МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ СЕМЕНА КУЗНЕЦА

МАТЕМАТИКА

Практикум
для слушателей
подготовительного отделения

Харьков
ХНЭУ им. С. Кузнеца
2017

УДК 51(07.034)
М34

Составители: А. К. Шевченко
О. В. Гунько
А. В. Жуков

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и экономико-математических методов.

Протокол № 7 от 15.03.2017 г.

Самостоятельное электронное текстовое сетевое издание

М34 **Математика :** практикум для слушателей подготовительного отделения [Электронный ресурс] / сост. А. К. Шевченко, О. В. Гунько, А. В. Жуков. – Харьков : ХНЭУ им. С. Кузнеца, 2017. – 82 с. (Рус. яз.)

Приведены примеры и задачи по математике, даны указания к решению задач, а также приведены примеры решения типовых задач.

Рекомендовано для слушателей подготовительного отделения.

УДК 51(07.034)

Введение

Согласно с программой учебной дисциплины "Математика", слушатели подготовительного факультета изучают все разделы математики в соответствии со школьным курсом. Поскольку на подготовительном отделении учатся слушатели из разных стран и выпускники гуманитарных школ, появилась необходимость разработать практикум на базе примеров облегченной сложности. В этой дисциплине даны все основные математические формулы. В каждом разделе есть примеры решения задач, а также указания к решению типовых примеров и задач. Представлены примеры и для устного счета.

В результате изучения материала слушатели должны получить такие компетентности: умение выполнять алгебраические преобразования, умение решать алгебраические, логарифмические, показательные и тригонометрические уравнения, а также решать геометрические задачи, выучить математические формулы и научиться применять их во время решения задач. Овладеть основами математического анализа и теории вероятностей.

Студенты должны:

знать:

основные определения, теоремы, математические методы, с помощью которых можно решать уравнения, неравенства, системы уравнений и неравенств, геометрические задачи;

уметь:

выполнять преобразования алгебраических выражений;

использовать теоретический материал, математические методы для решения уравнений, неравенств, систем уравнений и неравенств;

классифицировать функции, исследовать и строить их графики;

решать задачи на прогрессии;

упрощать тригонометрические выражения;

решать тригонометрические уравнения и неравенства;

находить пределы элементарных функций;

использовать производную при исследовании функций: нахождение интервалов монотонности, экстремумов, вычисление наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке;

находить интеграл;

выполнять действия над векторами;

1. Основные формулы

1.1. Арифметика и алгебра

Пропорция: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ – *основное свойство пропорции* $ad=bc$ (произведение крайних членов равно произведению средних).

Действия со степенями:

1) $(ab)^n = a^n b^n$ или $a^n b^n = (ab)^n$;

2) $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ или $\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$; 3) $a^m a^n = a^{m+n}$; 4) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$;

5) $\frac{1}{a^n} = a^{-n}$;6) $\left(a^m\right)^n = a^{mn}$.

Действия с корнями:

1) $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}$ или $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;

2) $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ или $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$; 3) $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ или $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$;

4) $\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^k = \sqrt[n]{a^{mk}}$; 5) $\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$ или $\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$.

Формулы сокращенного умножения:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

2) $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$;

3) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$;

4) $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$;

5) $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$;

6) $a^3 + b^3 = (a+b)\left(a^2 - ab + b^2\right)$;

7) $a^3 - b^3 = (a-b)\left(a^2 + ab + b^2\right)$.

Квадратные уравнения

1. *Уравнение вида*: $ax^2+bx+c=0$, $a\cdot x^2+bx+c=0$.

Дискриминант $D=b^2-4ac$.

Решение $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

2. *Приведенное квадратное уравнение*: $x^2+px+q=0$ (т. е. $a=1$).

Теорема Виета: $x_1+x_2=-p$, $x_1x_2=q$, где x_1, x_2 – корни уравнения.

3. $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1, x_2 – корни уравнения.

Прогрессии

Арифметическая прогрессия:

$$a_n=a_1+d(n-1); \qquad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}n; \qquad S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}n.$$

где a_1 – первый член,

a_n – n-й член,

d – разность арифметической прогрессии.

Геометрическая прогрессия

$b_n=b_1q^{n-1}$, где b_1 – первый член, b_n – n-й член.

$$S_n=\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} \quad \text{или} \quad S_n=\frac{b_1(q^n-1)}{q-1}; \quad S=\frac{b_1}{1-q},$$

где S_n – сумма n членов геометрической прогрессии;

S – сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии.

Логарифмы

1) $\log_a b=c \Rightarrow a^c=b$;

2) Основное логарифмическое тождество: $a^{\log_a b}=b$;

3) $\log_a a=1$; 4) $\log_a 1=0$;

5) $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$;   6) $\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$;

7) $\log_a b^n = n\log_a b$;   8) $\log_a \sqrt[n]{b} = \frac{1}{n}\log_a b$;

Модуль перехода:

9) $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$;   10) $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$;

11) $\log_{a^n} b = \frac{1}{n}\log_a b$;   12) $\log_{a^n} b^n = \log_a b$.

1.2. Геометрия

Длина окружности и ее дуги

$C = 2\pi R$; $l = \frac{\pi R\alpha^\circ}{180^\circ}$ (α° − дуга измерена в градусах).

$l = R\varphi$ (φ радиан − дуга измерена в радианах).

Площади

Треугольник: $S = \frac{ah}{2}$, (a − основание, h − высота).

Формула Герона $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, ($p$ − полупериметр, a, b, c − стороны).

$S = \frac{ab\sin\alpha}{2}$, ($\alpha$ − угол Δ-ка между сторонами a, b).

Равносторонний треугольник: $S = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$, (a − сторона Δ-ка).

Параллелограмм: $S = ah$, (a − основание, h − высота).

Ромб: $S = \frac{d_1 d_2}{2}$, (d_1, d_2 − диагонали ромба).

Трапеция: $S = \frac{a+b}{2}h$, (a, b − основания, h − высота).

$S = mh$ (m − средняя линия).

Правильный многоугольник: $S = \frac{Pa}{2}$,

(P − периметр, a − апофема).

Круг: $S = \pi R^2$.

Круговой сектор: $S = \frac{Rl}{2} = \frac{R^2\varphi}{2} = \frac{\pi R^2 \alpha^\circ}{360}$, ($\alpha^\circ$ − градусная мера дуги сектора, φ − радианная мера дуги, l − длина дуги сектора).

Поверхности

Призма: $S_{бок} = Pl$, (P − периметр перпендикулярного сечения, l − боковое ребро).

Правильная пирамида: $S_{бок} = \frac{Pa}{2}$, (P − периметр основания, a − апофема).

Правильная усеченная пирамида: $S_{бок} = \frac{P_1 + P_2}{2}a$, ($P_1$ и P_2 − периметры оснований, a − апофема).

Цилиндр: $S_{бок} = 2\pi Rh$.

Конус: $S_{бок} = \pi Rl$, (l − образующая).

Усеченный конус: $S_{бок} = \pi(R_1 + R_2)l$.

Шар: $S_{бок} = 4\pi R^2$.

Шаровой сегмент высотой h: $S = 2\pi Rh$.

Объемы

Призма: $V = SH$ (S − площадь основания, H − высота).

Пирамида: $V = (1/3)SH$.

Усеченная пирамида: $V = (H/3)\left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}\right)$.

Цилиндр: $V = \pi R^2 H$.

Конус: $V = (1/3)\pi R^2 H$.

Усеченный конус: $V = (1/3)\pi H(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2)$.

Шар: $V = (4/3)\pi R^3$.

Шаровой сегмент высотой h: $V = (1/3)\pi h^2 (3R - h)$.

1.3. Тригонометрия

Перевод градусной меры угла в радиальную и обратно:

$\varphi=\dfrac{\pi\alpha^\circ}{180^\circ}$, $\alpha^\circ=\varphi\dfrac{180^\circ}{\pi}$, ($\varphi$ – радианная мера угла, α° – градусная мера).

Основное тригонометрическое тождество и его следствия

1) $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$; 2) $1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$;

3) $1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$; 4) $\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{ctg}\alpha=1$.

Формулы сложения

1) $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$;

2) $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$;

3) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$;

4) $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$.

5) $\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{1-\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$; 6) $\mathrm{tg}(\alpha\quad\beta)=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta}{1+\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$;

7) $\mathrm{ctg}(\alpha+\beta)=\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha\mathrm{ctg}\beta-1}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$.

Двойные углы

1) $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; 2) $\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$;

3) $\mathrm{tg}2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$; 4) $\cos2\alpha=\dfrac{1-\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$;

5) $\sin2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{tg}^2\alpha}$; 6) $1+\cos2\alpha=2\cos^2\alpha$;

7) $1-\cos2\alpha=2\sin^2\alpha$.

Половинные углы

1) $1+\cos\alpha=2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}$; 2) $1-\cos\alpha=2\sin^2\dfrac{\alpha}{2}$;

3) $\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}$; 4) $\sin^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{2}$.

Сумма тригонометрических функций

1) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha\quad\beta}{2}$; 5) $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

2) $\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}$; 6) $\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{tg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$;

3) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\dfrac{\alpha+\beta}{2}\cos\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; 7) $\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta}$;

4) $\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\dfrac{\alpha+\beta}{2}\sin\dfrac{\alpha-\beta}{2}$; 8) $\mathrm{ctg}\alpha-\mathrm{ctg}\beta=\dfrac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\cdot\sin\beta}$.

Произведение тригонометрических функций

1) $\sin\alpha\cos\beta=(1/2)(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta))$;

2) $\cos\alpha\cos\beta=(1/2)(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta))$;

3) $\sin\alpha\sin\beta=(1/2)(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta))$.

Соотношение между сторонами (a,b,c) и углами α,β,γ треугольника

1. Теорема синусов: $\dfrac{a}{\sin\alpha}=\dfrac{b}{\sin\beta}=\dfrac{c}{\sin\gamma}=2R$, ($R$ − радиус описанной окружности).

2. Теорема косинусов: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$.

3. Теорема тангенсов: $\dfrac{a+b}{a-b}=\dfrac{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha+\beta}{2}}{\mathrm{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}}$.

1.4. Производная и интеграл

Производные	Интегралы
1) $c'=0$	1) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \quad n \neq -1$
2) $x'=1$	2) $\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + c$
3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	3) $\int \cos x dx = \sin x + c$
4) $\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$	4) $\int \sin x dx = \quad \cos x + c$
5) $(\sin x)' = \cos x$	5) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \mathrm{tg} x + c$
6) $(\cos x)' = -\sin x$	6) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\mathrm{ctg} x + c$
7) $(\mathrm{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	7) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$
8) $(\mathrm{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	8) $\int e^x dx = e^x + c$
9) $\left(a^x\right)' = a^x \ln a$	
10) $\left(e^x\right)' = e^x$	
11) $\left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x \ln a}$	
12) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	

1.5. Векторы

1. Длина вектора $\vec{a}(x, y, z)$: $\quad |\vec{a}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

2. Условие коллинеарности векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$: $(\vec{a} \parallel \vec{b})$: $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2}$.

3. Скалярное произведение векторов: $\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cos\varphi$, φ − угол между векторами.

Если векторы заданы координатами $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}(x_2, y_2, z_2)$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2$.

4. Угол между векторами $\cos\varphi=\dfrac{\vec{a}\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

5. Условие перпендикулярности векторов $(\vec{a}\perp\vec{b})$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$,

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0.$$

1.6. Таблица умножения

$1\cdot1=1$	$2\cdot1=2$	$3\cdot1=3$	$4\cdot1=4$	$5\cdot1=5$
$1\cdot2=2$	$2\cdot2=4$	$3\cdot2=6$	$4\cdot2=8$	$5\cdot2=10$
$1\cdot3=3$	$2\cdot3=6$	$3\cdot3=9$	$4\cdot3=12$	$5\cdot3=15$
$1\cdot4=4$	$2\cdot4=8$	$3\cdot4=12$	$4\cdot4=16$	$5\cdot4=20$
$1\cdot5=5$	$2\cdot5=10$	$3\cdot5=15$	$4\cdot5=20$	$5\cdot5=25$
$1\cdot6=6$	$2\cdot6=12$	$3\cdot6=18$	$4\cdot6=24$	$5\cdot6=30$
$1\cdot7=7$	$2\cdot7=14$	$3\cdot7=21$	$4\cdot7=28$	$5\cdot7=35$
$1\cdot8=8$	$2\cdot8=16$	$3\cdot8=24$	$4\cdot8=32$	$5\cdot8=40$
$1\cdot9=9$	$2\cdot9=18$	$3\cdot9=27$	$4\cdot9=36$	$5\cdot9=45$
$1\cdot10=10$	$2\cdot10=20$	$3\cdot10=30$	$4\cdot10=40$	$5\cdot10=50$
$6\cdot1=6$	$7\cdot1=1$	$8\cdot1=8$	$9\cdot1=9$	$10\cdot1=10$
$6\cdot2=12$	$7\cdot2=14$	$8\cdot2=16$	$9\cdot2=18$	$10\cdot2=20$
$6\cdot3=18$	$7\cdot3=21$	$8\cdot3=24$	$9\cdot3=27$	$10\cdot3=30$
$6\cdot4=24$	$7\cdot4=28$	$8\cdot4=32$	$9\cdot4=36$	$10\cdot4=40$
$6\cdot5=30$	$7\cdot5=35$	$8\cdot5=40$	$9\cdot5=45$	$10\cdot5=50$
$6\cdot6=36$	$7\cdot6=42$	$8\cdot6=48$	$9\cdot6=54$	$10\cdot6=60$
$6\cdot7=42$	$7\cdot7=49$	$8\cdot7=56$	$9\cdot7=63$	$10\cdot7=70$
$6\cdot8=48$	$7\cdot8=56$	$8\cdot8=64$	$9\cdot8=72$	$10\cdot8=80$
$6\cdot9=54$	$7\cdot9=63$	$8\cdot9=72$	$9\cdot9=81$	$10\cdot9=90$
$6\cdot10=60$	$7\cdot10=70$	$8\cdot10=80$	$9\cdot10=90$	$10\cdot10=100$

2. Задачи для самостоятельного решения

2.1. Арифметика

1.1. Вычислить:

а) $\dfrac{12^{-\frac{1}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}{6^{-\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{2}{3}}}$, Ответ: 0,5; б) $\dfrac{81^{-\frac{3}{4}}+27^{-\frac{4}{3}}}{3\cdot 9^{-1{,}5}-27^{-1}}$, Ответ: $\dfrac{2}{3}$;

в) $\dfrac{15^{0{,}5}\cdot 6^{0{,}25}\cdot 3^{-0{,}25}}{5^{-0{,}5}\cdot 2^{0{,}25}\cdot 3^{0{,}5}}$, Ответ: 5; г) $\left(\dfrac{15^{-\frac{2}{3}}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}}{6^{-\frac{2}{3}}\cdot 2^{\frac{2}{3}}}\right)^{-2}$. Ответ: 25.

1.2. Определить знак разности (устно):

а) $\left(\dfrac{5}{3}\right)^{7}-(0{,}47)^{5}$; б) $\left(\dfrac{3}{11}\right)^{15}-(1{,}15)^{9}$.

1.3. Найти наибольший общий делитель (НОД) чисел:

а) 16 и 36; б) 54 и 18; в) 480 и 640; г) 27; 81 и 108; д) 74 и 111.

1.4. Найти наименьшее общее кратное (НОК) чисел:

а) (16 и 24); б) (28 и 14);
в) (9 и 20); г) (70 и 98);
д) (350 и 720); е) (16; 20; 24).

1.5. Найти 40 % от числа $\left(3\dfrac{1}{4}+3\dfrac{5}{6}\right):\left(5\dfrac{3}{4}-3\dfrac{2}{3}\right)$.

1.6. Найти число, если 20 % его составляет $2{,}4\cdot\dfrac{3}{8}+2{,}4:\dfrac{3}{8}$.

1.7. Морская вода содержит 6 % соли. Сколько воды необходимо взять, чтобы получить 42 кг соли?

Указание. Составим пропорцию:

100 % воды – 6 % соли
x кг – 42 кг соли

Ответ: 700 кг.

1.8. Определить процент содержания сахара в растворе, если в 400 г раствора содержится 18 г сахара.

Указание. Составим пропорцию:

400 г раствора − 18 г сахара

100 % раствора − *x* % сахара Ответ: 4,5 %.

1.9. Раствор содержит 60 % соли. Сколько надо выпарить воды, чтобы получить 75 % -й раствор.

Решение: 100 % раствора − 60 % соли

$\downarrow x$ % − $\uparrow$ 75 % соли

Зависимость обратно пропорциональная, $\frac{x}{100}=\frac{60}{75}$, $x=\frac{100\cdot 60}{75}=$ $=80\%$. Следовательно, выпарить надо 100 % − 80 % = 20 % (воды).

1.10. Сплавили золото и серебро в отношении 2 : 3. Сколько золота и серебра в 50 граммах сплава.

1.11. Шесть рабочих выполняют работу за четыре дня. За сколько дней выполнят эту работу восемь рабочих?

Указание. Зависимость обратно пропорциональная. Ответ: 3 дня.

1.12. Число 240 разделить в отношении 2 : 3 : 7.

Решение: $2k+3k+7k=240 \Rightarrow 240=x_1+x_2+x_3$, $k=240 : 12 = 20$,

$x_1=2\cdot 20=40$, $x_2=3\cdot 20=60$, $x_3=7\cdot 20=140$.

1.13. Число 630 разделить в отношении 5 : 4.

1.14. Найти число, 20 % которого равно 80. Ответ: 400.

1.15. Сколько процентов составляет 30 от 150.

1.16. В январе завод выпустил 520 деталей вместо 500. На сколько процентов завод перевыполнил план? Ответ: 4 %.

1.17. Вычислить наиболее удобным способом (устно).

а) $-9-23+16-7+8$; б) $-5{,}84+9{,}77-6{,}77+5{,}84$;

в) $2{,}8-3{,}7+6{,}8-0{,}9$; г) $-26+64-47-18+26$;

д) $11{,}8-3{,}44-9{,}56+4{,}2$; е) $-\frac{4}{5}\cdot 17+8\cdot\left(-\frac{4}{5}\right)$.

1.18. Вычислить: $\left(7\frac{4}{21}-3\frac{9}{28}\right)-\left(1\frac{5}{28}-3\frac{10}{21}\right)$.

2.2. Преобразование алгебраических выражений

Упростить:

2.1. $\dfrac{a^2-b^2}{a-b}-\dfrac{a^3-b^3}{a^2-b^2}$. Ответ: $\dfrac{ab}{a+b}$.

2.2. $\left(a^2-b^2-c^2-2bc\right):\dfrac{a+b-c}{a+b+c}$. Ответ: $(a+c)^2-b^2$.

2.3. $\dfrac{b-a^{0,5}\cdot b^{0,5}}{b^{0,75}+b^{0,5}\cdot a^{0,25}}$. Ответ: $\sqrt[4]{b}-\sqrt[4]{a}$

2.4. $\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y(x-y)^2}{x^4-y^4}$. Ответ: $\dfrac{1}{x+y}$.

2.5. $\dfrac{\sqrt{x}+1}{x+\sqrt{x}+1}:\dfrac{1}{\sqrt{x^3}-1}$. Ответ: $x-1$.

2.6. Доказать тождество:

$$a^{\frac{1}{2}}-\frac{a-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}-a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{1-a^{-2}}{a^{\frac{1}{2}}+a^{-\frac{1}{2}}}+\frac{2}{a^{\frac{3}{2}}}=0.$$

Упростить:

2.7. $\left(\dfrac{\sqrt{a^3}+\sqrt{b^3}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}-\sqrt{a}\sqrt{b}\right):(a-b)+\dfrac{2\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$. Ответ: 1.

2.8. $\left(\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}-2\right)$. Ответ: $\dfrac{a^2-b^2}{ab}$.

2.9. $\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{5}\right)^2}+\sqrt{\left(1-\sqrt{3}\right)^2}-\sqrt{5}$. Ответ: -1.

2.10. $\left(\dfrac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)\cdot\left(\dfrac{a}{a-b}+\dfrac{1}{\dfrac{a}{b}-1}\right)$. Ответ: 2.

2.11. $\left(\dfrac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}}-\dfrac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}\right)\cdot\dfrac{\sqrt{y}-\sqrt{x}}{x+y}$. Ответ: $\dfrac{1}{\sqrt{x}}$.

2.12. $\dfrac{1-\dfrac{9}{y^2}}{1-\dfrac{3}{y}}-\dfrac{3}{y}$. (Устно).

2.13. $\dfrac{3x+12}{x^2-16}$. (Устно).

2.14. $\dfrac{5x-10}{x^2-4}-\dfrac{4}{x+2}$. (Устно).

2.15. Вычислить: $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$.

Решение: $\sqrt{5-2\sqrt{6}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}\sqrt{3}+2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}=\sqrt{3}-\sqrt{2}$.

2.16. Вычислить: а) $\sqrt{7-4\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{7+2\sqrt{10}}$.

2.17. Избавиться от иррациональности в знаменателе:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}$; б) $\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a+b}}$; в) $\dfrac{a^3-b^3}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

2.18. Вычислить $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}$.

Решение: $\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{\left(2+\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt[4]{4+4\sqrt{3}+3}=\sqrt[4]{7+4\sqrt{3}}$

$\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt[4]{7-4\sqrt{3}}=\sqrt[4]{\left(7+4\sqrt{3}\right)\left(7-4\sqrt{3}\right)}=\sqrt[4]{7^2-\left(4\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt[4]{49-48}=1$.

