння прямих AB і BP:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 = 18, \\ 3x_1 - x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2, \\ x_2 = 6, \quad A(2;6). \end{cases}$$

Обчислюємо значення функції Z у точці $A(2;6)$.

$$Z_{\min} = Z(2;6) = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 6 = -2.$$

Таким чином, маємо оптимальний план $\mathbf{X}^* = (2;6)$, якому відповідає значення цільової функції $Z_{\min} = -2$.

Приклад 2.3. Знайдіть найбільше значення функції $Z_{\max} = -3x_1 - 2x_2$ за умов:

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 9 & (1) \\ 5x_1 - 2x_2 \le 20 & (2) \\ -x_1 + x_2 \le 2 & (3) \\ x_2 \le 5 & (4) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

Будуємо область припустимих планів $ABPQR$, що задовольняє системі обмежень задачі (рис. 2.3).

Знаходимо та будуємо вектор $\overline{gradZ} = (-3;-2)$. У напрямі вектора $\overline{\nabla Z}$ будуємо опорну пряму, перпендикулярну $\overline{\nabla Z}$; вона проходить через сторону AB багатокутника планів. $Z_0 \perp \overline{\nabla Z}$ і пересуваємо її в протилежному від градієнта напрямі. Найбільшого значення функція набуває в точках відрізка AB. Рівняння прямої: $3x_1 + 2x_2 = 9$.

Після розв'язання системи рівнянь граничних прямих для точок A і B отримаємо: $A(3;0)$ і $B(1;3)$.

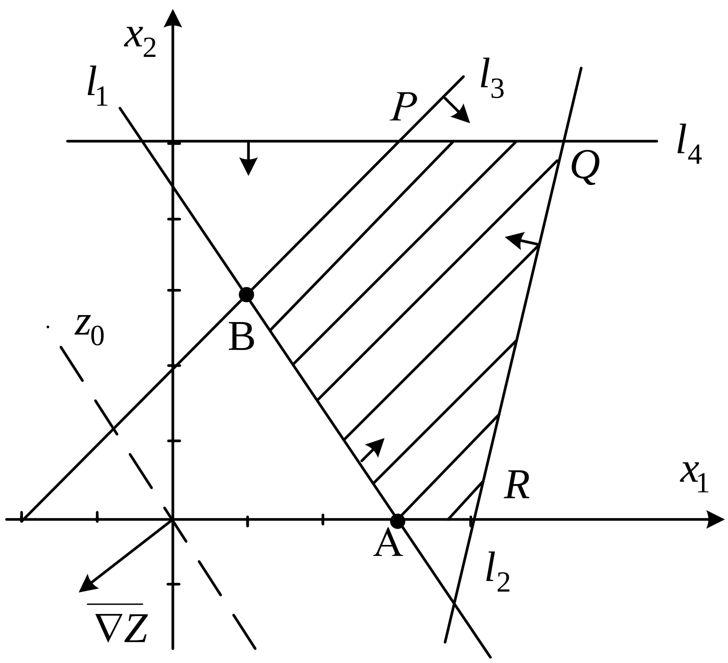

Рис. 2.3. **Графічне розв'язання задачі**

На відрізку AB значення x_1 змінюються від 1 до 3, тобто $1 \le x_1 \le 3$.

З рівняння прямої AB випливає: $x_2 = \frac{9}{3} - \frac{3}{2}x_1$.

Тоді безліч усіх оптимальних планів, обумовлених відрізком AB, можна подати як:

$$\overline{X}_{\max} = \left\{ x_1; \frac{9}{3} - \frac{3}{2}x_1 \right\}, \text{ де } 1 \le x_1 \le 3.$$

Надаючи змінній x_1 будь-які числові значення від 1 до 3, отримаємо оптимальні плани задачі, за якими цільова функція прийме значення:

$$Z_{\max} = -3x_1 - 2x_2 = -3x_1 - 2\left(\frac{9}{3} - \frac{3}{2}x_1 \right) = 9.$$

Тобто $Z_{\max} = 9$, $\overline{X}_{\max} = \left\{ x_1; \frac{9}{3} - \frac{3}{2}x_1 \right\}$, де $1 \le x_1 \le 3$.

Приклад 2.4. Знайти оптимальний розв'язок задачі лінійного програмування:

$$Z_{\min} = 2x_1 - 3x_2$$

$$\begin{cases} 10x_1 - 3x_2 \le 30 & (1) \\ 3x_1 + 4x_2 \ge 12 & (2) \\ 2x_1 - 3x_2 \le 0 & (3) \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

Будуємо багатокутник планів за допомогою прямих:

$$l_1: \ (3;0), \quad (0;-10); \quad l_2: \ (4;0), \quad (0;3); \quad l_3: \ (0;0), \quad (3;2).$$

Усі нерівності системи обмежень сумісні в межах багатокутника планів D (рис. 2.4).

Знаходимо та будуємо вектор $\overline{gradZ} = (2;-3)$. Рухаючись у напрямі цього вектора, не можна отримати опорну пряму для області D. Це означає, що функція Z необмежена знизу, тобто $Z \to -\infty$, і вихідна задача розв'язання не має.

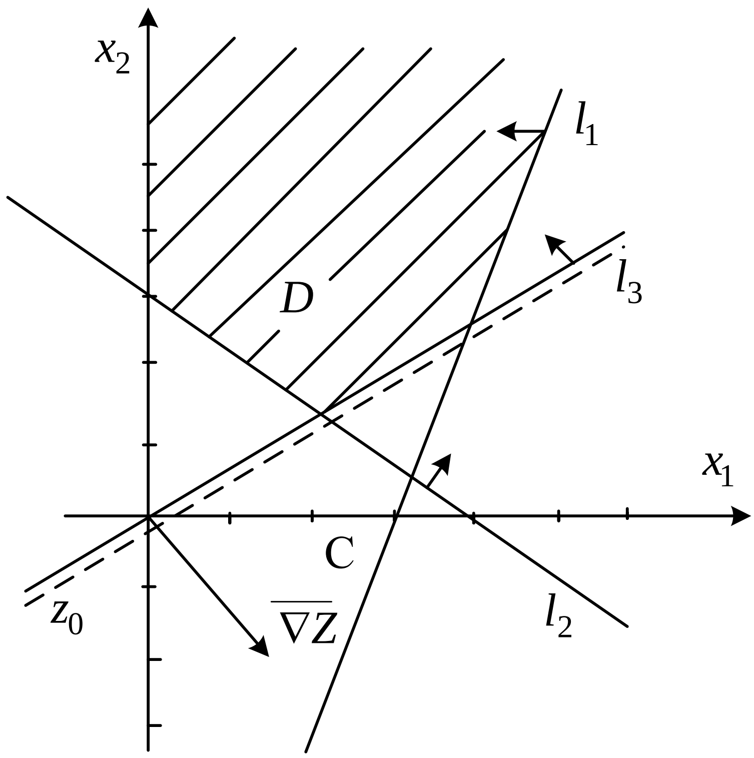

Рис. 2.4. **Область припустимих планів**

Якщо задача лінійного програмування має дві або більше змінні, вона може бути розв'язана симплексним методом. Цей метод є універсальним методом розв'язання ЗЛП, бо він дозволяє розв'язати практично будь-яку задачу, що подана у канонічному вигляді.

План симплексного методу розв'язання ЗЛП

1. Записати систему обмежень задачі з невід'ємними вільними членами у канонічному вигляді, тобто у вигляді рівнянь.

2. Виділити у системі обмежень одиничний базис, зберігаючи вільні члени невід'ємними.

3. Знайти вихідний план і перевірити його на оптимальність. Для цього необхідно:

a) обчислити величину $z_j = \vec{C}_{\text{баз}} \cdot \vec{a}_j$;

b) обчислити оцінки $\Delta_j = z_j - c_j$.

Якщо всі оцінки $\Delta_j \geq 0$ (у випадку максимізації цільової функції) або всі оцінки $\Delta_j \leq 0$ (у випадку мінімізації цільової функції), то вихідний опорний план є оптимальним і задача розв'язана.

Якщо ця умова не виконується, то план необхідно покращити.

4. Покращення вихідного опорного плану.

а) якщо одна від'ємна оцінка (задача максимізації) або одна додатна (задача мінімізації), то для відповідного j-го вектора обчислюємо параметр:

$$\theta_j = \min\left(\frac{b_i}{a_{ij}}\right), \text{де } a_{ji} > 0,$$

та відповідний вектор вводимо до базису, використовуючи однократне заміщення базису.

б) якщо декілька від'ємних оцінок (задача максимізації) або декілька додатних (задача мінімізації), то для кожного відповідного вектора обчислюємо $\left|\Delta_j \cdot \theta_j\right|$ і в базис вводимо вектор з максимальним значенням цього добутку ($\max\left|\Delta_j \cdot \theta_j\right|$).

5. Новий опорний план перевіряємо на оптимальність, починаючи з третього пункту. Процес продовжуємо поки не буде виконаний критерій оптимальності.

Зауваження:

1) якщо для j-го вектора оцінка $\Delta_j < 0$ (у випадку максимізації цільової функції) або оцінка $\Delta_j > 0$ (у випадку мінімізації цільової функції), а координати j-го вектора від'ємні, то план не є оптимальним, покращити його неможливо, задача розв'язку немає;

2) якщо на будь-якому етапі розрахунків виникає невизначеність у виборі розв'язувального рядка, тобто відбувається зациклення, то необхідно обирати той рядок, для якого відношення елементів наступного (попереднього) стовпчика до розв'язувального буде мінімальним. Причому в новому стовпчику беруться до уваги як невід'ємні, так і від'ємні координати вектора. Процес продовжується доти, доки розв'язувальний рядок не визначиться однозначно.

Приклад 2.5. Для виготовлення різних виробів A і B підприємство використовує три різні види сировини. Витрати на виробництво одного виробу кожного виду, ціна одного виробу A і B, а також загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана підприємством, подані в табл. 2.1.

Таблиця 2.1

Вихідні дані

Вид сировини	Витрати сировини (кг) на один виріб		Запас сировини (кг)
	A	*B*	
1	1	2	4
2	1	1	3
3	2	1	8
Ціна виробу (у.о.)	3	4	

За допомогою симплексного методу знайти план виробництва виробів A і B таким чином, щоб загальна вартість всієї продукції, що вироблена підприємством, була максимальною.

Розв'язання

Складемо математичну модель задачі.

Позначимо через x_1 і x_2 кількість виробів A і B, відповідно. Оскільки є обмеження на виділений підприємству фонд сировини кожного виду, то змінні x_1 і x_2 повинні задовольняти систему нерівностей:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 4 \\ x_1 + x_2 \le 3 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Загальна вартість продукції, що виробило підприємство за умовою випуску x_1 виробів A та x_2 виробів B: $Z_{\max} = 3x_1 + 4x_2$. За допомогою балансових змінних $x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0,\ x_5 \ge 0$ система обмежень задачі у канонічному вигляді така:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_5 = 8 \end{cases}$$

$$x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5}.$$

Балансові змінні за своїм економічним змістом означають кількість сировини того чи іншого виду, яка за даного плану виробництва не буде використана (залишок).

Складемо симплекс-таблицю (табл. 2.2).

Таблиця 2.2

Симплекс-таблиця

і	базис	$C_{баз}$	C_j	3	4	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	4	1	2	1	0	0
2	A_4	0	3	1	1	0	1	0
3	A_5	0	8	2	1	0	0	1
4	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
5	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	–3	–4	0	0	0
6	A_3	0	1	0	1	1	–1	0
7	A_1	3	3	1	1	0	1	0
8	A_5	0	2	0	–1	0	–2	1
9	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		9	3	3	0	3	0
10	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	0	–1	0	3	0
11	A_2	4	1	0	1	1	–1	0
12	A_1	3	2	1	0	–1	2	0
13	A_5	0	3	0	0	1	–3	1
14	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		10	3	4	–1	–2	0
15	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	0	0	–1	–2	0

І ітерація. Значення всіх основних змінних x_1, x_2 дорівнюють нулю, а додаткові змінні набувають своїх значень відповідно обмеженням задачі. Ці значення змінних відповідають такому плану, за яким нічого не виробляється, сировина не використовується і значення лінійної функції $Z(X_0)$ дорівнює нулю. Цей план не є оптимальним, тому що $\Delta_1 = -3$, $\Delta_2 = -4$.

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{4}{1};\frac{3}{1};\frac{8}{2}\right\} = \frac{3}{1} \qquad \theta_2 = \min\left\{\frac{4}{2};\frac{3}{1};\frac{8}{1}\right\} = \frac{4}{2}.$$

$$|\Delta_1 \cdot \theta_1| = |3 \cdot (-3)| = 9 - \max, \quad |\Delta_2 \cdot \theta_2| = |2 \cdot (-4)| = 8.$$

Таким чином, будемо вводити до базису вектор $\vec{a}_1$, а виводити – $\vec{a}_4$.

II ітерація. Отриманий план $X_1 = (3;\,0;\,1;\,0;\,2)$ не є оптимальним, оскільки оцінка $\Delta_2 = -3 < 0$. Його необхідно покращити. Для цього необхідно обчислити $\theta_2 = \min\left\{\frac{1}{1}; \frac{3}{1}; -\right\} = \frac{1}{1}$. Таким чином, вводимо до базису вектор $\vec{a}_2$, а виводимо $\vec{a}_3$.

III ітерація. Усі оцінки $\Delta_j \geq 0$, тому план оптимальний.

$$X^* = (2;\,1;\,0;\,0;\,3),\ Z_{\max}(X^*) = 10.$$

Висновок: для того, щоб отримати максимальний прибуток у розмірі 10 у. о. необхідно виготовити 2 вироби A і 1 виріб B. За цієї умови ресурси першого та другого видів будуть використані повністю, а ресурс третього виду буде невикористаний на 3 кг.

Приклад 2.6. Розв'яжіть задачу симплексним методом.

$$Z_{\max} = x_1 + 2x_2 + 3x_3$$

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 \leq 25 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 15 \end{cases}$$

$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1,3}.$$

Розв'язання

Система обмежень задачі у канонічному вигляді:

$$\begin{cases} 6x_1 + 4x_2 + 3x_3 + x_4 = 25 \\ 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_5 = 15. \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю (табл. 2.3).

I ітерація. Вихідний план X_0 не є оптимальним, тому що є три від'ємні оцінки:

$$\Delta_1 = -1,\ \Delta_2 = -2,\ \Delta_3 = -3.$$

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{25}{6}; \frac{15}{5}\right\} = \frac{15}{5}, \quad \theta_2 = \min\left\{\frac{25}{4}; \frac{15}{3}\right\} = \frac{15}{3}, \quad \theta_3 = \min\left\{\frac{25}{3}; \frac{15}{2}\right\} = \frac{15}{2}.$$

$$|\Delta_1 \cdot \theta_1| = |(-1) \cdot 3| = 3, \qquad |\Delta_2 \cdot \theta_2| = |(-2) \cdot 2| = 4,$$

$$|\Delta_1 \cdot \theta_1| = |(-3) \cdot 7{,}5| = 22{,}5 - \max .$$

Таким чином будемо вводити до базису вектор $\vec{a}_3$, а виводити $-\vec{a}_5$.

II ітерація. Отриманий план $X_1 = X^* = (0; 0; \frac{7}{2}; \frac{29}{2}; 0)$ є оптимальним, оскільки всі оцінки $\Delta_j \geq 0$. Цільова функція дорівнює $Z_{\max}(X^*) = \frac{21}{2}$.

