МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ СЕМЕНА КУЗНЕЦА

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации
к практическим занятиям
для слушателей подготовительного отделения

Харьков
ХНЭУ им. С. Кузнеца
2017

УДК 51(07)
М54

Составители: Э. Ю. Железнякова
Т. В. Силичева
Е. В. Миненкова

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и экономико-математических методов.
Протокол № 7 от 15.03.2017 г.

Самостоятельное электронное текстовое сетевое издание

М54 **Математика :** методические рекомендации к практическим занятиям для слушателей подготовительного отделения [Электронный ресурс] / сост. Э. Ю. Железнякова, Т. В. Силичева, Е. В. Миненкова. – Харьков : ХНЭУ им. С. Кузнеца, 2017. – 204 с. (Рус. яз.)

Приведен основной материал по темам учебной дисциплины для иностранных студентов подготовительного отделения. Отражен широкий круг вопросов арифметики, алгебры и элементарных функций, дифференциального и интегрального исчислений, геометрии, комбинаторики. Каждая тема содержит краткий теоретический материал. Основные положения иллюстрируются схемами, графиками, таблицами и практическими заданиями с решениями. Предложено большое количество упражнений для закрепления полученных знаний, что способствует формированию математической компетентности у иностранных студентов.

Рекомендовано для слушателей подготовительного отделения.

УДК 51(07)

Вступление

В укреплении международных связей любой страны немалую роль играют образовательные процессы, в частности обучение иностранных студентов в высших учебных заведениях.

Как правило, иностранные студенты, поступающие на факультет довузовской подготовки имеют различный уровень знаний по математике В то же время для многих специальностей и способов деятельности ряд математических знаний носит профессионально значимый характер. Например, знания основ математической логики, теории вероятностей, математической статистики, способов решения задач из этих разделов математики крайне важны для будущих экономистов. Несмотря на различие в программах обучения, для студентов всех специальностей необходимо умение анализировать информацию, выделять суть вопроса, владеть логикой рассуждений, обобщать статистический материал, правильно интерпретировать ситуацию. Все эти качества развиваются в процессе изучения математики, формируя математическую компетенцию слушателей подготовительного отделения. Основным результатом обучения математике должна стать не система знаний, умений и навыков как таковая, а набор математических компетенций. Это поможет студенту, обладающему математическими компетенциями, правильно применять свои знания для решения возникающих в повседневной жизни проблем.

Цель курса математики – получение иностранными учащимися минимального объема знаний по всем разделам математики, необходимого для обучения в высших учебных заведениях.

Задачи курса: изучение математической терминологии и естественнонаучной лексики на русском языке; систематизация знаний, приобретенных учащимися на родине; восполнение пробелов, имеющихся в базовом образовании учащихся; приобретение навыков конспектирования, самостоятельной работы с литературой.

Требования к уровню освоения дисциплины: студенты должны знать математическую терминологию; уметь самостоятельно работать с учебной литературой; на базовом уровне уметь выполнять вычисления и преобразования, решать уравнения и неравенства, уметь выполнять действия с функциями, знать геометрические фигуры, уметь строить и исследовать простейшие математические модели, уметь использовать приобретённые знания в практической деятельности и повседневной жизни.

Курс «Математика» предназначен для овладения дополнительной общеобразовательной программой по математике, обеспечивающей подготовку иностранных граждан к освоению профессиональных образовательных программ на русском языке в высшей школе по инженерно-технической, технологической, естественнонаучной и экономической направленностям обучения.

Данные методические рекомендации охватывают содержание основной части курса математики на подготовительном отделении, одновременно имеют небольшой объем и отличается компактностью изложения.

Составители ставят своей целью дать теоретические основы курса математики и необходимый объем математической лексики на русском языке. С учетом интенсивности изучаемого материала, коротких сроков обучения и разного уровня подготовки студентов-иностранцев пособие содержит минимально необходимый теоретический материал, примеры и задания для работы на практических занятиях и для самостоятельного решения.

Теоретический материал можно использовать также для организации самостоятельной работы слушателей: для конспектирования изучаемого материала, повторения и использования при решении задач.

Данный сборник составлен с целью оказания методической помощи преподавателям кафедры высшей математики и экономико-математических методов, работающих со слушателями подготовительного отделения ХНЭУ им. С. Кузнеца.

Тема 1. Основные математические понятия. Арифметика

1.1. Цифры и числа. Обозначение и чтение чисел

Для записи чисел в математике используются символы:

0 – нуль	5 – пять
1 – один	6 – шесть
2 – два	7 – семь
3 – три	8 – восемь
4 – четыре	9 – девять

Это цифры. Из цифр образуются числа. Если число состоит из одной цифры, то это однозначное число, если из двух цифр – двухзначное, если из трех – трехзначное и так далее.

Целые числа

Однозначные:

0 – нуль	5 – пять
1 – один	6 – шесть
2 – два	7 – семь
3 – три	8 – восемь
4 – четыре	9 – девять

Двузначные:

10 – десять	19 – девятнадцать	50 – пятьдесят
11 – одиннадцать	20 – двадцать	60 – шестьдесят
12 – двенадцать	21 – двадцать один	70 – семьдесят
13 – тринадцать	22 – двадцать два	80 – восемьдесят
14 – четырнадцать	23 – двадцать три	90 – девяносто
15 – пятнадцать	24 – двадцать четыре	…………………………
16 – шестнадцать	………………………	97 – девяносто семь
17 – семнадцать	30 – тридцать	98 – девяносто восемь
18 – восемнадцать	40 – сорок	99 – девяносто девять

Трехзначные:

100 – сто
200 – двести
300 – триста
400 – четыреста
500 – пятьсот
600 – шестьсот
700 – семьсот
800 – восемьсот
900 – девятьсот

123 – сто двадцать три
234 – двести тридцать четыре
348 – триста сорок восемь
458 – четыреста пятьдесят восемь
564 – пятьсот шестьдесят четыре
672 – шестьсот семьдесят два
755 – семьсот пятьдесят пять
819 – восемьсот девятнадцать
950 – девятьсот пятьдесят

Числа бывают:
натуральные (применяются для счета предметов) – 1, 2, 3, …;
четные (которые делятся на два) – 2, 4, 6, 8, …, 2n;
нечетные – 1, 3, 5, 7, 9, …, (2n-1);
положительные – 1, 2, 28, 356, …;
отрицательные – -25, -685, -4278, ….

Заметим, что 0 не является ни положительным, ни отрицательным, ни натуральным числом.

1.2. Арифметические действия над числами

Пишем	Говорим	Действие	Результат	Компоненты
$a+b=c$	«а» плюс «бэ»	сложение	c – сумма	a – слагаемое, b – слагаемое
$a-b=c$	«а» минус «бэ»	вычитание	c – разность	a – уменьшаемое, b – вычитаемое
$a\cdot b=p$	«а» умножить на «бэ»	умножение	p – произведение	a – множитель, b – множитель
$a:b=q$	«а» разделить на «бэ»	деление	q – частное	a – делимое, b – делитель

Пример 1.1. $45+24=69$ – это сложение.
45 – это слагаемое, 24 – это слагаемое, 69 – это сумма.

Пример 1.2. $56-23=33$ – это разность.
56 – это уменьшаемое, 23 – это вычитаемое, 33 – это разность.

Пример 1.3. $25\cdot 6=150$ – это умножение.
25 – это множитель, 6 – это множитель, 150 – произведение.

Пример 1.4. $98:14=7$ – это деление.
98 – это делимое, 14 – это делитель, 7 – это частное.

Признаки делимости натуральных чисел

1. На **2** делятся все четные натуральные числа.
2. На **3** делятся все натуральные числа, сумма цифр которых кратна трем.
3. На **4** делятся все натуральные числа, две последние цифры которых составляют нули или число, кратное 4.
4. На **5** делятся все натуральные числа, оканчивающиеся на 5 или 0.
5. На **9** делятся все натуральные числа, сумма цифр которых кратна девяти.
6. На **10** делятся все натуральные числа, оканчивающиеся на 0.

Упражнения

1.1. Прочитайте числа:
12, 31, 58, 235, 148, 360, 488, 555, 796, 811, 962, 998, 980, 657, 358.

1.2. Какие из приведенных чисел являются четными?
12, 23, 56, 421, 210, 29, 36, -63, -66, 98, 100, -452.

1.3. Из данного ряда чисел выберите положительные и отрицательные, прочитайте их.
2, -56, 30, 0, 69, -85, -342, 89, 666, -548, 642, 47, 69, 360, -213.

1.4. Заполните пропуски.

Слагаемое	238	16		1128	
Слагаемое	25		0	59	35
Сумма		324	518		627

1.5. Закончите предложения.

а) Число, из которого мы вычитаем, называется_______________ .

б) Число, которое вычитаем, называется______________________ .

в) Число, получаемое в результате вычитания, называется_____ .

г) Чтобы найти неизвестное уменьшаемое, нужно______________ .

д) Чтобы найти неизвестное вычитаемое, нужно_______________ .

1.6. В пустые кружочки (см. рис. 1.1) впишите сумму указанных чисел с числом 35.

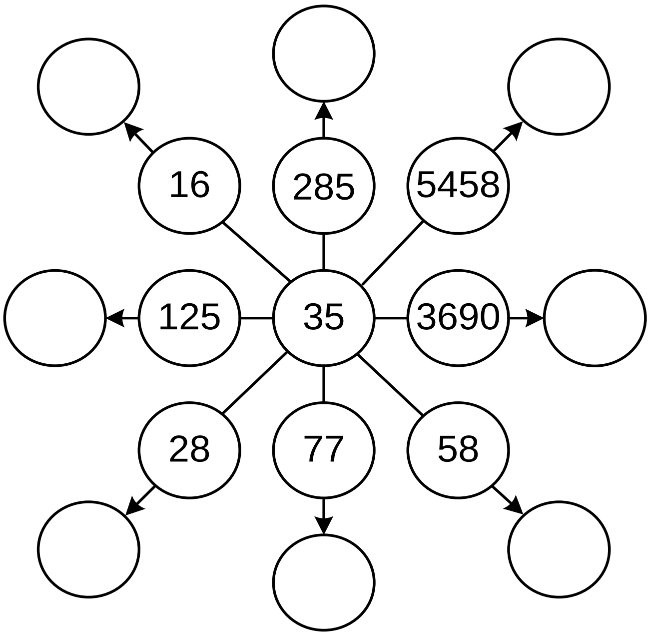


Рис. 1.1. **Условие задания 1.6.**

1.7. Заполните пропуски.

Уменьшаемое	Вычитаемое	Разность
110	65	
304	82	
	56	103
	124	15
450	455	
	2015	1036

1.8. На складе было 850 велосипедов. После продажи некоторого количества велосипедов, на складе осталось 150 штук. Сколько продано велосипедов?

Решение:____

____

____ .

Ответ:________________.

1.9. Запишите в виде числового выражения:

а) сумму чисел 326 и 1247 ______________________________ ;

б) разность чисел 2453 и 569 ________________________________ ;

в) произведение чисел 63 и 24 ______________________________ ;

г) частное чисел 5076 и 12 __________________________________ .

1.10. Запишите в виде выражения:

а) сумму b и 23 ____ ;

б) произведение a и 69 ____________________________________ ;

в) разность y и 4 ____ ;

г) частное чисел 76 и c ___________________________________ .

1.11. Закончите предложения.

а) Результат умножения называется__________________________.

б) Числа, которые умножаем, называются____________________ .

в) Если каждый из множителей уменьшить в два раза, то произведение____ .

г) Если один из множителей увеличить в два раза, а второй оставить без изменения, то произведение____________________ .

1.12. Закончите предложения.

а) Число, которое делят, называется_________________________ .

б) Число, на которое делят, называется______________________ .

в) Результат деления называется____________________________ .

г) Чтобы найти неизвестное делимое, нужно___________________ .

д) Чтобы найти неизвестный делитель, нужно__________________ .

1.13. Установите соответствие между признаками (1 – 4) и числами (А – Г).

1. Число делится на 2 — **А.** 65

2. Число делится на 3 — **Б.** 92

3. Число делится на 5 — **В.** 49

4. Число делится на 7 — **Г.** 57

1.14. Заполните пропуски.

Делимое	1311		1400	0		432	
Делитель	57	215		5623	96	12	34
Частное		41	25		16		0

1.15. Заполните пропуски.

Выразите в километрах	5 000 м____км	370 000 дм___км	28 400 000 см___км
Выразите в килограммах	65 000 г____кг	180 000 г____кг	6 532 000 г___кг
Выразите в центнерах	7 000 кг____ц	5 623 500 кг___ц	69 000 000 кг___ц
Выразите в метрах	590 дм____м	6 400 см___м	40 000 мм____м
Выразите в дециметрах	630 см ___дм	6 500 мм___дм	6 540 см____дм

Если известно, что

1 км = 1 000 м
1 м = 10 дм = 100 см = 1 000 мм
1 дм = 10 см
1 см = 10 мм

1 т = 1 000 кг
1 ц = 100 кг
1 кг = 1 000 г

1.3. Понятие множества. Операции над множествами

Множество – набор объектов, объединенных каким-либо признаком.

Элементы множества – объекты, любой природы, составляющие это множество.

Пример 1.5. Множество цветов, стоящих в одной вазе, называется букет. Элемент этого множества – цветок.

Числовое множество – множество, элементами которого являются числа. A, B, C, … – так обозначают множества; элементы множества обозначают a, b, c, или a_1, a_2, a_3 и т. д.

Пример 1.6. $A=\{a;b;c\}$ – множество A состоит из элементов a, b, c; $M=\{2;-3;8\}$ – элементами множества M являются числа 2, -3; 8; $B=\{b_1,b_2,b_3,...\}$ – множество B содержит бесконечное множество элементов. При этом $a\in A$ (читают : «а принадлежит А»), то есть a является элементом множества A; $a\notin B$ («а не принадлежит Бэ»), то есть a не является элементом множества B.

Пустое множество – множество, которое не содержит ни одного элемента. (Обозначают $C = \varnothing$, то есть множество C – пустое).

Пример 1.7. Необходимо записать, что множество A состоит из всех чисел x, удовлетворяющих неравенству $-2 < x \le 3$. Запишем $A = \{x \mid -2 < x \le 3\}$.

Множества, состоящие из одних и тех же элементов, называют *равными*.

Пример 1.8. Пусть $A = \{1;2;3\}$; $B = \{2;1;3\}$, тогда $A = B$.

Если каждый элемент множества B является в то же время элементом множества A, то говорят, то B – *подмножество* множества A. (Обозначают $B \subset A$ «Бэ содержится в А» или $A \supset B$ «А содержит Бэ»).

Пример 1.9. Пусть $A = \{3;5;8;13;21\}$, $B = \{13;5\}$, тогда верно $B \subset A$.

Пересечением множеств A и B (рис. 1.2,а) называют новое множество, содержащее те и только те элементы, которые одновременно входят как в множество A, так и в множество B. Обозначают $A \cap B$.

а) б)

Рис. 1.2. **Операции над множествами**

Пример 1.10. Пусть $A = \{1;7\}$; $B = \{0;7;2\}$, тогда $A \cap B = \{7\}$.