2.19. Вычислить: $\sqrt{9+4\sqrt{5}}-\sqrt{\sqrt{5}-1}\sqrt{1+\sqrt{5}}$. Ответ: $\sqrt{5}$.

2.20. Разложить на множители: $\left(x^{\frac{5}{3}}+x^{\frac{2}{3}}\cdot y\right)-\left(x\cdot y^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{5}{3}}\right)$.

2.3. Алгебраические уравнения

$$|a|=\begin{cases}a & a\geq 0\\ -a, & a<0.\end{cases}$$

Линейные уравнения $ax+b=0$

Решить уравнения:

3.1. $2x\cdot(x-5)=7\cdot(x-5)$. (Устно).

3.2. $(x-3)\cdot(x+3)\sqrt{x-1}=0$. (Устно).

3.3. $\dfrac{x+7}{x+5}=10$. **3.4.** $\dfrac{x-1}{x+1}=\dfrac{x+1}{x-1}$. **3.5.** $\sqrt{2x-14}=2$. (Устно).

3.6. $|x+5|=4$. **3.7.** $\dfrac{|x-3|\sqrt{x-2}}{x-2}=0$. **3.8.** $|x-1|+|x+2|=9$.

Решение. $|x-1|+|x+2|=9$; $|x-1|=\begin{cases} x-1, & x\ge 1 \\ -x+1, & x<1 \end{cases}$; $|x+2|=\begin{cases} x+2, & x\ge -2 \\ -x-2, & x<-2 \end{cases}$.

Знаки функций:

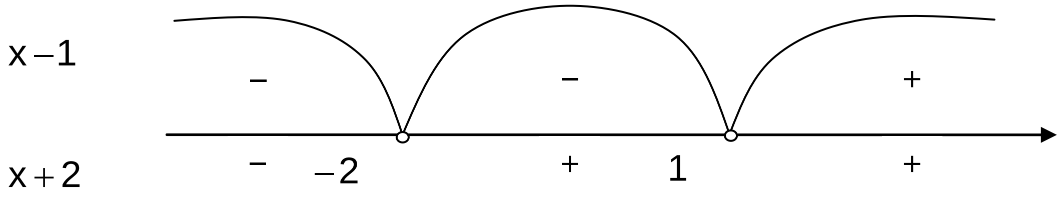


Рис. 3.1. **Знаки функций** $x-1$, $x+2$

1-й случай. $x\le -2$. $-x+1-x-2=9$; $-2x=10$; $x=-5$.
2-й случай. $-2<x<1$. $-x+1+x+2=9$; $3\ne 9$, $\varnothing$
3-й случай. $x\ge 1$. $x-1+x+2=9$; $2x=8$; $x=4$. Ответ: $x=-5$; $x=4$.

3.9. $|x+3|+|x-5|=7$. **3.10.** $|2x-3|+\sqrt{x^2+2x+1}=7$.

Квадратные уравнения: $x^2+px+q=0$ **– приведеное квадратное уравнение. Теорема Виета:** $x_1+x_2=-p$, $x_1\cdot x_2=q$**.** Сумма корней приведеного квадратного уравнения равна второму коэффициенту с противоположным знаком, а произведение – свободному члену.

Разложить на множители:

3.11. $11x-3x^2+70$. **3.12.** $15x^3+x^2-2x$. **3.13.** $x^3+2x^4+4x^2+2+x$.
Составить квадратное уравнение, корни которого:

3.14. $x_1=5$, $x_2=7$. **3.15.** $x_1=-3$, $x_2=2$. **3.16.** $x_1=-1$, $x_2=-8$.

Указание: воспользоваться теоремой Виета.

3.17. Дано уравнение $6x^3-7x^2-16x+m=0$. Известно, что корень $x_1=2$. Определить m и два других корня. Указание: воспользоваться теоремой Безу: остаток от деления многочлена на двучлен $(x-a)$, равен значению многочлена в точках $x=a$. Ответ: $m=12$, $x_2=\frac{7}{12}$, $x_3=-\frac{17}{12}$.

3.18. Решить уравнения, пользуясь теоремой Виета: сумма корней приведеного квадратного уравнения равна 2-у коэффициенту с противоположным знаком, а произведение – свободному члену.

а) $x^2-5x+6=0$; б) $x^2+9x-22=0$; в) $x^2+7x+12=0$;
г) $x^2+9x+8=0$; д) $6x^2-30x+24=0$. (предпочтительно устно)

Решить уравнения:

3.19. а) $2x^2-3x+1=0$; б) $3x^2+4x+1=0$; в) $x^2+7|x|+6=0$.

3.20. $\left(x^2-16x\right)^2-2\left(x^2-16x\right)-63=0$, *указание*: замена $x^2-16x=t$.

Ответ: $x_{1,2}=8\pm\sqrt{73}$; $x_{3,4}=8\pm\sqrt{57}$.

3.21. $\left(x^2+x+1\right)\left(x^2+x+2\right)-12=0$. Ответ: $x_1=-2$, $x_2=1$.

3.22. $\dfrac{x^2+2x+7}{x^2+2x+3}=4+2x+x^2$. Ответ: -1.

3.23. $x(x+1)(x+2)(x+3)=\dfrac{9}{16}$,

указание: перемножить $x(x+3)$ и $(x+1)(x+2)$ и сделать замену.

Ответ: $x_{1,2}=-\dfrac{3}{2}$, $x_{3,4}=-\dfrac{3\pm\sqrt{10}}{2}$.

3.24. $\dfrac{1}{x^2-2x+2}+\dfrac{2}{x^2-2x+3}=\dfrac{6}{x^2-2x+4}$,

указание: замена $x^2-2x+3=t$.

Ответ: $x_{1,2}=1$.

3.25. $x^3+1+\dfrac{1}{x^3+1}=\dfrac{5}{2}$. Ответ: $x_1=1$; $x_2=\dfrac{\sqrt[3]{4}}{2}$.

Иррациональные уравнения

Решить уравнения:

3.26. $\sqrt{x+5}\sqrt{x-5}\sqrt{x+2}\sqrt{x-1}=0$. Указание: ОДЗ $x\geq5$.

3.27. $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$.

Решение $\sqrt{x+2}-\sqrt{x-6}=2$: ОДЗ $\begin{cases}x+2\geq0\\x-6\geq0\end{cases}\begin{cases}x\geq-2\\x\geq6\end{cases}\Rightarrow x\geq6$;

$\left(\sqrt{x+2}\right)^2=\left(2+\sqrt{x-6}\right)^2$; $x+2=4+4\sqrt{x-6}+x-6$; $4\sqrt{x-6}=4$; $\sqrt{x-6}=1$; $x-6=1$; $x=7$.

Ответ: $x=7$.

3.28. $\sqrt{22-x}-\sqrt{10-x}=2$. Ответ: $x=6$.

3.29. $\sqrt{x+2}+\sqrt{x-6}=2$. Ответ: $\varnothing$

3.30. $\sqrt{3x+1}-\sqrt{x-1}=2$. Ответ: $x_1=1$; $x_2=5$.

3.31. $\sqrt{x+3}+\sqrt{3x-2}=7$. Ответ: $x=6$.

3.32. $\sqrt{1+x\sqrt{x^2+24}}=x+1$,
указание: $x+1\geq 0$, $x>-1$. Ответ: $x_1=0$; $x_2=5$.

3.33. $2\sqrt[3]{x^2}-3\sqrt[3]{x}=20$,
указание: замена $\sqrt[3]{x}=t \Rightarrow \sqrt[3]{x^2}=t^2$. Ответ: $x_1=64$; $x_2=-\frac{125}{8}$.

3.34. $\sqrt[3]{x}+2\sqrt[3]{x^2}=3$. Ответ: $x_1=1$, $x_2=-\frac{27}{8}$.

3.35. $x^2+11+\sqrt{x^2+11}=42$. Ответ: $x_{1,2}=\pm 5$.

3.36. $\frac{x\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[3]{x^2}-1}-\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x}+1}=4$.

Указание: ОДЗ $\sqrt[3]{x^2}-1\neq 0$, $x\pm 1$; $x+1\neq 0$, $x\neq -1$

$x\sqrt[3]{x}-1=\sqrt[3]{x^4}-1=\left(\sqrt[3]{x^2}\right)^2-1=\left(\sqrt[3]{x^2}-1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x^2}+1\right)$.

$\sqrt[3]{x^2}-1=\left(\sqrt[3]{x}-1\right)\cdot\left(\sqrt[3]{x}+1\right)$; после сокращения $\Rightarrow$ $\sqrt[3]{x^2}+1-\left(\sqrt[3]{x}-1\right)=4$,

замена: $\sqrt[3]{x}=t$. Ответ: $x=8$.

3.37. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}=12$,
указание: $\sqrt[4]{x}=t$, $\sqrt{x}=\sqrt[4]{x^2}=\left(\sqrt[4]{x}\right)^2=t^2$. Ответ: $x=81$.

3.38. $\frac{x-4}{\sqrt{x}+2}=x-8$. Ответ: $x=9$.

2.4. Системы алгебраических уравнений

Простейшие системы:

1) $$+\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases} \qquad -\begin{cases} x+y=a \\ x-y=b \end{cases}$$

$$2x=a+b \qquad 2y=a-b$$

$$x=\frac{a+b}{2} \qquad y=\frac{a-b}{2}$$

2) $\begin{cases} x+y=a \\ xy=b \end{cases} \Rightarrow z^2-az+b=0$, корни уравнения z_1 и z_2 $\Rightarrow$

Ответ: $x=z_1$, $y=z_2$ или $x=z_2$, $y=z_1$. Выполняя замену переменных многие системы можно свести к системам 1) или 2).

Решить системы уравнений:

4.1. $\begin{cases} x^2+y^2=2\cdot(xy+2) \\ x+y=6 \end{cases}$,

указание: $\begin{cases} (x-y)^2=4 \\ x+y=6 \end{cases}$ $\Rightarrow$ получаем две системы,

$\begin{cases} x-y=2 \\ x+y=6 \end{cases}$ и $\begin{cases} x-y=-2 \\ x+y=6 \end{cases}$

Ответ: 1) $x_1=4$, $y_1=2$; 2) $x_2=2$, $y_2=4$.

4.2. $\begin{cases} x+xy+y=1 \\ x^2y+xy^2=30 \end{cases}$,

указание: $\begin{cases} (x+y)+xy=11 \\ xy(x+y)=30 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x+y=t \\ xy=z \end{matrix} \Rightarrow \begin{cases} t+z=11 \\ t\cdot z=30 \end{cases}$.

Ответ: 1) $x_1=5$, $y_1=1$; 2) $x_2=1$, $y_2=5$;

3) $x_3=2$, $y_3=3$; 4) $x_4=3$, $y_4=2$.

4.3. $\begin{cases} x+y^2=7 \\ xy^2=12 \end{cases}$. Ответ: 1) $x_1=4$, $y_1=\sqrt{3}$; 2) $x_2=4$, $y_2=-\sqrt{3}$;

3) $x_3=3$, $y_3=2$; 4) $x_4=3$, $y_4=-2$.

4.4. $\begin{cases} x^2-y=23 \\ x^2y=50 \end{cases}$. Ответ: 1) $x_1=5$, $y_1=2$; 2) $x_2=-5$, $y_2=2$.

4.5. $\begin{cases} (x^2-y^2)\cdot xy=180 \\ x^2-xy-y^2=-11 \end{cases}$. Ответ: 1) $x_1\approx1{,}86, y_1\approx-4{,}84$;

2) $x_2\approx-1{,}86$, $y_2\approx4{,}84$;

3) $x_3=5$, $y_3=4$; 4) $x_4=-5$, $y_4=-4$.

4.6. $\begin{cases} 3x^2-2xy+5y^2-35=0 \\ \quad 5x^2-10y^2-5=0 \end{cases}\Bigg|7$.

Указание: избавимся от свободных членов. Умножим второе уравнение на 7 и вычтем из первого. Получим однородное уравнение $-32x^2-2xy+75y^2=0$. Делим на y^2 и замена $\frac{x}{y}=t$, получим $-32t^2-2t+75=0$. Решив квадратное уравнение, выразим x через y, подставим во второе уравнение.

Ответ: 1) $x_1=3$, $y_1=2$; 2) $x_2=-3$, $y_2=-2$; 3) $x_3=\frac{25}{\sqrt{113}}$, $y_3=-\frac{16}{\sqrt{113}}$;

4) $x_4=-\frac{25}{\sqrt{113}}$, $y_4=\frac{16}{\sqrt{113}}$.

4.7. $\begin{cases} x^2+y^2=\frac{5}{2}xy \\ x-y=\frac{1}{4}xy \end{cases}$,

указание: $-\begin{cases} (x-y)^2=\frac{1}{2}xy \\ 2\cdot(x-y)=\frac{1}{2}xy \end{cases}$; $(x-y)^2-2\cdot(x-y)=0$

Ответ: 1) $x_1=0$, $y_1=0$; 2) $x_2=4$, $y_2=2$; 3) $x_3=-2$, $y_3=-4$.

4.8. $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x+y=4 \end{cases}$,

указание: прибавим xy к левой и правой частям первого уравнения

$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2=13+xy \\ x+y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xy=3 \\ x+y=4 \end{cases}$. Ответ: 1) $x_1=3$, $y_1=1$; 2) $x_2=1, y_2=3$.

4.9. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x-y=1 \end{cases}$. Ответ: 1) $x_1=3$, $y_1=2$; 2) $x_2=-2, y_2=-3$.

4.10. $\begin{cases} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=\frac{25}{12} \\ x^2-y^2=7 \end{cases}$,

указание: $\frac{x}{y}=t$, $\frac{y}{x}=\frac{1}{t}$.

Ответ: 1) $x_1=4$, $y_1=3$; 2) $x_2=-4, y_2=-3$.

4.11. $\begin{cases} x^2-xy+y^2=7 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$,

указание: $x^3+y^3=(x+y)(x^2-xy+y^2)$.

Ответ: 1) $x_1=3$, $y_1=2$; 2) $x_2=2, y_2=3$.

4.12. $\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}$, *указание*: умножим второе уравнение на 3 и сложим с первым $\Rightarrow$ $(x+y)^3=1$.

Ответ: 1) $x_1=2,\ y_1=-1$; 2) $x_2=-1, y_2=2$.

4.13. $\begin{cases} xy(x+y)=30 \\ x^3+y^3=35 \end{cases}$. Ответ: 1) $x_1=3,\ y_1=2$; 2) $x_2=2, y_2=3$.

4.14. $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ x-y=-1 \end{cases}$. Ответ: $x=4,\ y=5$.

4.15. $\begin{cases} x^2+y^2=41 \\ x+y=9 \end{cases}$. Ответ: $\begin{matrix} 1)\ x_1=4,\ y_1=5 \\ 2)\ x_2=5,\ y_2=4 \end{matrix}$.

4.16. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{13}{6} \\ x+y=5 \end{cases}$. Ответ: $\begin{matrix} 1)\ x_1=3,\ y_1=2 \\ 2)\ x_2=2,\ y_2=3 \end{matrix}$.

4.17. $\begin{cases} x^2y+xy^2=6 \\ xy+x+y=5 \end{cases}$. Ответ: $\begin{matrix} 1)\ x_1=2,\ y_1=1 \\ 2)\ x_2=1,\ y_2=2 \end{matrix}$.

Решить системы методом Крамера и методом Жордана-Гаусса.

Метод Крамера:

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3 \end{cases}; \qquad x=\frac{\Delta x}{\Delta},\ y=\frac{\Delta y}{\Delta},\ z=\frac{\Delta z}{\Delta},\ \text{где}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta x=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, \qquad \Delta z=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.$$

4.18. $\begin{cases} x-2y+3z=6 \\ 2x+3y-4z=16 \\ 3x-2y-5z=12 \end{cases}$. Ответ: $(7;2;1)$.

4.19. $\begin{cases} x+3y-3z=10 \\ 2x+y-z=5 \\ 3x+2y+2z=5 \end{cases}$. Ответ: $(1;2;-1)$.

4.20. $\begin{cases} x+y-2z=6 \\ 2x+3y-7z=16 \\ 5x+2y+z=16 \end{cases}$. Ответ: $(3;1;-1)$.

4.21. $\begin{cases} 2x+y+4z=20 \\ 2x-y-3z=3 \\ 3x+4y-5z=-8 \end{cases}$. Ответ: $(5;-2;3)$.

2.5. Показательные и логарифмические уравнения

Основные свойства логарифмов

5.1. Доказать: $a^{\log_a b}=b$.

Решение 1. По определению логарифма: логарифм данного числа b по данному основанию a $(\log_a b)$ есть показатель степени, в которую надо возвести данное основание a, чтобы получить данное число $b=a^{\log_a b}$.

Решение 2. Логарифмируем по основанию a: $\log_a b\cdot\log_a a=\log_a b$; $\log_a a=1$; $\log_a b=\log_a b$.

5.2. Найти $\lg 5$, зная, что $\lg 2=0{,}301$.

Указание: $\lg 5=\lg\dfrac{10}{2}=\lg 10-\lg 2=1-\lg 2$. Ответ: $\lg 5=0{,}699$.

5.3. Найти $\lg 125$, зная, что $\lg 2=0{,}301$. Ответ: $\lg 125=2{,}097$.

5.4. Что больше $\log_2 5$ или $\log_8 125$.

5.5. Зная, что $\log_6 2=a$, $\log_6 5=b$. Найти $\log_3 5$.

Указание: $\log_3 5=\dfrac{\log_6 5}{\log_6 3}$. Ответ: $\log_3 5=\dfrac{b}{1-a}$.

5.6. Дано $\log_{14} 7=a$, $\log_{14} 5=b$.

Найти $\log_{35} 28$.

Решение: $\log_{35} 28=\dfrac{\log_{14} 28}{\log_{14} 35}=\dfrac{\log_{14} 14+\log_{14} 2}{\log_{14} 7+\log_{14} 5}=\dfrac{1+\log_{14}\frac{14}{7}}{a+b}=\dfrac{2+a}{a+b}$.

5.7. Доказать: $\lg 2=\log_3 2\cdot\log_4 3\cdot\log_5 4 \ldots \log_{10} 9$.

Указание: перейти к основанию 10.

Вычислить:

5.8. $7^{\log_7 3}$.

5.9. $343^{1-2\log_{49}13}$. Ответ: $\left(\frac{7}{13}\right)^3$.

5.10. $10\cdot 100^{\frac{1}{2}\lg 9-\lg 2}$. Ответ: $22{,}5$.

5.11. $100^{\frac{1}{2}-\lg\sqrt[4]{4}}$. Ответ: 5.

5.12. $\sqrt{10^{2+\frac{1}{2}\lg 14}}$. Ответ: 20.

5.13. $49^{1-\log_7 2}+5^{-\log_5 4}$. Ответ: $\frac{25}{2}$.

5.14. Что больше $\log_a 2$ или $\log_a 3$?

5.15. Доказать модуль перехода: $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$.

Указание: логарифмируем основное логарифмическое тождество $a^{\log_a b}=b$ по основанию c.

5.16. Что больше $\log_4 3$ или $\log_{16} 9$?

5.17. Найти ошибку в следующем доказательстве:

$$\frac{1}{8}<\frac{1}{4}\Rightarrow\left(\frac{1}{2}\right)^3<\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow\lg\left(\frac{1}{2}\right)^3<\lg\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow 3\lg\frac{1}{2}<2\lg\frac{1}{2}\Rightarrow 3<2.$$

Указание: при $a>1,\ b<1\Rightarrow\log_a^b<0$

Показательные уравнения

Решить уравнения:

5.18. $4^{x+1}+4^x=320$; *решение*: $4^x(4+1)=320$; $4^x=64$; $4^x=4^3$.

Ответ: $x=3$.

5.19. $2\cdot 3^{x+1}-4\cdot 3^{x-2}=450$. Ответ: $x=4$.

5.20. $5^x+3\cdot 5^{x-2}=140$. Ответ: $x=3$.

5.21. $10\cdot 2^x-4^x=16$; указание: $2^x=t$, $4^x=2^{2x}=\left(2^x\right)^2=t^2$.

Ответ: $x_1=3$, $x_2=1$.

5.22. $5^x - 5^{3-x} = 20$;

указание: $5^{3-x} = \dfrac{5^3}{5^x}$, $5^x = t$. Ответ: $x = 2$.

5.23. $3^{x+1} + 18 \cdot 3^{-x} = 29$. Ответ: $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{\lg 2}{\lg 3} - 1$.

5.24. $2 \cdot 3^{x+1} - 5 \cdot 9^{x-2} = 81$. Ответ: $x_1 = 4$, $x_2 = 4 - \dfrac{\lg 5}{\lg 3}$.

5.25. $49^x - 6 \cdot 7^x + 5 = 0$. Ответ: $x_1 = 0$, $x_2 = \dfrac{\lg 5}{\lg 7}$.

5.26. $5^{2x} - 7^x - 35 \cdot 5^{2x} + 35 \cdot 7^x = 0$. Ответ: $x = 0$.

5.27. $2\dfrac{1}{4} \cdot 4^{2x} - \dfrac{1}{2} \cdot 4^{4x} = 1$. Ответ: $x_1 = \dfrac{1}{2}$, $x_2 = -\dfrac{1}{4}$.