Таблиця 2.3

Симплекс-таблиця

i	базис	$C_{баз}$	C_j	1	2	3	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	25	6	4	3	1	0
2	A_5	0	15	5	3	2	0	1
3	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
4	$\Delta_j = z_j - c_j$			–1	–2	-3	0	0
5	A_4	0	29/2	–3/2	–1/2	0	1	–3/2
6	A_3	3	7/2	5/2	3/2	1	0	1/2
7	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		21/2	15/2	9/2	3	0	3/2
8	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	13/2	5/2	0	0	3/2

Приклад 2.7. Розв'яжіть задачу симплексним методом.

$$Z_{\max} = x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4, \\ -3x_1 + x_2 \leq 0, \\ -x_1 - x_2 \leq 4, \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Додаємо балансові змінні, канонічна система обмежень має вигляд:

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 4, \\ -3x_1 + x_2 + x_4 = 0, \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 4. \end{cases}$$

Складемо симплекс-таблицю (табл. 2.4).

Таблиця 2.4

Симплекс-таблиця

i	базис	$C_{баз}$	C_j	1	1	0	0	0
			A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	A_3	0	4	1	–4	1	0	0
2	A_4	0	0	–3	1	0	1	0
3	A_5	0	4	–1	–1	0	0	1
4	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
5	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	–1	–1	0	0	0
6	A_1	1	4	1	–4	1	0	0
7	A_4	0	12	0	–11	3	1	0
8	A_5	0	8	0	–5	1	0	1
9	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		4	1	–4	1	0	0
10	$\Delta_j = z_j - c_j$		–	0	–5	1	0	0

I ітерація. Вихідний план X_0 не є оптимальним, тому що $\Delta_1 = -1$, $\Delta_2 = -1$.

$$\theta_1 = \min\left\{\frac{4}{1};-;-\right\} = \frac{4}{1}, \quad \theta_2 = \min\left\{-;\frac{0}{1};-\right\} = \frac{0}{1}.$$

$$|\Delta_1 \cdot \theta_1| = |(-1)\cdot 4| = 4 - \max, \qquad |\Delta_2 \cdot \theta_2| = |(-1)\cdot 0| = 0.$$

Таким чином будемо вводити до базису вектор $\vec{a}_1$, а виводити $-\vec{a}_3$.

II ітерація. Отриманий план $X_1 = (4; 0; 0; 12; 8)$ не є оптимальним, оскільки оцінка $\Delta_2 = -5 < 0$. Але і всі елементи вектора $\vec{a}_2$ від'ємні, план покращити не можна. Таким чином, задача не має розв'язків.

2.2. Завдання для самостійної роботи

2.2.1. Для виготовлення трьох видів виробів *A, B* і *C* використовується токарне, фрезерне, зварювальне та шліфувальне обладнання. Витрати часу на обробку одного виробу для кожного з типів обладнання вказані в табл. 2.5. У ній же вказаний загальний фонд робочого часу кожного з типів обладнання, що використовується, а також прибуток від реалізації одного виробу кожного виду.

Таблиця 2.5

Вихідні дані

Типи обладнання	Витрати часу (станко-год.) на обробку одного виробу виду			Загальний фонд робочого часу обладнання (год.)
	A	B	C	
Фрезерне	2	3	5	220
Токарне	2	8	2	180
Зварювальне	7	7	5	340
Шліфувальне	5	6	4	260
Прибуток (грн)	24	18	20	

Необхідно визначити, скільки виробів та якого виду слід виготовити підприємству, щоб прибуток від їх реалізації був максимальний. Складіть математичну модель задачі та визначте, яким методом вона може бути розв'язана та чому?

2.2.2. Виділено два маршрути, за кожним з яких необхідно зробити певну кількість рейсів, і два типи автомашин, які можна використати протягом 4-х і 1-ї години. Норми витрат часу рейсу та прибуток рейсу наведені в табл. 2.6. Побудуйте математичну модель задачі з визначення оптимальної кількості рейсів і розв'яжіть її графічним методом.

Таблиця 2.6

Вихідні дані

Типи машини	Норми витрат, г/м	
	1-й маршрут	2-й маршрут
1	2	3
2	0	1
Прибуток	1	2

2.2.3. Раціон для харчування тварин на фермі складається з двох різновидів кормів I і II. Один кг корму коштує 80 грош. од. і складає: 1 од.

жирів, 3 од. білків, 1 од. вуглеводів, 2 од. нітратів. Один кілограм корму II коштує 10 грош. од. і складає 3 од. жирів, 3 од. білків, 8 од. вуглеводів, 4 од. нітратів.

Складіть найбільш дешевий раціон харчування, що забезпечує жирів не менше 6 од., білків не менше 9 од., вуглеводів не менше 8 од., нітратів не більше 16 од. Розв'яжіть графічним методом.

2.2.4. Для виробництва двох видів виробів A і B підприємство використовує три різновиди сировини. Інші умови завдання наведені в табл. 2.7.

Таблиця 2.7

Вихідні дані

Різновиди сировини	Норми витрат сировини на один виріб, кг		Загальна кількість сировини, кг
	A	B	
1	2	3	4
I	12	4	300
II	4	4	120
III	3	12	252
Прибуток від реалізації одного виробу, грош. од.	30	40	

Складіть такий план випуску продукції, за якого прибуток підприємства від реалізації продукції буде максимальним за умови, що виріб B треба створити не менше, ніж виробів A. Розв'яжіть задачу графічним і симплексним методами.

2.2.5. Кондитерська фабрика для виробництва трьох видів карамелі *A*, *B* і *C* використовує три види основної сировини: сахарний пісок, патоку та фруктове пюре.

Норми витрат сировини кожного виду на виробництво 1 т карамелі кожного виду наведені в табл. 2.8. У ній же вказана загальна кількість сировини кожного виду, яка може бути використана фабрикою, а також наведений прибуток від реалізації 1 т карамелі зазначеного виду.

Знайдіть план виробництва карамелі, що забезпечує максимальний прибуток від реалізації симплексним методом.

Таблиця 2.8

Вихідні дані

Види сировини	Норми витрати сировини (т) на 1 т карамелі			Загальна кількість сировини (т)
	A	B	C	
Сахарний пісок	1	1	2	8
Патока	2	1	1	6
Фруктове пюре	–	2	3	12
Прибуток від реалізації 1 т (грн)	10	11	12	

2.2.6. Прибуток від реалізації продуктів харчування чотирьох видів, відповідно, 4, 6, 9 і 6 грош. од. за одиницю продукції.

Витрати на постачання продуктів до першого магазину не повинні перевищувати 30 грош. од., до другого – 20 грош. од. Норма витрат на постачання одиниці продуктів до кожного магазину наведена в табл. 2. 9.

Таблиця 2.9

Вихідні дані

№ магазину	Витрати на постачання грош. од/ 1 кг			
	Печиво	Цукор	Борошно	Цукерки
1	2	0	1	3
2	1	3	3	2

Побудуйте математичну модель задачі визначення оптимального плану постачання продуктів за умови максимізації прибутку та розв'яжіть її симплексним методом.

2.2.7. Розв'яжіть задачу лінійного програмування графічним методом.

1. $$Z_{\max} = 2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \geq 5 \\ 4x_1 + 5x_2 \geq 20 \\ x_1 - x_2 \leq 2 \\ 5\,x_1 \leq 25 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2. $$Z_{\min} = -x_1 + 2x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \leq 10 \\ 4x_1 + 3x_2 \geq 12 \\ -x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ -2\,x_1 + 4x_2 \leq 9 \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

3. $Z_{\min} = -x_1 - x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 + 5x_2 \le 40 \\ 2x_1 + 5x_2 \ge 6 \\ -x_1 + x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 1 \end{cases}$$

$x_2 \ge 0.$

4. $Z_{\max} = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 5x_1 - 6x_2 \le 3 \\ x_1 + x_2 \ge 1 \\ -3x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

5. $Z_{\min} = 3x_1 - 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 \le 4 \\ x_1 + 2x_2 \ge 7 \\ 2x_1 + x_2 \ge 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

6. $Z_{\max} = 2x_1 + 3x_2$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 4 \\ 5x_1 + 2x_2 \ge 10 \\ 4x_1 - 3x_2 \le 12 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

2.2.8. Розв'яжіть задачу симплексним методом.

1. $Z_{\max} = -3x_1 - 3x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 \le 5 \\ -4x_1 + 5x_3 < 5 \\ 6x_1 - 6x_2 - 2x_3 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

2. $Z_{\min} = 2x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 6x_1 - 4x_2 - 4x_3 \le 5 \\ x_1 + 6x_2 + x_3 < 6 \\ 2x_1 + 5x_2 - 6x_3 \le 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

3. $Z_{\max} = 3x_1 + 5x_2 + 4x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \le 9 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 < 8 \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 7 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

4. $Z_{\min} = 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 2 \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_4 = 6 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

5. $Z_{\max} = 2x_1 + x_2 + 2x_3$

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 - x_5 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 10 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0.$

6. $Z_{\min} = 4x_1 + 2x_2 + 2x_3$

$$\begin{cases} 7x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 6 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0,\ x_3 \ge 0,\ x_4 \ge 0.$

Практичне заняття 3
Теорія двоїстості й аналіз лінійних моделей економічних оптимізаційних задач. Транспортна задача

3.1. Приклади розв'язання завдань

До кожної задачі лінійного програмування можна поставити у відповідність іншу задачу лінійного програмування, що називають двоїстою стосовно вихідної задачі. Знаючи оптимальне рішення однієї задачі, на основі теорем двоїстості можна знайти оптимальне рішення іншої, не розв'язуючи її.

План побудови математичної моделі двоїстої задачі

1. Кожній нерівності системи обмежень вихідної задачі ставиться у відповідність змінна y_i.

2. Коефіцієнтами функції цілі двоїстої задачі є вільні члени системи обмежень вихідної задачі.

3. Коефіцієнти системи обмежень вихідної задачі утворюють транспоновану матрицю коефіцієнтів системи обмежень двоїстої задачі.

4. Знаки нерівностей змінюються на протилежні. Вільними членами системи обмежень стають коефіцієнти функції цілі вихідної задачі.

5. Умова максимізації цільової функції замінюється на умову мінімізації, та навпаки.

Теорема 3.1. Якщо одна задача має оптимальний розв'язок, то інша задача також має оптимальний розв'язок, причому $Z_{\max}\left(X^*\right)=F_{\min}\left(Y^*\right)$ або $Z_{\min}\left(X^*\right)=F_{\max}\left(Y^*\right)$. Якщо одна із двоїстих задач нерозв'язна через $Z_{\max}\left(X^*\right)\to\infty$ (або $F_{\min}\left(Y^*\right)\to\infty$), то інша задача не має припустимих рішень.

Теорема 3.2. Якщо після підстановки компонент оптимального плану в систему обмежень вихідної задачі i-те обмеження перетворюється в нерівність, то i-та компонента оптимального плану двоїстої задачі дорівнює нулю.

Приклад 3.1. Для виготовлення трьох видів продукції *A, B* і *C* використовують два види сировини, яку підприємство може щомісяця закуповувати в обмежених обсягах. Щомісячне знаходження необхідної сировини, витрати його на виготовлення одиниці кожного виду продукції, а також прибуток від реалізації одиниці продукції подані в табл. 3.1.

Таблиця 3.1

Вихідні дані

Види сировини	Норми витрат			Запаси, кг
	A	*B*	*C*	
I	1	1	1	3
II	1	2	0	4
Прибуток, грн	6	8	1	

Визначте, яку кількість продукції кожного виду підприємство повинно випускати щомісячно, щоб прибуток від її реалізації був максимальним.

Складіть двоїсту задачу до даної та розв'яжіть обидві задачі за допомогою симплексного методу та теорем двоїстості, а також перевірте точку оптимуму двоїстої задачі за правилом Δ-рядка.

Розв'язання

Математична модель задачі має вигляд:

$$Z_{\max} = 6x_1 + 8x_2 + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \le 3, \\ x_1 + 2x_2 \le 4, \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$$

Пряма задача на мінімум має обмеження вигляду "≤", кількість невідомих дорівнює 3 (x_1, x_2, x_3) і обмежень 2. Тоді двоїста задача на максимум буде мати обмеження вигляду "≥", кількість невідомих дорівнюватиме 2 (y_1, y_2) і обмежень 3. Змінні в обох задачах повинні бути невід'ємними. Коефіцієнти цільової функції прямої задачі є величинами у правих частинах системи обмежень двоїстої задачі, та навпаки. Транспонувавши матрицю коефіцієнтів системи обмежень вихідної задачі, маємо такий вигляд двоїстої задачі:

$$F_{\min} = 3y_1 + 4y_2$$

$$\begin{cases} y_1 + y_2 \geq 6, \\ y_1 + 2y_2 \geq 8, \\ y_1 \geq 1, \end{cases}$$

$$y_2 \geq 0.$$

Розв'яжемо вихідну задачу симплекс-методом. Для цього запишемо систему обмежень у канонічному вигляді за допомогою балансових змінних, а потім складемо симплекс-таблицю 3.2.

Таблиця 3.2

Симплекс-таблиця

i	базис	$C_{баз}$	C_j / A_0	1 / A_1	1 / A_2	0 / A_3	0 / A_4	0 / A_5
1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A_4	0	3	1	1	1	1	0
2	A_5	0	4	1	2	0	0	1
3	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		0	0	0	0	0	0
4	$\Delta_j = z_j - c_j$			–6	–8	–1	0	0
1	2	3	4	5	6	7	8	9
5	A_4	0	1	1/2	0	1	1	–1/2
6	A_2	8	2	1/2	1	0	0	1/2
7	z_j		16	4	8	0	0	4
8	Δ_j			–2	0	–1	0	4
9	A_1	6	2	1	0	2	2	–1
10	A_2	8	1	0	1	–1	–1	1
11	$z_j = \vec{C}_{баз} \cdot \vec{a}_j$		20	6	8	4	4	2
12	$\Delta_j = z_j - c_j$			0	0	3	4	2

Таким чином, $X^* = (2, 1, 0, 0, 0)$, $Z_{\max} = 20$.

За першою теоремою двоїстості: $Z_{\max} = F_{\min} = 20$.

Використовуючи другу теорему, знайдемо розв'язок двоїстої задачі.

Підставимо $x_1 = 2$, $x_2 = 1$ і $x_3 = 0$ в обмеження вихідної задачі.

$$\begin{cases} 2+1=3, \\ 2+2\cdot 1=4. \end{cases}$$

Перше та друге обмеження виконуються як рівності, тому в оптимальному розв'язку $y_1 > 0$ і $y_2 > 0$.

Маємо: $x_1 = 2 > 0$ і $x_2 = 1 > 0$. Тому перше та друге обмеження двоїстої задачі виконуються як рівності. Таким чином:

$$\begin{cases} y_1 + y_2 = 6, \\ y_1 + 2y_2 = 8. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 + y_2 = 6, \\ y_2 = 2. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 4, \\ y_2 = 2. \end{cases}$$

Отже, $Y^* = (4, 2)$ і $F_{\min} = Z(X^*) = 3\cdot 4 + 4\cdot 2 = 20$.

За правилом Δ-рядка отримаємо $Y^* = (4, 2)$. Це той самий розв'язок двоїстої задачі, що й за теоремами двоїстості.

Отже, $X^* = (2, 1, 0)$, $Z_{\max} = 20$, $Y^* = (4, 2)$, $F_{\min} = 20$.

Змінні $y_1^* = 4$ і $y_2^* = 2$ визначають умовні двоїсті оцінки одиниці сировини, відповідно, I і II типів. Ці дві оцінки відмінні від нуля, тому використовуються цілком. Позитивні умовні оцінки мають тільки ті типи сировини, які повністю використовуються за оптимальним планом виробництва. Отже, двоїсті оцінки характеризують дефіцит сировини, що використовується.