Объединением двух множеств A и B (рис. 1.2б) называют новое множество, содержащее все элементы, которые входят хотя бы в одно из данных множеств. Обозначают $A \cup B$.

Пример 1.11. Пусть $A = \{1;7\}$; $B = \{0;7;2\}$, тогда $A \cup B = \{1;7;0;2\}$.

1.4. Числовые множества. Числовая ось. Модуль числа

Числовые множества. В математике существуют стандартные обозначения следующих числовых множеств: N – множество натуральных чисел; Z – множество целых чисел; Q – множество рациональных чисел; R – множество действительных чисел.

Пример 1.12. Числа $1,\ 2,\ 3$ – натуральные, а $-1{,}2;\ 0;\ \frac{12}{17}$ – не являются натуральными.

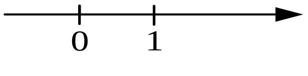
Натуральные числа еще называют целыми положительными Z_+. Если взять числа из множества Z_+ с противоположным знаком, то получится множество чисел, противоположных натуральным, Z_-. Тогда *множество целых чисел* можно определить как объединение натуральных с противоположными им числами и числом ноль, то есть $Z = Z_+ \bigcup Z_- \bigcup \{0\}$.

Рациональными называются все целые и дробные числа.

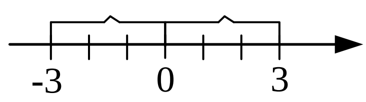
Пример 1.13. $\frac{3}{218};\ -\frac{5}{3};\ 0;\ 3$ – это рациональные числа, а $\sqrt{7}$, $\sqrt[3]{10}$, π, $\lg 19$, $\sin 2^\circ$, e – не являются рациональными (это пример *иррациональных* чисел).

Действительные числа – это все рациональные и иррациональные числа.

Числовая ось. Множество действительных чисел образуют *числовую прямую,* или *числовую ось* (рис. 1.3а).



а)



б)

Рис. 1.3. **Числовая ось**

Модуль. ***Модулем*** действительного числа a называется само число, если $a \geq 0$, и противоположное число $-a$, если $a < 0$. Обозначают $|a|$. Таким образом:

$$|a| = \begin{cases} a, & a \ge 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

Геометрически $|a|$ означает расстояние на координатной прямой точки a от точки 0 (рис. 1.3б).

Свойства модулей:

1) $|a| \ge 0$

2) $|a| = |-a|$

3) $|a|^2 = a^2$

4) $|ab| = |a| \cdot |b|$

5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}, \quad b \ne 0$

Пример 1.14. $|-3| = 3$, $|3| = 3$; $|3|^2 = 3^2 = 9$.

Для сравнения чисел или выражений используются следующие знаки: «$=$» – равно, «$\le$» – меньше или равно, «$\ge$» – больше или равно, «$>$» – больше, «$<$» – меньше.

Пример 1.15. $12 > 4$ – читают: «двенадцать больше четырех»; $a \le 2$ – читают: «a меньше или равно 2» или «a не больше 2».

1.5. Рациональные числа и действия над ними. Сравнение чисел

Обыкновенная дробь – это дробь вида $\dfrac{m}{n}$, где $m, n \in N$, при этом m – *числитель* дроби, n – *знаменатель* ($\dfrac{m}{n} = m : n$).

$\dfrac{1}{8}$ – это дробь, где 1 – числитель, 8 – знаменатель.

Обыкновенные дроби делятся на правильные ($m < n$) и неправильные ($m \ge n$). $\dfrac{7}{9}$ – это правильная дробь, $7 < 9$ (числитель меньше, чем знаменатель); $\dfrac{10}{3}$ – это неправильная дробь, $10 > 3$ (числитель больше, чем знаменатель).

Как правило, в задачах знаменатель показывает, на сколько равных частей делится целое, а числитель – сколько таких частей берется.

Пример 1.16. Торт весит 3 кг. Съели $\frac{2}{3}$ торта. Сколько килограммов торта съели?

Решение. Так как знаменатель равен 3, то разделим весь торт на три равные части $3\,\text{кг} : 3 = 1$. Таким образом, получаем, что одна часть торта весит 1 кг, тогда две части весят, соответственно, $2 \cdot 1 = 2$ кг.

Ответ: съели 2 кг торта.

Возможна и противоположная ситуация.

Съели $\frac{2}{3}$ торта, что составляет 2 кг. Сколько весит целый торт?

Решение. $\frac{2}{3}$ – это две одинаковые части из трех. Поэтому на одну часть торта приходится $2 : 2 = 1$кг. А весь торт, состоящий из трех частей будет весить 3 кг.

Ответ: целый торт весит 3 кг.

1.5.1. Смешанные числа

$3\frac{5}{9}$ – это смешанное число, три целых пять девятых;

$6\frac{4}{7}$ – это смешанное число, шесть целых четыре седьмых.

Пример 1.17. Представим неправильную дробь $\frac{17}{3}$ в виде суммы натурального числа и правильной дроби (то есть выделим целую часть числа):

$$\frac{17}{3} = \frac{15+2}{3} = \frac{15}{3} + \frac{2}{3} = 5 + \frac{2}{3} = 5\frac{2}{3}.$$

Дробь, полученная в результате, называется *смешанной дробью,* она состоит из двух частей: *целой* и *дробной*.

Для того чтобы смешанную дробь превратить в неправильную, необходимо целую часть умножить на знаменатель дроби и прибавить числитель дробной части:

$$3\frac{4}{13}=\frac{3\cdot 13+4}{13}=\frac{39+4}{13}=\frac{43}{13}.$$

Основное свойство дроби. Если числитель и знаменатель дроби умножить или разделить на одно и то же натуральное число, то получится дробь, равная данной.

Пример 1.18. $\frac{3}{9}=\frac{3\cdot 3}{9\cdot 3}=\frac{9}{27}$; $\frac{9}{27}=\frac{9:3}{27:3}=\frac{3}{9}=\frac{3:3}{9:3}=\frac{1}{3}$.

Пример 1.19. Сократить дробь $\frac{360}{1008}$:

$$\frac{360}{1008}=\frac{360:3}{1008:3}=\frac{120}{336}=\frac{120:12}{336:12}=\frac{10}{28}=\frac{10:2}{28:2}=\frac{5}{14}.$$

1.5.2. Приведение дробей к общему знаменателю

Пусть даны дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$, воспользовавшись основным свойством дроби, можно $\frac{a}{b}$ заменить на $\frac{a_1}{b_1}$, а $\frac{c}{d}$ – на $\frac{c_1}{d_1}$ такие, что $b_1=d_1$.

Пример 1.20. Приведем к общему знаменателю дроби $\frac{1}{4}$ и $\frac{2}{3}$.

Умножим числитель и знаменатель первой дроби на знаменатель второй и наоборот: $\frac{1}{4}^{\backslash 3}=\frac{1\cdot 3}{4\cdot 3}=\frac{3}{12}$.

Говорят, что число 3 – *дополнительный множитель*. Для второй дроби $\frac{2}{3}$ в качестве дополнительного множителя берем число 4, получим $\frac{2}{3}^{\backslash 4}=\frac{2\cdot 4}{3\cdot 4}=\frac{8}{12}$.

Арифметические действия над обыкновенными дробями:

1) *сложение (вычитание)* (если знаменатели разные, то сначала нужно дроби привести к общему знаменателю): $\frac{a}{b} \pm \frac{c}{b} = \frac{a \pm c}{b}$;

2) *умножение*: $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$;

3) *деление*: $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$.

Пример 1.21. Выполните действия:

1) $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1}{3}^{\backslash 5} + \frac{2}{5}^{\backslash 3} = \frac{5}{15} + \frac{6}{15} = \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$;

2) $\frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{2}^{\backslash 3} - \frac{1}{3}^{\backslash 2} = \frac{3}{6} - \frac{2}{6} = \frac{3-2}{6} = \frac{1}{6}$;

3) $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1 \cdot 2}{3 \cdot 5} = \frac{2}{15}$; 4) $\frac{1}{3} : \frac{2}{5} = \frac{1}{3} \cdot \frac{5}{2} = \frac{1 \cdot 5}{3 \cdot 2} = \frac{5}{6}$.

Свойства арифметических действий над действительными числами справедливы и для рациональных чисел:

1. $a+b=b+a$
2. $(ab)c=a(bc)$
3. $(a+b)+c=a+(b+c)$
4. $a(b+c)=ab+ac$
5. $a+0=a$
6. $a \cdot 1 = a$
7. $a+(-a)=0$
8. $a \cdot \frac{1}{a} = 1, \quad a \neq 0$
9. $ab=ba$
10. $a \cdot 0 = 0$

Пример 1.22. Выполнить действия: $\left(5\frac{1}{2} - 6\frac{1}{3}\right) \cdot 18$.

$$\left(5\frac{1}{2} - 6\frac{1}{3}\right) \cdot 18 = -\left(6\frac{1}{3} - 5\frac{1}{2}\right) \cdot 18 = -\left(\frac{19}{3} - \frac{11}{2}\right) \cdot 18 =$$

$$= -\left(\frac{19}{3} \cdot 18 - \frac{11}{2} \cdot 18\right) = -\left(19 \cdot 6 - 11 \cdot 9\right) = -(114-99) = -15$$

или $\left(5\frac{1}{2}-6\frac{1}{3}\right)\cdot 18=-\left(6\frac{1}{3}-5\frac{1}{2}\right)\cdot 18=-\left(5+1+\frac{1}{3}-5\frac{1}{2}\right)\cdot 18=$

$=-\left(5+\frac{4}{3}-5\frac{1}{2}\right)\cdot 18=-\left(\frac{4}{3}-\frac{1}{2}\right)\cdot 18=-\frac{4\cdot 2-1\cdot 3}{6}\cdot 18=-\frac{5}{6}\cdot 18=-5\cdot 3=-15.$

1.5.3. Сравнение дробей. Отношения и пропорции

Две дроби $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ считаются *равными*, если $ad=bc$.

Пример 1.23. $\frac{3}{9}=\frac{9}{27}$, так как $3\cdot 27=9\cdot 9$.

Кроме того, дробь вида $\frac{a}{b}$ называется *отношением* a к b. Равенство $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ называется *пропорцией.* И тождество $a\cdot d=b\cdot c$ есть *основное свойство* пропорции.

Чтобы сравнить обыкновенные дроби, необходимо привести их к общему знаменателю.

Пример 1.24. Сравнить следующие дроби $\frac{2}{3}$ и $\frac{1}{4}$.

Найдем наименьшее общее кратное 3 и 4. Это 12.

Получим: $\frac{2}{3}=\frac{8}{12}$ и $\frac{1}{4}=\frac{3}{12}$. Так как $\frac{8}{12}>\frac{3}{12}$, то $\frac{2}{3}>\frac{1}{4}$.

1.5.4. Десятичные дроби

$\frac{3}{10}=0,3$, $\frac{6}{100}=0,06$, $2\frac{35}{1000}=2,035$.

$0,3$; $0,06$; $2,035$ – это десятичные дроби.

Как читать десятичные дроби?

$0,3$ – ноль целых три десятых;

$0,06$ – ноль целых шесть сотых;

$2,035$ – две целых тридцать пять тысячных.

Упражнения

1.16. Запишите дроби:

а) пять седьмых______________

б) четыре двадцать пятых______

в) три четвертых_____________

г) одна сотая________________

д) восемь одиннадцатых_______

е) девять тридцать пятых_______

1.17. Сравните дроби:

а) $\frac{2}{5}$ и $\frac{4}{5}$

г) $\frac{4}{7}$ и $\frac{3}{4}$

б) $\frac{7}{15}$ и $\frac{11}{15}$

д) $\frac{2}{15}$ и $\frac{3}{5}$

в) $\frac{3}{7}$ и $\frac{13}{7}$

е) $\frac{9}{100}$ и $\frac{2}{25}$

1.18. Заполните пропуски.

а) Дробь, в которой числитель меньше знаменателя называют ____ ____________________дробью.

б) Дробь называют неправильной, если ее числитель ____________ или ________________ знаменателю.

в) Правильная дробь всегда ___________ неправильной дроби.

г) Правильная дробь ____________ единицы.

д) Неправильная дробь___________единицы.

1.19. Выпишите из данных дробей:

$$\frac{5}{7};\ \frac{13}{4};\ \frac{56}{43};\ \frac{6}{29};\ \frac{105}{131};\ \frac{56}{1};\ \frac{9}{9};\ \frac{23}{48};\ \frac{8}{65};\ \frac{100}{17}$$

а) правильные дроби ____;

б) неправильные дроби ____.

1.20. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание.

а) Чтобы сложить две или несколько дробей с одинаковыми знаменателями, нужно сложить их _________________ , а ________________ оставить тем же.

б) Чтобы из данной дроби вычесть дробь с тем же знаменателем, нужно из ________________первой дроби вычесть _________________ второй дроби, а ___________________ оставить прежним.

1.21. Заполните пропуски.

Первое слагаемое	Второе слагаемое	Сумма
$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{8}{3}$
$\frac{6}{13}$		$\frac{9}{13}$
	$\frac{16}{21}$	1
$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	

1.22. Заполните пропуски.

Первое слагаемое	Второе слагаемое	Сумма
$\frac{\quad}{13}$	$\frac{\quad}{13}$	$\frac{8}{13}$
$\frac{\quad}{19}$	$\frac{6}{19}$	$\frac{\quad}{19}$
$\frac{\quad}{21}$	$\frac{7}{\quad}$	1
$\frac{4}{\quad}$	$\frac{8}{\quad}$	2

1.23. Закончите запись:

а) $5\frac{4}{7}-3\frac{2}{7}=(5-3)+\left(\frac{4}{7}-\frac{2}{7}\right)=2+\frac{2}{7}=2\frac{2}{7}$;

б) $25\frac{7}{16}+5\frac{5}{16}=(25+5)+\left(\frac{7}{16}+\frac{5}{16}\right)=30+\frac{12}{16}=30+\frac{3}{4}=$______;

в) $12\frac{5}{11}-9=(12-9)+\frac{5}{11}=3+\frac{5}{11}=$_______;

г) $6\frac{3}{7}+2\frac{4}{7}=$__________________________;

д) $18\frac{5}{9}-10\frac{3}{9}=$_________________________;

е) $3-\frac{1}{5}=2\frac{5}{5}-\frac{1}{5}=2+\left(\frac{5}{5}-\frac{1}{5}\right)=$__________;

ж) $5\frac{7}{10}-3\frac{9}{10}=4\frac{17}{10}-3\frac{9}{10}=$______________.

1.24. Выполните действия:

а) $11-\frac{3}{7}=$___________________________;

б) $9\frac{2}{14}-7\frac{5}{14}=$_________________________;

в) $6\frac{5}{8}+5\frac{3}{8}=$__________________________;

г) $3\frac{2}{9}+5\frac{7}{9}+4\frac{5}{9}=$______________________;

д) $30\frac{1}{6}-\frac{2}{6}-\frac{4}{6}=$_______________________;

е) $\left(6\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)\cdot 100=$_____________________;

ж) $\left(15\frac{4}{9}-\frac{4}{9}\right):3=$______________________.