5.28. $2^x + 12 \cdot 2^{-x} = 9{,}5$. Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = \dfrac{\lg 3}{\lg 2} - 1$.

5.29. $2^{3x} \cdot 3^x - 2^{3x-1} \cdot 3^{x+1} = -288$. Ответ: $x = 2$.

5.30. $4^x - 3^{x-\frac{1}{2}} = 3^{x+\frac{1}{2}} - 2^{2x-1}$. *Решение*: $2^{2x} + \dfrac{2^{2x}}{2} = 3^x \cdot \sqrt{3} + \dfrac{3^x}{\sqrt{3}}$;

$2^{2x} \cdot \dfrac{3}{2} = 3^x\left(\sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$; $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x = \dfrac{4 \cdot 2}{\sqrt{3} \cdot 3}$; $\left(\dfrac{4}{3}\right)^x = \dfrac{2^3}{\left(\sqrt{3}\right)^3}$; $\left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^{2x} = \left(\dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)^3$;

$2x = 3$; $x = 1{,}5$. Ответ: $x = 1.5$.

5.31. $5^{2x-3} = 2 \cdot 5^{x-2} + 3$. Ответ: $x = 2$.

5.32. $4^x + 6^x = 9^x$.

Решение: $2^{2x} + 2^x \cdot 3^x = 3^{2x}$; делим на 3^{2x}; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^{2x} + \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 1$;

$t^2 + t - 1 = 0$; $t = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1+4}}{2}$; $t_1 = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t_2 = \dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$; $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x > 0$, $t_2 < 0$ – не удовлетворяет. $x \lg\dfrac{2}{3} = \lg\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$;

$x = \dfrac{\lg\left(\sqrt{5}-1\right) - \lg 2}{\lg 2 - \lg 3}$. Ответ: $x = \dfrac{\lg\left(\sqrt{5}-1\right) - \lg 2}{\lg 2 - \lg 3}$.

Логарифмические уравнения

5.33. $\log_4 \log_3 \log_2 x = 0$. Ответ: $x = 8$.

5.34. $\lg(0{,}5 + x) = \lg 0{,}5 - \lg x$. Ответ: $x = 0{,}5$.

5.35. $\lg(4{,}5 - x) = \lg 4{,}5 - \lg x$. Ответ: $x_1 = 3$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

5.36. $\lg(x - 9) + 2\lg\sqrt{2x - 1} = 2$. Ответ: $x = 13$.

5.37. $\lg\left(x - \frac{8}{9}\right) = 2\lg\frac{1}{6}$. Ответ: $x = \frac{11}{12}$.

5.38. $\lg\sqrt{x - 5} + \lg\sqrt{2x - 3} + 1 = \lg 30$;

указание: ОДЗ: $x > 5$; $x > \frac{3}{2}$. Ответ: $x = 6$.

5.39. $x^{\lg x} = 100x$; ОДЗ: $x > 0$.

Решение: $\lg x^{\lg x} = \lg 100x$; $\lg^2 x - \lg x - 2 = 0$. $\lg x = 2$, $x = 10^2$; $\lg x = -1$; $x = 10^{-1}$. Ответ: $x_1 = 100$, $x_2 = 0{,}1$.

5.40. $x^{\lg x - 1} = 100$. Ответ: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 100$.

5.41. $0{,}1 \cdot x^{\lg x - 2} = 100$. Ответ: $x_1 = 0{,}1$, $x_2 = 1000$.

5.42. $(0{,}4)^{\lg^2 x + 1} - (6{,}25)^{2 - \lg x^3} = 0$;

указание: $0{,}4 = 2/5$, $(6{,}25) = (2/5)^{-2}$; $\left(\frac{2}{5}\right)^{\lg^2 x + 1} = \left(\frac{2}{5}\right)^{-2\left(2 - \lg x^3\right)}$;

$\lg^2 x + 1 = -4 + 6\lg x$. Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = 10^5$.

5.43. $x^{2\log_x 10} = 10 \cdot x$.

Решение: ОДЗ: $x > 0$. Логарифмируем по основанию x.

$2\log_x 10 \cdot \log_x x = \log_x 10 + \log_x x$; $\log_x x = 1$. $\log_x 10 = 1 \Rightarrow x = 10$.

Ответ: $x = 10$.

5.44. $2^{\frac{3}{\log_3 x}} = \frac{1}{64}$. Ответ: $x = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5.45. $x^{\log_a x} = a^2 x$ $(a > 0)$;

указание: логарифмируем по основанию a. Ответ: $x_1 = a^2$, $x_2 = a^{-1}$.

5.46. $x^{\left(2\lg^3 x - 1{,}5\lg x\right)} = \sqrt{10}$. Ответ: $x_1 = 10$, $x_2 = 0{,}1$.

5.47. $\log_5\left(x^2-11x+43\right)=2$. Ответ: $x_1=2,\ x_2=9$.

5.48. $\lg\left(8\cdot\sqrt[10]{2^{x^2-14,5x}}\right)=0$. Ответ: $x_1=2,5,\ x_2=12$.

5.49. $\log\left(64\cdot\sqrt[24]{2^{x^2-40x}}\right)=0$. Ответ: $x_1=4,\ x_2=36$.

5.50. $4-\lg x=3\sqrt{\lg x}$;

указание: $\begin{cases}x>0\\ \lg x>0\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}x>0\\ x>1\end{matrix}\Rightarrow x>1.$ Ответ: $x=10$.

5.51. $\log_4(x+12)\cdot\log_x 2=1$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\ x+12>0\end{cases};\ \begin{matrix}x>0\\ x>-12\end{matrix}\Rightarrow x>0$; $\log_4(x+12)\cdot\dfrac{1}{\log_2 x}$;

$\dfrac{1}{2}\log_2(x+12)=\log_2 x$; $\log_2\sqrt{x+12}=\log_2 x$; $\sqrt{x+12}=x$; $x^2-x-12=0$;

$x_1=-3,\ x_2=4$. Ответ: $x=4$.

5.52. $\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}\cdot\log_3 x=-1$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases}x>0\\ \lg_3 x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x>0\\ x<1\end{cases}\Rightarrow 0<x<1$

$\log_3 x=\dfrac{1}{\log_x 3}\Rightarrow\sqrt{\log_x\sqrt{3x}}=-\log_x 3$; возведем в квадрат:

$\log_x\sqrt{3x}=\log_x^2 3$; $\dfrac{1}{2}\left(\log_x 3+1\right)=\log_x^2 3$; $\log_x 3=z\Rightarrow 2z^2-z-1=0$; $z_1=1$,

$z_2=-\dfrac{1}{2}$; $\log_x 3=1\Rightarrow x=3\notin$ ОДЗ; $\log_x 3=-\dfrac{1}{2}\Rightarrow x^{-\frac{1}{2}}=3\Rightarrow x=9^{-1}$.

Ответ: $x=9^{-1}$.

5.53. $\log_x 2+\log_2 x=2,5$. Ответ: $x_1=4,\ x_2=\sqrt{2}$.

2.6. Прогрессии

Арифметическая прогрессия

$$a_n=a_1+d(n-1);\ a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2};\ S_n=\frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n;\quad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n.$$

В арифметической прогрессии суммы членов, равноотстоящих от концов разложения равны: $a_1+a_n=a_2+a_{n-1}=a_3+a_{n-2}=\ldots$

6.1. Найти сумму семи членов (S_7) арифметической прогрессии, если:

$$\begin{matrix} a_3 + a_{10} = 28 \\ a_6 - a_2 = 8 \end{matrix};$$

указание: $\begin{cases} a_1 + 2d + a_1 + 9d = 28 \\ a_1 + 5d - a_1 \; - \; d \; = 8 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2a_1 + 11d = 28 \\ 4d = 8 \end{cases}.$

Ответ: $S_7 = 63$.

6.2. Найти a_5 арифметической прогрессии, если $\begin{cases} a_1 + a_2 + a_3 = 15 \\ a_4 - a_1 = 9 \end{cases}.$

Ответ: 24.

6.3. Найти произведение $a_3 \cdot a_5$ членов арифметической прогрессии, если $a_5 = 11$, $S_{10} = 122{,}5$.

Ответ: 110.

6.4. Найти $a_1 \cdot a_2$, арифметической прогрессии, если $\begin{matrix} a_{15} = 37 \\ a_5 + a_6 = 36 \end{matrix}.$

Ответ: 99.

6.5. $a_3 = \dfrac{a_6}{3}$, $a_2 + a_5 = 16$. Найти a_1 арифметической прогрессии.

Ответ: $a_1 = -2$.

6.6. В арифметической прогрессии $a_1 + a_2 + a_3 = 12$, $a_4 = 6$. При каком n член прогрессии $a_n = 14$?

Ответ: $n = 12$.

6.7. $a_3 + a_9 = 8$. Найти S_{11} арифметической прогрессии.

Решение: используем свойство: суммы членов, равностоящих от концов разложения, равны, т. е.

$a_3 + a_9 = a_1 + a_{11}$; $S_{11} = \dfrac{a_1 + a_{11}}{2} \cdot 11 = 44$. Ответ: 44.

6.8. $a_4 + a_7 = 58$; $a_5 + a_{10} = 74$; $S_n = 68$. Найти n арифметической прогрессии.

Ответ: $n = 4$.

Геометрическая прогрессия

$$b_n = b_1 q^{n-1}; \; b_n = \sqrt{b_{n-1} \cdot b_{n+1}}; \; S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}; \; S = \frac{b_1}{1 - q} \; (n \to \infty), \; (|q| < 1).$$

6.9. Найти геометрическую прогрессию b_n, если $b_3 - b_1 = 16$, $b_5 - b_3 = 144$. Ответ: 2; 6; 18;…

6.10. $b_3 - b_1 = 9$, $b_2 - b_4 = 18$. Найти геометрическую прогрессию.

Ответ: 3; –6; 12; –24;…

6.11. $b_7 - b_5 = 48$, $b_6 + b_5 = 48$. Найти b_1 геометрической прогрессии.

Ответ: $b_1 = -7$.

6.12. $b_1 = 3$; $b_2 = 12$; $b_n = 3072$. Найти n геометрической прогрессии.

Ответ: $n = 5$.

6.13. Найти геометрическую прогрессию, если $b_4 - b_2 = 243$; $b_2 + b_3 = 6$. Ответ: $\frac{1}{5}$; 1; 5; 25.

6.14. $b_1 + b_3 = 26$; $b_1 + b_2 + b_3 = 31$. Найти b_7 геометрической прогрессии. Ответ: $b_7 = 5^6$.

Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия

6.15. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = 12{,}5$, $b_1 + b_2 = 12$. Найти прогрессию. Ответ: 10; 2; $\frac{2}{5}$; …

6.16. Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии $S = 243$, $S_5 = 275$. Найти прогрессию. Ответ: $b_1 = 405$, $q = -\frac{2}{3}$.

6.17. $b_1 = \sqrt{3}$, $b_2 = \frac{2}{\sqrt{3}+1}$. Найти S. Ответ: $S = 3$.

Решить уравнения:

6.18. $\frac{1}{3x} + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots = \frac{3}{2}$, $|x| < 1$. Ответ: $x_1 = \frac{2}{5}$, $x_2 = \frac{1}{3}$.

6.19. $2x + 1 + x^2 - x^3 + \ldots = \frac{13}{6}$, $|x| < 1$. Ответ: $x_1 = -\frac{7}{9}$, $x_2 = \frac{1}{2}$.

Смешанные задачи на арифметическую и геометрическую прогрессии

6.20. Сумма трех членов арифметической прогрессии $a_1 + a_2 + a_3 = 54$. Известно, что $a_1 = b_1$, $a_2 - 9 = b_2$, $a_3 - 6 = b_3$, где b_1, b_2, b_3 – члены геометрической прогрессии. Найти геометрическую прогрессию.

Ответ: $(3; 18; 33)$ или $(27; 18; 9)$.

6.21. Сумма трех членов геометрической прогрессии равна 65: $b_1+b_2+b_3==65$; $b_1-1=a_1$, $b_2=a_2$, $b_3-19=a_3$. Найти b_1,b_2,b_3.

Ответ: $(5;15;45)$ или $(45;15;5)$.

6.22. b_1,b_2,b_3, a_3; $b_2=a_1$, $b_3=a_2$;

$b_1+a_3=21$, b_1,b_2,b_3 − геометрическая прогрессия;

$b_2+b_3=18$, $b_2=a_1$, $b_3=a_2$, a_3 − арифметическая прогрессия.

Найти числа b_1,b_2,b_3, a_3.

Ответ: $(3;6;12;18)$.

2.7. Неравенства

Решить неравенства:

7.1. $\dfrac{7x-5}{8x+3}>4$ ОДЗ: $x\neq-\dfrac{3}{8}$.

Решение: $\dfrac{7x-5}{8x+3}-4>0 \Rightarrow \dfrac{25x+17}{8x+3}<0$.

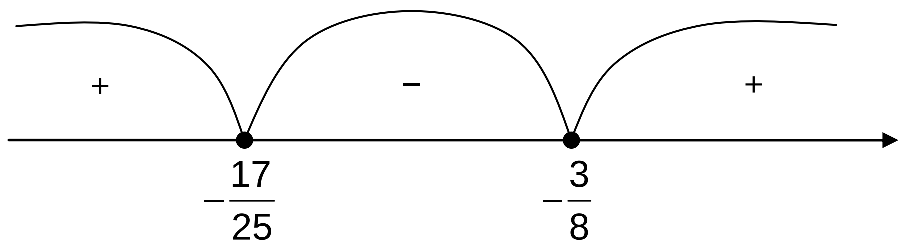


Рис. 7.1 **Знаки функции** $y=\dfrac{25x+17}{8x+3}$

Ответ : $-\dfrac{17}{25}<x<-\dfrac{3}{8}$

7.2. $\dfrac{x+1}{x-2}>\dfrac{3}{x-2}-\dfrac{1}{2}$. Ответ: $x\in(-\infty,2)\cup(2,\infty)$.

7.3. $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{2}$. Ответ: $x\in(-\infty,0)\cup(2,\infty)$.

7.4. $x^3+5x^2+3x-9>0$.

Решение: сгруппируем и разложим на множители

$$(x^3-1)+(5x^2+3x-8)>0; \quad (x-1)(x^2+x+1)+5(x-1)(x+1{,}6)>0;$$

$$(x-1)(x^2+6x+9)>0; \ (x-1)(x+3)^2>0, \ x\neq-3.$$

Ответ: $x>1$.

7.5. $2x^3 > x+1$. *Указание*: $2x^3 - x - 1 > 0 \Rightarrow (x^3 - x) + (x^3 - 1) > 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow x(x-1)(x+1) + (x-1)(x^2+x+1) > 0$. Ответ: $x > 1$.

7.6. $\dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)} \geq 0$.

Решение:

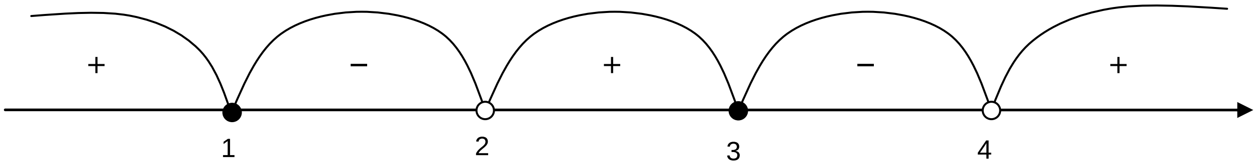


Рис. 7.2. **Знаки функции** $y = \dfrac{(x-1)(x-3)}{(x-2)(x-4)}$

Ответ: $x \in (-\infty, 1] \cup (2, 3] \cup (4, \infty)$.

7.7. $\dfrac{(x+1)(x+2)(x+3)}{(2x-1)(x+4)(3-x)} > 0$. Ответ: $x \in (-4, -3) \cup (-2, -1) \cup \left(\dfrac{1}{2}, 3\right)$.

7.8. $\dfrac{(x^3-1)(x+2)^2(x-5)}{x^2(x^2-9)(x^4+1)} < 0$. Ответ: $x \in (-3, -2) \cup (-2, 0) \cup (0, 1) \cup (3, 5)$.

7.9. $\sqrt{\dfrac{3x-1}{2-x}} > 1$.

Решение: ОДЗ: $\dfrac{3x-1}{2-x} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left[\dfrac{1}{3}, 2\right)$;

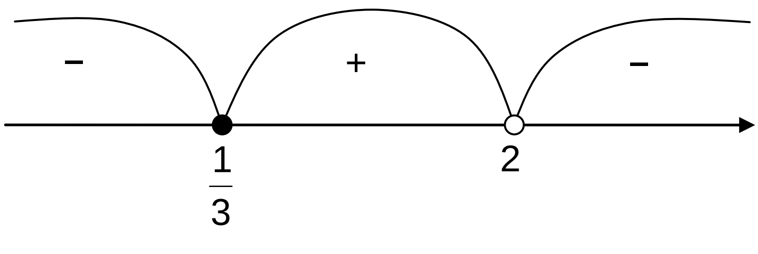


Рис. 7.3. **Знаки функции** $y = \dfrac{3x-1}{2-x}$

$$\frac{3x-1}{2-x} > 1 \Rightarrow \frac{3x-1-2+x}{2-x} > 0 \Rightarrow \frac{4x-3}{2-x} > 0 \quad \Rightarrow \quad x \in \left(\frac{3}{4}, 2\right).$$

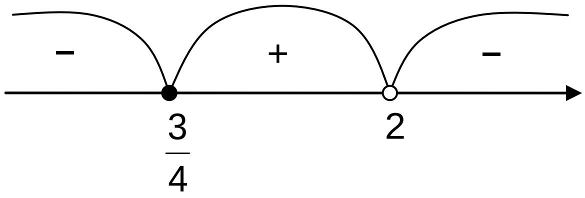


Рис. 7.4 **Знаки функции** $y=\dfrac{4x-3}{2-x}$

Ответ: $x\in\left(\dfrac{3}{4},2\right)$.

7.10. $\sqrt{3-x}<x-2$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases}3-x\ge 0 & x\le 3\\ x-2\ge 0 & x\ge 2\end{cases}\quad 2\le x\le 3$

$3-x<x^2-4x+4 \;\Rightarrow\; x^2-3x+1>0$;

корни уравнения $x^2-3x+1=0$: $x_{1,2}=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$;

$x\in\left(-\infty,\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},\infty\right)$.

Ответ: $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2},3\right)$.

7.11. $\sqrt{3x-5}>\sqrt{x-4}$.

Решение: ОДЗ: $\begin{cases}3x-5\ge 0 & \Rightarrow & x>\dfrac{5}{3}\\ x-4\ge 0 & \Rightarrow & x\ge 4\end{cases}$

$3x-5>x-4 \;\Rightarrow\; 2x>1 \;\Rightarrow\; x>\dfrac{1}{2}$.

Ответ: $x\ge 4$.

7.12. $6x^2-29x+30<0$.

Указание: $6\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{10}{3}\right)<0$.

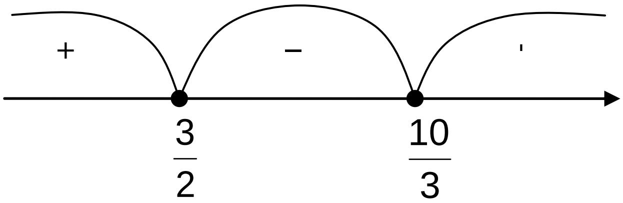


Рис. 7.5. **Знаки функции** $y=6\left(x-\dfrac{3}{2}\right)\left(x-\dfrac{10}{3}\right)$

Ответ: $\dfrac{3}{2}<x<\dfrac{10}{3}$.

7.13. $-3x^2+5x+2>0$. Ответ: $-\frac{1}{3}<x<2$.

7.14. $x^2-5x+4\ge 0$. Ответ: $x\in(-\infty,1]\cup[4,\infty)$.

7.15. $\frac{x^2-12x+27}{x-3}\le 0$. Ответ: $x\le 9$, $x\ne 3$.

7.16. $\sqrt{(x+3)(x+4)}>6-x$. Ответ: $x\in[24/19,\infty)$

7.17. $\left|x^2-5x\right|<6$. Ответ: $x\in(0;2)\cup[3,6)$

7.18. Решить графически системы неравенств (7.18),(7.19): $\begin{cases}x+y\ge 1\\ 2x-y\le 4\end{cases}$.