Величина двоїстої оцінки показує, наскільки зросте максимальне значення цільової функції вихідної задачі у разі збільшення кількості сировини відповідного типу на 1 кг. Так, збільшення кількості сировини I типу на 1 кг приведе до того, що з'явиться можливість знайти новий план виробництва, за яким щомісячний загальний прибуток від реалізації виробів може збільшитися на $\Delta Z = 4$.

Транспортна задача (ТЗ) становить основу цілого класу оптимізаційних задач, пов'язаних із розподілом ресурсів за умови існування певних обмежень щодо їх кількості або умов розподілу. Загальна постановка ТЗ полягає у визначенні оптимального плану перевезень деякого однорідного вантажу з m пунктів відправлення (складів, постачальників) A_1, A_2, …, A_m в n пунктів призначення (споживачів) B_1, B_2, …, B_n. Вигляд математичної моделі ТЗ подано в табл. 3.3.

Таблиця 3.3

Таблиця перевезень

Поста-чальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	…	B_n	
A_1	c_{11} x_{11}	c_{12} x_{12}	…	c_{1n} x_{1n}	a_1
A_2	c_{21} x_{21}	c_{22} x_{22}	…	c_{2n} x_{2n}	a_2
…	…	…	…	…	…
A_m	c_{m1} x_{m1}	c_{m2} x_{m2}	…	c_{mn} x_{mn}	a_m
Потреби, b_j	b_1	b_2	…	b_n	$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$

План розв'язання транспортної задачі

1. Визначання будь-якого вихідного опорного плану (за методом північно-західного кута (діагональний) або мінімальної вартості).

2. Перевірка плану на оптимальність за методом потенціалів. Якщо допустимий розв'язок $X = \left(x_{ij}\right)_{m\,x\,n}$ ТЗ є оптимальним, то існують потенціали (числа) постачальників u_i (потенціал i-го постачальника, $i = \overline{1, m}$) і споживачів v_j (потенціал j-го споживача, $j = \overline{1, n}$). Для вільних клітинок у табл. 3.3 повинна виконуватись така умова: $\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} > 0$, якщо $x_{ij}^{\ *} = 0$.

3. Поліпшення вихідного опорного плану, якщо знайдений план не є оптимальним (перерозподіл за знайденим циклом).

4. Новий план також перевіряють на оптимальність.

5. Якщо план оптимальний, то він та його вартість і є розв'язком ТЗ.

Приклад 3.2. Маємо три пункти відправлення і чотири пункти призначення. Запаси продукції у кожного постачальника становлять 60, 65, 70 одиниць, відповідно, а потреби кожного споживача – 40, 50, 70, 35 одиниць. Тарифи c_{ij} представлені вартісною матрицею перевезень від пункту A_i в пункт B_j:

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 4 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Побудуйте початковий опорний план: 1) методом північно-західного кута; 2) методом мінімальної вартості.

Обидва варіанти перевірте методом потенціалів і знайдіть оптимальний план перевезення.

Розв'язання

Задачу спочатку слід перевірити на збалансованість (загальні запаси повинні дорівнювати загальним потребам):

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 60 + 65 + 70 = \sum_{j=1}^{4} b_j = 40 + 50 + 70 + 35 = 195.$$

Отже, ТЗ є закритою.

1. Запишемо вихідні дані задачі у вигляді таблиці та складемо вихідний опорний план перевезень за методом північно-західного кута.

Згідно з цим методом першою заповнюється клітинка, що має індекси $i = 1$, $j = 1$.

Порівнявши запаси постачальника A_1 та потреби споживача B_1, визначаємо, що обсяг постачання до цієї клітинки становить 40 одиниць.

Оскільки потреби споживача B_1 задовольнили в повному обсязі, а в постачальника A_1 залишилось ще 20 одиниць, то наступною заповнюємо клітинку $i = 1$, $j = 2$, скерувавши туди необхідні 20 одиниць вантажу.

Наступною заповнюємо клітинку $i = 2$, $j = 2$. Відповідно до потреб споживача B_2 спрямовуємо туди 30 одиниць вантажу. Оскільки в постачальника A_2 залишилося ще 35 одиниць, поставимо цей вантаж до клітинки $i = 2$, $j = 3$. Тепер постачальник A_2 вичерпав свої можливості, але споживачеві B_3 необхідні ще 35 одиниць.

Візьмемо цей вантаж у постачальника A_3, тобто робимо поставку такого обсягу до клітинки $i=3,\ j=3$. У постачальника A_3 лишилося ще 35 одиниць, але рівно стільки необхідно споживачеві B_4. Поставимо ці 35 одиниць до клітинки $i=3,\ j=4$.

Отже, весь вантаж було розподілено та потреби всіх споживачів задовільнили.

Маємо вихідний опорний план X_0, який подано в табл. 3.4.

Таблиця 3.4

Вихідний опорний план X_0

Поста-чальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 40	4 20	3	2	60
A_2	3	1 30	2 35	3	65
A_3	5	4	1 35	5 35	70
Потреби, b_j	40	50	70	35	195 / 195

За вихідним опорним планом вартість перевезень становить:

$$Z(X_0)=2\cdot 40+4\cdot 20+1\cdot 30+2\cdot 35+1\cdot 35+5\cdot 35=470.$$

Цей план є невиродженим, оскільки кількість заповнених клітинок таблиці 3.4 становить $m+n-1=6$, де m – кількість постачальників ($m=3$), n – кількість споживачів ($n=4$). Отже, кількість заповнених клітинок дорівнює числу базисних невідомих.

Перевіримо за методом потенціалів, чи є вихідний план оптимальним. З цією метою кожному постачальникові поставимо у відповідність потенціал u_i, а споживачеві – потенціал v_j.

Складемо таблицю потенціалів таким чином як у табл. 3.5. Нехай $u_1=0$, тоді значення інших потенціалів визначаємо за умов, що для кожної заповненої клітинки таблиці перевезень сума потенціалів постачальника та споживача дорівнює вартості перевезень одиниці вантажу між цими учасниками, тобто $u_i + v_j = c_{ij}$.

Тепер перевіряємо, чи виконується для всіх вільних клітинок таблиці перевезень умова: $u_i + v_j \le c_{ij}$ $(i = \overline{1,3},\ j = \overline{1,4})$ ($\Delta_{ij} = u_i + v_j - c_{ij} \ge 0$).

Оскільки в табл. 3.5 є три клітинки з додатною оцінкою: $\Delta_{13} = 2$, $\Delta_{14} = 7$, $\Delta_{24} = 3$, то план X_0 не є оптимальним. Його можна покращити, перерозподіливши вантаж, починаючи з клітинки з найбільшою оцінкою Δ_{14}.

Таблиця 3.5

Таблиця потенціалів для плану X_0

u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 4$	$v_3 = 5$	$v_4 = 9$
$u_1 = 0$	2	4	5 / 3	9 / 2
$u_2 = -3$	-1 / 3	1	2	6 / 3
$u_3 = -4$	-2 / 5	0 / 4	1	5

У таблиці перевезень, котра складає план X_0, побудуємо замкнутий цикл перерозподілу (табл. 3.6).

Таблиця 3.6

Замкнутий цикл перерозподілу перевезень для плану X_0

План X_0	40	-Θ 20		+Θ
		+Θ 30	-Θ 35	
			+Θ 35	-Θ 35

Починаючи зі знака "+", яким позначимо клітинку з найбільшою додатною оцінкою, розставимо по черзі знаки "–" і "+" у всіх кутах.

Кількість вантажу, що потрібно перерозподілити за циклом, визначаємо як найменшу з поставок, які відповідають "від'ємним" кутам циклу:

$$\theta = \min\{20;\ 35;35\} = 20\,.$$

Отримаємо новий опорний план X_1 (табл. 3.7), з переходом до якого загальна вартість перевезень повинна зменшитися на величину $\Delta Z = \Delta \cdot \theta = 7 \cdot 20 = 140$, і цільова функція дорівнюватиме $Z(X_1) = 330$.

Таблиця 3.7

Замкнутий цикл перерозподілу перевезень для плану X_1

План X_1	40			20
		50	15 -Θ	+Θ
			55 +Θ	15 -Θ

Перевіримо, чи є план X_1 оптимальним Для цього складемо відповідну йому таблицю потенціалів (табл. 3.8).

План X_1 не є оптимальним, оскільки має додатні оцінки $\Delta_{21} = 3$ і $\Delta_{24} = 3$. Вони однакові, отже, необхідно зробити поставку до клітинки $i = 2$, $j = 4$ (де найбільш заповнений стовпчик). Цикл перерозподілу вказано пунктиром у таблиці перевезень за планом X_1 (табл. 3.7). За цим циклом перерозподіляємо вантаж у кількості: $\theta = \min\{15;\ 15\} = 15$.

Таблиця 3.8

Таблиця потенціалів для плану X_1

u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = -3$	$v_3 = -2$	$v_4 = 2$
$u_1 = 0$	2	-3 / 4	-2 / 3	2
$u_2 = 4$	6 / 3	1	2	6 / 3
$u_3 = 3$	5 / 5	0 / 4	1	5

Новий план X_2 (табл. 3.9) перевіряємо на оптимальність (табл. 3.10).

Таблиця 3.9

План перевезень X_2

План X_2	40			20
		50		15
			70	

Таблиця 3.10

Таблиця потенціалів для плану X_2

u_i \ v_j	$v_1 = 2$	$v_2 = 0$	$v_3 = 1$	$v_4 = 2$
$u_1 = 0$	2	0 / 4	1 / 3	2
$u_2 = 1$	3 / 3	1	2	3
$u_3 = 0$	2 / 5	0 / 4	1	2 / 5

За планом X_2 загальна вартість перевезень повинна становити:

$$Z(X_2) = 330 - 3 \cdot 15 = 285.$$

Оскільки всі оцінки є недодатними, то план X_2 оптимальний. Загальна вартість перевезень за цим планом є мінімальна та дорівнює:

$$Z_{\min} = Z(X^*) = 2 \cdot 40 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 50 + 3 \cdot 15 + 1 \cdot 70 = 285.$$

Загальна вартість перевезень продукції від постачальників до споживачів мінімальна за таким планом:

$$X^* = \begin{pmatrix} 40 & 0 & 3 & 20 \\ 0 & 50 & 0 & 15 \\ 0 & 0 & 70 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Побудуємо опорний план методом мінімальної вартості (табл. 3.11).

Таблиця 3.11

Вихідний опорний план X_0

Поста-чальники	Споживачі				Запаси, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	2 40	4 20	3	2	60
A_2	3	1 30	2 35	3	65
A_3	5	4	1 35	5 35	70
Потреби, b_j	40	50	70	35	195 / 195

Згідно з цим методом клітинки заповнюються поступово, починаючи з тієї, що має найменшу вартість перевезення, і до найдорожчої.

Знайдений опорний план дорівнює оптимальному $X_0 = X^*$.

Отже, слід зауважити, що вихідний опорний план перевезень краще складати за методом мінімальної вартості Це може скоротити пошук оптимального плану та зменшити кількість циклів для розв'язання задачі.

3.2. Завдання для самостійної роботи

3.2.1. Для виробництва продукції трьох видів A, B і C використовується три різноманітних види сировини. Запаси сировини становлять 360, 192 і 180 кг. Норми витрат кожного із видів сировини на одиницю продукції даного виду та ціна одиниці продукції кожного виду приведені в табл. 3.12. Необхідно:

а) визначити план випуску продукції, який забезпечує її максимальний випуск;

б) сформувати для даної задачі двоїсту та знайти оптимальний план двоїстої задачі, користуючись теоремами двоїстості.

Таблиця 3.12

Вихідні дані

Вид сировини	Норми витрат сировини (кг) на одиницю продукції		
	Виріб A	Виріб B	Виріб C
I	18	15	12
I	6	4	8
III	5	3	3
Ціна одиниці продукції (грн)	9	10	16

3.2.2. Запишіть до даної ЗЛП двоїсту та розв'яжіть обидві задачі.

1. $Z_{\max} = x_1 + 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 \le 8 \\ 2x_1 + x_2 \le 6 \\ x_1 + x_2 \le 1 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

2. $Z_{\min} = -2x_1 + x_2$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 6 \\ 2x_1 + x_2 \le 8 \\ 3x_1 + x_2 \le 3 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

3. $Z_{\min} = -2x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ x_1 - 4x_2 \le 2 \\ x_1 - x_2 \le 5 \end{cases}$$

$x_2 \ge 0.$

4. $Z_{\max} = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18, \\ -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 \le 24, \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36, \end{cases}$$

$x_1, x_2, x_3 \ge 0.$

5. $Z_{\max} = 3x_1 + 2x_2 - 6x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 \le 18 \\ -3x_1 + 2x_2 - 3x_3 \le 24 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 \le 36 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0, \quad x_3 \ge 0.$

6. $Z_{\min} = -2x_1 - x_2 + x_3$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 6x_3 \le 12 \\ 3x_1 + 5x_2 - 12x_3 \le 14 \\ -3x_1 + 6x_2 + 4x_3 \le 18 \end{cases}$$

$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$

3.2.3. Знайдіть оптимальній розв'язок транспортних задач:

1. $\vec{a} = (60;\, 70;\, 20;\, 45)$,

$\vec{b} = (40;\, 30;\, 30;\, 50)$.

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 1 & 2 & 22 & 5 \\ 10 & 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}$$

2. $\vec{a} = (30;\, 90;\, 40)$,

$\vec{b} = (10;\, 30;\, 50;\, 50;\, 80)$.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 4 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 7 \\ 4 & 10 & 5 & 1 & 16 \end{pmatrix}$$

3. $\vec{a} = (200;\, 300;\, 200;\, 200;\, 100)$,

$\vec{b} = (200;\, 200;\, 100;\, 200)$.

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \\ 4 & 3 & 5 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

4. $\vec{a} = (10;\, 15;\, 25)$,

$\vec{b} = (5;\, 10;\, 20;\, 15)$.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 6 & 7 \\ 1 & 9 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Практичне заняття 4
Цілочислове програмування

4.1. Приклади розв'язання завдань

Значна частина задач вимагає цілочислового розв'язку. Ця умова є нелінійна, вона може зустрічатись як в лінійних, так і нелінійних задачах.

У загальному вигляді математична модель цілочислового програмування має вигляд:

$$Z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max(\min),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = \overline{1,m}, \; j = \overline{1,n}, \quad x_j \ge 0, \quad x_j - цілі.$$

За наявності в задачі лінійного програмування двох змінних, вона може бути розв'язана графічним методом. У випадку, коли координати оптимального плану нецілочислові, в області припустимих рішень будують цілочислові лінії і знаходять на межах їх перетину такі цілі числа x_1 і x_2, які задовольняють систему обмежень і за яких значення цільової функції найбільш близьке до оптимального нецілочислового розв'язку. Координати такої вершини і є цілочисловим розв'язком.

Приклад 4.1.

$$Z_{\min} = -2x_1 + x_2$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1 - x_2 \le 1, \\ x_1,\ x_2 \ge 0, - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Розв'язання

Чотирикутник *OABC* – область допустимих розв'язків без умови цілочисельності (рис. 4.1).