1.25. Заполните пропуски.

а) $\frac{4}{5}$ км = ____ м;

б) $\frac{1}{5}$ т = ____ ц;

в) $\frac{2}{5}$ грн. = ____ коп;

г) $\frac{9}{10}$ т =____ кг;

д) $\frac{7}{10}$ кг = ____ г;

е) $\frac{3}{8}$ суток =____ час.

1.26. Заполните пропуски.

Делимое	Делитель	Частное	Дробь	Числитель дроби	Знаменатель дроби
8	15	$8:15$	$\frac{8}{15}$	8	15
17	23				
		$4:27$			
				7	16
19					26

1.27. Заполните пропуски.

Смешанное число	Целая часть	Дробная часть
$4\frac{3}{7}$	4	$\frac{3}{7}$
$5\frac{4}{19}$		
	6	$\frac{8}{15}$
	10	$\frac{13}{18}$

1.28. Представьте неправильные дроби в виде смешанных чисел.

а) $\frac{15}{8}=1\frac{7}{8}$ г) $\frac{26}{5}=5\frac{1}{\ }$ ж) $\frac{67}{8}=$

б) $\frac{23}{6}=3\frac{\ }{6}$ д) $\frac{49}{5}=\ \frac{\ }{5}$ з) $\frac{111}{2}=$

в) $\frac{46}{7}=6\frac{\ }{7}$ е) $\frac{205}{10}=$ и) $\frac{35}{4}=$

1.29. Решите задачи.

а) Один литр растительного масла весит 920 г. Каков вес $\frac{1}{5}$ литра растительного масла?

Решение:____

Ответ:______________.

б) Велосипедист проехал 9 км, что составляет $\frac{2}{3}$ части намеченного маршрута. Сколько километров должен был проехать велосипедист?

Решение:____

Ответ:______________.

1.30. Решите уравнения.

а) $2\frac{3}{7}+x=3$

$x=$ _________

____

Ответ: ___________

в) $5\frac{4}{7}-x=3\frac{2}{7}$

$x=$ _________

____

Ответ: ___________

б) $y+3\frac{2}{5}=7$

$y=$ _________

____

Ответ: ___________

г) $y-5\frac{2}{3}=1\frac{1}{3}$

$y=$ _________

____

Ответ: ___________

1.31. Закончите предложения.

а) Если в записи десятичной дроби справа приписать один или несколько нулей, то получится дробь _____________ данной дроби.

б) Если в записи десятичной дроби отбросить справа один или несколько нулей, то получится дробь, _____________ данной дроби.

1.32. Сравните десятичные дроби, используя знаки <, =, >.

а) 7,8 ____ 7,6

б) 8,15 ____ 8,6

в) 15,32 ____ 13,23

г) 0,845 ____ 0,769

д) 3,0100 ____ 3,010

е) 47,001 ____ 47,0001

1.33. Выполните действия.

а) 7,66 - 1,54=

б) 8,05 - 1,69=

в) 1,316 - 0,8=

г) 10,845 - 6,769=

д) 5,3 - 3,1=

е) 28,104 - 9,204=

1.34. Заполните пропуски.

а)

+	0,5	5,14	12,5
8,7			
10,6			
1,46			

б)

+	4,35		
	16,55		23,7
9,6		49,65	
			17

1.35. Заполните пропуски так, чтобы высказывания были верными.

а) Для того чтобы умножить десятичную дробь на натуральное число, необходимо умножить ее на это число, не обращая внимание на _____, и в полученном произведении отделить запятой столько цифр, сколько их отделено запятой в ____________.

б) Для того чтобы умножить десятичную дробь на 10, 100, 1 000 и так далее, необходимо в этой дроби перенести запятую на столько цифр ___________, сколько ___________ в множителе после единицы.

в) Чтобы перемножить две десятичные дроби, необходимо выполнить умножение, не обращая внимания на __________, и затем отделить запятой столько цифр справа, сколько их стоит после запятой в ____.

1.36. Выполните умножение.

а) $65,32 \cdot 10 =$

б) $0,65 \cdot 100 =$

в) $6,358 \cdot 10 =$

г) $150,632 \cdot 100 =$

д) $0,0001 \cdot 1\,000 =$

е) $7,5628 \cdot 10\,000 =$

1.37. Заполните пропуски.

а)

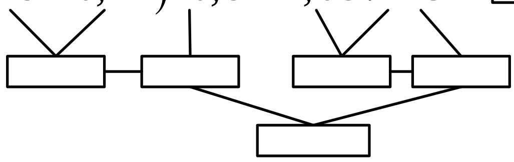
×	10	100	1 000
5,46			
0,25			
7,6			

б)

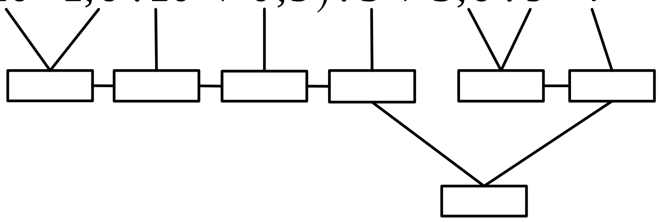
×		10	
6,5	650		
		63,4	
0,64			640

1.38. Найдите значение выражения

$$(0,28+0,22)\cdot 0,8+4,08:4\cdot 5=\boxed{}$$



$$(10\cdot 1,6:10+0,5):3+3,6:9\cdot 4=\boxed{}$$



1.39. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание.

а) Модулем числа a называют ______________ (в единичных отрезках) от ________________ до точки $A(a)$.

б) Модуль положительного числа и нуля равен _______________.

в) Модуль отрицательного числа равен ________________ числу.

1.40. Найдите значение выражения.

а) $|5|+|-2|=$

б) $|-4|+|-8|=$

в) $|-5|-|-3|=$

г) $\left|-\dfrac{1}{4}\right|+|-1,6|=$

д) $\left|-\dfrac{7}{12}\right|:\left|-\dfrac{5}{6}\right|=$

е) $|-5,75|+\left|-3\dfrac{1}{4}\right|=$

ж) $\left|-\dfrac{4}{5}\right|\cdot\left|-\dfrac{5}{12}\right|=$

з) $\left|-\dfrac{2}{7}\right|:\left|-\dfrac{5}{14}\right|=$

и) $|-36|\cdot\left|-\dfrac{7}{12}\right|=$

1.41. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание.

а) Из двух отрицательных чисел меньше то, у которого _________, и больше то, у которого ______________________________________.

б) Любое отрицательное число ________ нуля.

в) Любое положительное число ________ нуля.

г) Любое отрицательное число ________ любого положительного числа.

д) На координатной прямой точка с большей координатой лежит ___________ точки с меньшей координатой.

1.42. Запишите числа в порядке возрастания.

а) -17, -9, 0, -21, -6, -2, -1;

б) 7, -7, 9, -9, 6, -6, 4, -4, 0;

в) $-\frac{1}{4}; -\frac{1}{2}; -\frac{1}{9}; -\frac{1}{5}; -\frac{1}{12};$

г) $-6,5; -2\frac{1}{3}; 0; 6; 2,3.$

1.43. Запишите числа в порядке убывания.

а) -20, 9, 0, -21, 6, -2, -1;

б) 8, -7, 10, -9, 16, -6, 1, -1, 0;

в) $-\frac{1}{14}; -\frac{1}{3}; \frac{1}{11}; -\frac{1}{7}; -\frac{1}{12};$

г) $-6\frac{2}{7}; -5; 0; 6; 1; \frac{1}{4}.$

1.44. Решите уравнения.

а) $|x| = 65$

Ответ: _____________

б) $|-x| = 6$

Ответ: _____________

в) $|y| = \frac{5}{7}$

Ответ: _____________

г)

Ответ: _____________

1.45. Решите задачи.

а) Девочка прочитала книгу за три дня. В первый день она прочитала $\frac{7}{16}$ всей книги, во второй $\frac{4}{9}$ остатка. В третий день она прочитала на 120 страниц меньше, чем за первые два дня вместе. Сколько страниц прочитала девочка в каждый из трех дней?

б) Турист должен пройти 90 км. За первый день он прошел 35 % пути, за второй день он прошел на 4,5 км больше, чем в первый день. Сколько процентов пути осталось пройти туристу после этого?

Тема 2. Одночлены и многочлены

2.1. Степень рационального числа

Пусть $a \in Q$, $n \in N$, $n > 1$, тогда n-й степенью числа a называют произведение n множителей, каждый из которых равен a, то есть $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{n \text{ множителей}}$, $a^1 = a$.

Если $a \neq 0$, то $a^0 = 1$. Если $a \neq 0$, $n \in N$, то $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Свойства степени

$$a^n \cdot a^k = a^{n+k};\qquad a^n \cdot b^n = (ab)^n;$$

$$a^n : a^k = a^{n-k};\qquad \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\ b \neq 0;$$

$$\left(a^n\right)^k = a^{nk};\qquad \left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n.$$

Пример 2.1.

1) Упростим выражение:

$$\frac{x^{-5} \cdot y^6 \cdot x^2}{y^4 \cdot x^3} = x^{-5+2-3} \cdot y^{6-4} = x^{-6} \cdot y^2 = \frac{y^2}{x^6};$$

2) Вычислим: $4^5 = \left(2^2\right)^5 = 2^{10} = 1024$; $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 2^2 = 4$.

Одночленами называются выражения, которые не содержат других действий, кроме действий умножения и возведения в степень. Например, $2n$, $\frac{3}{5}a^3b$.

Числа и степени с натуральными показателями также считаются одночленами. Например, $28,\ x^5,\ b,\ 0,\ a^{23}$.

Число 0 называется нулевым одночленом.

Стандартный вид одночлена – это такой вид одночлена, в котором он представлен как произведение числового множителя, который обычно записывают перед остальными множителями и называют *коэффициентом одночлена* и натуральных степеней различных переменных.

Степенью одночлена стандартного вида называется сумма показателей степеней всех переменных, входящих в его запись.

Если в записи одночлена переменные отсутствуют и он отличен от нуля, то его степень считается равной нулю. Само число 0 считается одночленом, степень которого не определена.

Многочленами называют сумму одночленов. Например, $a^2b + 2b^4 - 3$, $xy - 2y$.

Над одночленами и многочленами можно производить следующие действия.

Действия над одночленами

1. Умножение одночленов.

2. Представление одночлена в виде произведения двух или нескольких одночленов.

3. Возведения одночленов в степень с натуральным показателем.

4. Представление одночлена в виде степени.

Пример 2.2.

а) $2m^2 \cdot n \cdot (-3 \cdot m \cdot n^3) = (-2 \cdot 3) \cdot (m^2 \cdot m) \cdot (n \cdot n^3) = (-6) \cdot (m^3) \cdot (n^4) =$
$= -6m^3n^4$;

б) $12x^3y^2 = (2 \cdot 6) \cdot (x \cdot x^2) \cdot (y \cdot y) = (2 \cdot x \cdot y) \cdot (6 \cdot x^2 \cdot y) = 2xy \cdot 6x^2y$;

в) $\left(2ab^3\right)^4 = \left(2\right)^4 \cdot \left(a\right)^4 \cdot \left(b^3\right)^4 = 16a^4b^{12}$;

г) $9a^2b^6 = 3^2a^2(b^3)^2 = (3ab^3)^2$.

Действия над многочленами

1. Приведение многочлена к стандартному виду, то есть перемножение числовых коэффициентов и степени одинаковых переменных в каждом из одночленов, которые входят в многочлен.

2. Приведение подобных членов многочлена, то есть членов, которые отличаются только коэффициентами (числами).

Пример 2.3.

а) $m^2 + 5nm^2 + 7m^2n^2 - 3nm^2 + 2m^2n^2 = m^2 + 2nm^2 + 9m^2n^2$.

б) $2 \cdot 6 \cdot a \cdot b \cdot a - 4 \cdot b \cdot b \cdot a - 3 \cdot b^2 \cdot b = (2 \cdot 6) \cdot (a \cdot a) \cdot b - 4 \cdot (b \cdot b) \cdot a -$
$-3 \cdot (b^2 \cdot b) = 12 \cdot a^2 \cdot b - 4 \cdot b^2 \cdot a - 3 \cdot b^3$.

С выражениями, которые содержат многочлены и одночлены, можно выполнять следующие *тождественные преобразования*:

а) преобразования одночлена и многочлена в многочлен стандартного вида;

б) разложение многочлена на множители способом вынесения одночленного множителя за скобки (преобразование, обратное преобразованию из пункта а);

в) преобразование произведения двух многочленов в многочлен стандартного вида;

г) разложение многочлена на множители, каждый из которых является многочленом (преобразование, обратное преобразованию из пункта б).

Пример 2.4.

а) $-0,2x^3\cdot(2,3x^2y-0,9x+3)=(-0,2x^3)\cdot 2,3x^2y+(-0,2x^3)\cdot(-0,9x)+$
$+(-0,2x^3)\cdot 3==-0,46x^5y+0,18x^4-0,6x^3$;

б) $12x^4-8x^3+2x^2=2x^2\cdot 6x^2-2x^2\cdot 4x+2x^2\cdot 1=2x^2\cdot(6x^2-4x+1)$;

в) $(2-2x+x^2)\cdot(x+5)=2\cdot x-2x\cdot x+x^2\cdot x+2\cdot 5-2x\cdot 5+x^2\cdot 5=$
$=2x-2x^2+x^3+10-10x+5x^2=x^3+3x^2-8x+10$;

г) $xy+2y-2x-4=(xy+2y)+(-2x-4)=y\cdot(x+2)-2\cdot(x+2)=$
$=(x+2)\cdot(y-2)$.

Для разложения на множители часто применяют формулы сокращенного умножения

$(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$ – разность квадратов;

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ – квадрат суммы;

$(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$ – квадрат разности;

$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ – куб суммы;

$(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$ – куб разности.

Пример 2.5.

$$49x^2y^4-16a^2=\left(7xy^2\right)^2-\left(4a\right)^2=\left(7xy^2-4a\right)\cdot\left(7xy^2+4a\right).$$

Упражнения

2.1. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание:

а) степенью числа a с натуральным показателем n, большим 1, называется произведение __ множителей, каждый из которых равен __;

б) степенью числа с показателем 1 называется __________________;

в) при умножении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а показатели __________________________________;

г) при делении степеней с одинаковыми основаниями основание оставляют прежним, а из показателя делимого ________________показатель делителя;

д) при возведении степени в степень основание оставляют прежним, а показатели степеней ________________.

2.2. Выражение 5^7 называется __________, число 5 называется ________, число 7 ___________.