Решение:

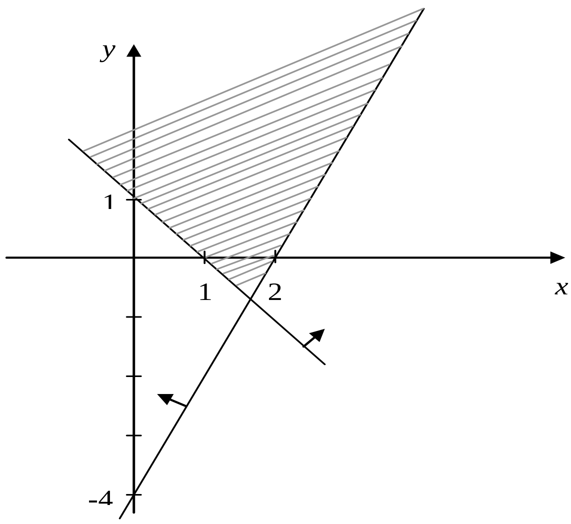


Рис. 7.6. **Область на плоскости ХОУ, удовлетворяющая системе неравенств** $x+y\ge 1;\ 2x-y\le 4$

7.19. $\begin{matrix}l_1\\ \\ l_2\end{matrix}\begin{cases}x+2y\le 2\\ x-y>0\\ y\ge 0\end{cases}$

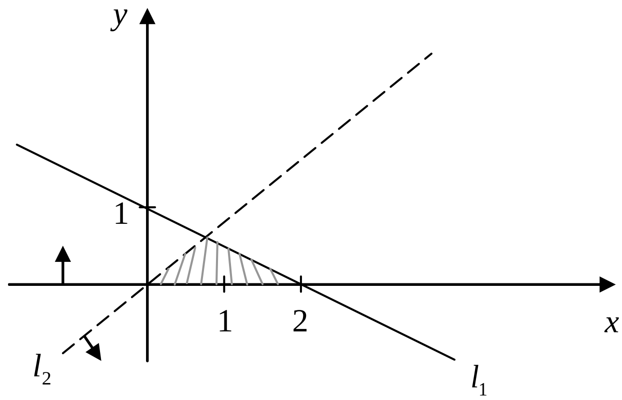


Рис. 7.7. **Область на плоскости ХОУ, удовлетворяющая системе неравенств** $x+2y\le 2, x-y>0, y\ge 0$

Решить неравенства:

7.20. $\log_3(1-2x) \geq \log_3(5x-2)$. Ответ: $x \in \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{7}\right)$.

7.21. $\log_{\frac{1}{5}}(3x-1) \geq \log_{\frac{1}{5}}(3-x)$. Ответ: $x \in [1,5)$.

7.22. $\frac{\log_2(x-1)}{x-3} \leq 0$. Ответ: $x \in [2,3)$.

7.23. $4^{2x} < 16$. (устно) Ответ: $(-\infty,1)$.

7.24. $\log_2(x-3) > 0$. (устно) Ответ: $(4,\infty)$.

7.25. $\left(\frac{1}{5}\right)^{\frac{2x+1}{1-x}} > \left(\frac{1}{5}\right)^{-3}$. Ответ: $(1,4)$.

7.26. $5^{x-3} \geq 7^{3-x}$. Ответ: $x \in [3,\infty)$.

7.27. $3 \cdot 2^{x+1} + 5 \cdot 2^{x} - 2^{x+2} \leq 21$. Ответ: $x \in (-\infty, \log_2 3)$.

7.28. $9^{x} - 2 \cdot 3^{x} < 3$. Ответ: $x \in (-\infty,-1)$.

2.8. Функции и графики

Найти область определения функции:

8.1. $y = \sqrt{x+1} + \sqrt{x-1}$ ОДЗ: $\begin{cases} x+1 \geq 0 \\ x-1 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{matrix} x \geq -1 \\ x \geq 1 \end{matrix}$ Ответ: $x \in [1,\infty)$.

8.2. $y = \sqrt{\frac{x+2}{x+5}}$ ОДЗ: $\frac{x+2}{x+5} \geq 0$

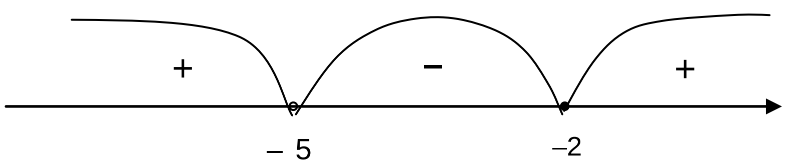


Рис. 8.1. **Знаки функции** $y = \frac{x+2}{x+5}$

Ответ: $x \in (-\infty,-5) \cup [-2,\infty)$.

8.3. $y = \frac{1}{x^2 - 5x + 6}$ ОДЗ: $x^2 - 5x + 6 \neq 0$ $x \neq 2$ $x \neq 3$

Ответ: $x \in (-\infty,2) \cup (2,3) \cup (3,\infty)$.

8.4. $y=\sqrt{x^2-5x+4}$;

Решение: $x^2-5x+4=0$, $x_1=4, x_2=1$; $x^2-5x+4=(x-4)(x-1)$;

$y=\sqrt{(x-4)(x-1)}$ ОДЗ: $(x-4)(x-1)\ge 0$

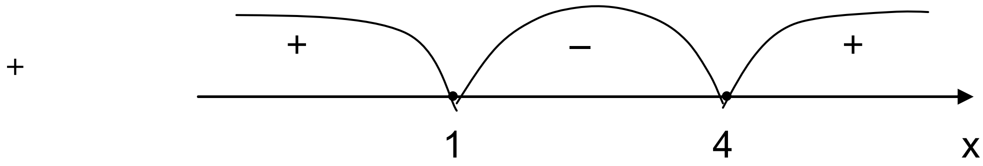


Рис. 8.2. **Знаки функции** $(x-4)(x-1)$

Ответ: $x\in(-\infty,1]\cup[4,\infty)$.

8.5. $y=\log_2(x-3)+\log_2 x$ ОДЗ: $\begin{cases}x-3>0\\ x>0\end{cases}\begin{cases}x>3\\ x>0\end{cases}$

Ответ: $x\in(3,\infty)$.

8.6. $y=\sqrt{x-3}+\dfrac{1}{\sqrt{6-x}}$ ОДЗ: $\begin{cases}x-3\ge 0\\ x-x>0\end{cases}$ $\begin{cases}x\ge 3\\ x<6\end{cases}$

Ответ: $x\in[3,6)$.

8.7. $y=\log_3(2-x)+\dfrac{1}{\log_3(1+x)}$ ОДЗ: $\begin{cases}2-x>0\\ 1+x>0\\ \log_3(1+x)\ne 0\end{cases}$ $\begin{cases}x<2\\ x>-1\\ 1+x\ne 1\end{cases}$

Ответ: $\begin{cases}x\in(-1,0)\cup(0,2)\\ x\ne 0\end{cases}$.

8.8. $y=\lg\left(x^2-7x+6\right)$ ОДЗ: $x^2-7x+6>0$

Ответ: $x\in(-\infty,1)\cup(6,\infty)$.

8.9. $y=\lg\left(-x^2+3x-2\right)$ ОДЗ: $-x^2+3x-2>0$

Ответ: $x\in(1,2)$.

Построить графики функций.

Функция называется четной, если $f(-x)=f(x)$; если $f(-x)=-f(x)$ – функция нечетная, график четной функции симметричен относительно оси *ОУ*; график нечетной функции симметричен относительно начала координат.

8.10. $y=x$. **8.11.** $y=2x+1$. **8.12.** $y=1-3x$. **8.13.** $y=|x|$.

Решение: $y(-x)=|-x|=|x|=y(x)$ – функция четная, т. е. ее график симметричен относительно оси *ОУ*. Пусть $x\ge 0$, отбросим модуль $y=x$ – прямая. Зададим две точки:

x	0	1
y	0	1

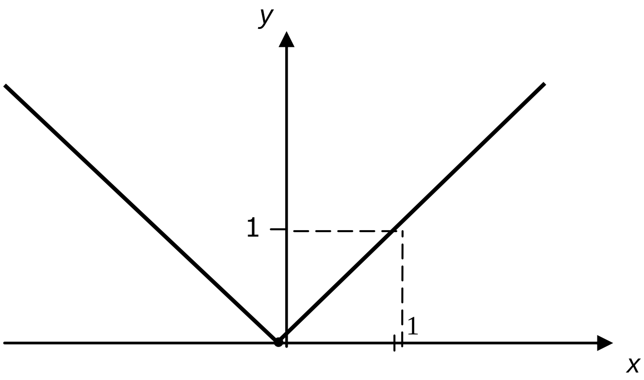


Рис. 8.3. **График функции** $y=|x|$ при $x>0$

Отобразим график относительно оси *ОУ*

8.14. $y=1-2|x|$. **8.15.** $y=x^2$.

8.16. $y=-x^2$. **8.17.** $y=\frac{2}{x}$. **8.18.** $y=-\frac{3}{x}$.

8.19. $y=\frac{1}{|x|}$. **8.20.** $y=x^2+2x-3$. **8.21.** $y=x^2-3|x|+2$.

8.22. $y=\left|x^2-4x+3\right|$. **8.23.** $y=\left|x^2-7|x|+6\right|$. **8.24.** $y=\left|x^2+5x+4\right|$.

8.25. $y=\left|x^2+5|x|+6\right|$. **8.26.** $y=\frac{1}{x-2}$. **8.27.** $y=\frac{3}{x-1}+4$.

Графики логарифмических и показательных функций

8.28. $y=\log_2 x$.

8.29. $y=\log_{\frac{1}{2}} x$.

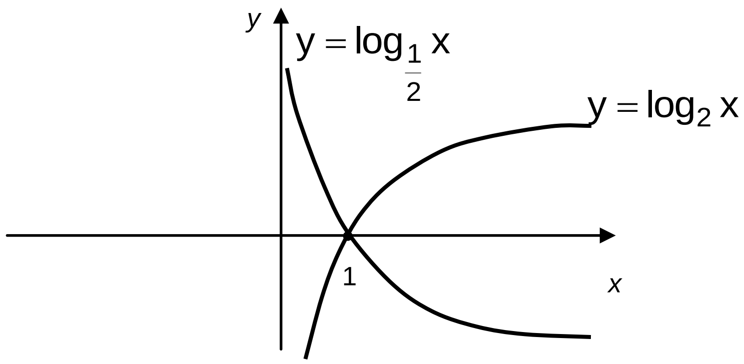


Рис. 8.4. **Графики функций** $y=\log_2 x$ и $y=\log_{\frac{1}{2}} x$

8.30. $y = \left|\log_2 x\right|$.

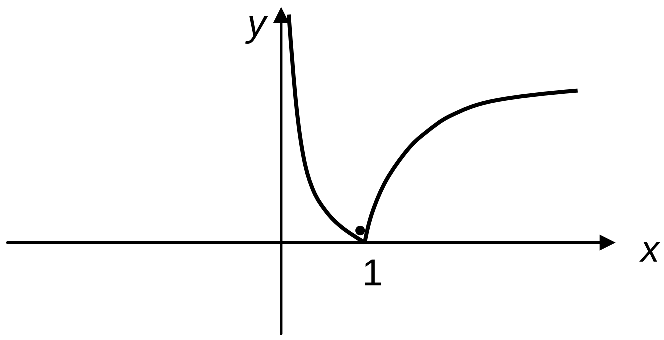


Рис. 8.5. **График функции** $y = \left|\log_2 x\right|$

8.31. $y = \log_2\left|x\right|$. *Указание*: Функция четная.

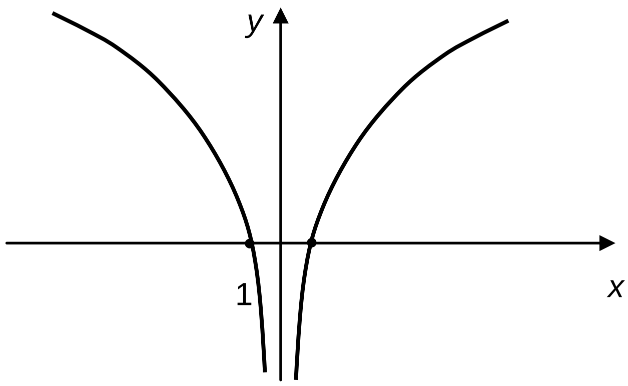


Рис. 8.6. **График функции** $y = \log_2\left|x\right|$

8.32. $y = \left|\log_2\left|x\right|\right|$.

8.33. $y = 2^x$.

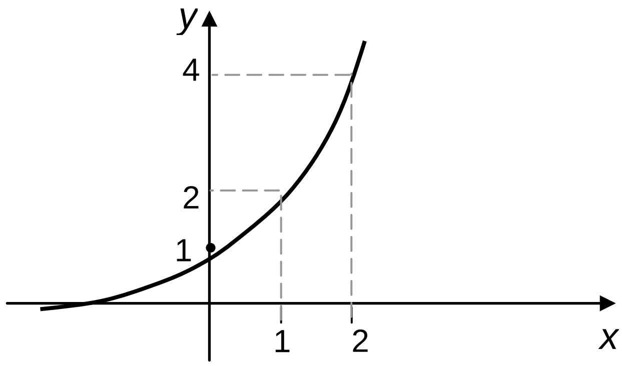
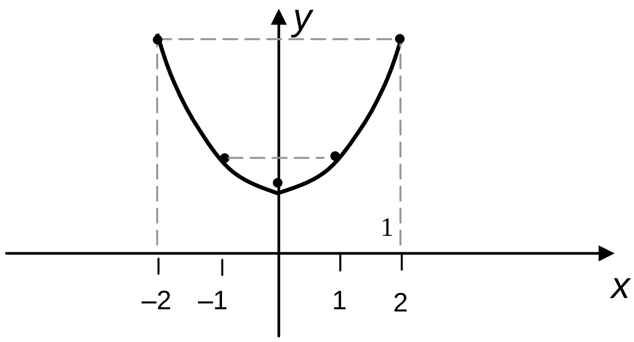


Рис. 8.7. **График функции** $y = 2^x$

8.34. $y = 2^{|x|}$. Указание:

Пусть $x > 0$ $y = 2^{x}$

x	0	1	2
y	1	2	4



$y = 2^{|x|}$ − функция четная.

Рис. 8.8. **График функции** $y = 2^{|x|}$.

График $y = 2^{x}$ отображаем симметрично относительно оси *OY*.

2.9. Элементы комбинаторики

Перестановки n элементов (группы элементов, отличающиеся порядком)

$$P_n = n!;\ n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n.$$

Сочетания из n **элементов по** m (каждая группа отличается хотя бы одним элементом).

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Размещения из n **элементов по** m (каждая группа отличается или элементом, или их порядком).

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

9.1. В партии из 15 деталей 7 стандартных. Сколькими способами можно отобрать 5 деталей, чтобы среди них было 3 стандартных?

Указание: $m = C_7^3 \cdot C_8^2$.

9.2. Набирая номер телефона, абонент забыл последние две цифры. Зная, что они разные набрал их случайным образом. Найти количество всех способов, которыми можно набрать эти цифры.

Указание: A_{10}^2.

9.3. В группе 15 юношей и 10 девушек. Для дежурства отбирают пять человек. Сколькими способами можно отобрать дежурных так, чтобы среди них были 2 девушки?

9.4. В механизме 2 одинаковые детали требуется заменить. Механизм не будет работать, если обе детали меньшего размера. Сколькими способами можно отобрать 2 детали так, чтобы механизм работал, если у сборщика 10 деталей, среди которых 3 меньшего размера?

9.5. Пять зрителей требуется посадить на 5 мест. Сколькими способами это можно сделать?

9.6. На столе лежат 8 экзаменационных билетов. Сколькими способами их можно раздать четырем студентам.

9.7. Сколько различных слов можно составить, переставляя буквы в слове "река" (если каждую комбинацию считать словом)?

9.8. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5.

2.10. Тригонометрия

Основное тригонометрическое тождество:

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1.$$

Упростить выражения (предпочтительно устно):

10.1. а) $2 - \sin^2\alpha - \cos^2\alpha$; б) $\dfrac{\sin^2\alpha}{1-\cos\alpha}$; в) $\dfrac{1-2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$;

г) $\dfrac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha-1}$; д) $\dfrac{2\sin^2\alpha-1}{\sin\alpha+\cos\alpha}$; е) $\dfrac{\sin 37^\circ\cdot\cos 53^\circ}{1-\cos^2 37^\circ}$.

10.2. $\dfrac{1-4\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha}{(\cos\alpha+\sin\alpha)^2}$.

10.3. $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$.

10.4. $(\sin\beta+\cos\beta)^2 + (\sin\beta-\cos\beta)^2$.

10.5. $\sin^2\alpha\cdot\sin^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\cos^2\beta + \sin^2\alpha\cdot\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin^2\beta$.

Упростить:

10.6. а) $\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}$; б) $\sqrt{\dfrac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}$; в) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}$; г) $\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{ctg}^2\alpha}}$.

Решить устно:

10.7. а) $\dfrac{\frac{1}{\cos\alpha}-1}{1-\cos\alpha}$; б) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}\beta}$; в) $\dfrac{\sin\alpha-\cos\alpha}{\frac{1}{\cos\alpha}-\frac{1}{\sin\alpha}}$;

г) $\dfrac{\sin\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\dfrac{1}{\sin\alpha}}$; д) $\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha}{1+\mathrm{ctg}\alpha+\mathrm{ctg}^2\alpha}$.

Доказать тождества

10.8. $\sin^2\alpha-\cos^2\alpha=\sin^4\alpha-\cos^4\alpha$.

10.9. $\cos\alpha=\sin\alpha\,\mathrm{ctg}\alpha$. **10.10.** $\cos^4\alpha-\sin^4\alpha=1-2\sin^2\alpha$.

10.11. $\dfrac{1+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\sin^2\alpha-\cos^2\alpha}=\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+1}{\mathrm{tg}\alpha-1}$. **10.12.** $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\sin\alpha\cdot\cos\alpha}=\mathrm{tg}\alpha-\mathrm{ctg}\alpha$.

10.13. $\dfrac{1-\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}{\cos^4\alpha}=2\mathrm{tg}^2\alpha$.

10.14. $\cos^2\alpha(1-\mathrm{tg}\alpha)(1+\mathrm{tg}\alpha)=\cos^4\alpha-\sin^4\alpha$.

10.15. $\mathrm{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\cos^2\alpha\cdot\mathrm{ctg}^2\alpha$.

Решить устно:

10.16. а) $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha}{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha}=\sin^2\alpha$; б) $\dfrac{1+\mathrm{tg}\alpha}{1+\mathrm{ctg}\alpha}=\mathrm{tg}\alpha$; в) $\dfrac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha}$;

г) $\dfrac{\mathrm{ctg}\alpha}{\dfrac{1}{\sin\alpha}-1}=\dfrac{1+\dfrac{1}{\sin\alpha}}{\mathrm{ctg}\alpha}$; д) $\dfrac{1+\cos\alpha+\cos^2\alpha}{1+\dfrac{1}{\cos\alpha}+\dfrac{1}{\cos^2\alpha}}=\cos^2\alpha$.

10.17. Найти $\dfrac{3\sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha+2\cos\alpha}$, если $\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{1}{2}$. Ответ: 0,2.

10.18. Найти $\sin\alpha\cdot\cos\alpha$, если $\sin\alpha-\cos\alpha=r$. Ответ: $\dfrac{1-r^2}{2}$.

10.19. Найти $\mathrm{tg}^3\alpha+\mathrm{ctg}^3\alpha$, если $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{ctg}\alpha=S$. Ответ: $S(S^2-3)$.

Тригонометрические уравнения

$\sin x=a$, $x=(-1)^n\arcsin a+\pi n$, $n\in Z$; $\cos x=a$, $x=\pm\arccos a+2\pi n$, $n\in Z$;

$\mathrm{tg}x=a$, $x=\mathrm{arctg}\,a+\pi n$, $n\in Z$; $\mathrm{ctg}x=a$, $x=\mathrm{arcctg}\,a+\pi n$, $n\in Z$;

$\sin x=0$, $x=\pi n$, $n\in Z$; $\cos x=0$, $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$, $n\in Z$;

$\sin x=1$, $x=\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; $\sin x=1$, $x=2\pi n$, $n\in Z$;

$\sin x=-1$, $x=-\dfrac{\pi}{2}+2\pi n$, $n\in Z$; $\cos x=-1$, $x=\pi+2\pi n$, $n\in Z$.

Значения тригонометрических функций углов в первой четверти

$\sin x = 0, \quad x = 0$,	$\sin x = 1/2 \quad x = \pi/6$	$\cos x = 0, x = \pi/2$	$\cos x = 1/2$, $x = \pi/3$
$\sin x = \sqrt{2}/2$, $x = \pi/4$	$\sin x = \sqrt{3}/2$, $x = \pi/3$	$\cos x = \sqrt{2}/2$, $x = \pi/4$	$\cos x = \sqrt{3}/2$, $x = \pi/6$
$\sin x = 1$, $x = \pi/2$		$\cos x = 1$, $x = 0$	
$\mathrm{tg}x = 0$, $x = 0$	$\mathrm{tg}x = 1/\sqrt{3}$, $x = \pi/6$	$\mathrm{ctg}x = 0$, $x = \pi/2$	$\mathrm{ctg}x = 1/\sqrt{3}$, $x = \pi/3$
$\mathrm{tg}x = 1$, $x = \pi/4$	$\mathrm{tg}x = \sqrt{3}$, $x = \pi/3$	$\mathrm{ctg}x = 1$, $x = \pi/4$	$\mathrm{ctg}x = \sqrt{3}$, $x = \pi/6$
$\mathrm{tg}x = \infty$, $x = \dfrac{\pi}{2}$		$\mathrm{ctg}x = \infty$, $x = 0$	

Уравнения вида: $a\cos x + b\sin x = c$

Делим на $\sqrt{a^2+b^2}$ $\Rightarrow$

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\alpha, \quad \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\alpha,$$

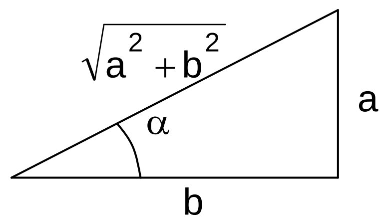


Рис. 10.1. **Прямокутний трикутник**

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin\alpha\cos x + \cos\alpha\sin x = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} \Rightarrow \sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

10.20. $3\sin x = 2\cos^2 x$.

Указание: $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, замена $\sin x = t$.