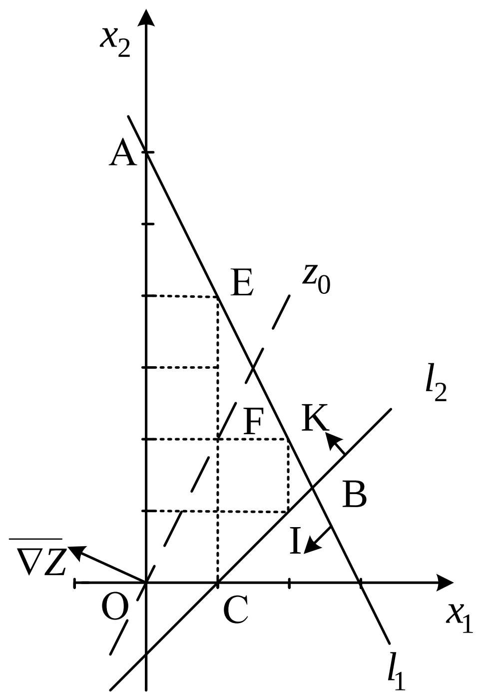

Рис. 4.1. **Розв'язання задачі графічним методом**

Оптимальний розв'язок у точці $B\left(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}\right)$, $Z_{\min} = -\frac{10}{3}$.

Умову цілочисловості задовольняють 13 точок. Замінюємо багатокутник *OABC* на *OAEFKIC*, що містить усі допустимі точки із цілочисловими координатами. За градієнтом оптимум у точці $L(2,1)$, $Z_{\min} = (X_{\text{ціл}}) = -2 \cdot 2 + 1 = -3$.

Цілочислове розв'язання можна знайти з використанням алгоритму, запропонованого Гоморі.

План методу Гоморі

1. Симплексним методом знаходять оптимальний розв'язок задачі.
2. Якщо розв'язок цілочисловий, то задача розв'язана.
3. Якщо розв'язок нецілочисловий та містить хоча б одну дробову координату, то накладають додаткове обмеження за цілочисловістю, обчислення продовжують до отримання нового розв'язку.

$$\{\beta_i\} - \sum_{x_j \in \{\text{ВЗ}\}} \{\alpha_{ij}\} x_j \le 0 .$$

4. Якщо і цей розв'язок є нецілочисловим, то знову накладають додаткове обмеження. Обчислення продовжують доти, поки не буде отримане цілочисловий розв'язок.

Приклад 4.2. Розв'яжімо задачу 4.1 за допомогою методу Гоморі. Для цього зведемо її до канонічного вигляду. Отримаємо:

$$Z_{\min} = -2x_1 + x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 + x_4 = 1, \\ x_1,\, x_2, x_3, x_4 \ge 0, - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Далі використовуємо симплекс-таблицю 4.1.

Таблиця 4.1

Симплексна таблиця

Б	$C_б$	C_j	-2	14	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
1	2	3	4	5	6	7
A_3	0	6	2	1	1	0
A_4	0	1	1	–1	0	1
	Δ_j	0	2	–1	0	0

Закінчення табл. 4.1

1	2	3	4	5	6	7
A_3	0	4	0	3	1	–2
A_1	–2	1	1	–1	0	1
	Δ_j	–2	0	1	0	–2
A_2	1	4/3	0	1	1/3	–2/3
A_1	–2	7/3	1	0	1/3	1/3
	Δ_j	–10/3	0	0	–1/3	–4/3

Отже, розв'язком задачі є $X\left(\frac{7}{3},\frac{4}{3},0,0\right)$. Він не є цілочисловим. Тому введемо додаткове обмеження. Воно складається для тієї змінної, дробова частина від якої максимальна. Знайдемо дробові частини чисел 7/3 і 4/3. У цьому випадку вони однакові та дорівнюють 1/3. Складемо додаткове обмеження для змінної x_2, яке набуває вигляду:

$$\left\{\frac{4}{3}\right\}-\left\{\frac{1}{3}\right\}x_3-\left\{-\frac{2}{3}\right\}x_4\leq 0.$$

Канонічний вигляд цієї умови такий: $\frac{1}{3}x_3+\frac{1}{3}x_4-x_5=\frac{1}{3}$.

Подальше обчислення наведене в табл. 4.2.

Таблиця 4.2

Симплексна таблиця

Б	$C_б$	C_j	2	4	0	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_2	1	4/3	0	1	1/3	–2/3	0
A_1	–2	7/3	1	0	1/3	–1/3	0
	0	1/3	0	0	1/3	1/3	–1
	Δ_j	–10/3	0	0	–1/3	–4/3	0
A_{25}	1	1	0	1	0	–1	1
A_1	–2	2	1	0	0	0	1
A_3	0	1	0	0	1	1	–3
	Δ_j	–3	0	0	0	–1	–1

З табл. 4.2 випливає, що оптимальним планом задачі з додатковим обмеженням є вектор $X^*(2,1,1,0,0)$, водночас $Z_{\min} = -3$. Порівнюючи отримане значення цільової функції цілочислового рішення із значенням оптимального розв'язку, зазначаємо, що пошук цілочислового рішення приводить до збільшення екстремального значення.

Приклад 4.3. Для поліпшення фінансового становища фірма ухвалила рішення про збільшення випуску конкурентоздатної продукції, для чого в одному із цехів необхідно встановити додаткове обладнання, що вимагає 19/3 м^2 площі. Фірма може купити устаткування двох видів. На придбання додаткового устаткування вона виділила 10 тис. грн.

Придбання одного комплекту устаткування I виду коштує 1 тис. грн, II виду – 3 тис. грн. Придбання одного комплекту устаткування I виду дає можливість збільшити випуск продукції за зміну на 2 од., а одного комплекту устаткування II виду – на 4 од.

Знаючи, що для установки одного комплекту устаткування 1-го виду потрібно 2 м^2 площі, а для устаткування 2-го виду – 1 м^2 площі, визначте такий набір додаткового устаткування, що дає можливість максимально збільшити випуск продукції.

Розв'язання

Припустимо, що фірма придбає x_1 комплектів додаткового устаткування I виду та x_2 комплектів устаткування II виду. Математична модель задачі буде мати вигляд:

$$Z_{\max} = 2x_1 + 4x_2$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 19/3 \\ x_1 + 3x_2 \le 10, \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0, \quad \textit{цілі}.$$

У табл. 4.3 наведено розв'язок задачі симплексним методом. Розв'язок $X^* = (9/5;\ 41/15)$, $Z_{\max}(X^*) = 218/15$ не є цілочисловим.

Таблиця 4.3

Симплексна таблиця

Б	$C_б$	C_j	2	4	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
A_3	0	19/3	2	1	1	0
A_4	0	10	1	3	0	1
	Δ_j	0	–2	–4	0	0
A_3	0	3	5/3	0	1	–1/3
A_2	4	10/3	1/3	1	0	1/3
	Δ_j	40/3	–2/3	0	0	4/3
A_1	2	9/5	1	0	3/5	–1/5
A_2	4	41/15	0	1	–1/5	2/5
	Δ_j	218/15	0	0	2/5	6/5

Знайдемо дробові частини чисел 9/5 і 41/15:

$$\left\{\frac{9}{5}\right\}=\frac{9}{5}-1=\frac{4}{5};\quad \left\{\frac{41}{15}\right\}=\frac{41}{15}-2=\frac{11}{15};\quad \frac{4}{5}=\frac{12}{15}>\frac{11}{15}.$$

Ураховуючи, що $\left\{\frac{3}{5}\right\}=\frac{3}{5}-0=\frac{3}{5}$; $\left\{-\frac{1}{5}\right\}=-\frac{1}{5}+1=\frac{4}{5}$, складаємо додаткове обмеження: $3/5x_3+4/5x_4\geq 4/5$.

Або в канонічному вигляді: $3/5x_3+4/5x_4-x_5=4/5$.

Подальше обчислення наведено в табл. 4.4.

Таблиця 4.4

Симплексна таблиця

Б	$C_б$	C_j	2	4	0	0	0
		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
A_1	2	9/5	1	0	3/5	–1/5	0
A_2	4	41/15	0	1	–1/5	2/5	0
	0	4/5	0	0	3/5	4/5	–1
	Δ_j	218/15	0	0	2/5	6/5	0
A_1	2	1	1	0	0	–1	1
A_2	4	3	0	1	0	2/3	–1/3
A_3	0	4/3	0	0	1	4/3	–5/3
	Δ_j	14	0	0	0	2/3	2/3

Порівнюючи отримане значення цільової функції цілочислового розв'язку зі значенням оптимального, відзначаємо, що пошук цілочислового розв'язку приводить до зменшення екстремального значення.

Отже, отриманий оптимальний цілочисловий план: $X^* = (1; 3)$, $Z_{\max}(X^*) = 14$.

Приклад 4.4. Знайдіть розв'язок ЗЛП:

$$Z_{\max} = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45, \\ x_1, x_2 \ge 0, - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Початкову задачу лінійного програмування (ЛП0) (без урахування цілочисловості) розв'яжемо графічно (рис. 4.2). Її оптимальним розв'язком буде: $x_1 = 3{,}75;$ $x_2 = 1{,}25;$ $Z = 23{,}75.$ Він не цілочисловий.

Застосуємо *метод гілок і меж*, який змінює простір розв'язків задачі лінійного програмування. Спочатку обирається одна зі змінних, яка має бути цілочисловою і значення якої в оптимальному розв'язку нецілочислове.

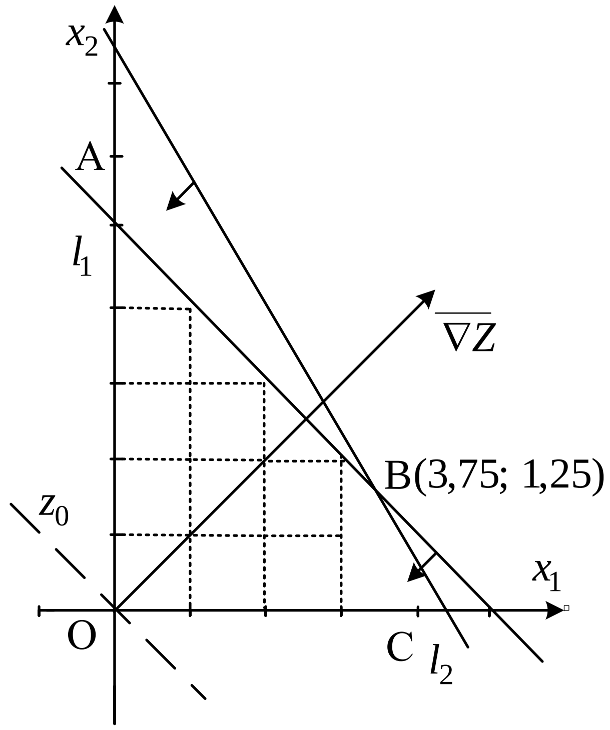

Рис. 4.2. **Графічне розв'язання задачі**

Оберемо $x_1 = 3{,}75$. Область $3 < x_1 < 4$ простору допустимих розв'язків задачі ЛП0 не містить цілочислових значень змінної x_1 і може бути виключена з розгляду. Це еквівалентно заміні вихідної задачі ЗЛ0 двома новими задачами лінійного програмування ЛП1 і ЛП2, які визначаються так:

1) простір допустимих розв'язків ЛП1 – простір допустимих розв'язків ЛП0 + ($x_1 \le 3$);

2) простір допустимих розв'язків ЛП2 – простір допустимих розв'язків ЛП0 + ($x_1 \ge 4$).

Далі будемо розв'язувати задачу цілочислового програмування шляхом розв'язання послідовності безперервних задач лінійного програмування.

Нові обмеження $x_1 \le 3$ і $x_1 \ge 4$ взаємовиключні, оскільки ЛП1 і ЛП2 необхідно розглядати як незалежні задачі лінійного програмування (рис. 4.3).

Дихотомізація задач ЛП – основа концепції розгалуження в методі гілок і меж. У цьому випадку x_1 називають змінною розгалуження.

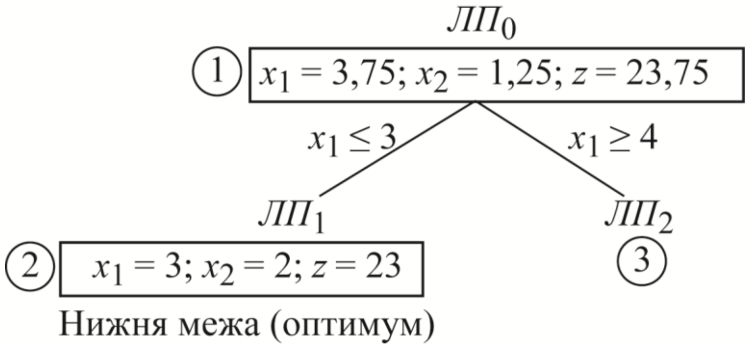

Рис. 4.3. **Розв'язок задачі ЛП1**

Оптимальний розв'язок задачі ЦЛП знаходиться в просторі допустимих розв'язків або задачі ЛП1, або ЛП2. Отже, обидві підзадачі повинні бути розв'язані. Потрібно вибирати спочатку задачу ЛП1 (вибір довільний), що має додаткове обмеження $x_1 \le 3$, тобто:

$$Z_{\max} = 5x_1 + 4x_2$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 5, \\ 10x_1 + 6x_2 \le 45, \\ x_1 \le 3, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Оптимальним розв'язком задачі ЛП1 є $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ Z = 23$. Оптимальний розв'язок задачі ЛП1 задовольняє вимогу цілочисловості змінних. У цьому випадку говорять, що задача ЛП1 прозондована, та можна сказати, що значення $Z = 23$ є нижньою межею оптимального (максимального) значення цільової функції вихідної задачі ЦЛП. Зі значенням нижньої межі $Z = 23$ варто дослідити задачу ЛП2. Оскільки у задачі ЛП0 оптимальне значення цільової функції дорівнює 23,75 і всі її коефіцієнти є цілими числами, то неможливо отримати цілочисловий розв'язок задачі ЛП2 (простір розв'язків якої більш вузький, ніж у задачі ЛП0), який буде краще наявного. У результаті потрібно відкинути підзадачу ЛП2 і вважати її прозондованою. Розглянемо два моменти:

1) під час вибору підзадачі можна для зондування розв'язати спочатку задачу ЛП2 замість ЛП1;

2) у задачі ЛП0 спочатку вибрати змінну x_2 змінну розгалуження замість x_1.

Ситуація, коли першою розв'язується задача ЛП2, ілюструється схемою обчислень (рис. 4.4). Оскільки значення змінної $x_2 = 0{,}83$ не є цілим числом, то задача ЛП2 досліджується далі. Варто розглянути задачі ЛП3 і ЛП4, використовуючи гілки $x_2 \le 0$ і $x_2 \ge 0$ відповідно. Це означає, що:

1) простір розв'язків ЛП3 = простір розв'язків ЛП2 + ($x_2 \le 0$) = = простір розв'язків ЛП0 + ($x_1 \ge 4$) + ($x_2 \le 0$);

2) простір розв'язків ЛП4 = простір розв'язків ЛП2 + ($x_2 \ge 1$) = = простір розв'язків ЛП0 + ($x_1 \ge 4$) + ($x_2 \ge 1$).

Є ще три нерозглянуті задачі, які повинні бути розв'язані, – ЛП1, ЛП3 і ЛП4. Нехай довільно обрана першою задача ЛП4. Ця задача не має розв'язку і, отже, є прозондованою. Наступною задачею обрана підзадача ЛП3. Її оптимальним розв'язком є $x_1 = 4{,}5,\ x_2 = 0,\ Z = 22{,}5$. Нецілочислове значення змінної $x_1 = 4{,}5$ породжує дві гілки розв'язку за $x_2 \le 4$ і $x_2 \ge 5$ і відповідні їм підзадачі ЛП5 і ЛП6. Тоді:

1) простір розв'язків ЛП5 = простір розв'язків ЛП0 + ($x_1 \ge 4$) + + ($x_2 \le 0$) +($x_1 \ge 4$);

2) простір розв'язків ЛП6 = простір розв'язків ЛП0 + ($x_1 \ge 4$) + + ($x_2 \le 0$)+ ($x_2 \ge 5$).