2.3. Определите, положительным или отрицательным числом является значение степени:

$(-3)^6$ Положительное число $(-15)^{2n}$

$(-4{,}5)^8$ $(-6)^{2n+1}$

$(-9)^{15}$ Отрицательное число $(-6{,}5)^{100}$

$(-13)^9$ $(-4)^{77}$

2.4. Представьте число различными способами в виде степени:

а) $\square^{\square}=16$,
$\square^{\square}=16$,

б) $\square^{\square}=64$,
$\square^{\square}=64$,
$\square^{\square}=64$,

в) $\square^{\square}=81$,
$\square^{\square}=81$,

г) $\square^{\square}=1\,000\,000$,
$\square^{\square}=1\,000\,000$,
$\square^{\square}=1\,000\,000$

д) $\square^{\square}=0{,}001$
$\square^{\square}=0{,}001$,

е) $\square^{\square}=\dfrac{1}{64}$,
$\square^{\square}=\dfrac{1}{64}$,
$\square^{\square}=\dfrac{1}{64}$.

2.5. Заполните пропуски.

а)

a	a^2	$(-a)^2$	$-a^2$	a^3	$(-a)^3$	$-a^3$
3						
-2						
4						
-3						
-7						

б)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
x^2-3							

в)

x	-4	-3	-2	0	2	3	4
x^3+1							

2.6. Найдите значение выражения:

а) $6^8:6^6=$ ______________________________;

б) $2,58^9:2,58^8=$ ______________________________;

в) $\left(1\frac{1}{3}\right)^4\cdot\left(1\frac{1}{3}\right)=$ ______________________________;

г) $\left(-3\frac{1}{2}\right)^2\cdot\left(-3\frac{1}{2}\right)^0=$ ______________________________;

д) $\left(2^3\right)^2=$ ______________________________;

е) $\left(\frac{6}{5}\right)^3\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^4=$ ______________________________;

ж) $\left(3\frac{2}{3}\right)^2\cdot(0,1)^3=$ ______________________________.

2.7. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание:

а) выражения, которые являются произведениями чисел, переменных и их степеней называют ______________________________;

б) одночлен стандартного вида состоит из произведения числового множителя, стоящего на ________________ месте, и степеней различных переменных.

2.8. Представьте одночлен в стандартном виде.

а) $12b^5b^2=$ ______________________________;

б) $4xy(-0,5)z=$ ______________________________;

в) $0,4a^3b^2\cdot10a^5=$ ______________________________;

г) $6b^3c^2(-2,5)b^5=$ ______________________________.

2.9. Заполните пропуски.

Одночлен	Степень одночлена
$2x^5$	
$-5x^2y^3$	
$a^3b^5c^8$	
$15xyz$	
125	
0	

2.10. Упростите выражение.

а) $\left(3a^3b^2\right)^2\cdot\left(\frac{1}{3}ab\right)^3=$ ______________________________________;

б) $\left(0{,}5xy^3\right)^3\cdot\left(4x^2y^2\right)^2=$ ________________________________;

в) $\left(\frac{b}{2}\right)^3\cdot(4b)^4\cdot 5b=$ ____;

г) $\left(0{,}01x^3\right)^2\cdot(100y)^2\cdot\left(7xy^2\right)^2=$ ______________________________.

2.11. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание.

а) Многочленом называется ______________ одночленов.

б) Одночлены, отличающиеся только коэффициентами или ничем не отличающиеся, называются ___________________.

в) Чтобы многочлен привести к стандартному виду, нужно каждый его член привести к _____________ виду и привести _____________члены.

г) Для того чтобы выполнить сложение или вычитание многочленов, необходимо раскрыть скобки, сохраняя при этом знаки, если перед скобками стоит знак __________, или изменяя их, если перед скобками стоит знак _________, а затем выполнить приведение подобных членов.

2.12. Представьте в стандартном виде многочлены:

а) $-5x^6+12x^5+6x^6-8x^3+4x^5=$ ______________________________;

б) $9m^4m^2n-3n^2n^3+nmm^5+4n^5-2nm^4m^2=$ ____________________;

в) $2abd-4bc\cdot\frac{1}{2}d+3a\cdot\frac{1}{3}bd-2ab\cdot 2d-2abd+15ab\cdot\frac{1}{3}c=$ _______.

2.13. Найдите значение многочлена:

а) $7x^6-5x^2+6-3x^6-4x^6+3x^2$ при $x=6$;

б) $12x^6y^3-8x^6y^3+3x^2y^2-4x^6y^3-2x^2y^2-x$ при $x=-2,\quad y=-3$.

2.14. Вставьте пропущенные коэффициенты одночленов во втором многочлене, чтобы данное равенство было тождеством:

а) $3x^2-5xy+y^2+\left(\square x^2-\square xy-\square y^2\right)=6x^2-15xy-4y^2$;

б) $2a^2+4ab-b^2+\left(\square a^2+\square b^2-\square ab\right)=5a^2+2ab-5b^2$;

в) $4x^2-10y^2-xy-\left(\square x^2-\square xy+\square y^2\right)=-x^2+2y^2+xy$;

г) $3m^2+mn-n^2-\left(\square m^2-\square mn+\square n^2\right)=m^2-mn+4n^2$.

2.15. Установите соответствие между заданными выражениями (1 – 4) и выражениями, которые им тождественно равны (А – Г)

1. $(2a+b)^2$

2. $(2a-b)(b+2a)$

3. $(a-2b)^2$

4. $(a+2b)(2a-b)$

А. $4a^2-b^2$

Б. $2a^2+3ab-2b^2$

В. $4a^2+4ab+b^2$

Г. $4b^2-4ab+a^2$

2.16. Докажите, что выражение не зависит от a:

а) $\left(3a^2-2{,}5a\right)\cdot 4a-2a^2(6a-5)$;

б) $5\left(b^3-7b^2+2\right)-3\left(b^3-2b^2+4\right)-\left(2b^3-30b^2+5\right)$.

2.17. Упростите выражение и заполните пропуски:

$$V=5b(14b-2)-7b(10b-15)-45b+6$$

b	-15	-1,5	0	4	4,3	12	25
V							

2.18. Разложите на множители:

а) $x^3+8x^2-2x=$ ______________________________;

б) $5c^4-15c^2+c=$ ______________________________;

в) $c^3t-c^2t^2-ct^2=$ ______________________________;

г) $0{,}1x^4y^3-0{,}05x^2y^4-0{,}25x^3y^2=$ ______________________________.

2.19. Сократите дробь:

а) $\dfrac{x^2+2x}{5x}$; в) $\dfrac{6x-6y}{18zy-18zx}$;

б) $\dfrac{17x^8-17y^{12}}{10y^{12}-10x^8}$; г) $\dfrac{x^{20}y^{20}-x^8y^{48}}{x^{13}y-xy^{29}}$.

2.20. Докажите, что:

а) сумма трех последовательных степеней числа 5 делится на 31;

б) разность между квадратом натурального числа и самим числом делится на 2;

в) сумма трех последовательных степеней числа 7 делится на 57.

2.21. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание.

Чтобы умножить многочлен на многочлен, нужно каждый член одного многочлена ___________________на каждый член другого многочлена и полученные произведения _______________________________________.

2.22. Выполните умножение:

а) $(2a+4b)(0,5a-0,25b)=$ ___________________________________ ;

б) $(2,5x-3,2y)(6x+10y)=$ ___________________________________;

в) $(a^{25}-4)(a^3+5)=$ ____;

г) $\left(\dfrac{16}{7}a^2-\dfrac{5}{3}b\right)\left(\dfrac{7}{8}ab-2ab-\dfrac{4}{5}b^2\right)=$ ____________________________.

2.23. Вычислите значение выражения:

а) $7,8\cdot5,6+11,7\cdot6-7,8\cdot1,6-1,7\cdot6=$ ___________________________;

б) $3,37\cdot3,8-5,37\cdot1,1-3,37\cdot1,8+6\cdot1,7=$ ________________________.

2.24. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание.

а) Квадрат суммы двух выражений равен квадрату первого выражения _______________удвоенное произведение ________________и ________________выражений _________квадрат ___________ выражения.

б) Квадрат разности двух выражений равен квадрату первого выражения _______________удвоенное произведение ________________и ________________выражений _________квадрат ___________ выражения.

2.25. Составьте квадрат суммы и квадрат разности двух многочленов:

а) $5a$ и 6; б) $3x$ и $8y$.

2.26. Составьте куб суммы и куб разности двух многочленов:

а) $3z$ и 2; б) $5k$ и 4.

2.27. Преобразуйте в многочлен.

а) $(5a+4b)^2=$ ______________________________;

б) $(6a-7b)^2=$ ______________________________;

в) $(3x+4y)^3=$ ______________________________;

г) $(-3a-8)^3=$ ______________________________.

2.28. Найдите значение выражения, при условии, что $x+y=9$:

а) $4x^2+4y^2+8xy=$ ______________________________;

б) $13+x^2+y^2+2xy=$ ______________________________;

в) $10-2xy-x^2-y^2=$ ______________________________;

г) $19-9x^2-9y^2-18xy=$ ______________________________.

2.29. Решите уравнения:

а) $(x+2)^2+(3-x)(3+x)=0$;

б) $(x-4)^2-(x-1)(x+1)=0$;

в) $(2x-1)^2-3(x+1)^2=(x+2)(x-2)$;

г) $(3x+1)^2-8(x-4)^2=(x+3)(x-3)$.

Тема 3. Функции и графики

3.1. Понятие функции

Постоянной величиной называется величина, сохраняющая одно и то же значение (например, число π).

Если величина сохраняет постоянное значение лишь в условиях данного процесса, то она называется *параметром*.

Переменной называется величина, которая может принимать различные числовые значения.

Если каждому элементу x множества X ставится в соответствие определенный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция $y = f(x)$.

Переменная называется независимой переменной или аргументом функции, а переменная y – зависимой переменной. Множество X или $D(f)$ – область определения функции, а множество Y или $E(f)$ – область значений функции.

Пример 3.1.

1. Найти область определения функции $y = \sqrt{5 - x}$.

Данная функция определена для всех значений переменной x, при которых подкоренное выражение неотрицательно, то есть:

$$5 - x \geq 0 \Leftrightarrow -x \geq -5 \Leftrightarrow x \leq 5.$$

2. Найти область определения функции $y = \dfrac{2x+5}{x^2+5x+6}$.

Данная дробь существует для всех значений переменной x, кроме тех, при которых $x^2+5x+6=0$. Корнями этого уравнения являются $x_1 = -3$ и $x_2 = -2$. Таким образом для данной функции:

$$D(f): x \in (-\infty;-3) \cup (-3;-2) \cup (-2;+\infty).$$

3.2. Способы задания функции

1. *Аналитический способ задания функции.* При этом способе функция задается с помощью формулы, например,

$$y = 3x+1; \quad y = x^3 - 5; \quad y = \sqrt{2x-7}; \quad y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x \leq 0, \\ x+4, \text{ если } x > 0. \end{cases}$$

2. *Графический способ задания функции.* При этом способе в системе координат xOy изображают график функции $y = f(x)$.

Графиком функции $y = f(x)$ называется множество всех точек координатной плоскости с координатами $(x, f(x))$, где абсцисса x – значение аргумента, а ордината $y = f(x)$ – соответствующее значение функции (рис. 3.1).

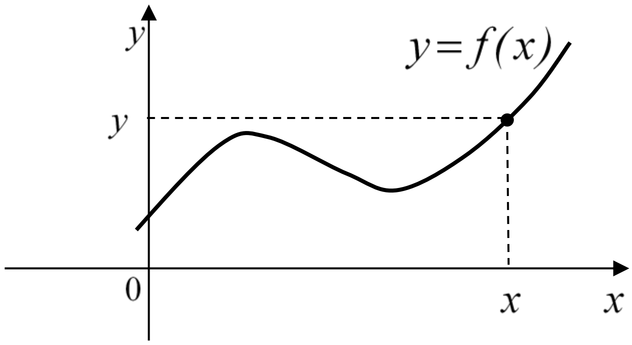


Рис. 3.1. **Графический способ задания функции**

3. *Табличный способ задания функции.* При этом способе выписываются в определенном порядке значения аргумента $x_1, x_2, ..., x_n$ и соответствующие значения функции $y_1, y_2, ..., y_n$.

x	x_1	x_2	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_n

3.3. Основные свойства функций

1. Четность и нечетность функции

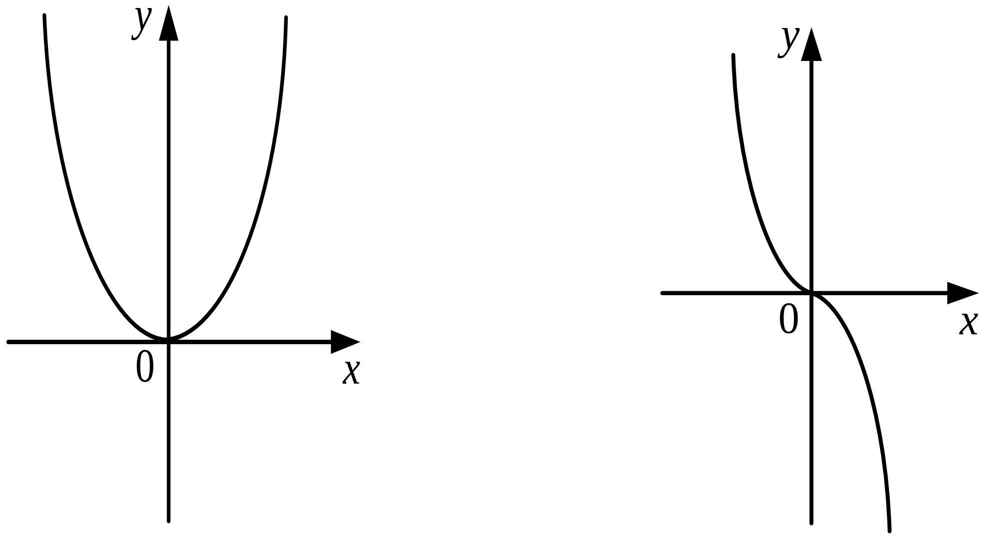
Функция $y = f(x)$ называется четной, если для любых значений x из области определения функции выполняется равенство: $f(-x) = f(x)$.

Функция называется нечетной, если для любых x из области определения функции выполняется равенство: $f(-x) = -f(x)$.

Если же $f(-x) \neq f(x)$ и $f(-x) \neq -f(x)$, то $f(x)$ называется *функцией общего вида* (не является ни четной, ни нечетной).

График четной функции симметричен относительно оси ординат (см. рис. 3.2а), а график нечетной функции симметричен относительно начала координат (см. рис. 3.2б).

Говорить о том, что функция является четной или нечетной, можно лишь в том случае, когда область определения является симметричной относительно начала координат. Например, функция $y = x^4$ является четной, так как $f(-x) = (-x)^4 = x^4 = f(x)$, а функция $y = x^3 + 5$ является нечетной, так как $f(-x) = (-x)^3 + 5 = -x^3 + 5 = -f(x)$.



а) четной б) нечетной

Рис. 3.2. **Графики функций**

2. Монотонность функции

Функция $y = f(x)$ называется возрастающей на данном числовом промежутке, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции, то есть если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) > f(x_1)$. Например, $y = 3x$ – возрастающая функция.

Функция $y = f(x)$ называется убывающей на данном числовом промежутке, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции, то есть если $x_2 > x_1$, то $f(x_2) < f(x_1)$. Например, $y = -x^3$ – убывающая функция.

Возрастающие и убывающие функции называются *монотонными* функциями.