Ответ: $x = (-1)^n \dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

10.21. $\sin^2 x + \cos x + 1 = 0$. Ответ: $x = \pi(2n+1)$, $n \in Z$.

10.22. $\sin x + \cos^2 x = \dfrac{1}{4}$. Ответ: $(-1)^{n+1}\dfrac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

10.23. $\sin 6x = \sin 4x$.

Указание: $\sin 6x - \sin 4x = 0$. Формула $\sin\alpha - \sin\beta$.

Ответ: $x = \pi n$; $x = (2n+1)\dfrac{\pi}{10}$, $n \in Z$.

10.24. $\cos 3x = \cos x$. Ответ: $x = \frac{\pi}{2}n$, $n \in Z$.

10.25. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$. Ответ: $x = \pi n$, $n \in Z$.

10.26. $\sin 3x = \cos 2x$.

Указание: $\cos 2x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right)$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(4n+1)$; $x = \frac{\pi}{10}(4n+1)$, $n \in Z$.

10.27. $\sin 3x = \cos x$. Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n$, $x = \frac{\pi}{8}(4n+1)$, $n \in Z$.

10.28. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - x\right) - \operatorname{tg} x = 0$.

Указание: $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$. Ответ: $x = \frac{\pi}{6}(3n+1)$, $n \in Z$.

10.29. $\cos^2 x - \sin^2 x = \sin x$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2}(4n-1)$, $x = \frac{\pi}{6}(4n+1)$, $n \in Z$.

10.30. $\sin 2x = (\cos x - \sin x)^2$. Ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{12} + \frac{n\pi}{2}$, $n \in Z$.

10.31. $\sin^2 x + \sin^2 2x = 1$.

Указание: $\sin^2 2x = 1 - \sin^2 x \;\Rightarrow\; 4\sin^2 x \cos^2 x - \cos^2 x = 0$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n$, $n \in Z$.

10.32. $\sin^2 x + \sin^2 2x = \sin^2 3x$.

Указание: $\sin^2 2x = \sin^2 3x - \sin^2 x \;\Rightarrow$

$\Rightarrow\; \sin^2 2x = (\sin 3x - \sin x)(\sin 3x + \sin x)$.

Ответ: $x = \frac{\pi}{6}(2n+1)$, $x = \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$.

10.33. $\sin 3x + \sin 2x = \sin x$. Ответ: $x = \pi n$; $x = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n$, $n \in Z$.

10.34. $\sin x + \cos x = 0$.

Указание: делим на $\cos x$; $\operatorname{tg} x + 1 = 0$. Ответ: $x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$, $n \in Z$.

10.35. $\sin^4 x - \cos^4 x = 1/2$.

Указание: $\left(\sin^2 x-\cos^2 x\right)\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)=1/2$; $-\cos 2x=1/2$.

Ответ: $x=\pm\pi/3+\pi n,\ n\in Z$.

10.36. $\sin^4 x+\cos^4 x=5/8$.

Решение: $\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-2\sin^2 x\cos^2 x=\dfrac{5}{8}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-\frac{\sin^2 2x}{2}=\frac{5}{8}\Rightarrow\frac{\sin^2 2x}{2}=1-\frac{5}{8}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\sin^2 2x=\frac{3}{4};\ \sin 2x=\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ 2x=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\ n\in Z.$$

Ответ: $x=\pm\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in Z$.

10.37. $1-\cos^2 2x=\sin 3x-\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+x\right)$. Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}n,\ n\in Z$.

10.38. $\sqrt{3}\sin x+\cos x=1$.

Указание: Делим на $\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+1^2}=\sqrt{4}=2$; $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\dfrac{1}{2}\cos x=\dfrac{1}{2}$;

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6},\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}\right);\ \cos\frac{\pi}{6}\sin x+\sin\frac{\pi}{6}\cos x=\frac{1}{2};\ \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2};$$

$$x+\frac{\pi}{6}=(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n\in Z.\ x=-\frac{\pi}{6}+(-1)^n\frac{\pi}{6}+\pi n,\quad n=2k\quad\Rightarrow\quad x=2k\pi,$$

$$n=2k+1\ \Rightarrow\ x=-\frac{\pi}{3}+(2k+1)\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\ k\in Z.$$

Ответ: $x=2k\pi$, $x=(2/3)\pi+2k\pi$, $k\in Z$.

10.39. $5(\sin x+\cos x)^2-12(\sin x+\cos x)+7=0$.

Указание: $\sin x+\cos x=z\ \Rightarrow\ 5z^2-12z+7=0\ \Rightarrow\ z=1,\ z=\dfrac{7}{5}$

$$(\sin x+\cos x)^2=1^2\ \Rightarrow\ 1+\sin 2x=1\Rightarrow\ \sin 2x=0\ \Rightarrow\ x=\frac{\pi}{2}n,\quad n\in Z.$$

$$(\sin x+\cos x)^2=\left(\frac{7}{5}\right)^2\ \Rightarrow\ 1+\sin 2x=\frac{49}{25},\ \sin 2x=\frac{24}{25}\ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x=(-1)^k\arcsin\frac{24}{25}+\pi k,\ k\in Z.$$

Ответ: $x=\dfrac{\pi}{2}n,\ x=(-1)^n\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{24}{25}+\dfrac{\pi n}{2},n\in Z$.

10.40. $3\cos^2 x - \sin^2 x - \sin 2x = 0$**.**

Указание: $\sin 2x = 2\sin x \cdot \cos x$. Это однородное уравнение. Делим его на $\cos x$. Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ \ x = -\mathrm{arctg}3 + \pi n,\ n \in Z$.

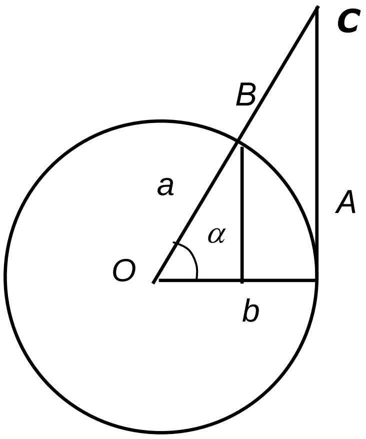
10.41. $\cos^2 x + 3\sin^2 x + 2\sqrt{3}\sin x \cdot \cos x = 1.$

Указание: $1 = \sin^2 x + \cos^2 x$. Это однородное уравнение . Делим его на $\cos^2 x$. Ответ: $x = \pi n,\ \ x = -\frac{\pi}{3} + \pi n,\ n \in Z$.

10.42. $\sin x - \cos x = 0.$

Указание: делим на $\cos x \ \Rightarrow \ \mathrm{tg} x = 1.$ Ответ: $x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$.

Тригонометрические функции. Их свойства и графики



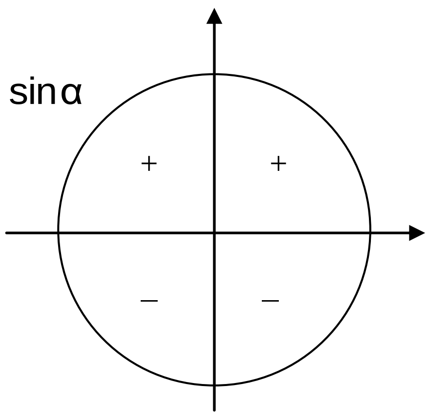
$c = R = 1 \qquad OA = R = 1$

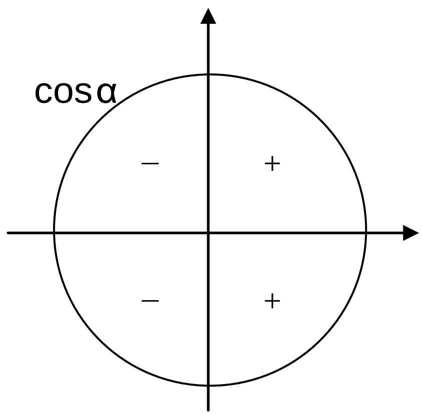
$\sin\alpha = \frac{a}{c} = a \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{CA}{OA} = CA$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = b \qquad \mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

Рис. 10.2 **Связь параметров единичной окружности и прямоугольного треугольника**

Знаки тригонометрических функций в четвертях Oxy





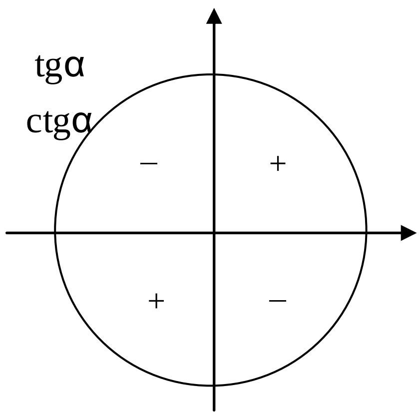


Рис. 10.3. **Знаки** $y = \sin x$ Рис. 10.4. **Знаки** $y = \cos x$ Рис. 10.5. **Знаки** $y = \mathrm{tg}x,\ y = \mathrm{ctg}x$ ОХУ

Период функций $\sin x$, $\cos x$, $T = 2\pi$.
Период функций tgx, $ctgx$, $T = \pi$.

Графики функций

$y = \sin x$

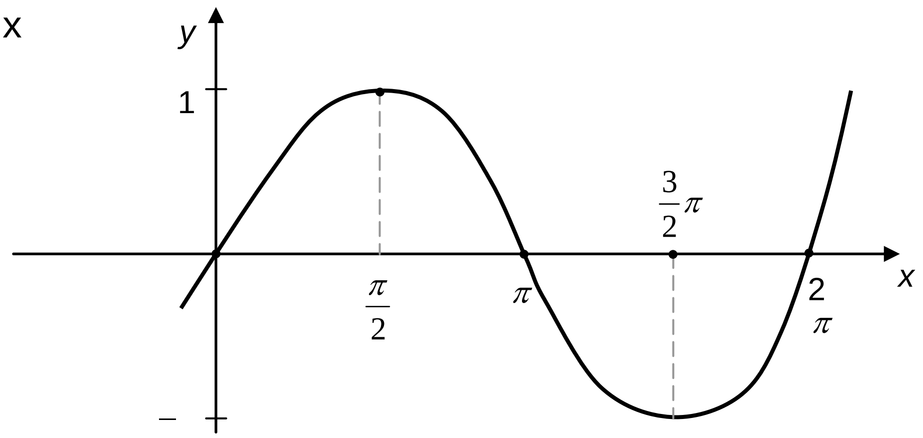


Рис. 10.6. **График функции** $y = \sin x$

$y = \cos x$

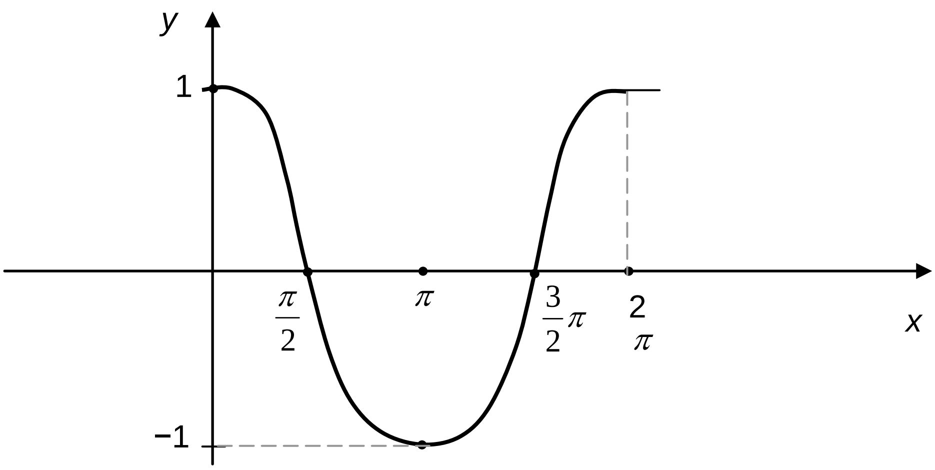


Рис. 10.7. **График функции** $y = \cos x$

$y = tgx$

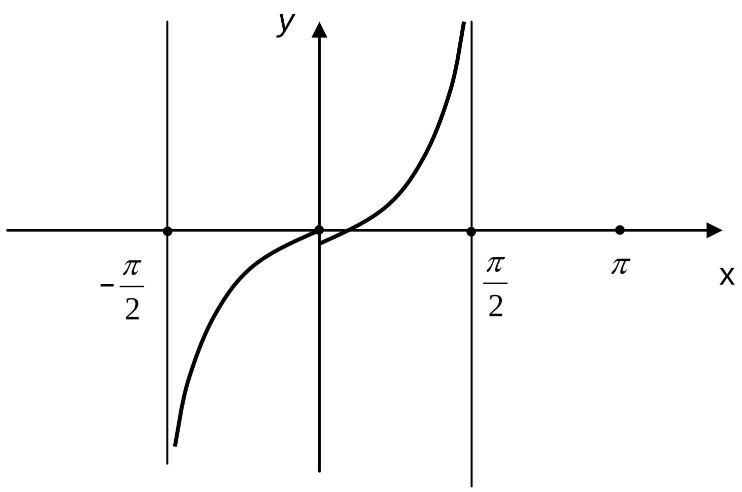


Рис. 10.8. **График функции** $y = tgx$

$y = \mathrm{ctg}x$

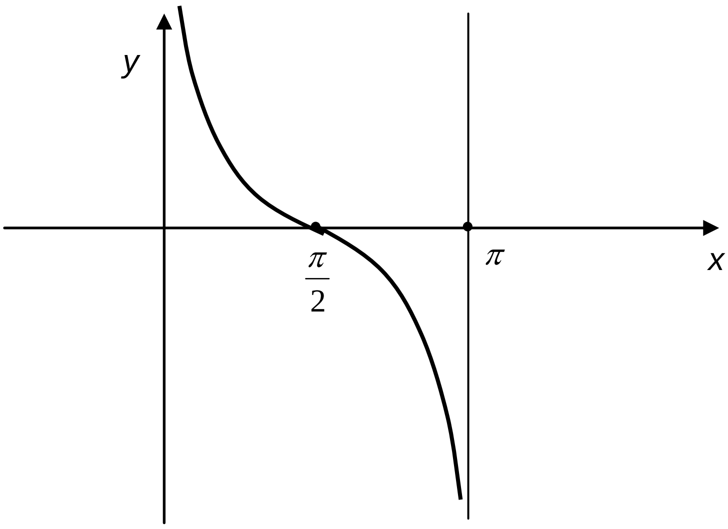


Рис. 10.9. **График функции** $y = \mathrm{ctg}x$

Графики периодически могут быть продолжены $\arcsin x = \alpha \Rightarrow \sin\alpha = x$, $\arccos x = \alpha \Rightarrow \cos\alpha = x$, $\mathrm{arctg}\, x = \alpha \Rightarrow \mathrm{tg}\alpha = x$, $\mathrm{arcctg}\, x = \alpha \Rightarrow \mathrm{ctg}\alpha = x$.

$\left.\begin{array}{c} y = \sin x \\ y = \mathrm{tg}x, y = \mathrm{ctg}x \end{array}\right\}$ функции нечетные, т. е. их графики симметричны относительно начала координат, т. е. точки (*О*, *О*).

$y = \cos x$ − функция четная, т. е. ее график симметричен относительно оси *ОУ*.

Период функций $\sin\omega x$, $\cos\omega x \Rightarrow T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Так как период функций $\sin x$. $\cos x$ равен 2π, то $0 \le \omega x \le 2\pi \Rightarrow 0 \le x \le \dfrac{2\pi}{\omega}$, т.е. $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Период функций $\mathrm{tg}\omega x$, $\mathrm{ctg}\omega x \Rightarrow T = \pi/\omega$. Так как период $\mathrm{tg}x$, $\mathrm{ctg}x \Rightarrow T = \pi$, то $0 \le \omega x \le \pi \Rightarrow 0 \le x \le \pi/\omega$, т. е. $T = \pi/\omega$.

10.43. Построить график функции $y = \sin 2x$. Период функции $T = 2\pi/2 = \pi$.

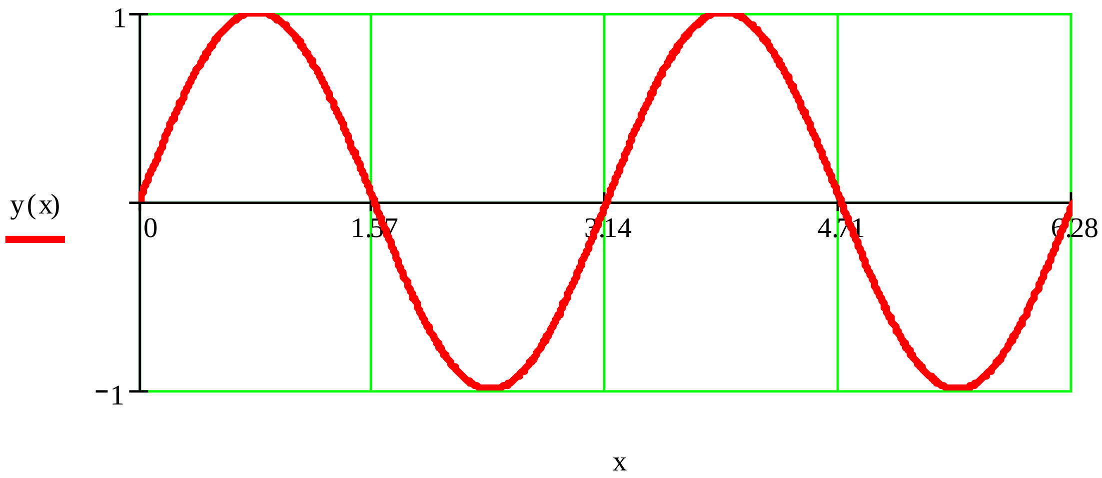


Рис. 10.10. **График функции** $y = \sin 2x$

10.44. Построить график функций $y = \cos 2x$, $y = \mathrm{tg} 2x$, $y = \mathrm{ctg} 2x$.

10.45. Определить знак $\sin\frac{11\cdot\pi}{6}$, $\sin 200^\circ$, $\sin(-200^\circ)$.

10.46. Построить график функций:

а) $y = 3\sin x$, б) $y = |\sin x|$, в) $y = \sin|x|$, г) $y = |\cos x|$, д) $y = |\mathrm{tg} x|$.

10.47. Установить, что больше:

а) $\sin\frac{4\pi}{3}$ или $\sin\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$ б) $\sin 100^\circ$ или $\sin(-160^\circ)$.

10.48. Найти период функций: $y = \sin 5x$, $y = \cos\frac{x}{3}$, $y = \mathrm{tg}\frac{x}{2}$.

10.49. Найти углы (устно):

а) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$, б) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$, в) $\arccos\frac{1}{2}$, г) $\arcsin\frac{1}{2}$, д) $\mathrm{arctg}(-1)$,

е) $\mathrm{arcctg}(-1)$, ж) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$, з) $\mathrm{arctg}(-\sqrt{3})$, и) $\mathrm{arcctg}\frac{1}{\sqrt{3}}$.

10.50. Что больше:

а) $\arcsin 1$ или 1? б) $\arccos 1$ или 1? в) $\mathrm{arctg} 1$ или 1? г) $\mathrm{arcctg} 0$ или 1?

10.51. Вычислить: (устно)

а) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{3} + \mathrm{arctg} 1$, б) $\arccos 1 + \mathrm{arctg} 0$, в) $\mathrm{arctg}\sqrt{3} + \arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$,

г) $\arccos 0 - 2\arcsin\frac{1}{2}$, д) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + \mathrm{arctg}\sqrt{3}$, е) $\pi - \mathrm{arcctg} 1$.

10.52. Упростить (предпочтительно устно):

а) $\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)$,

б) $\frac{\sin(270^\circ-\alpha)\cdot\cos(90^\circ+\alpha)}{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)}$.

10.53. Доказать тождество:

а) $\frac{\sin(\alpha-2\pi)-2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin^2\alpha}=-2\operatorname{ctg}\alpha$,

б) $\frac{\sin(180^\circ+\alpha)}{\operatorname{ctg}(90^\circ-\alpha)}\cdot\frac{\operatorname{tg}(\alpha-180^\circ)}{\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)}\cdot\frac{\cos(2\pi-\alpha)}{\cos(270^\circ-\alpha)}=\sin\alpha$.

2.11. Геометрия

Планиметрия

11.1. Диагональ d прямоугольника образует с его большой стороной угол β. Определить стороны прямоугольника.

Ответ: $d\sin\beta$; $d\cos\beta$.

11.2. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна *b*, угол при основании α. Найти основание, высоту и площадь треугольника.

Ответ: $2b\cos\alpha$; $b\sin\alpha$; $\frac{b^2\sin 2\alpha}{2}$.

11.3. Сторона ромба *a*, его острый угол α. Определить диагонали ромба.

Ответ: $2a\sin\frac{\alpha}{2}$; $2a\cos\frac{\alpha}{2}$.

11.4. Стороны параллелограмма a и b, его острый угол − α. Найти обе высоты параллелограмма.

Ответ: $a\sin\alpha$; $b\sin\alpha$.

11.5. В круге радиуса R проведена хорда, стягивающая дугу α. Найти длину хорды и ее расстояние от центра.

Ответ: $2R\sin\frac{\alpha}{2}$; $R\cos\frac{\alpha}{2}$.

11.6. Основания равнобочной трапеции равны *a* и *b* $(a > b)$, острый угол − β. Определить высоту и боковую сторону трапеции.