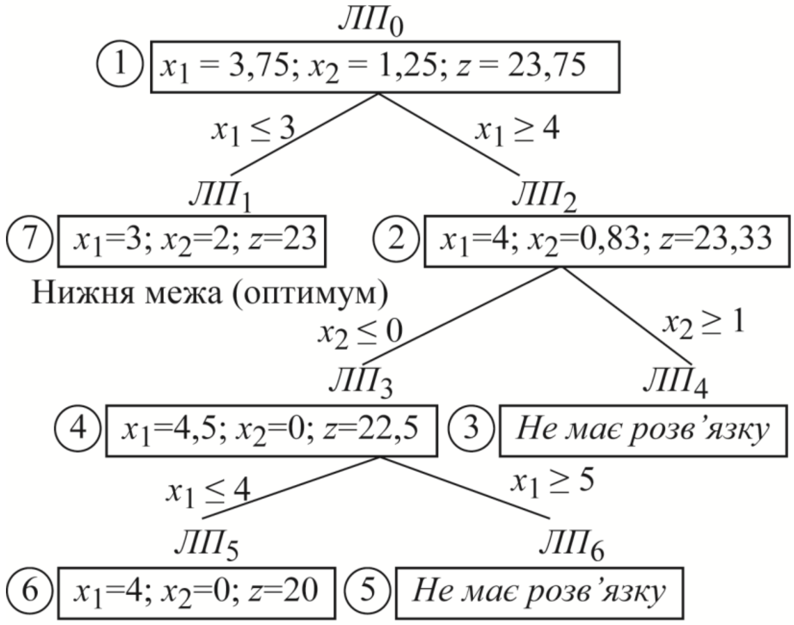

Рис. 4.4. **Розв'язок задачі ЛП2**

Тепер не розглянуті лише підзадачі ЛП1, ЛП5 і ЛП6. Підзадача ЛП6 прозондована, оскільки не має допустимих розв'язків. Підзадача ЛП5 має цілочисловий розв'язок $x_1 = 4,\ x_2 = 0,\ Z = 20$ і отже, породжує нижню межу $Z = 20$ оптимального значення цільової функції задачі ЦЛП. Розв'язок підзадачі ЛП1 цілочисловий $x_1 = 3, x_2 = 2, Z = 23$. Отже, нижню межу значень цільової функції вважаємо рівною 23. Так як усі підзадачі прозондовані, оптимальним розв'язком задачі ЦЛП є розв'язок, що відповідає останній нижній межі, тобто $x_1 = 3,\ x_2 = 2,\ Z = 23$.

Даний приклад указує на основну слабкість методу гілок і меж: як обрати наступну підзадачу для дослідження і як вибрати для неї змінну розгалуження? Розглянута процедура застосована для розв'язання задач максимізації. Для розв'язання задач мінімізації в алгоритмі необхідно замінити нижню межу на верхню (початкове значення якої дорівнює $z = +\infty$).

4.2. Завдання для самостійної роботи

4.2.1. Розв'яжіть задачі цілочислового програмування.

1. $Z_{\min} = -4x_1 - 3x_2$

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 \le 10, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 8, \\ x_1,\ x_2 \ge 0, -\text{цілі}. \end{cases}$$

2. $Z_{\max} = -x_1 + x_2$

$$\begin{cases} 3x_2 + x_3 + x_4 = 3, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1, \\ x_i \ge 0,\ x_i \in \mathrm{Z},\ i = \overline{1,4}. \end{cases}$$

3. $Z_{\min} = -x_1 - 2x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 \le 7, \\ 4x_1 - 5x_2 \le 9, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, - \textit{цілі}. \end{cases}$$

4. $Z_{\max} = -x_1 + 4x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \le 17, \\ 10x_1 + 3x_2 \le 15, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, - \textit{цілі}. \end{cases}$$

5. $Z_{\min} = -x_2$

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 12, \\ -8x_1 + 3x_2 + x_4 = 24, \\ x_i \ge 0,\, x_i \in Z,\, i = \overline{1{,}4}. \end{cases}$$

6. $Z_{\max} = 8x_1 + 6x_2$

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 \le 12, \\ 4x_1 + x_2 \le 10, \\ x_1,\, x_2 \ge 0, - \textit{цілі}. \end{cases}$$

Практичне заняття 5
Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем

5.1. Приклади розв'язання завдань

Для задачі нелінійного програмування, на відміну від лінійних задач, немає єдиного методу розв'язання. Залежно від виду цільової функції і системи обмежень розроблені спеціальні методи розв'язання, до яких належать методи множників Лагранжа, квадратичне й опукле програмування, градієнтні методи, наближені методи розв'язання, графічний метод.

Задачу математичного програмування:

$$\begin{aligned} &Z_{\max(\min)} = f(x), \\ &\varphi_i(\mathbf{x})\{\le, =, \ge\}\, b_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \\ &\mathbf{x} \ge 0, \quad \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n), \end{aligned}$$

у якій або цільова функція, або обмеження, або і те й інше нелінійні, називають нелінійною.

Метод множників Лагранжа є класичним методом розв'язування задач математичного програмування.

План розв'язування задач методом множників Лагранжа

1. Скласти функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) = f(x_1, x_2, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i (x_1, x_2, ..., x_n).$$

2. Знайти частинні похідні функції Лагранжа за всіма змінними $x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ і прирівняти до нуля. Отримаємо систему з $n+m$ рівнянь. Розв'язати отриману систему та знайти всі стаціонарні точки функції Лагранжа.

3. Зі стаціонарних точок, що взяті без $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$, вибрати точки, в яких функція $f(x_1, x_2, ..., x_n)$ має умовні локальні екстремуми за наявністю обмежень $\varphi_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0, i = \overline{1, m}$. Цей вибір здійснюється з використанням достатніх умов локального екстремума.

Задачі нелінійного програмування з двома змінними можуть бути розв'язані графічно. Точки екстремума цих задач можуть лежати в середині області, на ребрі, грані або у вершини многокутника.

Приклад 5.1. Знайдіть глобальні екстремуми функції із заданими обмеженнями за допомогою графічного методу:

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 16, \\ x_1 - 2x_2 \le 3 \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв'язання

Областю припустимих розв'язків є область, зображена на рис. 5.1.

Лініями рівня є кола із центром у точці $O_1(2,1)$.

Глобальний мінімум досягається у точці $O_1(2,1)$. Глобальний максимум – у точці $A(0,4)$. Цільова функція у точці A дорівнює:

$$Z_{\max}(A) = (0-2)^2 + (4-1)^2 = 13.$$

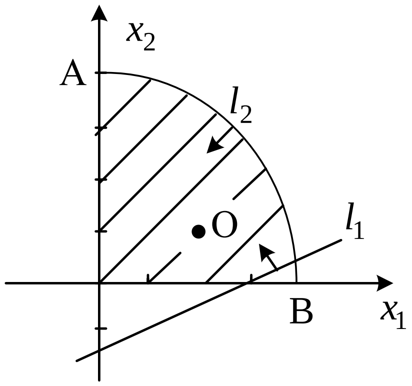

Рис. 5.1. **Область припустимих значень**

Отже, глобальний мінімум дорівнює $Z_{\min}(O_1) = 0$ у точці $O_1(2,1)$.

Глобальний максимум дорівнює $Z_{\max}(A) = 13$ у точці $A(0,4)$.

Приклад 5.2. Знайдіть екстремуми функції за обмеженнями графічним методом:

$$Z = 2x_1 - x_2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 3)^2 \le 9, \\ x_2 \ge 3 \end{cases}$$

$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв'язання

Областю припустимих розв'язків є область, зображена на рис. 5.2.

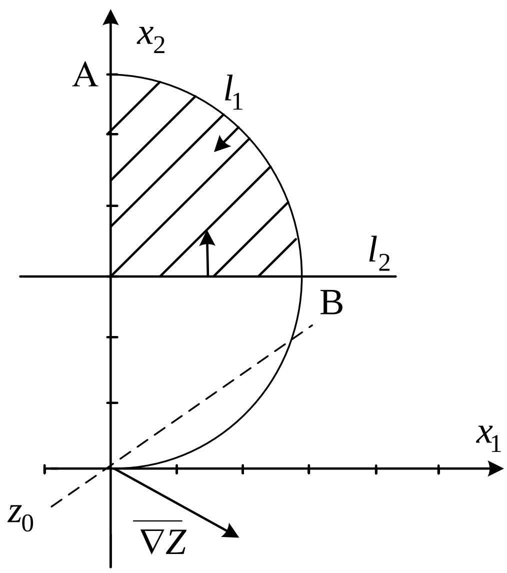

Рис. 5.2. **Область припустимих значень**

$\overline{gradZ} = (2; -1)$. Глобальний мінімум досягається у точці $B(0, 6)$, $Z_{\min}(B) = -6$. Глобальний максимум – у точці $A(3, 3)$. Цільова функція у точці A дорівнює $Z_{\max}(A) = 3$.

Приклад 5.3. Знайдіть глобальні екстремуми функції за обмеженнями:

$$Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 9, \end{cases}$$
$$x_{1,2} \ge 0.$$

Розв'язання

Область припустимих розв'язків – *OABD* (рис. 5.3).

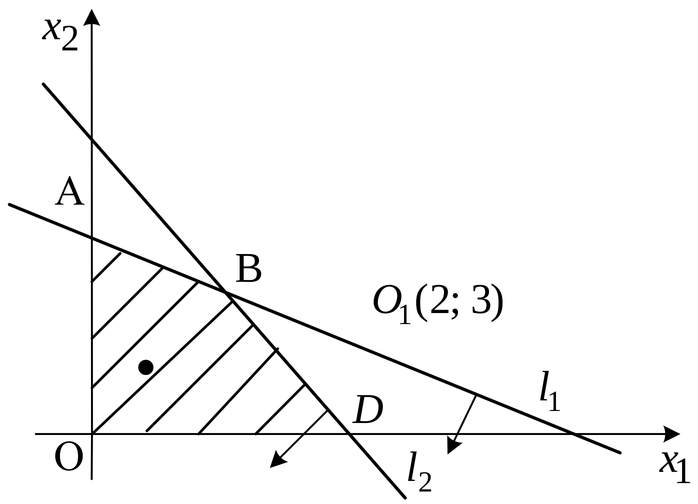

Рис. 5.3. **Область припустимих розв'язків**

Лініями рівня будуть кола із центром у точці $O_1(2; 3)$.

Максимальне значення цільова функція має в точці $D(9; 0)$, мінімальне – у точці $O_1(2; 3)$.

Тому $Z(D) = (9-2)^2 + (0-3)^2 = 58$.

Отже, глобальний максимум $Z_{\max}(D) = 58$ у точці $D(9; 0)$, глобальний мінімум $Z_{\min}(O_1) = 0$ у точці $O_1(2; 3)$.

Приклад 5.4. Знайдіть мінімум і максимум функції:

$$Z = (x_1 + 1)^2 + (x_2 - 5)^2$$

$$\begin{cases} x_1^2 + (x_2 - 3)^2 \le 9, \\ x_1 - x_2 \le 0, \\ x_1 \ge 1, \end{cases}$$

$$x_2 \ge 0.$$

Розв'язання

Областю припустимих розв'язків є область, зображена на рис. 5.4.

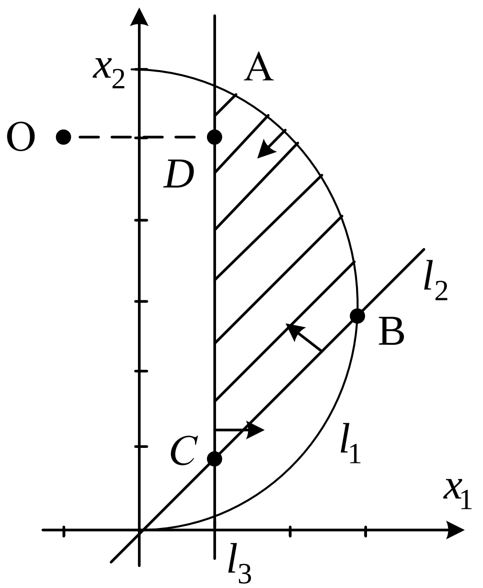

Рис. 5.4. **Область припустимих значень**

Лініями рівня є кола із центром у точці $O(-1, 5)$.

Глобальний мінімум досягається у точці $D(1, 5)$ на перпендикулярі (найкоротша відстань) до області допустимих значень.

$$Z_{\min}(A) = (1+1)^2 + (5-5)^2 = 4.$$

Глобальний максимум досягається у двох точках $B(3, 3)$ і $C(1, 1)$ (максимальна однакова відстань до центра кола із цільової функції).

$$Z_{\max} = Z(D) = Z(C) = 16 + 4 = 20.$$

Приклад 5.5. Знайдіть екстремум функції методом Лагранжа:

$$Z_{\min} = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

Розв'язання

Складемо функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, x_3, \lambda_1, \lambda_2) = x_1^{\ 2} + x_2^{\ 2} + x_3 + \lambda_1(x_1 + x_2 + x_3 - 4) + \\ + \lambda_2(2x_1 - 3x_2 - 12).$$

Знаходимо частинні похідні функції $F(X, \lambda)$ за всіма змінними та прирівнюємо їх до нуля. Отримаємо:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 - \lambda_1 - 3\lambda_2 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_3} = 1 - \lambda_1 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_1} = 4 - x_1 - x_2 - x_3 = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda_2} = 12 - 2x_1 + 3x_2 = 0. \end{cases}$$

Відразу знайшовши $\lambda_1 = 1$, отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь із чотирьох рівнянь на чотири невідомі:

$$\begin{cases} 2x_1 - 2\lambda_2 = 1, \\ 2x_2 - 3\lambda_2 = 1, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 - 3x_2 = 12. \end{cases}$$

Розв'яжемо її методом Гаусса.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 4 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 12 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 7/2 \\ 0 & -3 & 0 & 2 & 11 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 13/2 & 25/2 \end{array}\right).$$

Отже, $\lambda_2 = 25/13, \quad x_3 = 103/26, \ x_2 = -31/13, \ x_1 = 63/26.$

За допомогою частинних похідних другого порядку доводиться, що X^* – точка мінімуму функції.

Таким чином, точка мінімуму $X^*\left(\frac{63}{26}; -\frac{31}{13}; \frac{103}{26}\right)$ і $Z_{\min} = 15\frac{27}{52}$.

Приклад 5.6. Підприємство реалізує свій продукт двома способами: в роздріб через магазин і оптом через торгових агентів.

За умови продажу x_1 кг продукту через магазин витрати на реалізацію складають x_1^2 грош. од., а при продажу x_2 кг продукту за допомогою торгових агентів – x_2^2 грош. од.

Визначте, скільки кілограмів продукту слід продавати кожним способом, щоб витрати на реалізацію були мінімальними, якщо за добу виділяється для продажу 10 000 кг продукту.

Розв'язання

Необхідно скласти математичну модель задачі.

Слід знайти мінімум сумарних витрат:

$$L = x_1^2 + x_2^2 \text{ за обмежень } x_1 + x_2 = 10\,000, \quad x_{1,2} \geq 0.$$

Для розрахунку моделі використовуйте метод множників Лагранжа. Складемо функцію Лагранжа:

$$F(x_1, x_2, \lambda) = x_1^2 + x_2^2 + \lambda(x_1 + x_2 - 10\,000).$$

Варто знайти частинні похідні функції F за x_1, x_2, λ, прирівняти їх до нуля. Отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 2x_1 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 2x_2 + \lambda = 0, \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = x_1 + x_2 - 10\,000 = 0, \end{cases}$$

звідки $\lambda = -10\,000$, $x_1 = 5\,000, x_2 = 5\,000, L = 50\,000\,000$ грош. од. Надаючи x_1 значення більше та менше 5 000, знаходимо L і з визначення екстремуму функції отримуємо, що L за $x_1 = x_2 = 5\,000$ досягає мінімуму. Таким чином, для отримання мінімальних витрат необхідно витрачати на добу через магазин і торгових агентів по 5 000 кг продукту; тоді витрати на реалізацію складуть 50 000 000 грош. од.