3. Периодичность

Функция $y = f(x)$ называется *периодической* с периодом $T \neq 0$, если для любых x из области определения функции $f(x+T) = f(x)$.

Например, функция $y = \cos x$ имеет период $T = 2\pi$, так как для любых x $\cos(x+2\pi) = \cos x$.

4. Ограниченность

Функция $y = f(x)$ называется *ограниченной* на промежутке X, если существует такое положительное число $M > 0$, что $|f(x)| \le M$ для любого $x \in X$.

Например, функции $y = \cos x$ и $y = \sin x$ являются ограниченными на всей области определения, так как $|\cos x| \le 1$ и $|\sin x| \le 1$.

3.4. Классификация функций

Функции, построенные из основных элементарных функций с помощью конечного числа алгебраических действий и конечного числа операций образования сложной функции, называются *элементарными*.

Элементарные функции делятся на алгебраические и неалгебраические (трансцендентные).

Алгебраической называется функция, в которой над аргументом проводится конечное число алгебраических действий. К числу алгебраических функций относятся:

1) целая рациональная функция (многочлен или полином)

например: $y = 5x^3 + 4x^2 + 28x + 12$;

2) дробно-рациональная функция – отношение двух многочленов

например: $y = \dfrac{9x^2 + 5x + 23}{x - 8}$;

3) иррациональная функция (если в составе операций над аргументом есть извлечение корня)

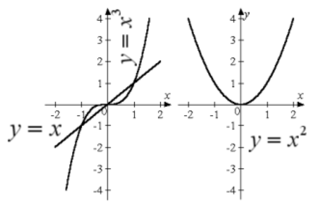
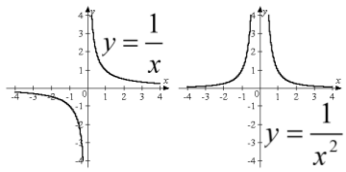
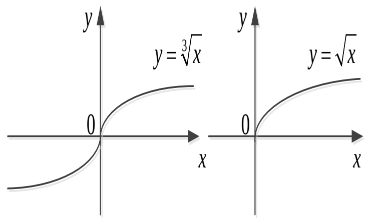
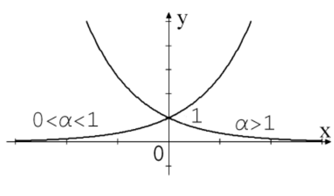
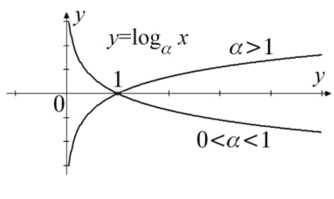
например: $y = \sqrt{5x^2 + 4x + 6}$.

Любая неалгебраическая функция называется *трансцендентной*. Например: показательная $y = a^x$, логарифмическая $y = \log_a x$, тригонометрические $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = tgx$, $y = ctgx$, обратные тригонометрические функции $y = \arcsin x$, $y = \arccos x$, $y = arctgx$, $y = arcctgx$.

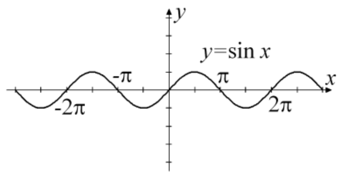
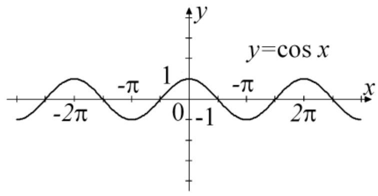
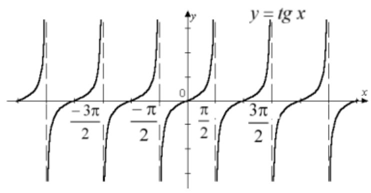
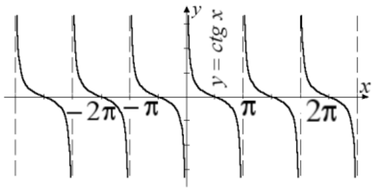
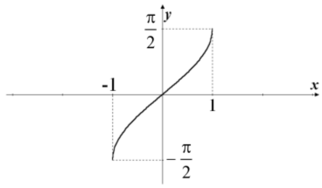
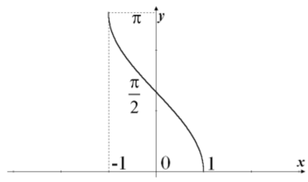
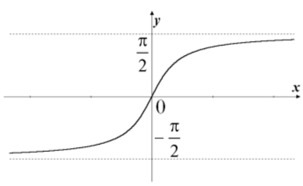
Наиболее важные свойства и графики основных элементарных функций удобно представить в виде таблицы (табл. 3.1).

Таблица 3.1

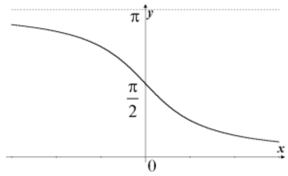
Основные элементарные функции

№ п/п	Обозначение функции	Область определения X	Область значения Y	Четность, нечетность	Монотонность	Периодичность	Графики функций
1	2	3	4	5	6	7	8
			1. Степенная функция				
1	$y = x^n$ $n \in N$	$(-\infty; \infty)$	$(-\infty; \infty)$, если n нечетно; $[0; \infty)$, если n четно	Нечетная, если n нечетно; четная, если n четно	Возрастает на $(-\infty; \infty)$, если n нечетно; убывает на $(-\infty; 0]$, возрастает на $(0; \infty)$, если n четно	Непериодическая	
2	$y = x^{-n}$ $n \in N$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; \infty)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup (0; \infty)$, если n нечетно; $[0; \infty)$, если n четно	Нечетная, если n нечетно; четная, если n четно	Убывает на $(-\infty; 0)$ и на $(0; \infty)$, если n нечетно. Возрастает на $(-\infty; 0)$ и убывает на $(0; \infty)$, если n четно	Непериодическая	
3	$y = \sqrt[n]{x}$ $n \in N$ $\sqrt[3]{x}$ $n > 1$	$(-\infty; \infty)$, если n нечетно; $[0; \infty)$, если n четно	$(-\infty; \infty)$, если n нечетно; $[0; \infty)$, если n четно	Нечетная, если n нечетно; общего вида, если n четно	Возрастает на $(-\infty; \infty)$, если n нечетно. Возрастает на $[0; \infty)$, возрастает на $(0; \infty)$, если n четно	Непериодическая	
			2. Показательная функция				
4	$y = a^x$ $(a > 0$, $a \neq 1)$	$(-\infty; \infty)$	$(0; \infty)$	Общего вида	Возрастает на $(-\infty; \infty)$, если $a > 1$; убывает на $(-\infty; \infty)$, если $0 < a < 1$	Непериодическая	
			3. Логарифмическая функция				
5	$y = \log_a x$ $(a > 0$, $a \neq 1)$	$(0; \infty)$	$(-\infty; \infty)$	Общего вида	Возрастает на $(0; \infty)$, если $a > 1$; убывает на $(0; \infty)$, если $0 < a < 1$	Непериодическая	

Продолжение табл. 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8
4. Тригонометрическая функция							
6	$y=\sin x$	$(-\infty;\infty)$	$[-1;1]$	Нечетная	Возрастает на $\left[\frac{-\pi}{2}+2\pi n, \frac{\pi}{2}+2\pi n\right],$;	Период $T=2\pi$	
7	$y=\cos x$	$(-\infty;\infty)$	$[-1;1]$	Четная	Возрастает на $[-\pi+2\pi n, 2\pi n]$; убывает на $[2\pi n, \pi+2\pi n]$ $n\in N$	Период $T=2\pi$	
8	$y=tg\,x$	$(-\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi n)$; $n\in Z$	$(-\infty;\infty)$	Нечетная	Возрастает на $(-\pi/2+\pi n, \pi/2+\pi n)$; $n\in Z$	Период $T=\pi$	
9	$y=ctg\,x$	$(\pi n, \pi+\pi n)$; $n\in Z$	$(-\infty;\infty)$	Нечетная	Убывает на $(\pi n, \pi+\pi n)$; $n\in Z$	Период $T=\pi$	
5. Обратные тригонометрические функции							
10	$y=\arcsin x$	$x\in[-1;1]$	$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$	Нечетная	Возрастает на $(-\infty;\infty)$	Непериодическая	
11	$y=\arccos x$	$x\in[-1;1]$	$[0;\pi]$	Общего вида	Убывает на $(-\infty;\infty)$	Непериодическая	
12	$y=arctg\,x$	$x\in R$	$[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}]$	Нечетная	Возрастает при $x\in R$	Непериодическая	

Окончание табл. 3.1

1	2	3	4	5	6	7	8
13	$y = arcctg\,x$	$x \in R$	$[0;\pi]$	Общего вида	Убывает при $x \in R$	Непериодическая	

3.5. Общие представления о неэлементарных функциях

Неэлементарной функцией называется функция, которая не относится к элементарным; например, если она не записывается одной формулой или содержит бесконечное число арифметических операций. Рассмотрим некоторые из них.

1. $y = |x|$ – модуль x.

$$y = \begin{cases} x, & x \ge 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

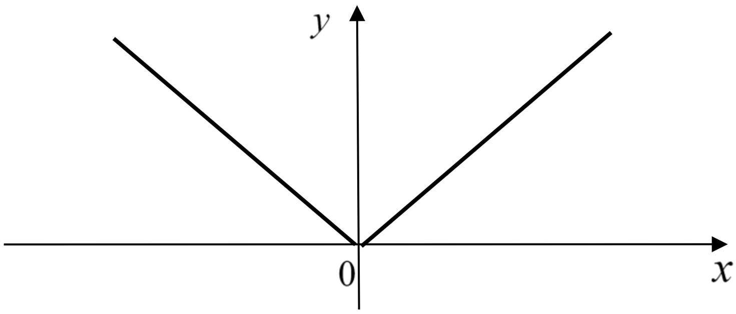


Рис. 3.3. **График функции** $y = |x|$

2. $y = [x]$ – целая часть x – определяется как наибольшее целое число, не превосходящее x.

Например, $[6{,}15] = 6$, $[0{,}4] = 0$, $[-14{,}6] = -14$.

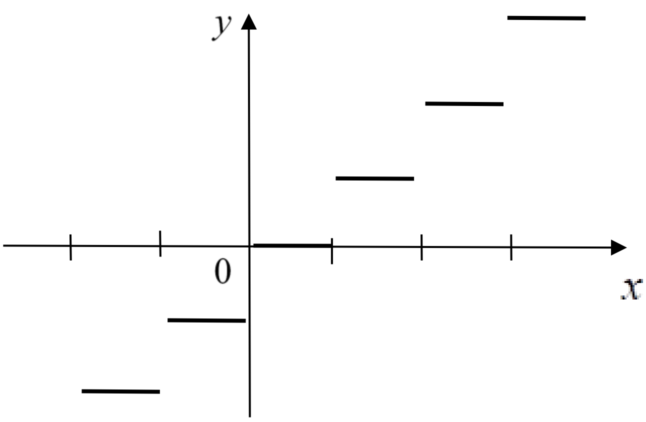


Рис. 3.4. **График функции** $y = [x]$

3. $y = \{x\}$ – дробная часть x: $\{x\} = x - [x]$.

Например, $\{3{,}6\} = 3{,}6 - 3 = 0{,}6$, $\{-2{,}7\} = -2{,}7 - (-3) = 0{,}3$.

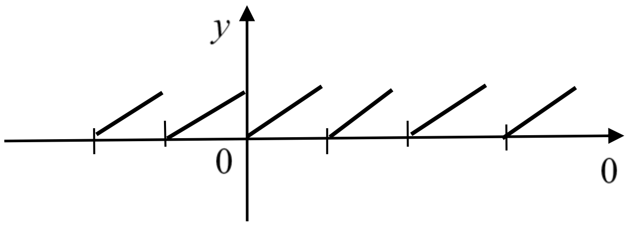


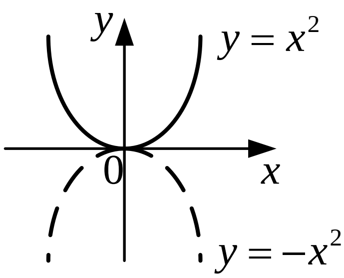
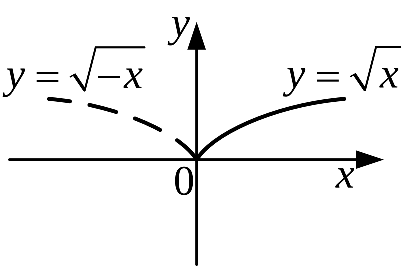
Рис. 3.5. **График функции** $y = \{x\}$

3.6. Преобразование графиков

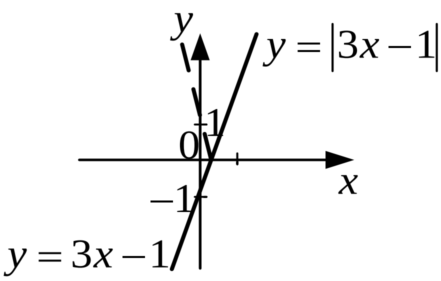
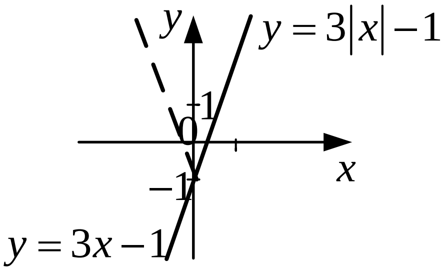
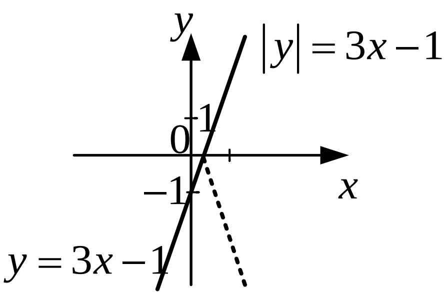
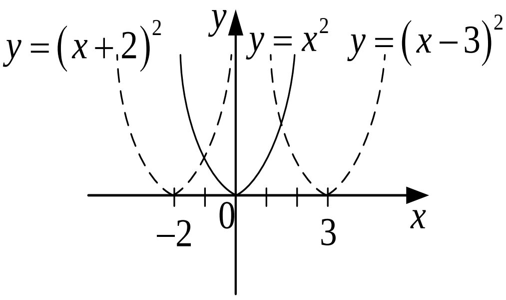
Основные правила построения графика функции с помощью геометрических преобразований удобно представить в виде таблицы (табл. 3.2).