Ответ: $\frac{a-b}{2}\mathrm{tg}\beta$; $\frac{a-b}{2\cos\beta}$.

11.7. Из точки, взятой вне круга проведены касательная длинной 3 см и секущая, проходящая через центр круга, равная 9 см. Определить радиус круга и внешнюю часть секущей.

Решение: обозначим внешнюю часть секущей *x*. Воспользуемся теоремой: квадрат касательной равен произведению секущей на ее внешнюю часть: $3^2 = 9 \cdot x \Rightarrow x = 1$

$AC = 2R + x \Rightarrow 2R + 1 = 9 \Rightarrow R = 4$

Ответ: $R = 4$; $x = 1$.

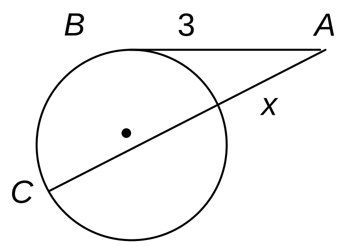


Рис. 11.1. **Взаимное расположение окружности, касательной и секущей**

11.8. Из точки *A*, лежащей вне круга, этот круг виден под углом α. Определить расстояние от точки *A* до центра круга, если радиус круга *R*.

Ответ: $\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}}$.

11.9. Диагональ *d* прямоугольной трапеции перпендикулярна к ее боковой стороне, которая с основанием трапеции образует острый угол α. Определить стороны трапеции.

Ответ: $d \cdot \mathrm{ctg}\alpha$; $\frac{d}{\sin\alpha}\cdot$; $d \cdot \sin\alpha$; $d \cdot \cos\alpha$.

11.10. Около равнобедренного треугольника описана окружность и в него же вписана окружность. Определить радиусы окружностей, зная, что угол при вершине треугольника β, а боковая сторона с.

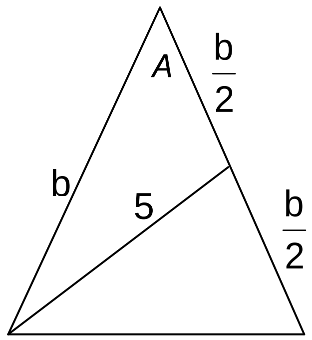
Ответ: $R = \frac{c}{2\cos\frac{\beta}{2}}$; $r = c \cdot \sin\frac{\beta}{2} \cdot \mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\beta}{4}\right)$.

11.11. (Устно). По окружности требуется наметить центры отверстий для шести болтов так, чтобы расстояние по хорде между центрами соседних отверстий равнялось 40 см. Какого размера должен быть диаметр окружности?

11.12. Основание равнобедренного треугольника $4\sqrt{2}$ см, медиана боковой стороны 5 см. Найти боковую сторону.

Решение:

Теорема косинусов:



$$\begin{cases} 5^2 = b^2 + \dfrac{b^2}{4} - 2b \cdot \dfrac{b}{2}\cos A \\ \left(4\sqrt{2}\right)^2 = b^2 + b^2 - 2b \cdot b\cos A \end{cases}$$

I-е уравнение умножим на 2 и из него вычтем II-е уравнение.

$$50 - 32 = 2b^2 + \frac{b^2}{2} - 2b^2 \Rightarrow b = 6.$$

Стереометрия

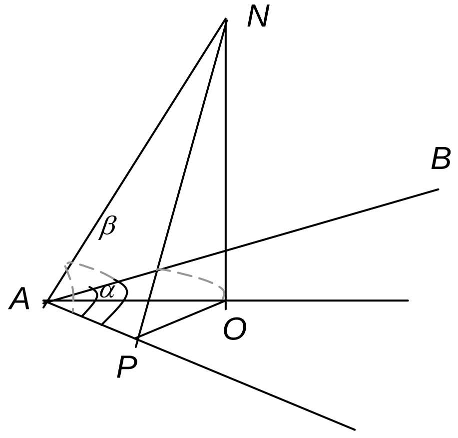
11.13. Из вершины *A* угла *BAC*, равного α проведены наклонная *AN* к плоскости этого угла, образующая с его сторонами *AB* и *AC* равные острые углы β. Определить угол между проведенной наклонной *AN* и плоскостью угла *BAC*.

Решение: Введем параметр $AP = a$, тогда $AO = \dfrac{a}{\cos\frac{\alpha}{2}}$, $AN = \dfrac{a}{\cos\beta}$.

$$\cos\angle NAO = \frac{AO}{AN}$$

$$\cos\angle NAO = \frac{a\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}\cdot a} = \frac{\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$

$$\angle NAO = \arccos\frac{\cos\beta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$$



11.14. (Устно). Площадь основания правильной четырехугольной пирамиды q, угол между боковой гранью пирамиды и плоскостью основания α. Найти боковую поверхность пирамиды. Указание: если площадь S проектируется в площадь S_1 (угол между плоскостями α), то $S_1 = S \cdot \cos\alpha$.

11.15. (Устно). В основании пирамиды прямоугольный треугольник с меньшим катетом a и прилежащим к нему острым углом α. Определить объем пирамиды, если ее высота равна большему катету.

11.16. Центральный угол в развертке конической поверхности равен 2. Определить угол наклона образующей конуса к его основанию. Указание: длина дуги кругового сектора $\alpha = R$ (φ − в радианах).

11.17. В основании пирамиды лежит равнобедренный треугольник с боковой стороной *a* и углом при вершине α. Все боковые ребра пирамиды наклонены к плоскости основания под углом β. Определить объем пирамиды. Ответ: $\dfrac{a^3 \operatorname{tg}\beta \cdot \sin\frac{\alpha}{2}}{6}$

11.18. Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом 30°. Определить угол ее наклона к основанию.

Ответ: 45°.

11.19. Ромб с большей диагональю d и острым углом γ вращается вокруг оси, проходящей вне его через вершину ромба и перпендикулярной к его большей диагонали. Определить объем тела вращения.

Ответ: $\nu = \dfrac{\pi d^2 \operatorname{tg}(\gamma/2)}{2}$.

11.20. В конус вписан шар. Найти объем шара, если образующая конуса l и наклонена к плоскости основания под углом α.

Ответ: $\nu = \dfrac{4\pi l^3 \cdot \cos^3\alpha \cdot \operatorname{tg}^3(\alpha/2)}{3}$.

2.12. Векторы

Пусть точка $A(x_1, y_1, z_1)$, точка $B(x_2, y_2, z_2)$.

Вектор $\overline{AB} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$.

Условия коллинеарности (II) векторов $\bar{a}(x_1,y_1,z_1)$ $\bar{b}(x_2,y_2,z_2)$:

$$\frac{x_1}{x_2}=\frac{y_1}{y_2}=\frac{z_1}{z_2}.$$

Условия перпендикулярности векторов: $\bar{a}\cdot\bar{b}=0$ (скалярное произведение)

$$x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2=0$$

Задание: даны координаты точек A,B,C,D. Проверить, является ли четырехугольник ABC трапецией и перпендикулярны ли его диагонали. Найти длины диагоналей.

Образец решения:

$A(2;5;5), B(4;7;3), C(1;4;4), B(4;7;1)$

Найдем векторы:

$\overrightarrow{AB}(4-2;7-5;3-5)$, $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}(2;2;-2)$,

$\overrightarrow{BC}(1-4;4-7;4-3)$, $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BC}(-3;-3;1)$;

$\overrightarrow{CD}(4-1;7-4;1-4)$, $\Rightarrow$ $\overrightarrow{CD}(3;3;-3)$

$\overrightarrow{AD}(4-2;7-5;1-5)$, $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AD}(2;2;-4)$

$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ параллельны, так как $\frac{2}{3}=\frac{2}{3}=\frac{-2}{-3}$, а $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не параллельны, так как $\frac{-3}{2}=\frac{-3}{2}=\frac{1}{-4}$ $\Rightarrow$ это трапеция. Диагонали BC и AD.

Найдем $\overrightarrow{AC}(1-2;4-5;4-5)$, $\Rightarrow$ $\overrightarrow{AC}(-1;-1;-1)$,

$\overrightarrow{BD}(4-4;4-7;1-3)$, $\Rightarrow$ $\overrightarrow{BD}(0;0;-2)$

Если $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ перпендикулярны, то скалярное произведение $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ равно нулю.

$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot 2=-2\neq 0$, то есть $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не перпендикулярны. Их длины:

$$\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-1)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{3},\quad \left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{0^2+0^2+(-2)^2}=2.$$

12.1. $A(5;4;2), B(7;7;3), C(7;10;-1), D(11;16;1)$

12.2. $A(-1;2;2), B(1;4;0), C(-4;1;1), D(-5;-5;3)$.

12.3. $A(3;-1;2), B(-1;3;0), C(1;0;-2), D(5;-4;0)$.

12.4. $A(7;-8;4), B(7;4;-2), C(-5;10;-2), D(-5;-2;-4)$.

12.5. $A(2;1;0), B(0;4;-3), C(-2;3;-5), D(2;-3;1)$.

12.6. $A(1;1;-1), B(-1;2;3), C(2;-1;5), D(3;6;3)$.

12.7. $A(3;2;-3), B(2;4;6), C(8;3;4), D(9;1;-5)$.

12.8. $A(-3;-5;-1), B(2;-20;9), C(-6;1;2), D(-8;10;-7)$.

12.9. $A(-1;-5;-2), B(-4;0;-2), C(-7;-4;-2), D(-10;1;-2)$.

12.10. $A(6;5;3), B(8;8;4), C(8;11;0), D(12;17;2)$.

12.11. $A(1;4;4), B(3;6;2), C(-2;3;3), D(-3;-3;5)$.

12.12. $A(4;0;3), B(0;4;1), C(2;1;-1), D(6;-3;1)$.

12.13. $A(5;-10;2), B(5;2;-4), C(-7;8;-4), D(-7;-4;-6)$.

12.14. $A(3;2;1), B(1;5;-2), C(-1;4;-4), D(3;-2;2)$.

12.15. $A(3;3;1), B(1;4;5), C(4;1;7), D(5;8;5)$.

12.16. $A(4;3;-2), B(3;5;7), C(9;4;5), D(10;2;-4)$.

12.17. $A(0;-2;2), B(5;-17;12), C(-3;4;5), D(-5;13;-4)$.

12.18. $A(0;-4;-1), B(-3;1;-1), C(-6;-3;-1), D(-9;2;-1)$.

12.19. $A(1;0;-2), B(3;3;-1), C(3;6;-5), D(7;12;-3)$.

12.20. $A(2;5;5), B(4;7;3), C(-1;4;4), D(-2;-2;6)$.

2.13. Предел функции. Производная

Найти пределы функций.

Решение.

а) $$\lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+3x-2}{7x^2+x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2}\cdot\frac{5+\frac{3}{x}-\frac{2}{x^2}}{7+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{5}{7};$$

б) $$\lim_{x\to5}\frac{(x-5)\sqrt{x+4}}{x^2-25}=\lim_{x\to5}\frac{(x-5)\sqrt{x+4}}{(x-5)(x+5)}=\frac{\sqrt{9}}{5+5}=\frac{3}{10}=0,3;$$

в) $$\lim_{x\to0}\frac{\sqrt{1+5x}-1}{8x}=\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+5x}-1\right)\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}{8x\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}=\lim_{x\to0}\frac{1+5x-1}{8x\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}=$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{5x}{8x\cdot2}=\frac{5}{16};$$

13.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{5x^2-x-3}$; $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\sqrt{x+3}}{x^2-4}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$.

13.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+2x+3}{8x^2+x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$.

13.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{5x^3-2x+3}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x^2+12}-4}{x^2-16}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+9}-3}{5x}$.

13.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+x+1}{8x^3+3x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\sqrt{4x+5}-4}{x^2-25}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{5x}$.

13.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-9}{x^4-2x^3+3}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\sqrt{9+x}}{x^2+5x}$.

13.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+7x+3}{2x^2+4x-5}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)\sqrt{x+8}}{x^2-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{4x}$.

13.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x-3}{8x^2+2x-1}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)\sqrt{x+5}}{x^2-16}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-2}{6x}$.

13.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^2+2x-15}{3x^2-x-1}$; $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x^2-4)\sqrt{x+7}}{x-2}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{7x}$.

13.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+2x-3}{7x^2-x-1}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)\sqrt{x+8}}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{8x}$.

13.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^2+2x-3}{6x^2-x+3}$; $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{(x-7)\sqrt{x+2}}{x^2-49}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{6x}$.

13.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-4}{5x^3+x^2+3x}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\sqrt{x+6}}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{7x}$.

13.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x-1}{6x^2+2x-3}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)}{(x^2-16)\sqrt{x+5}}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{10x}$.

13.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+2x-1}{7x^4+x^3+2}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{(x^2-9)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{1+x}-1}$.

13.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-7x^2-2x}{3x^2+x+7}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+2)(x-4)}{(x^2-16)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x^2+2x}$.

13.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x}{7x^4+x^3+2}$; $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-4}{(x+5)(x-2)}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

13.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x-2}{9x^2-2x-3}$; $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)\sqrt{1+x}}{x^2-9}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{11x}$.

13.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-5x^2}{x^2+x+2}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(x+5)}{x-1}$; $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-1}$.

13.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+5x+3}{7x^2+8x+1}$; $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x+2)(x-5)}{x^2-25}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{8x}$.

13.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+3}{5x^3+4x^2+x}$; $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{(x-6)\sqrt{3+x}}{x^2-36}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{2x}$.

13.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^2+1}{2x^3+3x+2}$; $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)\sqrt{5+x}}{x^2-16}$; $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{5x}$.

Производная

Найти производные функций.

Решение.

а) $y=7x^3+5x^2+3x-2$, $y'=7\cdot3x^2+5\cdot2x+3=21\cdot x^2+10x+3$;

б) $y=\dfrac{5x}{\mathrm{tg}x}$, $y'=\dfrac{(5x)'\cdot\mathrm{tg}x-5x\cdot(\mathrm{tg}x)'}{\mathrm{tg}^2x}=\dfrac{5\cdot\mathrm{tg}x-5x\cdot\dfrac{1}{\cos^2x}}{\mathrm{tg}^2x}=$

$$=\frac{5\cdot\mathrm{tg}x\cdot\cos^2x-5x}{\mathrm{tg}^2x\cdot\cos^2x}=\frac{5\cdot\sin x\cdot\cos x-5x}{\sin^2x}=5\frac{\frac{1}{2}\sin2x-x}{\sin^2x}=5\frac{\frac{1}{2}\sin2x-x}{\sin^2x}==\frac{5}{2}\frac{\sin2x-2x}{\sin^2x}.$$

в) $y=x\cdot7^x$; $y'=(x)'\cdot7^x+x\cdot\left(7^x\right)'=7^x+x\cdot\left(7^x\right)\cdot\ln7=7^x\cdot(1+x\ln7)$;

г) $y=2^{-x^5}$; $y'=2^{-x^5}\ln2\cdot\left(-5x^4\right)$;

13.21. $y=5x^2+x+3$; $y=\dfrac{3x}{\sin x}$; $y=x^2\cos x$; $y=\sin x^2$.

13.22. $y=7x^3+2x^2+3x$; $y=\dfrac{3x}{\ln x}$; $y=x^3\sin x$; $y=\cos x^3$.

13.23. $y=5x^4+2x^3+7x$; $y=\dfrac{3x}{\ln x}$; $y=x^2\mathrm{tg}x$; $y=2^{x^2}$.

13.24. $y=8x^3+2x^2+1$; $y=\dfrac{2x}{\mathrm{tg}x}$; $y=x\cdot3^x$; $y=\sin5x^3$.

13.25. $y=9x^5+4x^3+3x$; $y=\dfrac{4x}{3^x}$; $y=x\cdot\mathrm{tg}x$; $y=\cos x^3$.

13.26. $y=7x^3+4x^2+5$; $y=\dfrac{2x}{\sin x}$; $y=x\cdot5^x$; $y=x^2\cdot\mathrm{ctg}x$.

13.27. $y=3x^2+7x+4$; $y=\dfrac{5x}{2^x}$; $y=x\cdot\mathrm{ctg}x$; $y=3^{x^4}$.

13.28. $y=5x^3+8x^2+4x;\quad y=\dfrac{x}{ctgx};\quad y=x\cdot 2^x;\quad y=\sqrt{x}\cdot ctgx.$

13.29. $y=-6x^2+3x+4;\quad y=\dfrac{3x}{2^x};\quad y=x^2\cdot cosx;\quad y=\sin\sqrt{x}\,.$

13.30. $y=-7x^4+5x^2+2;\quad y=\dfrac{3x}{\ln x};\quad y=x^2\cdot\ln x;\quad y=2^{-x^2}\,.$

13.31. $y=-6x^3+2x^2+3x;\quad y=\dfrac{5x}{\cos x};\quad y=x^3\cdot 4^x;\quad y=5^{-\sqrt{x}}\,.$

13.32. $y=3x^3+2x+3;\quad y=\dfrac{x}{tgx};\quad y=x^2\cdot 5^x;\quad y=tgx^2\,.$

13.33. $y=7x^4+3x^3+2;\quad y=\dfrac{2x}{\sin x};\quad y=x\cdot e^x;\quad y=x^3 ctg\,x\,.$

13.34. $y=8x^3-4x^2+3x;\quad y=x\cdot tgx;\quad y=\dfrac{4x^2}{\sin x};\quad y=3\sin(2x+1)\,.$

13.35. $y=9x^2+2x-x;\quad y=5\cdot\cos\left(3x^2+1\right);\quad y=x^3\cos x;\quad y=\dfrac{x}{3\sin x}\,.$

13.36. $y=10x^3-8x^2+5;\quad y=\dfrac{6x}{tgx};\quad y=x^3 ctgx;\quad y=7\sin\left(-x^2\right).$

13.37. $y=-7x^2-3x+2;\quad y=x^3\cos x;\quad y=\dfrac{2x}{ctgx};\quad y=5\sin^2 x\,.$

13.38. $y=9x^3-5x^2-3x;\quad y=\dfrac{2x}{ctgx};\quad y=x^4\sin x;\quad y=2^{-x^3}\,.$

13.39. $y=7x^4+2x^2+3x;\quad y=x^3e^x;\quad y=\dfrac{x^2}{\sin x};\quad y=\cos^3 x.$

13.40. $y=11x^3-8x^2+2;\quad y=\dfrac{x^2}{\sin x};\quad y=x^3 tgx;\quad ;\quad y=2^{x^4}\,.$

2.14. Интегралы

Вычислить неопределенные интегралы.

Решение.

а) $\int\left(x^2+2x-5\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+2\cdot\dfrac{x^2}{2}-5x+C=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-5x+C;$

б) $\int tg^4x\dfrac{dx}{\cos^2 x}=\left|\dfrac{1}{\cos^2 x}=(tgx)'\right|=\int t^4dt=t^5+C=\dfrac{tg^5x}{5}+C;$

14.1. а) $\int (x^2+3x+5)dx$; б) $\int \frac{tg^3 x}{\cos^2 x}dx$.

14.2. а) $\int (2x^3+5x^2+3)dx$; б) $\int e^x \sin e^x dx$.

14.3. а) $\int (5x^4+7x^3+2x)dx$; б) $\int \sin^2 x\cdot\cos x dx$.

14.4. а) $\int (6x^3-7x^2-3)dx$; б) $\int \sin^3 x\cdot\cos x dx$.

14.5. а) $\int (8x^2+5x+4)dx$; б) $\int \frac{tg^2 x}{\cos^2 x}dx$.

14.6. а) $\int (7x^3-6x^2+2)dx$; б) $\int xe^{x^2}dx$.

14.7. а) $\int (9x^2-7x+5)dx$; б) $\int x\cdot\sin x^2 dx$.

14.8. а) $\int (-3x^2+2x+1)dx$; б) $\int x\cdot\cos x^2 dx$.

14.9. а) $\int (-2x^3-6x^2+5)dx$; б) $\int \cos^2 x\cdot\sin x dx$.

14.10. а) $\int (8x^3-2x^2+4x)dx$; б) $\int \sin^4 x\cdot\cos x dx$.

14.11. а) $\int (2x^3+3\cdot\sin x+2)dx$; б) $\int \frac{tgx}{\cos^2 x}dx$.

14.12. а) $\int (2x^4-x^2+1)dx$; б) $\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx$.

14.13. а) $\int \frac{x+x^2e^x}{x^2}dx$; б) $\int x\sqrt{1+x^2}dx$.

14.14. а) $\int (2x^2+\sin x+\cos x)dx$; б) $\int \frac{\sqrt{1+3tg^2 x}}{\cos^2 x}dx$.

14.15. а) $\int (x^3+5x^2+e^x)dx$; б) $\int \frac{3x^2+2}{x^3+2x+4}dx$.

14.16. а) $\int (5x^2+2x-\sin x)dx$; б) $\int x\cdot\sin x^2 dx$.

14.17. а) $\int (7x^3+2x^2+\cos x)dx$; б) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx$.

14.18. а) $\int (x^3-x^2+x+1)dx$; б) $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}dx$.

14.19. а) $\int (7x^5+x^4+2)dx$; б) $\int \frac{1}{x\cdot\ln x}dx$.

14.20. а) $\int (8x^2+3x+5)dx$; б) $\int \sin x\cdot(1+\cos x)dx$.

Определенный интеграл

14.21. а) $\int_4^9 \frac{dx}{x-1}$; б) $\int_0^1 \frac{e^x dx}{1+e^x}$.