5.2. Завдання для самостійної роботи

5.2.1. Знайдіть екстремуми функції із заданими обмеженнями за допомогою графічного методу.

1. $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$

$$\begin{cases} (x_1 - 1)^2 + x_2^2 \le 25, \\ x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

2. $Z = 3x_1$

$$\begin{cases} x_1^2 - x_2 \le 0, \\ -2x_1 + 2x_2 \le 4 \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

3. $Z = (x_1 + 2)^2 + (x_2 + 1)^2$

$$\begin{cases} (x_1 - 4)^2 + x_2^2 \le 9, \\ x_2 \ge \sqrt{5} \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

4. $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 + 3)^2$

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 \le 25, \\ \sqrt{3}x_1 - x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$x_{1,2} \ge 0.$

5. $Z = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$

$x_1^2 + x_2^2 \le 16, \quad x_{1,2} \ge 0.$

6. $Z = 2x_1 + x_2$

$x_1^2 + x_2^2 \le 16, \quad x_{1,2} \ge 0.$

7. $Z=(x_1+1)^2+(x_2-1)^2$

$$\begin{cases}(x_1-1)^2+x_2^2\le 9,\\ x_1+x_2\ge 4\end{cases}$$

$x_{1,2}\ge 0.$

8. $Z=(x_1+1)^2+(x_2-2)^2$

$$\begin{cases}x_1^2+x_2^2\le 16,\\ x_2\le 3\end{cases}$$

$x_{1,2}\ge 0.$

5.2.2. Знайдіть екстремуми функції методом множників Лагранжа.

1. $f(x)=x_1x_2$
$2x_1+3x-5=0$

2. $f(x)=3x_1^{\ 2}+2x_2^{\ 2}-3x_3+1$
$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=4$

3. $f(x)=2x_1+3x_2^{\ 2}+x_3^{\ 2}$
$x_1+x_2+x_3=8$

4. $f(x_1,x_2)=x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3$
$x_1+x_2+x_3=4$

5. $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$
$3x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=12$

6. $f(x_1,x_2)=x_1^{\ 2}+8x_1x_2+3x_2^{\ 2}$
$9x_1+10x_2=29$

7. $f(x_1,x_2)=x_1+x_2$
$x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}=2$

8. $f(x_1,x_2)=2x_1^{\ 2}+10x_1x_2+3x_2^{\ 2}$
$9x_1+13x_2=31$

5.2.3. На складі зберігається запас сировини на виготовлення продукції двох видів у розмірі 52 т; витрати сировини на виробництво продукції I виду дорівнює x, II – y, де x,y – кількість продукції, що виготовляється, відповідно I і II виду. Прибуток визначається функцією $z=(x-2)^2+(y-3)^2$.

Визначте оптимальну програму виробництва продукції за умовою обмеженої кількості сировини.

5.2.4. За планом необхідно виробити продукції I і II виду загальною кількістю 1 т, тобто $x+y=1$. Прибуток від реалізації продукції визначається функцією $z=x^2+y^2$.

Визначте оптимальну програму виробництва продукції.

Практичне заняття 6
Теорія ігор. Аналіз та управління ризиком в економіці на базі концепції теорії ігор

6.1. Приклади розв'язання завдань

Метою учасників всякої матричної гри є вибір найбільш вигідних стратегій, що забезпечують гравцеві A максимальний виграш, а гравцеві B – мінімальний програш.

Число $\alpha = \max\limits_{i} \min\limits_{j} \{a_{ij}\}$ називається нижньою чистою ціною гри. Число $\beta = \min\limits_{j} \max\limits_{i} \{a_{ij}\}$ називають верхньою чистою ціною гри. У матричній грі нижня чиста ціна гри не перевищує верхньої чистої ціни гри, тобто $\alpha \le \beta$. Матрична гра може бути розв'язана графічно й аналітично.

Якщо в матричній грі нижня і верхня чисті ціни збігаються, тобто $\alpha = \beta$, то гра має сідлову точку в чистих стратегіях і чисту ціну гри $\nu = \alpha = \beta$.

Приклад 6.1. Знайдіть ціну гри й оптимальні стратегії із заданою платіжною матрицею A.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 10 & 3 & 14 & 5 \\ 8 & 9 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Перевіримо, чи можна розв'язати цю гру в чистих стратегіях.

Для цього знайдемо нижню ціну α, вибравши найбільше з найменших значень за кожною стратегією гравця A (за рядками платіжної матриці):

$$\alpha = \max\{2;\, 5\} = 5.$$

Визначимо верхню ціну гри β, вибравши найменше з найбільших значень програшу за стратегіями гравця B:

$$\beta = \min\{8;\, 10;\, 5;\, 14;\, 7\} = 5.$$

Отже, $\alpha = \beta$, а тому гра має розв'язання в чистих стратегіях і її ціна $\nu = \alpha = \beta = 5$.

Для гравця A активною стратегією є A_2, а для гравця B активна стратегія B_3. Тоді розв'язок матричної гри має вигляд:

$$X^*(0; 1),\ Y^*(0; 0; 1; 0; 0),\ \nu = 5.$$

Якщо в матричній грі $\alpha < \beta$, то говорять, що гра ведеться в змішаних стратегіях. Ціна гри знаходиться у проміжку між нижньою та верхньою ціною ($\alpha < \nu < \beta$). Чисті стратегії гравця, що входять до його оптимальної змішаної стратегії з ймовірностями, відмінними від нуля, називають *активними стратегіями* гравця.

Приклад 6.2. Розв'яжіть матричну гру графічно й аналітично, поясніть отримані результати.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 3 & 2 \\ -1 & 5 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Знайдемо нижню ціну α:

$$\alpha = \max\{1; 2; -1; 1\} = 2.$$

Визначимо верхню ціну гри β:

$$\beta = \min\{4; 7\} = 4.$$

Отже, $\alpha \neq \beta$, а тому гра має розв'язання в змішаних стратегіях, і її ціна ν задовільнює нерівності: $\alpha < \nu < \beta$.

Розв'яжемо задачу за допомогою графічного методу (рис. 6.1). Це можливо тому, що гравець B має тільки дві стратегії. Для цього на координатній площині вздовж осі абсцис відкладаємо відрізок одиничної довжини. Перпендикулярно йому проводимо осі B_1 і B_2, на яких відкладаємо програші гравця B, які відповідають його стратегіям за умов, що гравець A

приймає будь-яку зі своїх стратегій. Ламана лінія A_1MA_4 є верхньою межею програшів гравця B. Гравець B хоче мінімізувати свій програш, тому на лінії A_1MA_4 знаходимо точку з мінімальною ординатою. Це точка M, що утворена перетином ліній A_1A_1 й A_4A_4, які відповідають стратегіям A_1 й A_4 гравця A. Ордината точки M відповідає ціні гри, а проекція точки M поділяє одиничний інтервал на осі абсцис на відрізки, які відповідають ймовірностям p_1 і p_2, з якими гравець B приймає стратегії B_2 і B_1, відповідно.

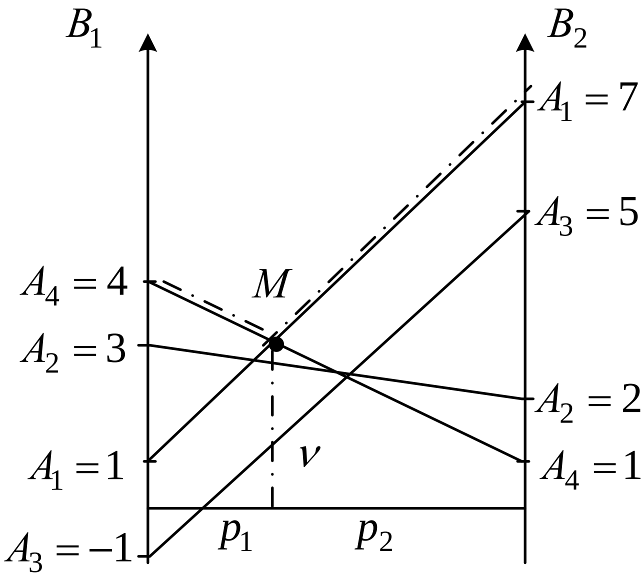

Рис. 6.1. **Розв'язання матричної гри графічним методом**

Точка M отримана перетином ліній A_1A_1 й A_4A_4, тому в активних стратегіях платіжна матриця має вигляд:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

З урахуванням активних стратегій оптимальна стратегія гравця A визначається вектором $X^* = (x_1;\ 0;\ 0;\ x_4;\ 0)$, а для гравця B – вектором $Y^* = (y_1;\ y_2)$.

Запишемо систему рівнянь для визначення компонентів вектора X^*, використовуючи в цих рівняннях в якості коефіцієнтів числа за стовпцями платіжної матриці.

Оскільки випадкові події, які полягають у використанні гравцем A стратегії A_1 або стратегії A_4, складають повну групу подій, сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці. Отже:

$$\begin{cases} x_1 + 4x_4 = \nu, \\ 7x_1 + x_4 = \nu, \\ x_1 + x_4 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1/3, \\ x_4 = 2/3, \\ \nu = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} X^* = (1/3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 2/3), \\ \nu = 3. \end{array}$$

Для визначення компонентів вектора Y^* запишемо систему рівнянь, де коефіцієнти – це числа за рядками платіжної матриці активних стратегій. Маємо:

$$\begin{cases} y_1 + 7y_2 = \nu, \\ 4y_1 + y_2 = \nu, \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2/3, \\ y_2 = 1/3, \\ \nu = 3 \end{cases} \qquad \begin{array}{c} Y^* = (2/3;\ 1/3), \\ \nu = 3. \end{array}$$

Бачимо, що значення ціни гри, яка визначається за оптимальними стратегіями обох гравців, однакові. Вони збігаються з даними, які були отримані у ході аналізу графічного рішення для гравця B.

Отже, $X^* = (1/3;\ 0;\ 0;\ 0;\ 2/3);\quad Y^* = (2/3;\ 1/3);\quad \nu = 3.$

Приклад 6.3. Застосувавши графічний метод, для матричної гри "Покупець-продавець" обчисліть нижню та верхню вартості гри, визначте ціну гри та оптимальні стратегії кожного із гравців, якщо гра задана платіжною матрицею A:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Відповідно до платіжної матриці гравець A має дві стратегії: A_1 та водно час гравець B має п'ять стратегій: B_1, B_2, B_3, B_4 і B_5:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} B_1 & B_2 & B_3 & B_4 & B_5 \end{array} \\ A = & \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} A_1 \\ A_2. \end{array} \end{array}$$

Перевіримо, чи має гра сідлову точку. Для цього визначимо нижню ціну гри α, тобто порівняємо найменші значення виграшів за кожним із рядків платіжної матриці (стратегії гравця A) і виберемо серед них найбільше:

$$\alpha = \max\{1;\ 0{,}5\} = 1.$$

Визначимо верхню ціну гри β, тобто порівняємо найбільші значення програшів за кожним стовпцем платіжної матриці (стратегії гравця *B*) і виберемо серед них найменше:

$$\beta = \min\{2;\ 3;\ 5;\ 3;\ 4\} = 2.$$

Оскільки $\alpha \neq \beta$, то гра не має сідлової точки. Отже, вона має розв'язок у мішаних стратегіях, водночас ціна гри ν задовольняє умові: $\alpha < \nu < \beta$. Розв'яжемо задачу за допомогою графічного методу. Це можна зробити, оскільки гравець *A* має тільки дві стратегії.

На координатній площині вздовж осі абсцис відкладемо відрізок одиничної довжини. Перпендикулярно йому проводимо осі A_1 і A_2, на яких відкладаємо виграші гравця A, що відповідають його стратегіям за умов, що гравець *B* дотримується однієї зі своїх стратегій (рис. 6.2).

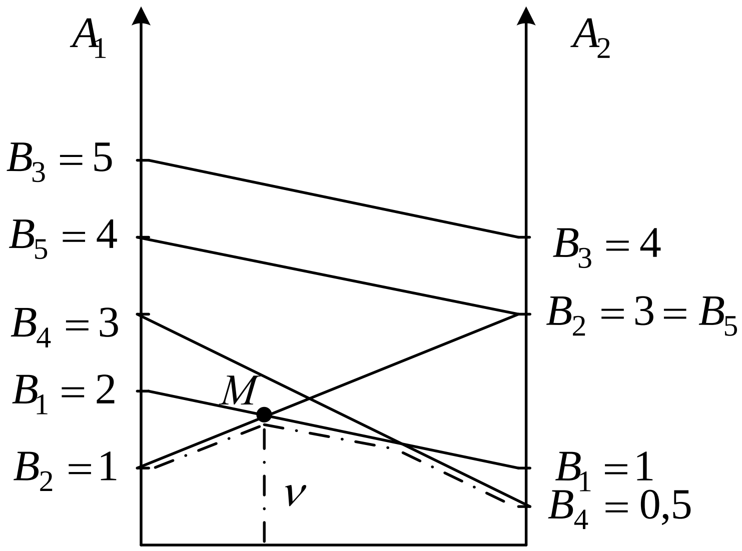

Рис. 6.2. **Розв'язання матричної гри графічним методом**

Ламана лінія нижньої межі є межею можливого виграшу гравця *A*. На цій межі знаходимо точку з максимальною ординатою. Видно, що ця точка утворена перетином ліній B_1 і B_2, які відповідають стратегіям B_1 і B_2

гравця B. Ордината цієї точки відповідає ціні гри, а відрізки, на які проекція точки поділяє одиничний відрізок осі абсцис, визначають імовірності p_2 і p_1, з якими гравець A буде дотримуватися, відповідно, стратегій A_1 і A_2.

Отже, точка M знаходиться на перетині ліній B_1 і B_2. Тоді в активних стратегіях платіжна матриця має вигляд:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

За цією матрицею оптимальну стратегію гравця *A* визначає вектор $X^* = (x_1; x_2)$, а гравця *B* – вектор $Y^* = (y_1; y_2; 0; 0; 0)$. Для розв'язання задачі складемо систему рівнянь відносно компонентів вектора X^* і ціни гри. У перших двох рівняннях цієї системи коефіцієнтами за невідомих x_1 і x_2 є елементи платіжної матриці активних стратегій, що розташовані у її стовпцях. Оскільки використання гравцем *A* або своєї стратегії A_1, або стратегії A_2 утворює повну групу подій, то сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці. Це і буде третім рівнянням системи. Отже, маємо:

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = v, \\ x_1 + 3x_2 = v, \\ x_1 + x_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 2/3, \\ x_2 = 1/3, \\ v = 5/3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} X^* = (2/3; 1/3), \\ v = 5/3. \end{matrix}$$

Для обчислення компонентів y_1 та y_2 вектора Y^*, які визначають ймовірність вибору певної стратегії гравцем *B*, запишемо систему рівнянь, коефіцієнтами яких є елементи рядків платіжної матриці активних стратегій (тобто фіксованими є стратегії гравця *A*):

$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 = v, \\ y_1 + 3y_2 = v, \\ y_1 + y_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y_1 = 2/3, \\ y_2 = 1/3, \\ v = 5/3 \end{cases} \qquad \begin{matrix} Y^* = (2/3; 1/3; 0; 0; 0), \\ v = 5/3. \end{matrix}$$

Видно, що значення ціни гри, які обчислювалися відповідно до оптимальних стратегій обох гравців, однакові та збігаються з даними, що були отримані шляхом аналізу графічного розв'язку.