Таблица 3.2

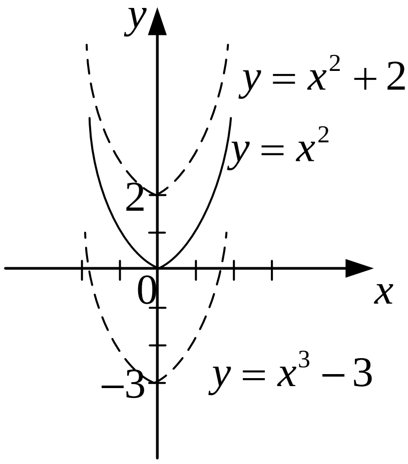
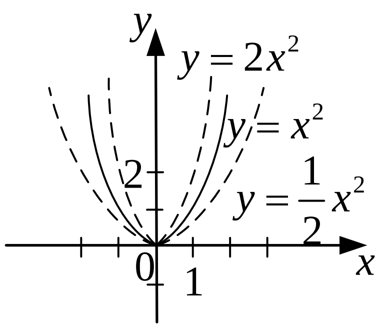
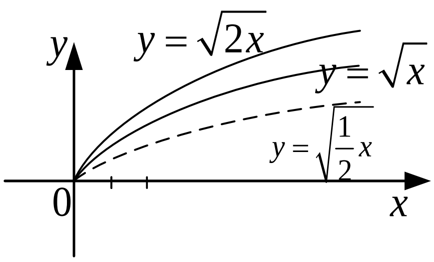
Преобразование графиков функций

№ п/п	Формула зависимости	Пример графика	Преобразования
1	2	3	4
1	$y = -f(x)$		Симметрия графика относительно оси Ox
2	$y = f(-x)$		Симметрия графика относительно оси Oy

Продолжение табл. 3.2

1	2	3	4
3	$y=\left\lvert f(x)\right\rvert$		Выше оси Ox и на самой оси график остается без изменения, ниже оси Ox – симметрия относительно оси Ox
4	$y=f\left(\lvert x\rvert\right)$		Правее оси Oy и на самой оси график остается без изменения, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy
5	$\lvert y\rvert=f(x)$		Выше оси Ox и на самой оси график остается без изменения, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Ox
6	$y=f(x-a)$		Параллельный перенос графика вдоль оси Ox на a единиц

Окончание табл. 3.2

<table>
<tr><th>1</th><th>2</th><th>3</th><th>4</th></tr>
<tr><td>7</td><td>$y = f(x) + c$</td><td>
</td><td>Параллельный перенос графика вдоль оси Oy на c единиц</td></tr>
<tr><td>8</td><td>$y = kf(x)\,(k > 0)$</td><td>
</td><td>График растянут вдоль оси Oy, если $k > 1$, или сжат вдоль оси Oy, если $0 < k < 1$</td></tr>
<tr><td>9</td><td>$y = f(\alpha x)\,(\alpha > 0)$</td><td>
</td><td>График растянут вдоль оси Ox, если $0 < \alpha < 1$ или сжат вдоль оси Ox, если $\alpha > 1$</td></tr>
</table>

Упражнения

3.1. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание.

а) Переменную, значения которой выбираются произвольно, называют ________________переменной или _______________ функции.

б) Переменную, значения которой определяются выбранными значениями независимой переменной, называют ____________переменной.

3.2. Площадь прямоугольника со сторонами x см и 5 см равна S см^2. Выразите формулой зависимость S от x _______________ и заполните таблицу, найдя значения функции, соответствующие данным значениям аргумента.

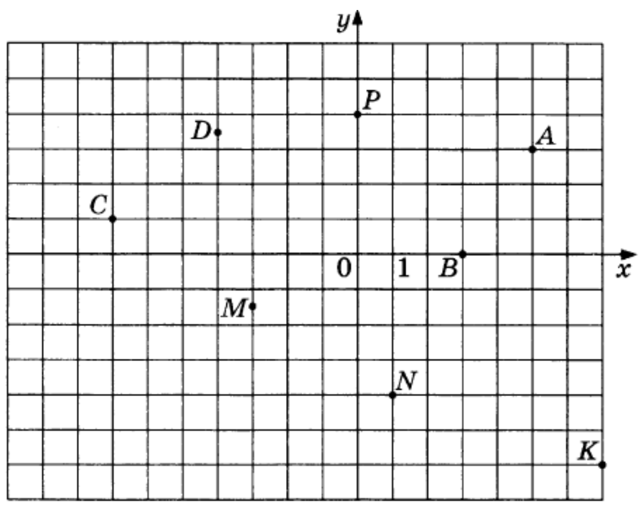
x	7	9	10,5	15
S				

3.3. Функция задана формулой $y = x^2 - 5$. Заполните пропуски.

x	-6	-4	-3	-1	0	2	5	7	10
y									

3.4. Укажите координаты точек.

A(__________);
B(__________);
C(__________);
D(__________);
M(__________);
N(__________);
P(__________);
K(__________).



3.5. Задайте формулой функцию, если известно, что в каждой паре соответствующих значений аргумента x и функции y:

а) значение функции равно утроенному значению аргумента;

б) значение функции на 5 больше значения аргумента;

в) значение функции равно квадрату аргумента, уменьшенному на 3.

3.6. На рисунке (рис. 3.6) построен график температуры воздуха, отмеченной в течение суток.

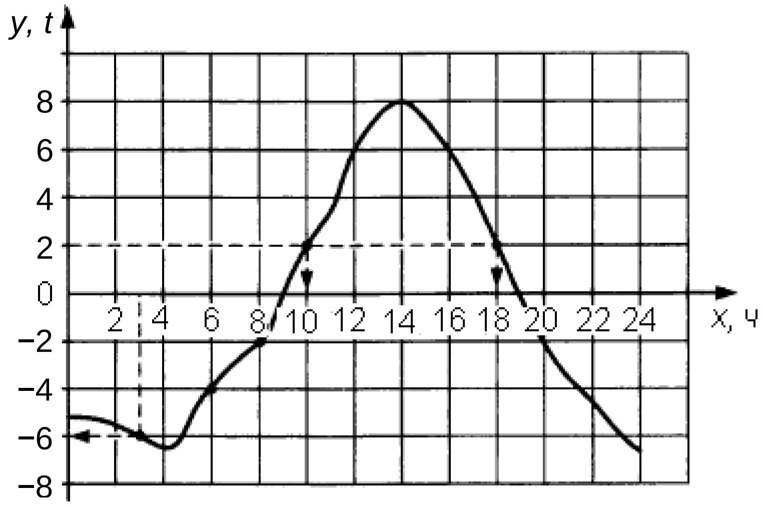


Рис. 3.6. **График температуры воздуха**

Пользуясь графиком, ответьте на вопросы:

1. Какая температура была:

а) в 6 часов ________________; в) в 14 часов _______________;

б) в 10 часов _______________; г) в 20 часов _______________?

2. В какие моменты времени температура воздуха была равна :

а) -4^0_____________; в) $+2^0$_____________;

б) -2^0_____________; г) $+6^0$_____________?

3. В какие моменты времени температура воздуха была равна 0^0?__

____

4. В промежутке от ___________до ______ температура воздуха была положительной и в промежутках от _______до _______ и от __________до __________ отрицательной.

5. Температура воздуха была максимальной в ________ и минимальной в ______________.

3.7. График функции изображен на рисунке (рис. 3.7). С помощью графика ответьте на вопросы:

а) какова область определения функции;

б) при каких значениях аргумента x функция положительна;

в) при каких значениях аргумента x функция отрицательна;

г) при каких значениях аргумента функция принимает значения, равные нулю;

д) при каких значениях аргумента функция возрастает;

е) при каких значениях аргумента функция убывает;

ж) каково наибольшее значение функции;

з) каково наименьшее значение функции?

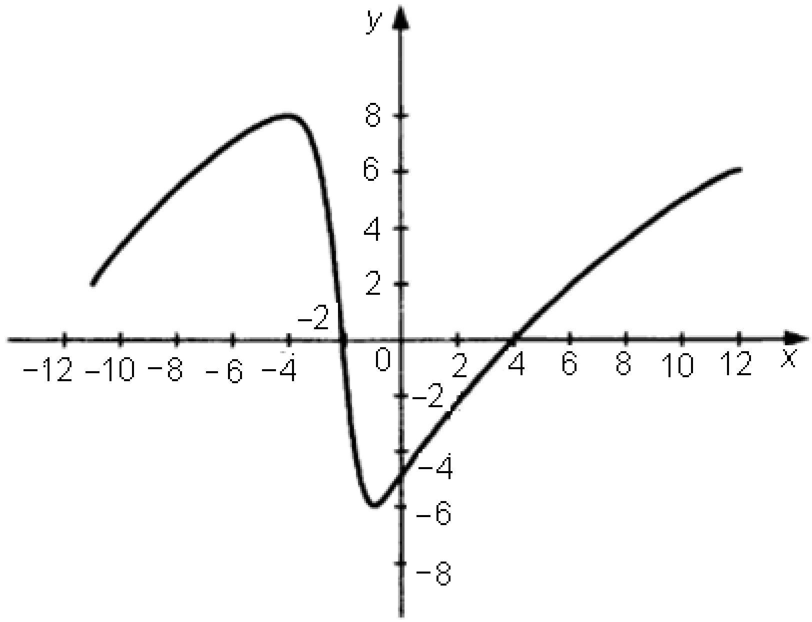
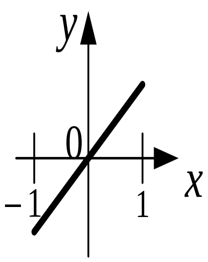
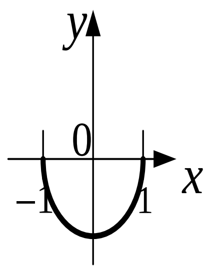
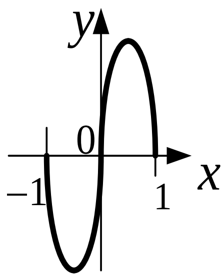
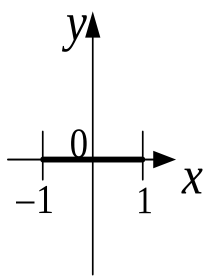
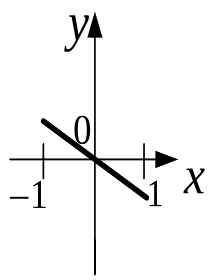
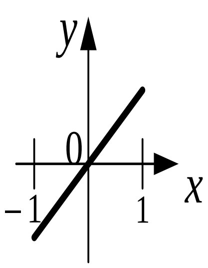
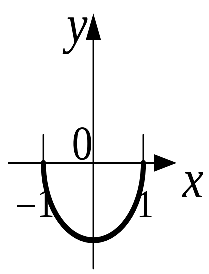
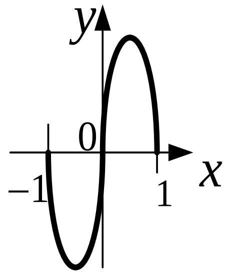
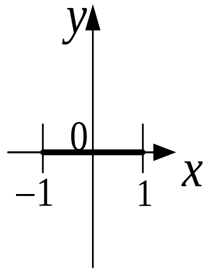
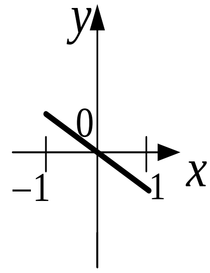


Рис. 3.7. **График функции**

3.8. Укажите график функции, которая возрастает на промежутке $(-1;1)$.

А	Б	В	Г	Д
				

3.9. Укажите график функции, которая убывает на промежутке $(-1;1)$.

А	Б	В	Г	Д
				

3.10. Найдите область определения и область значений функции:

а) $y = 3x^2 - 5$;

б) $y = \frac{1}{x} + 2$;

в) $y = \frac{2-x}{3}$;

г) $y = 1 - \sqrt{x}$;

д) $y = \sqrt{1-x} + \ln(1+x)$;

е) $y = \sqrt{5x^2 - 3x - 2}$;

ж) $y = \lg(6x^2 + x - 1)$;

з) $y = \arcsin\frac{1-x}{2}$;

и) $y = \arccos\frac{x-2}{3}$;

к) $y = tg\,\frac{1}{x}$.

3.11. Пользуясь определением, проверьте на четность и нечетность следующие функции:

а) $y = \frac{x}{x^2+1}$;

б) $y = x^2 + \frac{2}{x}$;

в) $y = \frac{x^2+1}{x^2-1}$;

г) $y = \frac{x^3}{x^2+1}$;

д) $y = x^4 - 2x^2 + 3$;

е) $y = x^5 - x^3 - 2x$.

3.12. Установите соответствие между функциями (1 – 4) и их областями определения (А – Г).

1. $y = \log_2(x+1)$

2. $y = \sqrt[4]{x+1}$

3. $y = \arcsin x$

4. $y = \sin x$

А. $[-1; 1]$

Б. $(-\infty; +\infty)$

В. $(-1; +\infty)$

Г. $[-1; +\infty)$

3.13. Постройте график функции:

а) $y = x^2 - 4$;

б) $y = 2x^2 + 4$;

в) $y = \frac{1}{x} - 2$;

г) $y = \frac{1}{x+3}$;

д) $y = -(x-1)^2 + 3$;

е) $y = |x+1|$;

ж) $y = |x+1| - 4$;

з) $y = \frac{8}{x-1} - 3$.

Тема 4. Уравнения и системы уравнений первого порядка

4.1. Уравнения первого порядка

Два выражения, числовые или буквенные, соединенные знаком равенства (=), образуют *равенство* (числовое или буквенное).

Всякое верное числовое равенство, а так же всякое буквенное равенство, справедливое при всех числовых значениях входящих в него букв, называется *тождеством*.

Пример 4.1. $5\cdot 4-2=9\cdot 2$, $(a-b)\cdot(a+b)=a^2-b^2$ – это тождества.

Равенство, содержащее неизвестные буквенные величины и не являющееся тождеством, называется *уравнением*.

Решить уравнение – найти все такие значения входящих в него неизвестных, которые обращают уравнение в тождество.

Эти значения называются *корнями уравнения*. *Равносильными уравнениями* называются такие уравнения, которые имеют одни и те же корни.

Уравнения 1-й степени с одним неизвестным после надлежащих преобразований можно представить в виде $ax=b$, где a и b – данные числа или буквенные выражения, содержащие известные величины. Решение такого уравнения имеет вид $x=b:a$, где $a\neq 0$.

Если $a=0$ и $b=0$, то уравнение имеет бесконечное множество решений; при $a=0$ и $b\neq 0$ уравнение не имеет корней.

Пример 4.2. $(23x-45x+22x)=\sqrt{121}\ \Rightarrow\ 0\cdot x=11\Rightarrow$ корней нет.

Для решения *уравнения, содержащего модуль*, необходимо сначала снять модульные скобки, а затем решать получившееся уравнение.

Пример 4.3. Решить уравнение $|x-1|+|x-2|=1$.

Сначала найдем нули функции. Это точки $x=1$ и $x=2$. Они разбивают числовую ось три интервала. Рассмотрим решение уравнения на каждом из полученных интервалов, избавившись от модуля и учитывая, что $|x-1|=\begin{cases}x-1, & x\geq 1,\\ -(x-1), & x<1,\end{cases}$ и $|x-2|=\begin{cases}x-2, & x\geq 2,\\ -(x-2), & x<2.\end{cases}$

Найдем решение исходного уравнения на каждом из полученных интервалов:

1) $x \in (-\infty; 1)$: $-x+1-x+2=1 \Rightarrow -2x=-2 \Rightarrow x=1$, но это значение не принадлежит интервалу $(-\infty; 1)$. Следовательно, на данном интервале нет корней: $x \in \varnothing$;

2) $x \in [1; 2)$: $x-1-x+2=1 \Rightarrow 1=1$, это верное тождество, справедливое для всех возможных значений переменной. Следовательно, решением будет любое значение переменной x, принадлежащее интервалу $[1; 2)$;

3) $x \in [2; +\infty)$: $x-1+x-2=1 \Rightarrow 2x=4 \Rightarrow x=2$, полученное значение переменной x принадлежит интервалу, значит, $x=2$.