14.22. а) $\int_0^4 \frac{dx}{1+2x}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x dx$.

14.23. а) $\int_0^{\sqrt{3}} \frac{x dx}{1+x^2}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cos^2 x dx$.

14.24. а) $\int_1^5 \frac{dx}{2x+3}$; б) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 2x dx$.

14.25. а) $\int_1^4 \frac{dx}{3x+1}$; б) $\int_{\frac{\pi}{8}}^0 \frac{dx}{\cos^2 2x}$.

Площадь криволинейной трапеции

Вычислить площадь, ограниченную кривыми

14.66. $y=3x^2-1$, $y=3x+5$. **14.67.** $y=x^2$, $y=2-x^2$.

14.68. $y=x^2+4x$, $y=x+4$. **14.69.** $y=\frac{1}{4}x^2$, $y^2=4x$.

14.70. $y=\frac{6}{x}$, $y=7-x$.

2.15. Теория вероятностей

Задание: вероятность сдачи экзамена для первого студента p_1, для второго – p_2, для третьего – p_3. Какова вероятность того, что:

а) все три студента сдадут экзамен;

б) только один студент сдаст экзамен;

в) хотя бы один студент сдаст экзамен.

Образец решения: $p_1=0{,}7$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}2$.

Построим событие A:

а) $A = A_1 \cdot A_2 \cdot A_3$, $p(A_1) = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 = 0.7 \cdot 0.4 \cdot 0.2 = 0.056$;

б) $A = A_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot A_2 \cdot \overline{A}_3 + \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot A_3$, где $\overline{A}_i$ есть противоположное событие, $p(\overline{A}_i) = q_i = 1 - p_i$. $p(A_1) = p_1 \cdot q_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot p_2 \cdot q_3 + q_1 \cdot q_2 \cdot p_3 =$ $= 0.7 \cdot 0.6 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.4 \cdot 0.8 + 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.2 = 0.336 + 0.096 + 0.036 = 0.468$;

Построим противоположное событие: ни один студент не сдаст экзамен: $\overline{A} = \overline{A}_1 \cdot \overline{A}_2 \cdot \overline{A}_3$, $p(\overline{A}) = q_1 \cdot q_2 \cdot q_3 = 0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.8 = 0.144$, тогда $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0.144 = 0.856$, то есть с надежностью 85.6 % можно утверждать, что хотя бы один студент сдаст экзамен.

15.1. $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}3$, $p_3 = 0{,}2$.

15.2. $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 0{,}7$.

15.3. $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}1$.

15.4. $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}8$.

15.5. $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}5$.

15.6. $p_1 = 0{,}8$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}4$.

15.7. $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}7$.

15.8. $p_1 = 0{,}2$, $p_2 = 0{,}7$, $p_3 = 0{,}8$.

15.9. $p_1 = 0{,}6$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}1$.

15.10. $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}2$, $p_3 = 0{,}7$.

15.11. $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 0{,}7$,.

15.12. $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}1$, $p_3 = 0{,}3$.

15.13. $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}1$.

15.14. $p_1 = 0{,}3$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}2$.

15.15. $p_1 = 0{,}1$, $p_2 = 0{,}4$, $p_3 = 0{,}2$.

15.16. $p_1 = 0.8$, $p_2 = 0.3$, $p_2 = 0.9$.

15.17. $p_1 = 0{,}5$, $p_2 = 0{,}9$, $p_3 = 0{,}1$.

15.18. $p_1 = 0{,}7$, $p_2 = 0{,}8$, $p_3 = 0{,}4$.

15.19. $p_1 = 0{,}9$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}1$.

15.20. $p_1 = 0{,}4$, $p_2 = 0{,}5$, $p_3 = 0{,}1$.

15.21. Вероятность попадания в мишень каждого из двух стрелков равна 0,3. Стрелки стреляют по очереди, причем каждый может сделать по два выстрела. Попавший в мишень первым получает приз. Найти вероятность того, что стрелки получат приз.

Ответ: $p = 0{,}76$.

15.22. Устройство содержит 2 независимо работающих элемента. Вероятности отказа элементов соответственно равны 0,05 и 0,08. Найти вероятность отказа устройства, если для этого достаточно, чтобы отказал хотя бы один элемент.

Ответ: $p = 0{,}126$.

3. Тесты

Вариант 1

1. Прочитайте следующую запись и перечислите элементы множества: $M=\{x+8=3x\}$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-4\}$	$\{2\}$	$\{4\}$	$\{-1\}$	$\{0\}$

2. Делится ли нацело на 8 сумма: $640+1616$?

А	Б
да	нет

3. Известно, что 12 есть 4 % от числа А. Найти это число.

А	Б	В	Г	Д
250	3000	1300	300	30

4. Выполнить действия: $68\cdot x^4\cdot y^7:17\cdot x^{17}\cdot y^2$.

А	Б	В	Г	Д
$12\cdot y^2\cdot x^5$	$4\cdot y^5\cdot x^{-13}$	$y^7\cdot x^{13}$	$-9\cdot y^3\cdot x^{13}$	$4\cdot y^6\cdot x^{-2}$

5. Выполнить действия: $\dfrac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}+\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}-\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{5\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$	$5-\dfrac{3}{\sqrt{2}}$	$\dfrac{4\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$

6. Решить уравнение: $\dfrac{2}{x^2-x+1}=\dfrac{1}{x+1}+\dfrac{2x+1}{x^3+1}$.

А	Б	В	Г	Д
$\{1\}$	$\{-2;0;1\}$	$\{0;1\}$	$\{-1;0;1\}$	$\{0\}$

7. Решить уравнение: $10^{x}-5^{x-1}\cdot 2^{x-2}=950$.

А	Б	В	Г	Д
$\{\varnothing\}$	$\{-3\}$	$\{3\}$	$\{2\}$	$\{-3;3\}$

8. Решить уравнение: $\log_{x^2-1}\left(x^3+6\right)=\log_{x^2-1}\left(4x^2-x\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$\{\varnothing\}$	$\{2;3\}$	$\{0;3\}$	$\{2\}$	$\{-3;3\}$

9. Решить уравнение: $1+\cos^2 x=3\sin x\cdot\cos x$.

А	Б	В	Г	Д
$\{\mathrm{arctg}2+\pi n\}$	$\left\{\frac{\pi}{4};\mathrm{arctg}2\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k;\mathrm{arctg}2+\pi n\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{6}+\pi k;\pi n\right\}$	$\left\{\frac{\pi}{4}+\pi k\right\}$

10. Из 12 партий в шахматы игрок выиграл 7. Какова вероятность того, что он проиграет?

А	Б	В	Г	Д
1	$5/12$	–0.3	–0.05	0

Вариант 2

1. Прочитайте следующую запись и перечислите элементы множества: $N=\{x(x+10)=0\}$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-8\}$	$\{10,0\}$	$\{-10\}$	$\{10,2,3\}$	$\{-10,0\}$

2. Делится ли нацело на 8 сумма: $143+71=214$?

А	Б
да	нет

3. Сколько процентов составляет число 360 от числа 3 000?

А	Б	В	Г	Д
25 %	1 %	12 %	50 %	30 %

4. Выполнить действия: $\left(2b^{3}a^{4}\right)^{5}$.

А	Б	В	Г	Д
$32\cdot b^{-2}\cdot a^{1}$	$2\cdot b^{5}\cdot a^{5}$	$2\cdot b^{8}\cdot a^{9}$	$32\cdot b^{15}\cdot a^{20}$	$b^{4}\cdot a^{-1}$

5. Упростить выражение: $\dfrac{a^{-0.5}\cdot b^{-0.6}-a^{-2.5}\cdot b^{-1.4}}{a^{-1.5}\cdot b^{0.4}-a^{-2.5}\cdot b^{1.4}}$ и вычислить при $a=\sqrt[3]{0.064}$ и $b=0.8$.

А	Б	В	Г	Д
6	1	$3/2$	–1	2

6. Решить уравнение: $\sqrt{x+2}=-2$.

А	Б	В	Г	Д
-2	2	$\varnothing$	0	4

7. Решить уравнение: $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0.25\cdot 128^{\frac{x+17}{x-3}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\{\varnothing\}$	$\{-1\}$	$\{-10\}$	$\{10\}$	$\{-10;10\}$

8. Решить уравнение: $\log_{x^{2}+6x+8}\log_{2x^{2}+2x+3}(x^{2}-2x)=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\{\varnothing\}$	$\{2;3\}$	$\{-1;1\}$	$\{2\}$	$\{-3;-1\}$

9. Найти $\cos\varphi$, если известен $\sin\varphi=\dfrac{5}{13}$.

А	Б	В	Г	Д
$\dfrac{1}{13}$	$\pm\dfrac{12}{13}$	$\dfrac{4}{13}$	$-\dfrac{12}{13}$	1

10. Кидают три монеты. Найти вероятность того, что на каждой монете не появится "решка".

А	Б	В	Г	Д
0.2	0.125	1	1.5	0

Вариант 3

1. Выделите правильную формулу: $A = \{1;3;5;7;9;...\}$.

А	Б	В	Г	Д
$x_n + x_{n-1} = 2$	$x_n - x_{n-1} = 2$	$x_n - x_{n-1} = -2$	$x_n - x_{n-1} = 1$	$x_n - x_{n-1} = 0$

2. Делится ли нацело на 8 сумма: $240 + 17 = 257$?

А	Б
да	нет

3. Найти наибольший общий делитель чисел: 675 и 825.

А	Б	В	Г	Д
$5^2 \cdot 3 \cdot 11$	$5^2 \cdot 3$	$5 \cdot 3^2 \cdot 11$	$5^2 \cdot 11$	$11^2 \cdot 3$

4. Выполнить действия: $(5b^3 + a^7)^2$.

А	$25b^6 - 10b^3a^7 + a^{14}$
Б	$25b^6 - 2b^3a^7 + 2a^{14}$
В	$5b^6 + 10b^3a^7 - 2a^{14}$
Г	$25b^6 + b^3a^7 + a^{14}$
Д	$25b^6 + 10b^3a^7 + a^{14}$

5. Упростить выражение: $\left(\sqrt[2]{m^3} \cdot \sqrt[5]{n^7} \cdot \sqrt[8]{p^5}\right) : \left(\sqrt[2]{n^{15}} \cdot \sqrt[7]{p^3} \cdot \sqrt[12]{m^5}\right)$.

А	Б	В	Г	Д
$m^4 \cdot n^{-3} \cdot p^{\frac{11}{3}}$	$m^{13} \cdot n^{-\frac{61}{10}} \cdot p^{\frac{11}{56}}$	$m^{\frac{24}{2}} \cdot n^{\frac{51}{10}} \cdot p^{\frac{11}{56}}$	$m^{\frac{13}{2}} \cdot n^{-2} \cdot p^3$	$m^{\frac{13}{12}} \cdot n^{-\frac{61}{10}} \cdot p^{\frac{11}{56}}$

6. Решить уравнение: $\sqrt{4+x}+\sqrt{x}=2$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	–1	3	4

7. Решить уравнение: $\left(\frac{5}{3}\right)^{x+1}\cdot\left(\frac{9}{25}\right)^{x^2+2x-11}=\left(\frac{5}{3}\right)^{9}$.

А	Б	В	Г	Д
{Ø}	$\left\{-\frac{7}{2}\right\}$	$\left\{-\frac{7}{2},2\right\}$	$\left\{-\frac{7}{2},\frac{7}{4}\right\}$	$\left\{-\frac{7}{2},-\frac{7}{4}\right\}$

8. Решить уравнение: $\lg x=(1/2)\lg(x+1)$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{5}-1}{2}$	$\frac{2\sqrt{5}+1}{2}$	$\frac{4\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}$

9. Найти ctg φ, если известен $\sin\varphi=5/13$.

А	Б	В	Г	Д
$\frac{1}{13}$	$\pm\frac{12}{5}$	$\frac{4}{13}$	$-\frac{12}{5}$	1

10. В ящике 18 деталей, из них 9 стандартных. Найти вероятность извлечения бракованной детали.

А	Б	В	Г	Д
1	0	–0.5	0.5	0.25

Вариант 4

1. Выберите правильную формулу для элементов следующего множества: $C=\{12;24;36;48;...\}$.

А	Б	В	Г	Д
$x_n=12n-1$	$x_n=12n$	$x_n=n$	$x_n=12n+1$	$x_n=n+12$

2. Разложите на простые множители числа: 216.

А	Б	В	Г	Д
$2^3 \cdot 3^2$	$2^2 \cdot 3^3$	$2^3 \cdot 3^3$	$6^3 \cdot 2^2$	$4^2 \cdot 2^3$

3. Найти наименьшее общее кратное чисел: 32, 36, 48 и 72.

А	Б	В	Г	Д
$3^2 \cdot 5 \cdot 2^3$	$5^2 \cdot 3$	$3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$	$4^2 \cdot 5 \cdot 3^3$	$2^5 \cdot 3^2$

4. Раскрыть скобки: $(2p+3b)^3$.

А	$8p^3 - 36p^2b - 36pb^2 - 27b^3$
Б	$8p^3 - 36p^2b + 54pb^2 - 27b^3$
В	$8p^3 + 36p^2b - 36pb^2 + 27b^3$
Г	$8p^3 + 36p^2b + 54pb^2 + 27b^3$
Д	$8p^3 + 36p^2b + 54pb^2 - 27b^3$

5. Найти область определения функции: $y(x) = \sqrt[7]{\frac{(x+2)(x-5)}{x^2-9}}$.

А	$\{x \neq 2, x \neq -2\}$
Б	$\{x \neq 2, x \neq 5\}$
В	$\{x \neq -2, x \neq 5\}$
Г	$\{x \neq 5,\ x \neq 3\}$
Д	$\{x \neq -3,\ x \neq 3\}$

6. Решить уравнение: $3x^2 - 9x + 6 = x - 2$.

А	Б	В	Г	Д
$\left\{\frac{4}{3}\right\}$	$\left\{2; \frac{4}{3}\right\}$	0	$\left\{-2; -\frac{4}{3}\right\}$	$\left\{-2; \frac{4}{3}\right\}$

7. Решить уравнение: $2^{3x} = 512^{1/3}$.

А	Б	В	Г	Д
1	$\{x \in R\}$	0	9	-3

8. Решить уравнение: $\log_3(x-2)+\log_3 x=\log_3 8$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	–1	$\varnothing$	4

9. Упростить выражение: $\cos 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha\cdot\sin 2\alpha$.

А	Б	В	Г	Д
0	1	$\operatorname{tg}2\alpha$	$\varnothing$	$\cos 2\alpha$

10. Из 27 компьютеров выдержали гарантийный срок 24. Какова вероятность того, что наугад взятый компьютер не выдержит гарантийный срок?

А	Б	В	Г	Д
5/9	4/9	1/9	0	1

Вариант 5

1. Укажите пустые множества среди следующих:

А) множество целых корней уравнения $x^2-9=0$.

Б) множество действительных корней уравнения $x^2+9=0$.

В) множество действительных корней уравнения $\frac{4}{x}-1=0$.

2. Разложите на простые множители числа: 1024.

А	Б	В	Г	Д
$2\cdot 5^6$	$2^2\cdot 5^5$	$2^3\cdot 5^2$	2^{10}	$3^4\cdot 2$

3. Найдите x из пропорции $(1/4)x:15=(1/3):20$.

А	Б	В	Г	Д
$x=\frac{1}{4}$	$x=1$	$x=\frac{1}{3}$	$x=\frac{4}{3}$	$x=\frac{5}{20}$

4. Разложить выражение на множители: $p^3 - 8q^3$.

А	$(p-2q)\left(p^2 - 2pq + 4q^2\right)$
Б	$(p-2q)\left(p^2 + 2pq + 4q^2\right)$
В	$(p+2q)\left(p^2 + 2pq + 4q^2\right)$
Г	$(p-2q)\left(p^2 - 2pq + 4q^2\right)$
Д	$(-p+2q)\left(p^2 + 2pq - 4q^2\right)$

5. Найти область определения функции: $y = \sqrt[8]{\dfrac{(x-9)|x+1|}{x^2+16}}$.

А	$\{x < -4, x > 4\}$
Б	$\{x \neq -1, x \neq -4\}$
В	$\{x \leq -4, x \geq 4\}$
Г	$\{x \in [-4;4]\}$
Д	$\{x \geq 9\}$

6. Решить уравнение: $|x+3| - |x-1| = 4$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\{-\infty;1\}$	$(1;+\infty)$	$[1;+\infty)$	0	$(-\infty;-3)$

7. Решить уравнение: $4 \cdot 2^{2x} - 6^x = 18 \cdot 3^{2x}$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$\{2\}$	$\{x \in R\}$	0	$\{9\}$	$\{-2\}$

8. Решить уравнение: $\lg(x-9) + 2\lg\sqrt{2x-1} = 2$.

А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
0	1	13	$\varnothing$	2

9. Решить уравнение: $2\mathrm{tg}x + 3\mathrm{ctg}x = 5$.

А	Б	В	Г	Д
$\left\{ \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi n \right\}$	$\left\{ \frac{\pi}{4}; \mathrm{arctg}\frac{3}{2} \right\}$	$\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k; \mathrm{arctg}\frac{3}{2} + \pi n \right\}$	$\left\{ \frac{\pi}{6} + \pi k; \pi n \right\}$	$\left\{ \frac{\pi}{4} + \pi k \right\}$

10. Кидают игральную кость. Найти вероятность того, что на верхней грани появится 1 или 5.

А	Б	В	Г	Д
0,6	$1/3$	0,25	1	$-0{,}3$

Тема 2. Преобразования алгебраических выражений

1. Упростить : $(12\,c^5 g^{10} p^6) : (6\,c^3 g^2 p^4)$.

А	Б	В	Г	Д
$c^2 g^7 p^2$	$2c^4 g p^2$	$2c^2 g^8 p^2$	$c \cdot g^8 p^4$	$4c \cdot g^5 p^2$

2. Упростить : $(16 - 25z^4) : (4 + 5z^2)$.

А	Б	В	Г	Д
$4 + z^2$	$1 - 5z^2$	$4 - 5z^2$	$1 + z^2$	z^2

3. Выделить полный квадрат суммы: $(9x^2 - 8x + 2)$.

А	Б	В	Г	Д
$\left(x - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{4}{9}$	$9\left(x - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{2}{9}$	$9\left(x - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{2}{9}$	$9\left(x - \frac{4}{9}\right)^2 - \frac{2}{9}$	$\left(x - \frac{4}{9}\right)^2 + \frac{2}{9}$

4. Избавиться от иррациональности в знаменателе дроби: $\frac{6}{\sqrt{12} + \sqrt{10}}$.

А	Б	В	Г	Д
$\sqrt{12} + \sqrt{10}$	$3(\sqrt{12} - \sqrt{10})$	$\frac{\sqrt{12} - \sqrt{10}}{6}$	$3(\sqrt{12} + \sqrt{10})$	$3(12 - \sqrt{10})$

5. Упростить следующее выражение: $\frac{2}{\sqrt{10}+5}+\frac{5}{\sqrt{10}-2}-\frac{7}{\sqrt{10}}$.

А	Б	В	Г	Д
1	$\frac{7}{\left(\sqrt{10}+10\right)}$	$\frac{5}{\left(\sqrt{10}+5\right)}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{5}{\left(\sqrt{10}-5\right)}$

Темы 3 и 4. Уравнения и системы уравнений

1. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{5}{6}; \\ x^2-y^2=5. \end{cases}$

А	Б	В	Г	Д
$(x=1, y=-2)$и $(x=-3, y=-2)$	$(x=3, y=2)$и $(x=3, y=-2)$	$(x=3, y=2)$и $(x=-3, y=2)$	$(x=3, y=2)$и $(x=-3, y=-2)$	$(x=-3, y=2)$и $(x=-3, y=2)$

2. Какие из следующих равенств являются тождествами, а какие уравнениями?

а) $3x+1=3(x-1)+4$

А	Б
тождество	уравнение

б) $\frac{1}{2}(5-x)=4x$

А	Б
тождество	уравнение

в) $\frac{1}{5}x+1=\frac{x+5}{5}$

А	Б
тождество	уравнение

3. Решить следующее уравнения: $2\frac{1}{3}x-3\frac{1}{2}x=3\frac{1}{5}x-4\frac{2}{3}x-9$.

А	Б	В	Г	Д
$\{-30;0\}$	$\{-30;30\}$	-30	30	1

4. Решить уравнение: $|x|-1=5+|x+2|$.

А	Б	В	Г	Д
$\{\varnothing\}$	$\{-1;2\}$	-1	8	1

5. Решить систему уравнений $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{3}{8} \\ x+y=12 \end{cases}$?

А	Б	В	Г	Д
$(x=-4, y=-8)$ и $(x=8, y=4)$	$(x=4, y=8)$ и $(x=-8, y=4)$	$(x=4, y=8)$ и $(x=8, y=4)$	$(x=-4, y=8)$ и $(x=8, y=-4)$	$(x=4, y=-8)$ и $(x=8, y=-4)$

Квадратные уравнения

1. Составить квадратное уравнение, если его корни $\{3; 4\}$.

А	Б
$x^2-7x+12=0$	$x^2-12x+7=0$

2. Может ли квадратное уравнение иметь одинаковые корни?

А	Б
да	нет

3. Составить квадратное уравнение, имеющее корни 2 и 5.

А	Б	В	Г	Д
$2x^2-14x+20=0$	$x^2+7x+10=0$	$x^2-7x+10=0$	$x^2+x+10=0$	$x^2-4x+14=0$

4. При каком значении c уравнение $x^2+3x+c=0$ имеет равные корни?