Отже $X^* = (2/3; 1/3)$; $Y^* = (2/3; 1/3; 0; 0; 0)$; $\nu = 3$.

Приклад 6.4. Розв'яжіть матричну гру графічно й аналітично, поясніть отримані результати.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 4 & 3 \\ 5 & 4 \\ 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання

Знайдемо нижню ціну α:

$$\alpha = \max\{2; 3; 4; 5\} = 5.$$

Визначимо верхню ціну гри β:

$$\beta = \min\{5; 5\} = 5.$$

Отже, $\alpha = \beta$, а тому гра має розв'язання в чистих стратегіях, і її ціна $\nu = \alpha = \beta = 5$.

Для гравця A активною стратегією є A_5, а для гравця B обидві стратегії однаково активні. Це підтверджується графічним розв'язком цієї гри на рис. 6.3.

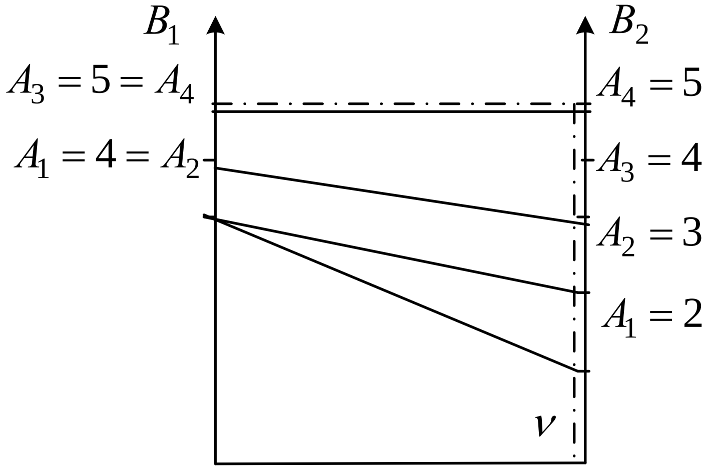

Рис. 6.3. **Розв'язання матричної гри графічним методом**

Оптимальні точки знаходиться на лінії, яка відповідає стратегії A_4, а стратегії B_1 і B_2 рівноправні. Отже, розв'язок матричної гри має вигляд: $X^*(0; 0; 0; 1)$, $Y^*(1/2; 1/2)$, $\nu = 5$. Для гравця A найвигідніша стратегія четверта, а для B обидві стратегії однакові.

6.2. Завдання для самостійної роботи

6.2.1. Знайдіть ціну гри й оптимальні стратегії із заданою платіжною матрицею A, поясніть отримані результати.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 6 & 5 \\ 6 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}^T$

3. $A = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 1 & 7 & -2 \\ 5 & 0 & 4 & -3 & 2 \end{pmatrix}^T$

4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 & 4 & 6 \\ 7 & 4 & 9 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 5 & 6 \\ 7 & 3 & 9 & 9 \end{pmatrix}^T$

6. $A = \begin{pmatrix} 4 & 7 & 4 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

7. $A = \begin{pmatrix} 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \\ 5 & 9 & 6 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

8. $A = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 4 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}$

9. $A = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 6 & -2 & 2 \\ 6 & 9 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}$

10. $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 7 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$

11. $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 4 & 7 & -2 \\ -3 & 4 & 0 & 5 & 2 \end{pmatrix}$

12. $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^{\mathbf{T}}$

6.2.2. Особа, яка ухвалює рішення, проводить аналіз упровадження двох бізнес-проектів компанії. Прибуток компанії залежно від прийняття відповідної стратегії конкурента компанії наведено матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 8 & 9 & 1 \\ 10 & 7 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжіть задану матричну гру графічно й аналітично. Побудуйте матрицю оцінювання ризиків і поясніть отримані результати.

6.2.3. Для опалення приміщення необхідно закупити паливо. Витрати палива та ціна на нього залежить від погоди в зимовий період, що представлено матрицею

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 & 8 & 3 \\ 10 & 0 & 5 & 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжіть задану матричну гру графічно й аналітично.

6.2.4. Підприємство виготовляє два види продукції та отримує прибуток, що залежить від попиту на продукцію. Попит приймає одне з п'яти становищ. Елементи наведеної матриці характеризують прибуток окремого виду продукції залежно від становища попиту:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 7 & 5 & 7 \\ 8 & 6 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Розв'яжіть задану матричну гру графічно й аналітично, зробіть висновки. Побудуйте матрицю оцінювання ризиків і поясніть отримані результати.

Практичне заняття 7
Динамічне програмування. Методи мережевого планування та управління

7.1. Приклади розв'язання завдань

Динамічне програмування дозволяє находити оптимальний розв'язок задачі шляхом її декомпозиції на декілька етапів. Ця декомпозиція здійснюється за різноманітними принципами: у деяких задачах за часовими періодами, в інших – за об'єктами управління; іноді розбиття створюється штучно.

Фундаментальним принципом динамічного програмування, який складає основу декомпозиції задачі на етапи, є оптимальність. Такий підхід зводить одну велику за розмірністю задачу до багатьох задач, які мають меншу розмірність. Це значно скорочує обсяг обчислень і прискорює процес ухвалення управлінських розв'язків.

Обчислення у динамічному програмуванні виконуються рекурентно у тому сенсі, що оптимальний розв'язок однієї підзадачі використовується у якості вихідних даних для наступної. Однією з основних задач, які вирішуються на підприємстві за допомогою оптимізаційних методів, є задача про заміну обладнання. Інша задача оптимального розподілу інвестицій планування.

Приклад 7.1. Рада директорів фірми вивчає пропозиції щодо модернізації чотирьох підприємств. Для цього виділено 5 млн у.о.

Для кожного підприємства j розроблено декілька альтернативних проектів. Кожен з проектів характеризується сумарними затратами c_j та майбутніми прибутками R_j. На кожному підприємстві можна здійснити тільки один проект. Відповідні дані приведені в табл. 7.1.

Необхідно вибрати такі проекти для кожного підприємства, щоб фірма отримала максимальний річний прибуток.

Таблиця 7.1

Задача на розподіл 5 млн у. о.

Проекти	Підприємство 1		Підприємство 2		Підприємство 3		Підприємство 4	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3	c_4	R_4
$x_j = 1$	0	0	<u>0</u>	<u>0</u>	0	0	0	0
$x_j = 2$	<u>1</u>	<u>3</u>	3	5	1	4	<u>2</u>	<u>3</u>
$x_j = 3$	--	--	5	9	<u>2</u>	<u>6</u>	--	--

Розв'язання

У цій задачі проект 1 порожній, розширення підприємства за ним не передбачається. Найпростіший спосіб розв'язання задачі – використати повний перебір у табл. 7.2.

Таблиця 7.2

Повний перебір

x_1	x_2	x_3	x_4	Витрати $\sum c_j(x_j)$	Прибутки $\sum R_j(x_j)$	План допустимий?
1	1	1	1	0	0	Так
1	1	1	2	2	3	Так
1	1	2	1	1	4	Так
1	1	2	2	1+2=3	4+3=7	Так
1	1	3	1	2	6	Так
1	1	3	2	2+2=4	6+3=9	Так
…	…	…	…	…	…	…
1	3	3	2	0+5+2+2=9	Нема	Ні
2	1	1	1	1+0+0+0=1	3+0+0+0=3	Так
2	1	1	2	1+0+0+2=3	3+0+0+3=6	Так
…	…	…	…	…	…	…
2	3	3	2	1+5+2+2=10	Нема	Ні

Задача має $2*3*3*2=36$ можливих розв'язків. Проте деякі з них неприпустимі, тому що для реалізації такого плану необхідно більше за 5 млн у. о.

Перейдемо до математичної моделі задачі розподілу інвестицій, яка має такий вигляд:

$$f_1(y_1)=\underset{x_1,\dots,x_n}{maa}\left\{\sum_{j=1}^{n}R_j(x_j)\right\},$$

$$\sum_{j=1}^{n}c_j(x_j)\le y_1,$$

$$x_j - цілі,\ j=1,\dots,n.$$

Будемо використовувати таки позначення:

n – кількість підприємств;

y_j – кількість грошей на розширення підприємств j, $j=1,\dots,n$;

x_j – номер проекту, який обрало підприємство j;

$c_j(x_j)$ – витрати на j-ом підприємстві, де обрали проект під номером x_j (млн у.о.);

$R_j(x_j)$ – річний прибуток, який буде отримано від реалізації проекту під номером x_j (млн у.о. за рік);

$f_1(x_1)$ – максимальний річний прибуток, який буде отримано від реалізації проектів $x_1, x_2 ..., x_n$, із заданим обсягом інвестицій y_1.

Рекурентне рівняння Беллмана для процедури зворотної прогонки записується для цієї задачі таким чином:

$$f_5(y_5) = 0,$$
$$f_j(y_j) = \underset{x_j \mid c_j(x_j) \le y_j}{man} \{R_j(x_j) + f_{j+1}(y_j - c_j(x_j))\}, \quad j = 4,3,2,1.$$

Спочатку розв'яжемо задачу для четвертого підприємства; потім – для третього та четвертого, потім – другого, третього та четвертого підприємств і, нарешті, для першого, другого, третього та четвертого. У таблицях 7.3 – 7.6 приведені результати розрахунків. Результати отримані за допомогою таблиць, в яких знаходяться значення функції Беллмана $\{R_j(x_j) + f_{j+1}(y_j - c_j(x_j))\}$ від двох змінних x_j та y_j. Функцію знаходять для кожного можливого значення стану y_j та управління x_j. Якщо неможливо знайти функції для деяких пар (x_j, y_j), то в якості значення функції ставиться прочерк. Після цього знаходимо максимальне значення на рядках таблиці та оптимальний розв'язок, який знаходиться у двох останніх стовпчиках будь-якої таблиці.

Етап 4. Підприємство 4.

$$f_4(y_4) = \underset{x_4 = 1:2 \mid c_4(x_4) \le y_4}{man} \{R_4(x_4)\}.$$

Таблиця 7.3

Задача про інвестиції, етап 4

y_4	$R_4(x_4)$		Оптимальний розв'язок	
	$x_4 = 1$	$x_4 = 2$	$f_4(x_4)$	x_4^*
0	0	--	0	1
1	0	--	0	1
2	0	3	3	2
3	0	3	3	2
4	0	3	3	2
5	0	3	3	2

Етап 3. Підприємства 3 і 4.

$$f_3(y_3) = \underset{x_3=1:3 \mid c_3(x_3) \le y_3}{man} \{R_3(x_3) + f_4(y_3 - c_3(x_3))\}.$$

Таблиця 7.4

Задача про інвестиції, етап 3

y_3	$R_3(x_3) + f_4(y_3 - c_3(x_3))$			Оптимальний розв'язок	
	$x_3 = 1$	$x_3 = 2$	$x_3 = 3$	$f_3(x_3)$	x_3^*
0	0+0=0	--	--	0	1
1	0+0=0	4+0=4	--	4	2
2	0+3=3	4+0=4	6+0=6	6	3
3	0+3=3	4+3=7	6+0=6	7	2
4	0+3=3	4+3=7	6+3=9	9	3
5	0+3=3	4+3=7	6+3=9	9	3

Етап 2. Підприємства 2, 3 і 4.

$$f_2(y_2) = \underset{x_2=1:3 \mid c_2(x_2) \le y_2}{man} \{R_2(x_2) + f_3(y_2 - c_2(x_2))\}.$$

Таблиця 7.5

Задача про інвестиції, етап 2

y_2	$R_2(x_2)+f_3(y_2-c_2(x_2))$			Оптимальний розв'язок	
	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$f_2(x_2)$	x_2^*
0	0+0=0	--	--	0	7
1	0+4=4	--	--	4	7
2	0+6=6	--	--	6	7
3	0+7=7	5+0=5	--	7	7
4	0+9=9	5+4=9	--	9	1, 2
5	0+9=9	5+6=11	0+9=9	11	2

Етап 1. Підприємства 1, 2, 3 і 4.

$$f_1(y_1)=\underset{x_1=1:2 \mid c_1(x_1)\le y_1}{man}\{R_1(x_1)+f_3(y_1-c_1(x_1))\}.$$

Таблиця 7.6

Задача про інвестиції, етап 1

y_1	$R_1(x_1)+f_3(y_1-c_1(x_1))$		Оптимальний розв'язок	
	$x_1=1$	$x_1=2$	$f_1(x_1)$	x_1^*
0	0+0=0	--	0	1
1	0+4=4	3+0=3	4	1
2	0+6=6	3+4=7	7	2
3	0+7=7	3+6=9	9	2
4	0+9=9	3+7=10	10	2
5	0+11=11	3+9=12	12	2

Коли всі чотири таблиці заповнені та для кожного j знайдено оптимальний розв'язок, треба знайти оптимальний план для всієї задачі. З табл. 7.6 етапу 1 бачимо, що максимальний прибуток становить $f_1(5)=12$ млн у. о. на рік. Для цього потрібно на першому підприємстві застосувати другий проект $x_1^* = 2$. Характеристики другого проекту $(c_1(2), R_1(2)) = (1{,}3)$. Ці числа підкреслені в початковій табл. 7.1. На другому, третьому та четвертому підприємствах залишається коштів $y_2 = y_1 - c_1(2) = 5 - 1 = 4$ млн у. о.

Перейдемо до етапу 2 і підкреслюємо у рядку $y_2 = 4$ числа $f_2(4) = 9$ та $x_2^*(4) = 1$. Існує ще один оптимальний розв'язок задачі. $x_2^* = 1$ відповідає проекту з характеристиками $(c_2(1), R_2(1) = (0{,}0)$. Ці числа підкреслені в початковій табл. 7.1. $y_3 = y_2 - c_2(1) = 4 - 0 = 4$, тому на третє та четверте підприємства переходять усі 4 млн у. о.

З табл. 7.4 етапу 3 з'ясуємо, як можна ці $y_3 = 4$ млн у. о. використати оптимально. Підкреслюємо $f_3(4) = 9$ і $x_3^*(4) = 3$. Третій проект третього підприємства $x_3^* = 3$ має такі характеристики: $(c_3, R_3) = (2{,}6)$. Підкреслимо ці значення в початковій табл. 7.1. $y_4 = y_3 - c_3(3) = 4 - 2 = 2$.

Як витратити оптимально $y_4 = 2$ млн у. о., показано в табл. 7.3 етапу 4. Для цього необхідно здійснити проект $x_1^* = 2$ на четвертому підприємстві. Підкреслимо в табл. 7.1 $c_4(2) = 2, R_4(2) = 3$ і знаходимо кінцеву відповідь.

Для того щоб оптимально витратити 5 млн у. о. на чотирьох підприємствах, необхідно обрати проекти: $x^* = (2, 1, 3, 2)$. Тоді максимальний щорічний прибуток становитиме $f_1(5) = 12$ млн у. о.

Графічне розв'язання задачі повністю ідентичне табличному (рис 7.1).

Кожна вершина графа відповідає деякому відомому стану системи, кожній дузі ставиться у відповідність конкретний проект. Дуги спрямовані справа наліво. Спочатку над вершиною $y_5 = 0$ ставимо 0 та *. Виконуємо етап 4. Для кожного стану $y_4 \in 0:5$ знаходимо пару $f_4(y_4)$ і $x_4^*(y_4)$. Ці значення дають максимальний прибуток, який отримає четверте підприємство, і номер проекту, який необхідно для цього здійснити, пишемо над вершиною y_1. Над вершинами $y_j \in 0:5$ стоять ті самі числа, що і в двох правих стовпцях етапу 4.