Таким образом, решением данного уравнения является объединение следующих множеств решений: $\{\varnothing\} \cup [1; 2) \cup \{2\} = [1; 2]$.

4.2. Системы уравнений первого порядка

Система двух уравнений первой степени с двумя неизвестными имеет вид:

$$\begin{cases} ax+by=c; \\ a_1x+b_1y=c_1. \end{cases}$$

Решением системы будут все пары чисел (значение x и значение y), которые удовлетворяют обоим уравнениям системы.

Способы решения: способ подстановки, способ сложения или вычитания, графический способ.

Пример 4.4. Решить систему уравнений $\begin{cases} 8x-3y=46; \\ 5x+6y=13. \end{cases}$

1) Сначала решим это уравнение способом подстановки. Из первого уравнения выразим: $x=\dfrac{46+3y}{8}$. Подставим это выражение во второе уравнение системы $5 \cdot \dfrac{46+3y}{8}+6y=13$, откуда и находим, что $y=-2$. Теперь найденное значение переменной $y=-2$ подставляем в выражение

для x: $x=\dfrac{46+3\cdot(-2)}{8}$, получаем $x=5$. Решением системы будет пара чисел: $(5;-2)$.

2) Теперь решим эту же систему уравнений, применяя способ сложения или вычитания. Сначала уравняем абсолютные величины коэффициентов при y, умножив обе части первого уравнения на 2.

Получим $\begin{cases}16x-6y=92;\\ 5x+6y=13.\end{cases}$

Теперь сложим два уравнения системы, получим $21x=105$, откуда $x=5$. Подставив это значение в первое уравнение исходной системы, найдем y: $40-3y=46 \Rightarrow y=-2$.

3) Для решения системы графическим методом следует преобразовать уравнения следующим образом: $\begin{cases}y=\dfrac{8}{3}x-\dfrac{46}{3};\\ y=-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{13}{6}.\end{cases}$

Построив графики обеих прямых в одной координатной плоскости (рис. 4.1.), определим координаты точки их пересечения. Эта пара чисел и будет решением системы. Если графики не пересекаются, тогда корней у системы нет, если совпадают – решением будет вся координатная плоскость.

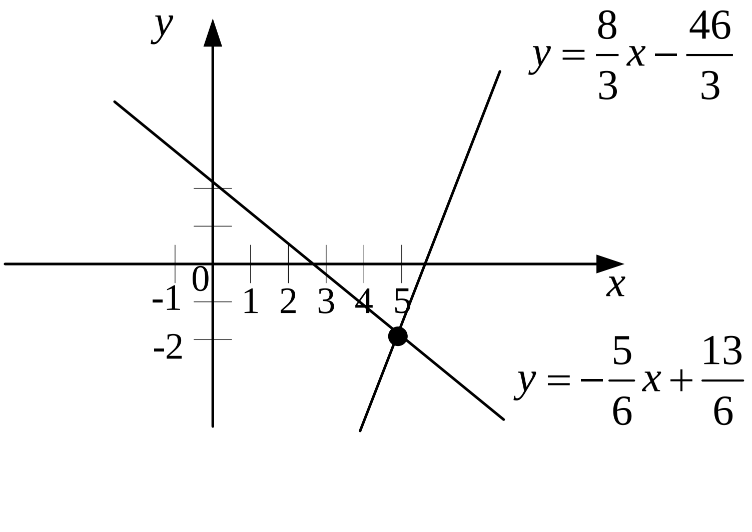


Рис. 4.1. **Графическое решение системы уравнений**

Как видим, точка пересечения графиков функций имеет координаты $(5; -2)$, что совпадает с решением системы уравнений предыдущими способами.

Упражнения

4.1. Является ли решением уравнения $7x+2y=35$ пара чисел $(0; 5)$; $(2; 6)$; $(5; 0)$; $(-3; 1)$?

4.2. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось верное высказывание.

а) Решением системы уравнений с двумя переменными называется ____________________переменных, обращающая каждое уравнение системы в ________.

б) Решить систему уравнений – значит найти _____________ или доказать, что ___________________.

в) При решении системы двух линейных уравнений с двумя переменными способом подстановки необходимо выразить из какого-нибудь уравнения системы ______________ , затем подставить полученное выражение вместо этой переменной в ________________и решить полученное уравнение с ______________переменной. Найти соответствующее значение ___________переменной.

4.3. Заполните пропуски.

Уравнение	$3x+7y=23$	$5x+9y=28$	$3x-4y=25$	$-2x+7y=43$
Выразить y через x	$y=\dfrac{23-3x}{7}$			
Выразить x через y	$x=\dfrac{23-7y}{3}$			

4.4. Решите систему способом подстановки и выполните проверку.

а) $\begin{cases} 2x-y=3, \\ 5x+7y=1. \end{cases}$

б) $\begin{cases} 7(x-3y)=-11, \\ x-4y=-2. \end{cases}$

в) $\begin{cases} 3x-y=-1, \\ -2x+3y=-11. \end{cases}$

г) $\begin{cases} 4(x+3y)+2(x-y)=28, \\ 2(y-x)+x+3y=2. \end{cases}$

4.5. Не выполняя построений, найдите координаты точки пересечения графиков функций:

а) $2x-y=13$ и $2x+3y=9$;
б) $2x+3y=10$ и $x-2y=-9$;
в) $x+2y=-2$ и $3x-y=8$;
г) $2x+y=-5$ и $x-3y=-6$.

4.6. Решите систему уравнений способами сложения и графическим. Выполните проверку:

а) $\begin{cases}2x+3y=13,\\4x-y=5.\end{cases}$
б) $\begin{cases}5x-4y=12,\\x-5y=-6.\end{cases}$
в) $\begin{cases}2x-3y=5,\\x-6y=-2.\end{cases}$

4.7. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки:

а) $(-4;2)$ и $(10;6)$;
б) $(2;-3)$ и $(-4;7)$;
в) $(0;2)$ и $(8;-6)$;
г) $(3;-5)$ и $(0;-6)$.

Тема 5. Квадратные уравнения и уравнения, которые приводятся к квадратным

Уравнение вида: $ax^2+bx+c=0$ (где a, b, c – *коэффициенты*) называется *полным квадратным уравнением*. Для его решения необходимо вычислить дискриминант $D=b^2-4ac$.

Если $D>0$, то уравнение имеет два различных корня ($x_1 \neq x_2$), которые вычисляются по формуле $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$.

Если $D=0$, то уравнение имеет один слившийся корень $(x_1=x_2)$.

Если $D<0$, то квадратное уравнение не имеет решений.

Пример 5.1. $x^2-6x+8=0$ – полное квадратное уравнение.

Если $a\neq 0$, $b=0$, $c\neq 0$, то уравнение $ax^2+bx+c=0$ принимает вид: $ax^2+c=0$ (*неполное квадратное уравнение*) и его решение: $x^2=-\dfrac{c}{a}$ $x=\pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$. Для того чтобы существовали корни, необходимо, чтобы выражение $\dfrac{-c}{a}$ было положительным ($\dfrac{-c}{a}\geq 0$).

Пример 5.2. $x^2+8=0$; $x^2=-8 \Rightarrow$ решений нет.

Пример 5.3. $x^2 - 4 = 0$; $x^2 = 4 \Rightarrow x_{1,2} = \pm\sqrt{4} = \pm 2$.

В случае если $c = 0, a \neq 0, b \neq 0$ уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ приобретает вид: $ax^2 + bx = 0$ (*неполное квадратное уравнение*).

Решение: $x(ax + b) = 0$, $x = 0,\ x = \dfrac{-b}{a}$.

Пример 5.4. $x^2 + 3x = 0$; $x(x+3) = 0 \Rightarrow x_1 = 0; x_2 = -3$.

Если $a = 0$, и $b \neq 0, c \neq 0$, то уравнение $ax^2 + bx + c = 0$ принимает вид: $bx + c = 0$, и оно не является квадратным (это *линейное уравнение*).

Пример 5.5. $6x + 8 = 0$ – линейное уравнение.

Пример 5.6. Решить уравнение $x^2 - 6x + 8 = 0$.

Здесь $a = 1, b = -6, c = 8$.

Вычислим дискриминант $D = 6^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = 36 - 32 = 4 > 0$. Следовательно, наше уравнение имеет два действительных корня.

Тогда $x_{1,2} = \dfrac{6 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow x_1 = \dfrac{8}{2} = 4;\ x_2 = \dfrac{4}{2} = 2$.

В случае, если $a \neq 0$, можно разделить обе части квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ на a и получить уравнение: $x^2 + px + q = 0$, где $\dfrac{b}{a} = p, \dfrac{c}{a} = q$.

Квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ называется *приведенным квадратным уравнением*.

Теорема Виета. Если приведенное квадратное уравнение $x^2 + px + q = 0$ имеет два корня, то их сумма равна коэффициенту p, взятому с противоположным знаком, а произведение равно свободному элементу. Или $x_1 + x_2 = -p,\ x_1 \cdot x_2 = q$.

Пример 5.7. Вычислим корни уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ с помощью теоремы Виета.

Учитывая то, что $x_1 + x_2 = 3,\ x_1 \cdot x_2 = 2$, получим $x_1 = 1,\ x_2 = 2$.

Пример 5.8. Составить квадратное уравнение, корни которого равны: $x_1 = 4,\ x_2 = -1,2$.

По теореме Виета: $x_1 + x_2 = -1,2 + 4 = 2,8$, $x_1 \cdot x_2 = -1,2 \cdot 4 = -4,8$. Тогда квадратное уравнение будет иметь вид: $x^2 - 2,8x - 4,8 = 0$.

Теорему Виета удобно использовать при разложении произвольного квадратного трехчлена на множители.

Известно, что $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$

Пример 5.9. Необходимо разложить на множители квадратный трехчлен $x^2 + 5x + 6$.

Решим соответствующее квадратное уравнение $x^2 + 5x + 6 = 0$. По теореме Виета корнями уравнения являются: $x_1 = -2$, $x_2 = -3$.

Тогда, согласно формуле $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, получим: $x^2 + 5x + 6 = (x+2)(x+3)$.

Биквадратное уравнение. Уравнение вида $ax^4 + bx^2 + c = 0$ называется *биквадратным*. Оно решается при помощи замены переменной: $x^2 = t \Rightarrow x^4 = t^2$.

Пример 5.10. Решить уравнение $x^4 + x^2 - 2 = 0$.

Пусть $x^2 = t \Rightarrow$ исходное уравнение принимает вид $t^2 + t - 2 = 0$. По теореме Виета: $t = -2$, $t = 1$. Вернемся к первоначальной переменной.

В случае $x^2 = -2$ решений нет, а в случае $x^2 = 1$, $x = \pm 1$.

Ответ: $x = \pm 1$.

Упражнения

5.1. С помощью формулы Виета решите уравнения:

а) $x^2 + 9x + 8 = 0$; в) $x^2 + 3x + 2 = 0$;

б) $x^2 + 9x + 20 = 0$; г) $x^2 - 15x + 36 = 0$.

5.2. Заполните пропуски.

№п/п	Уравнение	Первый коэффициент	Второй коэффициент	Свободный член
1	$3x^2 + 6x - 8 = 0$			

№п/п	Уравнение	Первый коэффициент	Второй коэффициент	Свободный член
2	$-5x^2+16x-18=0$			
3	$-3,2x^2+8=0$			
4	$\frac{3}{5}x^2-x=0$			
5	$6,5x^2-6x-8,4=0$			
6		5	-2	3

5.3. Заполните пропуски.

№п/п	Уравнение	Дискриминант	Количество корней
1	$x^2-10x-24=0$	$D=(-10)^2-4\cdot1\cdot(-24)=196>0$	2 корня
2	$x^2+8x-1=0$		
3	$3x^2-5x+9=0$		
4	$-\frac{3}{5}x^2-7x+9=0$		
5	$4x^2+5x+19=0$		
6	$-3x^2+5x-9=0$		

5.4. Решите квадратное уравнение:

а) $-2x^2+5x+3=0$;

б) $-5x^2+x+1=0$;

в) $x^2-5x+6=0$;

г) $x^2-5x+3=0$;

д) $x^2+7x+2=0$;

е) $25x^2+10x+1=0$.

5.5. Вставьте пропущенные слова так, чтобы получилось правильное высказывание.

а) Сумма корней приведенного квадратного уравнения равна ________________коэффициенту, взятому с ________________знаком, а произведение корней равно ______________________ .

б) Пусть $x^2+px+q=0$ приведенное квадратное уравнение, x_1 и x_2 – его корни. Тогда $x_1+x_2=$_______, $x_1\cdot x_2=$_______.

5.6. Не решая квадратное уравнение, заполните пропуски.

№п/п	Уравнение	$x_1 + x_2$	$x_1 \cdot x_2$
1	$x^2 + 7x - 10 = 0$		
2	$x^2 - 7x + 10 = 0$		
3	$x^2 - 18x - 91 = 0$		
4	$x^2 - 16x + 11 = 0$		

5.7. Решите уравнения:

а) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$;

б) $t^4 - 10t + 1 = 0$;

в) $k^4 - 13k^2 + 36 = 0$;

г) $3y^4 + 41y^2 + 5 = 0$.

Тема 6. Алгебраические неравенства

Два выражения, числовые или буквенные, соединенные знаком «$>$», «$<$», «$\le$» или «$\ge$», образуют *неравенство* (буквенное или числовое).

Решить неравенство – значит указать границы, в которых должны заключаться значения неизвестных величин, чтобы неравенство было верным.

Решить систему неравенств – значит указать границы, в которых должны заключаться значения неизвестных величин, чтобы все неравенства были верными.

Основные свойства неравенств:

1) если $a > b$, то $b < a$;
2) если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$;
3) если $a > b$, то $a + c > b + c$;
4) если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$;
5) если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$;
6) если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$;
7) если $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ и $d > 0$, причем $a > b$ и $c > d$, то $ac > bd$;
8) если $a > b$ и $c < d$, то $a - c > b - d$.
9) если $a > b > 0$, то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

10) если $a > b > 0$, то для любого $n \in N$ выполняется неравенство $a^n > b^n$.

Пользуясь данными свойствами, легко находить *решение линейных неравенств с одной переменной.*

Пример 6.1. Решите неравенство $5(x+1) - 9x - 3 > -6(x+2)$.

$$5(x+1) - 9x - 3 > -6(x+2) \Leftrightarrow 5x + 5 - 9x - 3 > -6x - 12 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow 5x - 9x + 6x > -12 - 5 + 3 \Leftrightarrow 2x > -14 \Leftrightarrow \underline{x > -7}$ – решение неравенства.