А	Б	В	Г	Д
$c=4$	$c=9$	$c=-9/4$	$c=9/4$	$c=0$

5. Решить уравнение: $36x^4-13x^2+1=0$.

А	Б	В	Г	Д
$\{\varnothing\}$	$\left\{\frac{1}{2}; \frac{1}{4}\right\}$	$\left\{\pm\frac{1}{3}; \frac{1}{6}\right\}$	$\left\{\pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}\right\}$	$\left\{\pm 1; \pm\frac{1}{4}\right\}$

Тема 5. Логарифмы

1. Какое число имеет логарифм по основанию 4, равный 2?

А	Б	В	Г	Д
10	100	160	16	8

2. При каком основании число 512 имеет логарифм, равный 9?

А	Б	В	Г	Д
3	2	9	5	4

3. Чему равен логарифм числа 64

а) по основанию 4:

А	Б	В	Г	Д
1	4	5	3	2

б) по основанию 2:

А	Б	В	Г	Д
2	6	1	10	8

4. Между какими целыми числами находится логарифм:

а) числа 500 по основанию 2;

б) числа 0.034 по основанию 10?

А	Б	В	Г	Д
1 и 2	2 и 3	4 и 5	10 и 11	8 и 9

А	Б	В	Г	Д
3 и 4	-3 и -2	-1 и 0	5 и 6	2 и 3

5. Выразить $\log_a 28$ через $\log_a 7$ и $\log_a 4$.

А	Б	В	Г	Д
$\log_a 2+\log_a 7$	$2\log_a 7+2$	$a+\log_a 14$	$\log_a 7-4$	$\log_a 4+\log_a 7$

6. Упростить выражение: $(\log_b a+1)(\log_a b-\log_{ab} b)$.

А	Б	В	Г
$\log_a b$	$\log_a^2 b$	$1-\log_{ab}$	$\log_{ab}^2-1$

7. Решить уравнение : $2^{\frac{6-5x}{5+2x}}=\frac{1}{4}$.

А	Б	В	Г	Д
10	5	16	2	7

8. Решить уравнение: $\frac{2\lg x}{\lg(5x-4)}=1$; ОДЗ $x>\frac{4}{5}$.

А	Б	В	Г
2 и 4	1 и 4	3 и 8	5 и 0

9. Решить уравнение: $\log_{\sqrt{3}}(2x+5)=4$

А	Б	В	Г	Д
4	0	1	2	3

10. Решить неравенство: $x^{\log_2 x+2}\geq 8$

А	Б	В	Г	Д
$x\in\left(0;\frac{1}{8}\right]$	$x\in\left(0;\frac{1}{8}\right]\cup[2;+\infty)$	$[2;+\infty)$	$[0;+\infty)$	$\left(\frac{1}{8};+\infty\right)$

Тема 6. Прогрессии

1. Дано: $\{b_i\}_{i=1,\infty}$ – геометрическая прогрессия; $b_3+b_7=408$; $4b_3=b_5$; $q<0$; $S_n=66$ – сумма n членов геометрической прогрессии. Найти число n членов прогрессии.

А	Б	В	Г	Д
9	5	3	4	10

2. Дано: $\{a_i\}_{i=1,\infty}$ – возрастающая арифметическая прогрессия $a_1+a_2+a_3=15$, a_1+1, a_2+4, a_3+19 - геометрическая прогрессия

Найти: a_1, a_2, a_3 - ?

А	Б	В	Г	Д
$(-1;3;7)$	$(-1;3;7)$	$(3;5;7)$	$(8;5;2)$	$(-15;0;15)$

3. Дано: $\{a_i\}_{i=1,\infty}$ – возрастающая арифметическая прогрессия, $\{b_i\}_{i=1,\infty}$ – геометрическая прогрессия; при этом $\begin{cases} b_1+b_2+b_3=93 \\ b_1=a_1, b_2=a_2, b_3=a_7 \end{cases}$.

Найти b_1, b_2, b_3.

А	Б	В	Г
2;8;32	3;15;75	10;20;30	5;35;245

Тема 7. Неравенства

1. Решить неравенства:

а) $\frac{x-1}{x+2} \geq 2$;

А	Б	В	Г	Д
$\{\varnothing\}$	$\{-\infty;-2\}\bigcup\{5;\infty\}$	$\{5;\infty\}$	$\{-5;-2\}$	$\{-\infty;-2\}$

б) $\frac{2x-3}{x-1} \leq 1$;

А	Б	В	Г	Д
$\{\varnothing\}$	$\{-\infty;1\}\bigcup\{2;\infty\}$	$\{(1;2]\}$	$\{(2;\infty]\}$	$\{(-\infty;2]\}$

2. При каких значениях m уравнение $mx+3x=5$ будет иметь корень, больший 3?

А	Б
$m \in (-\infty;-3)$	$m \in \left(-3;-\frac{4}{3}\right)$

3. Решить неравенство: $\frac{(x-2)(x+3)(x-9)}{x-1} \geq 0$?

А	Б	В	Г
$\{[1;2]\}$	$\{(-\infty;-3]\cup(1;2]\cup[9;+\infty)\}$,	$\{[1;2]\cup[9;+\infty)\}$	$\{(-\infty;-3]\cup[9;+\infty)\}$

4. Решить неравенство: $2 \leqslant |x-7| \leqslant 3$.

А	Б	В	Г
$x\in(-\infty;5]\cup[9;10]$	$x\in[4;5]\cup[9;\infty)$	$x\in[4;5]\cup[9;10]$	$x\in[4;10]$

5. Решить систему неравенств: $\begin{cases} \frac{1}{x-1} < \frac{2}{x+1}; \\ \frac{2}{x-3} > \frac{3}{x-2}. \end{cases}$

А	Б	В	Г
$x\in(-\infty;-1]\cup(1;2)\cup(3;5)$	$x\in(1;2)\cup(3;5)$	$x\in(-\infty;-1]\cup(3;5)$	$x\in(-\infty;-1]\cup(1;3]$

6. Решить неравенство: $\frac{(x-3)(x-5)(x^2+9)}{x^2-1} < 0$.

А	Б	В	Г
$x\in(-\infty;-1]\cup(1;2)$	$x\in(-1;1)\cup(3;5)$	$x\in(-\infty;-1]\cup(3;5)$	$x\in(-\infty;-1]\cup(1;2)$

7. Решить неравенство: $\frac{(x^2-7)(x+4)}{x-2} < 0$.

А	Б	В	Г
$x\in(-4;-\sqrt{7})\cup$ $\cup(2;\infty)$	$x\in(-\infty;-\sqrt{7})\cup$ $\cup(2;\sqrt{7})$	$x\in(-4;-\sqrt{7})\cup$ $\cup(2;\sqrt{7})$	$x\in(-\infty;-1]\cup$ $\cup(2;7)$

Тема 8. Функции и графики

1. Найти область определения функции: $y=\sqrt{x^2-10x+9}$.

А	Б	В	Г	Д
$\{(-\infty;1)\cup(9;+\infty)\}$	$\{(1;9)\}$	$\{\varnothing\}$	$\{(-\infty;1)\}$	$\{(9;+\infty)\}$

2. Является ли четной функция:

а) $y = \sin 3x \cdot \mathrm{ctg} x \cdot (1 + x^4)$;

А	Б	В
да	нет	Общего вида

б) $y = \mathrm{tg} 5x \cdot \cos x \cdot (1 - 5x^5)$;

А	Б	В
да	нет	Общего вида

в) $y = \sqrt[4]{x^8 + 9} \cdot \cos x \cdot (1 - 5x^{14})$?

А	Б	В
да	нет	Общего вида

3. Убывает ли функция $y = \dfrac{1}{\sin x}$ на отрезке $\left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$?

А	Б
да	нет

4. При каких значениях a и b парабола $y = ax^2 + bx + 4$ проходит через точки $A(-1;2)$ и $B(2;5)$?

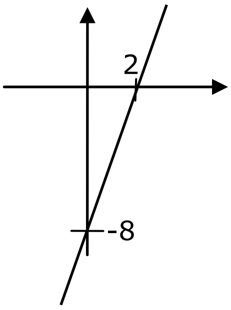
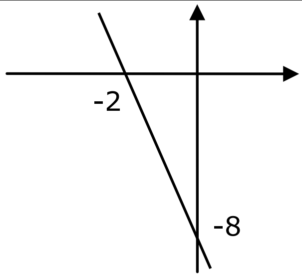
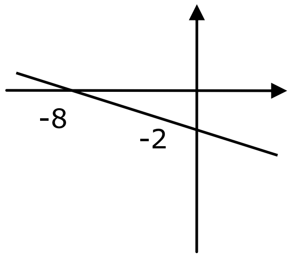
А	Б	В	Г	Д
$a = -1, b = 2$	$a = \frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$	$a = -\frac{1}{2}, b = \frac{3}{2}$	$a = -\frac{1}{2}, b = -\frac{3}{2}$	$a = -\frac{1}{4}, b = \frac{3}{4}$

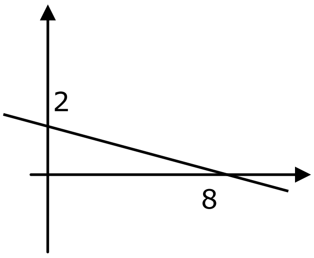
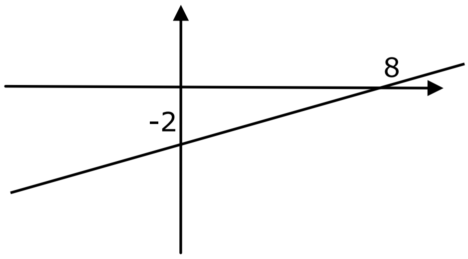
5. Проходит ли график функции $y = \cos 6x$ через точку $\left(\dfrac{\pi}{3}; 1\right)$?

А	Б
да	нет

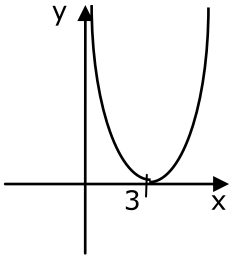
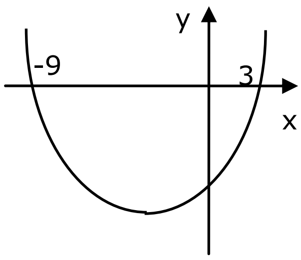
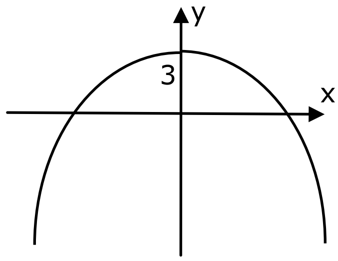
6. Построить график функции:

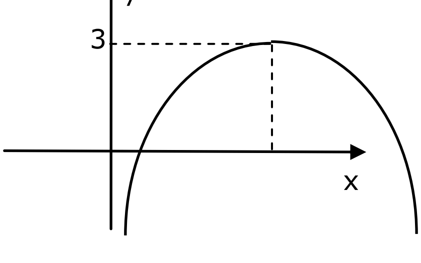
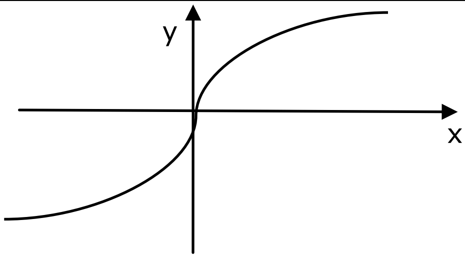
а) $y = 4x - 8$;

А	Б	В
		

Г	Д
	

б) $y = x^2 - 6x + 9$.

А	Б	В
		

Г	Д
	

Тема 11. Геометрия

1. В треугольнике больший угол при основании равен 45º, а высота делит основание на части 20 и 21 см. Определить большую боковую сторону.

А	Б	В	Г
15 см	29 см	35 см	85 см

2. Найти стороны прямоугольника, если они относятся как 4:9, а его площадь равна 36 см^2.

А	Б	В	Г
2 и 5 см	3 и 19 см	4 и 9 см	8 и 25 см

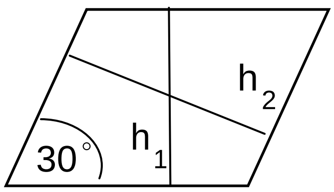
3. Параллелограмм – это:

А	четырехугольник только с одним тупым углом
Б	четырехугольник с одним прямым углом
В	четырехугольник с двумя парами параллельных сторон
Г	четырехугольник с двумя равными углами
Д	четырехугольник с двумя равными сторонами

4. Прямоугольник имеет стороны a и b, такие, что $a:b=3:5$, $b=a+8$. Найти стороны прямоугольника.

А	Б	В	Г	Д
2 и 10 см	18 и 20 см	6 и 14 см	12 и 20 см	4 и 6 см

5. В параллелограмме периметр равен 40 см., а высоты h_1 и h_2 соотносятся как $\frac{h_1}{h_2}=\frac{2}{3}$, угол при основании $\alpha=30^\circ$. Найти площадь S параллелограмма.



А	Б	В	Г
20 см^2	48 см^2	16 см^2	108 см^2

6. Трапеция – это:

А	четырехугольник с двумя равными углами
Б	четырехугольник с двумя равными сторонами
В	четырехугольник с двумя параллельными сторонами и двумя непараллельными сторонами
Г	четырехугольник с одним прямым углом
Д	Четырехугольник, у которого есть один тупой угол

7. Дано: стороны параллелограмма 6 и 8 см. Угол при основании 30°. Найти высоту параллелограмма, опущенную на большую сторону.

А	**Б**	**В**	**Г**
5 см	8 см	3 см	10 см

8. Проходит ли окружность $(x-3)^2+(y-2)^2=16$ через заданные точки:

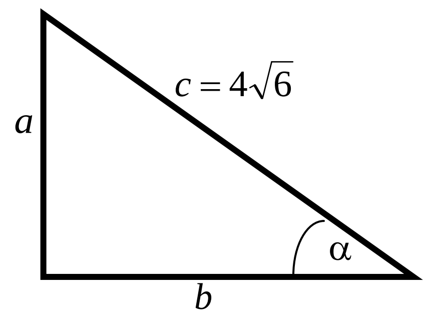
A(5;0).

А	**Б**
да	нет

B(6; $2+\sqrt{7}$)

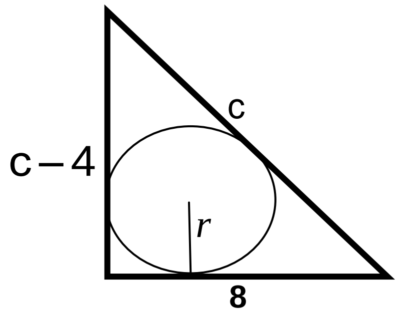
А	**Б**
да	нет

9. Гипотенуза с прямоугольного треугольника равна $4\sqrt{6}$. Найти катеты треугольника, если $\sin\alpha=\frac{3}{4}$.



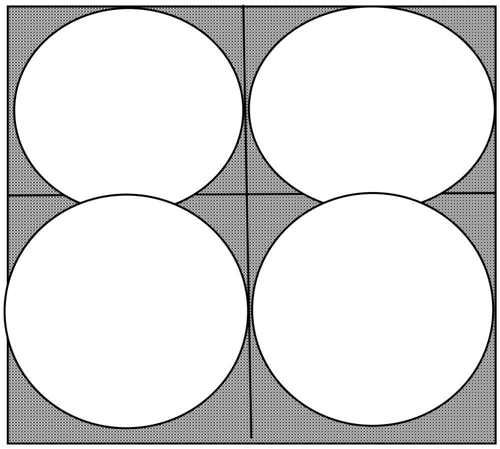
А	**Б**	**В**	**Г**	**Д**
$a=2см, b=\sqrt{6}$	$a=3\sqrt{6}, b=\sqrt{42}$	$a=3, b=\sqrt{48}$	$a=4, b=46$	$a=\sqrt{42}, b=6$

10. Один катет прямоугольного треугольника на 4 см. меньше его гипотенузы, а второй равен 8 см. Найти радиус вписанной в треугольник окружности.



А	Б	В	Г
4 см	6 см	2 см	9 см

11. Сторона квадрата 6 см. Вычислить площадь заштрихованной фигуры.



А	Б	В	Г
$(36-4\pi)$ см^2	$(36-9\pi)$см^2	$36+\pi$ см^2	$36+6\pi$ см^2

Стереометрия

1. В правильной треугольной пирамиде все двугранные углы при основании равны 60°, а радиус описанной вокруг основания окружности равен $2\sqrt{3}$. Найти объем пирамиды.

А	Б	В	Г
14π	18	6π	$9\sqrt{3}$

2. Две равные боковые грани пирамиды перпендикулярны к плоскости основания, которое является треугольником с основанием 10 и

углом 2α при вершине. Найти полную поверхность пирамиды, если угол наклона боковой грани к плоскости основания равен α.

А	Б	В	Г
100π	$\frac{25}{\sin\alpha}(2+\cos\alpha)$	$\frac{25}{\sin\alpha}$	25

3. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $5\,см^2$, а объем цилиндра 10 $см^3$. Найти площадь основания цилиндра.

А	Б	В	Г
16π $см^2$	35π $см^2$	20π $см^2$	10 $см^2$

4. В правильной треугольной пирамиде все двугранные углы при основании равны 60°, а радиус описанного вокруг основания окружности равен $2\sqrt{3}$. Найти площадь боковой поверхности.

А	Б	В	Г
8π	$18\sqrt{3}$	20	$5\sqrt{2}$

5. В правильной треугольной пирамиде все двугранные углы при основании равны 60°, а радиус описанного вокруг основания окружности равен $2\sqrt{3}$. Найти угол наклона бокового ребра к плоскости основания.

А	Б	В	Г
$\frac{36}{5}$	30	$\frac{\pi}{6}$	$\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{2}$

6. Площадь боковой поверхности цилиндра равна $18\pi\,см^2$, а объем цилиндра равен $4\pi\,см^3$. Найти периметр сечения цилиндра, параллельного его оси и расположенного на расстоянии $1/9$ см от оси цилиндра.

А	Б	В	Г
$\frac{9}{2}\sqrt{15}$	$\frac{9}{2}$	$\sqrt{15}$	$\frac{7}{2}\sqrt{15}$

7. В конусе длина образующей вдвое больше его высоты и равна 20. Найти площадь осевого сечения конуса.

А	Б	В	Г
95	$100\sqrt{3}$	38	$14\sqrt{5}$

Рекомендованная литература

1. Алексеев В. М. Элементарная математика. Решение задач : учеб. пособ. / В. М. Алексеев. − 2-е изд., перераб. и доп. − Киев : Вища шк., 1989. − 383 с.

2. Ігначкова А. В. Математика для абітурієнтів : навч. посіб. / А. В. Ігначкова, Л. М. Малярець. – Харків : ВД ІНЖЕК, 2004. – 576 с.

3. Литвиненко І. М. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10 − 11 класів / І. М. Литвиненко, Л. Я. Федченко, В. О. Швець. − Харків : ББН, 2000. − 164 с.

4. Людвичек К. В. Математика: учебн. пособ. для иностр. студентов подготов. фак. вузов / К. В. Людвичек. − Харьков : Вид. Укр. инженер.-пед. акад., 2003. − 258 с.

5. Малярець Л. М. Завдання для контрольних робіт з курсу "Математика" для слухачів підготовчих курсів заочної форми навчання : навч. посіб. / Л. М. Малярець, В. А Ігначкова. – Харків : ВД ІНЖЕК, 2006. – 88 с.

6. Малярець Л. М. Збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання знань з математики / уклад. Л. М. Малярець, О. Д. Анохіна та ін. ; за заг. ред. Л. М. Малярець. − Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. − 268 с.

7. Малярец Л. М. Математика : учеб. пособ. для слушателей подготовительного отделения ХНЭУ / Л. М. Малярец, А. В. Игначкова, Л. Д. Широкорад и др. − Харьков : Изд. ХНЭУ, 2013. − 336 с.

8. Робоча програма навчальної дисципліни "Математика" для слухачів підготовчого відділення [Електронне видання] / уклад. Л. М. Малярець, О. В. Гунько, О. К. Шевченко. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2016. – 58 с.

9. Тестові завдання з математики (робочий зошит) : навч. посіб. / за ред. Л. М. Малярець. – Харків : ВД ІНЖЕК, 2005, − 136 с.

10. Шевченко А. К. Задания и методические рекомендации к их выполнению по учебной дисциплине "Высшая и прикладная математика" для иностранных студентов отраслей знаний 0306 "Менеджмент и администрирование", 1401 "Сфера обслуживания" заочной формы обучения / О. К. Шевченко, А. В. Костенко. – Харьков. : Изд. ХНЕУ им. С. Кузнеца, 2014. – 30 с.

Содержание

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИКА

Практикум
для слухачів
підготовчого відділення

(рос. мовою)

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Шевченко** Олександра Кирилівна
Гунько Ольга Володимирівна
Жуков Андрій В'ячеславович

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. В. Анацька*

Коректор *О. В. Анацька*

Наведено приклади і задачі з математики, подано вказівки до розв'язання задач, а також наведено приклади розв'язання типових задач.

Рекомендовано для слухачів підготовчого відділення.

План 2017 р. Поз. № 222 ЕВ. Обсяг 82 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру ***ДК № 4853 від 20.02.2015 р.***