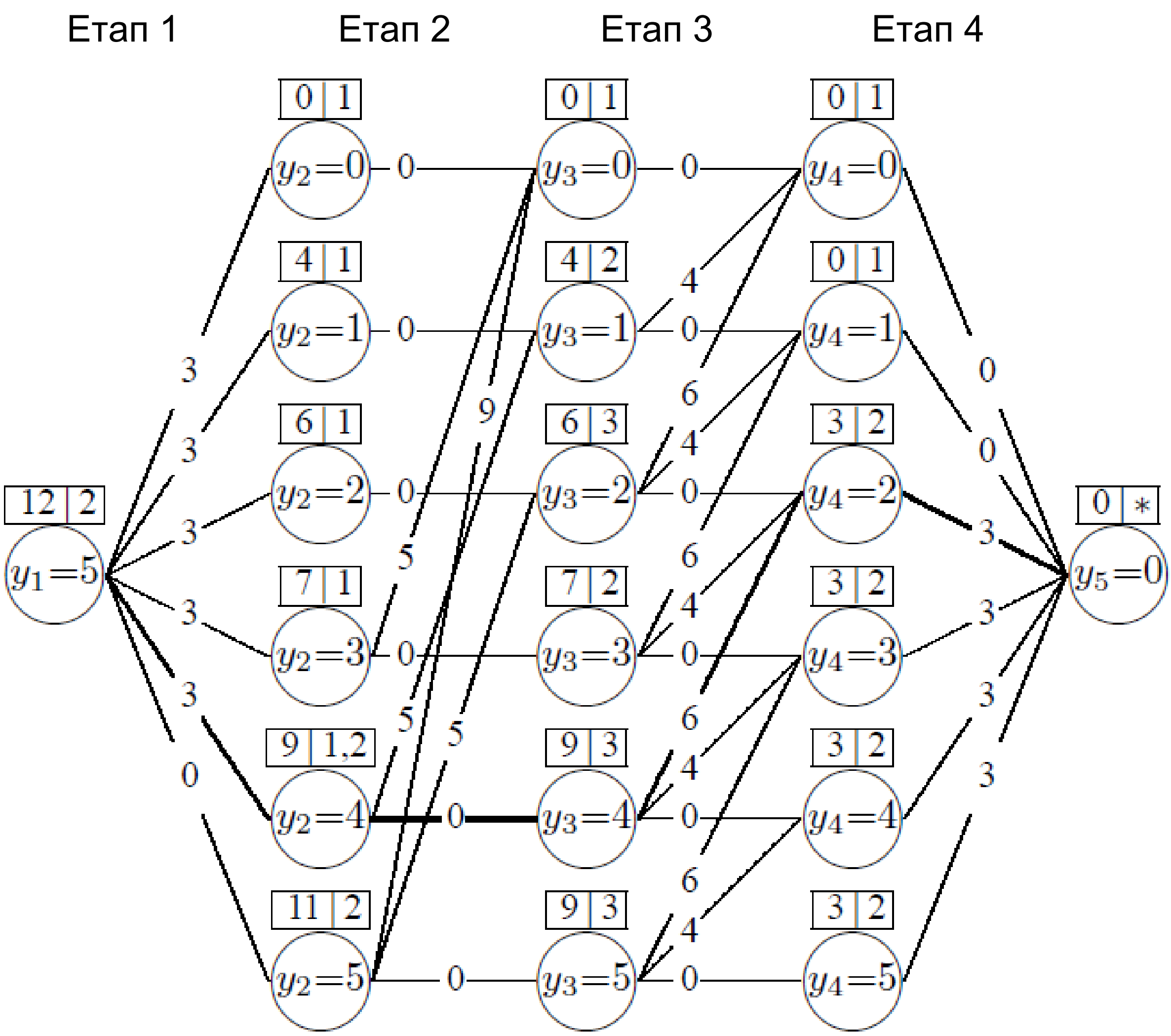

Рис. 7.1. **Графічне розв'язання задачі про оптимальний розподіл інвестицій**

Перевірка:

загальна вартість усіх проектів $\sum_j c_j(x_j^*) = 1 + 0 + 2 + 2 = 5$ млн у. о.

щорічний прибуток $f_1(5) = \sum_j R_j(x_j^*) = 3 + 0 + 6 + 3 = 12$ млн у. о. у рік.

7.2. Завдання для самостійної роботи

7.2.1. Знайдіть інший оптимальний план у задачі з прикладу 7.1.

7.2.2. Розв'яжіть задачу оптимального розподілу інвестицій в обсязі 8 млн у. о. за запланованого мінімального способі модернізації (без "пустих" проектів). Задача розподілу подана в табл. 7.7.

Таблиця 7.7

Задача на розподіл 8 млн у. о.

Проект	Підприємство 1		Підприємство 2		Підприємство 3		Підприємство 4	
	c_1	R_1	c_2	R_2	c_3	R_3	c_4	R_4
$x_j = 1$	1	1	2	2	1	1	1	3
$x_j = 2$	3	4	4	6	2	3	3	5
$x_j = 3$	--	--	--	--	4	7	--	--

Необхідно вибрати такі проекти для кожного підприємства, щоб фірма отримала максимальний річний прибуток.

Практичне заняття 8
Моделі управління запасами. Моделі систем масового обслуговування

8.1. Приклади розв'язання завдань

Однією з поширених задач динамічного програмування є задача управління запасами. Необхідно визначити таку програму, за якої загальна сума затрат на виробництво та зберігання запасів буде мінімальною за умови повного та своєчасного задоволення попиту на продукцію.

Приклад 8.1. Завод може випускати щомісяця до чотирьох одиниці деякої продукції. Витрати на виробництво x_j одиниць продукції в j місяць указані в табл. 8.1. Щомісяця завод повинен відгрузити дві одиниці продукції своїм споживачам. Продукція може знаходитись на складі. Витрати на збереження 1 однієї одиниці становлять 1 млн у. о. Виплата за зберігання здійснюється в кінці місяця j. Склади можуть вмістити до чотирьох одиниць продукції. Ураховуючи, що спочатку на складі було дві одиниці продукції, необхідно визначити оптимальний план виготовлення на 4 місяця.

Таблиця 8.1

Витрати на виробництво x_j одиниць продукції

x_j	0	1	2	3	4	Штук
$C(x_j)$	0	7	9	11	13	млн у. о.

Позначимо змінні та константи задачі:

n – кількість місяців планового відрізка;

x_j – випуск продукції в місяць j, $j=1,...,n$ (управління);

y_j – запаси наприкінці місяця j, або на початку місяця $j+1$ (стан);

d_j – попит у місяць j, задана.

Змінні x_j і y_j пов'язані таким балансовим співвідношенням:

$$y_j = y_{j-1} + x_j - d_j, \quad j=1,...,n$$

Будемо планувати на січень, лютий, березень і квітень ($n=4$). $d_j = 2,\ j=1,...,n$, x_j, $y_j \in 0:4$.

Математична модель задачі має такий вигляд. Знаходимо оптимальний план виробництва $x_1,....,x_n$, який мінімізує витрати:

$$f_1(y_0) = \min_{x_1,...,x_n} \left\{ \sum_{j=1}^{n} C(x_j) + 1(y_{j-1} + x_j - 2) \right\}$$

$$\begin{cases} y_0 + x_1 - 2 = y_1, \\ y_1 + x_2 - 2 = y_2, \\ ...... \\ y_{j-1} + x_j - 2 = y_j \\ ..... \\ y_{n-1} + x_n - 2 = y_n \\ x_j, y_j \in 0:4 \\ y_0 = 0, \quad y_n = 0. \end{cases}$$

Для розв'язання цієї задачі необхідне рівняння Беллмана:

$$f_j(y_{j-1}) = \min_{x_j}\{C(x_j) + 1 \cdot (y_{j-1} + x_j - 2) + f_{j+1}(y_{j-1} + x_j - 2)\}.$$

Етап 4. Квітень.

Почнемо розв'язання задачі про запаси з останнього місяця – квітня.

$$f_4(y_3) = \min_{x_4 \in 0:4}\{C(x_4) + 1 \cdot (y_3 + x_4 - 2)\}.$$

У кінці квітня запаси на складі повинні дорівнювати нулю $y_3 + x_4 - 2 = y_4 = 0$, звідси $y_3 + x_4 = 2$. Усі можливі значення x_4 і y_3 і $C(x_4)$ наведені в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

Управління запасами, етап 4

y_3	Оптимальний розв'язок	
	$f_4(y_3)$	x_4^*
<u>0</u>	<u>9</u>	<u>2</u>
1	7	1
2	0	0

Етап 3. Березень, квітень.

Для третього етапу (березень, квітень) з $y_3 \in 0:4$, $y_3 = y_2 + x_3 - 2$ маємо: $0 \le y_2 + x_3 - 2 \le 4$.

Ліва межа $0 + 2 \le y_2 + x_3$ дає заборонені варіанти в лівій частині табл. 8.3. Права межа $y_2 + x_3 \le 4 + 2$ відповідає прочеркам у правій нижній частині табл. 8.3. У ній вже перелічені всі п'ять можливих співвідношень значень $y_2 \in 0:4$.

$$f_3(y_2) = \min_{x_3 \in 0:4}\{C(x_3) + 1 \cdot (y_2 + x_3 - 2) + f_4 \cdot (y_2 + x_3 - 2)\}.$$

Таблиця 8.3

Управління запасами, етап 3

y_2	$C(x_3)+1\cdot(y_2+x_3-2)+f_4\cdot(y_2+x_3-2)$					Оптимальний розв'язок	
	$x_3=0$	$x_3=1$	$x_3=2$	$x_3=3$	$x_3=4$	$f_3(y_2)$	x_3^*
0	—	—	9+0+9=18	11+1+7=19	13+2+0=15	15	4
1	—	7+0+9=16	9+1+7=17	11+2+0=13	—	13	3
2	0+0+9=9	7+1+7=15	9+2+0=11	—	—	9	0
3	0+1+7=8	7+2+0=9	—	—	—	8	0
4	0+2+0=2	—	—	—	—	2	0

Етап 2. Лютий, березень, квітень.

Для другого етапу "північно-західні" та "південно-східні" кути матриці заповнюються лініями через умову: $0 \le y_2 = y_1 + x_2 - 2 \le 4$ (табл. 8.4).

$$f_2(y_1) = \min_{x_2 \in 0:4} \{C(x_2) + 1\cdot(y_1 + x_2 - 2) + f_3\cdot(y_1 + x_2 - 2)\}.$$

Таблиця 8.4

Управління запасами, етап 2

y_1	$C(x_2)+1\cdot(y_1+x_2-2)+f_3\cdot(y_1+x_2-2)$					Оптимальний розв'язок	
	$x_2=0$	$x_2=1$	$x_2=2$	$x_2=3$	$x_2=4$	$f_2(y_1)$	x_2^*
0	—	—	9+0+15=24	11+1+13=25	13+2+9=24	24	2, 4
1	—	7+0+15=22	9+1+13=23	11+2+9=22	13+3+8=24	22	1, 3
2	0+0+15=15	7+1+13=21	9+2+9=20	11+3+8=22	13+4+2=19	15	0
3	0+1+13=14	7+2+9=18	9+3+8=20	11+4+2=17	—	14	0
4	0+2+9=11	7+3+8=18	9+4+2=15	—	—	11	0

Етап 1. Січень, лютий, березень, квітень.

Знаходження оптимального розв'язку здійснюється на останньому етапі 1, який представлено в табл. 8.5.

$$f_1(y_0) = \min_{x_1 \in 0:4} \{C(x_1) + 1\cdot(y_0 + x_1 - 2) + f_2\cdot(y_0 + x_1 - 2)\}.$$

Таблиця 8.5

Управління запасами, етап 1

y_0	$C(x_1)+1\cdot(y_0+x_1-2)+f_2\cdot(y_0+x_1-2)$					Оптимальний розв'язок	
	$x_1=0$	$x_1=1$	$x_1=2$	$x_1=3$	$x_1=4$	$f_1(y_0)$	x_1^*
0	—	—	9+0+24=33	11+1+22=34	13+2+15=30	30	4
1	—	7+0+24=31	9+1+22=32	11+2+15=28	13+3+14=30	28	3
<u>2</u>	0+0+24=24	7+1+22=30	9+2+15=26	11+3+14=28	13+4+11=28	<u>24</u>	<u>0</u>
3	0+1+22=23	7+2+15=24	9+3+14=26	11+4+11=26	—	23	0
4	0+2+15=17	7+3+14=24	9+4+11=24	—	—	17	0

$y_0=2$ з умов задачі, тому з табл. 8.5 маємо, що $x_1^*=0,$ $y_1= = y_0+x_1^*-2=0$. У табл. 8.4 на етапі 2 бачимо два оптимальних розв'язка при $y_1=0$.

Нехай $x_2^*=4.$ З рівняння $y_2=y_1+x_2^*-2$ знаходимо $y_2=0+4-2=2.$ Перейдемо до табл. 8.3 (етап 3) у рядку $y_2=2.$ Зрозуміло, що відповідна компонента розв'язку , $x_3^*=0$ і в таблиці 4-го етапу потрібно дивитись на рядок $y_3=y_2+0-2=0.$ Цей рядок $y_2=0$ дає останню компоненту розв'язку $x_4^*=2.$

Отже, отриманий такий план виробництва:

$$X^*=(0;\,4;\,0;\,2),\quad f_1(2)=24.$$

У лютому необхідно виготовити чотири одиниці продукції і в квітні – дві одиниці, для чого за чотири місяці буде витрачено 24 млн у. о. Цей план оптимальний, але не єдиний.

8.2. Завдання для самостійної роботи

8.2.1. Знайдіть інший оптимальний план для задачі з прикладу 8.1.

8.2.2. Розв'яжіть задачу оптимального управління запасами за таких умов:

$$C_t(x_t; s_t) = C_t(x_t) + h_t \cdot s_t .$$

Вважаємо, що попит і функція затрат однакові для усіх відрізків планового періоду: $N = 4$, $d_t = 3$, $t = \overline{1,4}$, $C(0) = 0$, $C(1) = 15$, $C(2) = 17$, $C(3) = 19$, $C(4) = 21$, $C(5) = 23$, $h = 1$.

Обмеження виробничих потужностей та складських площ мають вигляд: $x_t \le 5$, $s_t \le 4$, $s_4 = 0$. Знайдіть оптимальний план виробництва.

Рекомендована література

1. Єгоршин О. О. Математичне програмування : підручник / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2006. – 438 с.

2. Железнякова Е. Ю. Методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів усіх галузей знань денної форми навчання / Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. – 80 с.

3. Лебедєва І. Л. Лабораторний практикум з оптимізаційних методів і моделей навчальної дисципліни "Економіко-математичні методи та модель" : навч.-практ. посіб. / І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. – 216 с.

4. Малярець Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації : метод. рекомендації і завдання до виконання контрольних робіт для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / Л. М. Малярець, О. В. Мінєнкова – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 44 с.

5. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи і моделі : навч.-практ. посіб. / Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Є. Ю. Місюра. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 320 с.

6. Малярець Л. М. Збірник вправ з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів всіх галузей знань усіх форм навчання / Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. – 88 с.

7. Малярець Л. М. Сучасні оптимізаційні методи в середовищі Matlab : навч. посіб. : у 2 ч. / Л. М. Малярець, Є. В. Рєзнік, Б. В. Сінкевич. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – Ч. 1. – 360 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Методичні рекомендації до практичних завдань

для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Малярець** Людмила Михайлівна
Мартинова Олена Вадимівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *Н. І. Ганцевич*

Коректор *О. В. Анацька*

План 2019 р. Поз. № 13 ЕВ. Обсяг 85 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.