Чтобы решить *систему линейных неравенств с одной переменной*, нужно решить каждое из неравенств и в качестве решения системы взять пересечение множеств решений каждого из уравнений.

Пример 6.2. Решите систему неравенств:

$$\begin{cases} 5(x+1) - 9x - 3 > -6(x+2); \\ 3(3+2x) < 7x - 2(x-8). \end{cases}$$

Итак, решение первого неравенства $x > -7$.

Решим второе неравенство:

$$9 + 6x < 7x - 2x + 16 \Leftrightarrow 9 - 16 < 7x - 2x - 6x \Leftrightarrow -7 < -x.$$

Теперь умножим обе части неравенства на -1, изменив знак неравенства на противоположный (см. свойство 5); получим $7 > x$, то есть решением будет $x < 7$. Для системы неравенств решением будут те значения переменной, которые принадлежат пересечению решений двух неравенств: $x > -7$ и $x < 7 \Leftrightarrow x \in (-7; 7)$ – решение системы.

Для решения *квадратных неравенств* вида $ax^2 + bx + c \le 0$ (знак неравенства может быть любой из возможных) необходимо найти $D = b^2 - 4ac$.

Если $D < 0$ и $a > 0$, то $ax^2 + bx + c > 0$ для любого значения x, решение неравенства $ax^2 + bx + c \le 0$ – пустое множество.

Если $D < 0$ и $a < 0$, то $ax^2 + bx + c < 0$ для любого значения x решением неравенства $ax^2 + bx + c \le 0$ будет множество R. Например, неравенство $3x^2 - 2x + 12 \ge 0$ решением имеет $x \in \boldsymbol{R}$, так как $a > 0$ и $D = 4 - 4 \cdot 3 \cdot 12 < 0$.

Если же $D>0$, то $ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$, где x_1, x_2 – корни уравнения $ax^2+bx+c=0$.

Далее *методом интервалов* находим решение неравенства. Для этого разобьем числовую ось на три интервала точками x_1, x_2 . На каждом из интервалов выбираем произвольную точку x_0, находим знак (плюс или минус) выражения $a\left(x_0-x_1\right)\left(x_0-x_2\right)$ и делаем вывод, что на данном интервале ax^2+bx+c принимает значения такого же знака. У нас будет несколько интервалов с указанием знака выражения ax^2+bx+c. В качестве решения выпишем объединение интервалов со знаком «+», если была поставлена задача $ax^2+bx+c\geq 0$, или – со знаком «-», если $ax^2+bx+c\leq 0$.

Пример 6.3. Решите неравенство $x^2-3x+2>0$.

Разложим левую часть неравенства на множители, получим: $x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left(x-2\right)\left(x-1\right)>0$. Учитывая, что неравенство строгое, точки $x_1=2$, $x_2=1$ не включаются в интервалы: $x\in\left(-\infty;1\right)\cup\left(2;+\infty\right)$ (рис. 6.1).

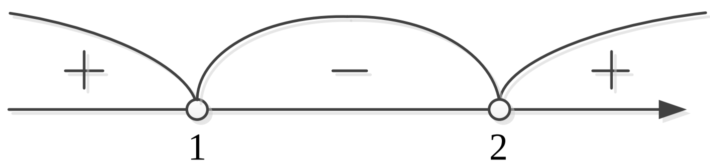


Рис. 6.1. **Метод интервалов**

Для решения дробно-рациональных неравенств нужно помнить, что «нули» знаменателя нужно исключить.

Пример 6.4. Решите неравенство $\dfrac{\left(x-3\right)\cdot\left(x-2\right)}{x-4}>0$.

Заменяем неравенство уравнением и решаем его:

$$\frac{\left(x-3\right)\cdot\left(x-2\right)}{x-4}=0.$$

Точки $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ являются корнями данного уравнения, а точка $x_3 = 4$ исключается, так как в ней знаменатель равен нулю и дробь не существует. Отмечаем все три точки на координатной прямой (рис. 6.2).

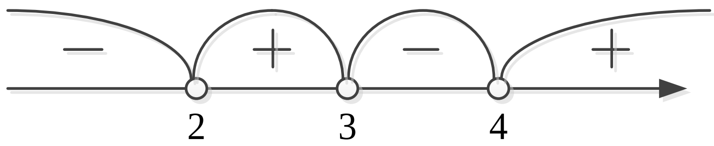


Рис. 6.2. **Метод интервалов**

Поскольку исходное выражение должно быть больше нуля, нас интересуют плюсы. Таким образом, решение неравенства запишется в виде: $x \in (2;\,3) \cup (4;\,+\infty)$.

Упражнения

6.1. Известно, что $a > b$. Какое из следующих неравенств является неверным:

а) $a + 5 > b + 5$;

б) $-3a < -3b$;

в) $a - 6 < b - 6$;

г) $\frac{a}{5} > \frac{b}{5}$;

д) $-a < -b$;

е) $\frac{a}{9} < \frac{b}{9}$?

6.2. С помощью знаков неравенств запишите следующие утверждения:

а) k – положительное число;

б) y – отрицательное число;

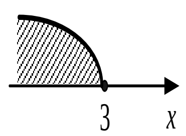
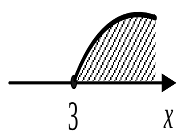
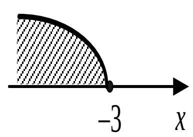
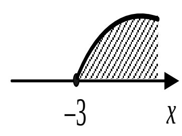
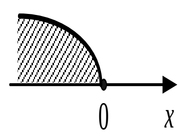
в) x^2 – неотрицательное число;

г) $-b^6$ – неположительное число;

д) $a^2 + 6$ – положительное число;

е) $-5 - m^4$ – отрицательное число.

6.3. На каком из приведенных рисунков изображено множество решений неравенства $-x \geq 3$?

А	Б	В	Г	Д
				

6.4. Решите неравенства и изобразите множество его решений на числовой оси:

а) $9x+8<17$; в) $5-3x<20$;

б) $3x-4>11$; г) $16-5x>21$.

6.5. Найдите наибольшее целое число, являющееся решением неравенства:

а) $2(x+1)-1>7+8x$; в) $5-6(x-1)>2(5-x)$;

б) $6(2-x)>x-2$; г) $-(8t-12)-2(t-3)>0$.

6.6. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x-0{,}7>0, \\ -6x<12; \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4-2x>1, \\ 3x+4<13; \end{cases}$

б) $\begin{cases} 3-x\le 0, \\ x-5\le 0; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 12-4x\le 3, \\ 6x-2\le 20. \end{cases}$

6.7. Решите двойное неравенство:

а) $1<2x-1<5$; в) $-7<5x+3\le 11$;

б) $-11\le 1-3x<-2$; г) $1<7-4x<6$.

6.8. Решите неравенство:

а) $2x^2-9x+7>0$; в) $x^2-19x+40<0$;

б) $3x^2+8x+3>0$; г) $6x^2-5x-4<0$.

6.9. Найдите область определения функции:

а) $y=\dfrac{\sqrt{15x^2+x-3}}{x-8}$; б) $y=\dfrac{\sqrt{x^2-36}}{2x+16}$

6.10. Решите систему неравенств:

а) $\begin{cases} x^2-49\le 0, \\ 6x+12>3x; \end{cases}$ б) $\begin{cases} x^2-10x\le -21, \\ 4(x-1)<17-x. \end{cases}$

6.11. Решите неравенство методом интервалов:

а) $(x-4)(x+2)(x-8)<0$; в) $x(9-x)(x+16)(x+24)>0$;

б) $(m-1)m(m+7)(m+8)>0$; г) $-(2-x)(x+4)(x-11)>0$.

6.12. Найдите множество решений неравенства:

а) $\dfrac{3x-1}{4x+2}\ge 0$; в) $\dfrac{(x-2)(x^2+12)(x^2-8x)}{2x-14}\le 0$;

б) $\dfrac{8t-6}{t+4}\le 3$; г) $\dfrac{(6x+1)(x^4+10)(x^2-x)}{6x^2-24}\ge 0$.

Тема 7. Прогрессии

7.1. Числовая последовательность

Числовая последовательность – это числовая функция, областью определения которой является множество натуральных чисел.

Члены последовательности – это значения функции, которые получаются при подстановке натуральных значений аргумента.

Пример 7.1. Найдем несколько членов последовательности, заданной формулой $a = 2n - 1$.

$n = 1, \quad a = 2 \cdot 1 - 1 = 1,$

$n = 2, \quad a = 2 \cdot 2 - 1 = 3,$

$n = 5, \quad a = 2 \cdot 5 - 1 = 9.$

Членам последовательности присваивают номера, соответствующие числовому значению аргумента n.

a_n – *общий член последовательности,* а последовательность обозначается (a_n).

Бывают *конечные* и *бесконечные* числовые последовательности.

Пример 7.2. Формула $b_n = \dfrac{2n}{n+1}$, $n \in N$ задает числовую последовательность: $\dfrac{2}{2}; \dfrac{4}{3}; \dfrac{6}{4}; \dfrac{8}{5}; \ldots; \dfrac{200}{101}; \ldots$. Любой член последовательности b_n меньше числа 2.

Пример 7.3. Формула $c_n = \dfrac{2n+1}{n}$, $n \in N$ задает числовую последовательность: $3; \dfrac{5}{2}; \dfrac{7}{3}; \dfrac{9}{5}; \ldots; \dfrac{201}{100}; \ldots$. Любой член последовательности c_n больше числа 2.

Пример 7.4. Формула $p_n = 7 - 2n$, $n \in N$ задает числовую последовательность: $5; 3; 1; -1; \ldots$.

Бывают *возрастающие и убывающие* числовые последовательности, они еще называются *монотонными*.

Так, последовательность (c_n) возрастающая, а (b_n) и (p_n) – убывающие.

Упражнения

7.1. а) Какой член последовательности (a_n) следует за указанным членом:

a_{10}, ______________; a_n, ______________; a_{n+7}, ______________?

б) Какой член последовательности (b_n) предшествует указанному члену:

______________, b_{12}; ______________, b_{29}; ______________, b_{n+6}?

в) Какие члены последовательности (c_n) заключены между указанными членами:

c_{11}, ____________________, c_{15}; c_n, ____________________, c_{n+4}?

7.2. Последовательность задана формулой $a_n = n^2 + 3n + 1$. Найдите указанные члены последовательности:

$a_5 =$ ____

$a_{11} =$ ____

$a_{20} =$ ____.

7.3. Заполните пропуски, если $a_n = \dfrac{4}{n}$:

n	1	2	3	4	5	6
a_n						

7.2. Арифметическая прогрессия

Арифметическая прогрессия – это числовая последовательность, в которой каждое число (*член прогрессии*), начиная со второго, получается из предыдущего добавлением к нему постоянного числа (*разность прогрессии*) $a_n = a_{n-1} + d$.

Общий член арифметической прогрессии может быть найден по формуле: $a_n = a_1 + (n-1)d$ *где* a_1 – первый член прогрессии, d – разность прогрессии.

Если $d > 0$, прогрессия является возрастающей, если $d < 0$ – убывающей.

Сумма n первых членов арифметической прогрессии $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ находится по формулам:

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n \text{ или } S_n = \frac{2a_1 + d(n-1)}{2} \cdot n.$$

Для любого элемента арифметической прогрессии выполняется условие:

$$a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n+1}}{2}, \ n \geq 2.$$

Пример 7.5. Найдите седьмой член арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = 9$, $d = -2$.

Дано: $a_1 = 9$; $d = -2$. Найти: a_7.	$a_7 = a_1 + 6 \cdot d = 9 + 6 \cdot (-2) = -3$. Таким образом $a_7 = -3$. Ответ: $a_7 = -3$.

Пример 7.6. Найдите первый член и разницу арифметической прогрессии (a_n), если $a_6 = 18$ и $a_{11} = 30$.

Дано: $a_6 = 18$; $a_{11} = 30$ Найти: a_1 и d.	$a_{11} - a_6 = (a_1 + 10d) - (a_1 + 5d) = 5d$. $30 - 18 = 5d$, следовательно $d = 2,4$. $a_6 = a_1 + 5d$, тогда $a_1 = a_6 - 5d = 18 - 5 \cdot 2,4 = 6$. Таким образом $a_1 = 6$.

Ответ: $a_1 = 6$, $d = 2,4$.

Пример 7.7. Найдите сумму первых 13 членов арифметической прогрессии (a_n), если $a_1 = -4$, $d = 4$.

Дано: $a_1 = -4$; $d = 4$. Найти: S_{13}.	$S_{13} = \frac{2a_1 + d(13-1)}{2} \cdot 13 = \frac{2 \cdot (-4) + 4 \cdot 12}{2} \cdot 13 =$ $= \frac{-8 + 48}{2} \cdot 13 = 260$.

Ответ: $S_{13} = 260$.

Пример 7.8. Найдите сумму первых ста натуральных чисел.

Дано:	
$a_1 = 1$; $a_{100} = 100$. Найти: S_{100}.	$S_{100} = \dfrac{a_1 + a_{100}}{2} \cdot 100 = \dfrac{1+100}{2} \cdot 100 = 101 \cdot 50 = 5050.$

Ответ: $S_{100} = 5050$.

Пример 7.9. Сколько ударов сделают часы за сутки, если они выбивают только количество целых часов от 1 до 12?

Дано:	
$a_1 = 1$; $a_{12} = 12$; $n = 12$ Найти: $S = 2 \cdot S_{12}$.	$S = 2 \cdot S_{12} = 2 \cdot \dfrac{1+12}{2} \cdot 12 = 2 \cdot 13 \cdot 6 = 156.$

Ответ: Часы за сутки сделают 156 ударов.

Упражнения

7.4. Какие из последовательностей являются арифметическими прогрессиями:

а) $2, 5, 8, 11, \ldots$;   в) $2, 6, 12, 24, \ldots$;

б) $7, 4, 1, -2, \ldots$;   г) $1, 2, 3, 5, 8, \ldots$?

7.5. Запишите пять первых членов арифметической прогрессии, если:

а) $a_1 = 5$, $d = 3$
______________________________;

б) $a_1 = 1{,}4$, $d = 0{,}5$
______________________________;

в) $a_1 = 0{,}3$, $d = 0{,}2$
______________________________;

г) $a_1 = 4$, $d = -2$
______________________________;

д) $a_1 = 0{,}6$, $d = -0{,}2$
______________________________;

е) $a_1 = 4\dfrac{3}{4}$, $d = -1\dfrac{1}{2}$
______________________________.

7.6. В арифметической прогрессии (a_n): $a_1 = 3$, $d = 2$. Найдите порядковый номер её члена, который равен:

а) 17;   б) 91.

7.7. Найдите пятый и десятый члены арифметической прогрессии $\frac{1}{7}, -1, \ \dots$.

7.8. В арифметической прогрессии сумма второго и четвертого членов равны 46, а сумма третьего и седьмого членов равна 58. Найдите третий член и разность прогрессии.

7.9. В арифметической прогрессии $a_1 = -3$, $d = 7$. Найдите сумму первых двенадцати членов этой прогрессии.

7.10. Найдите сумму первых девяти членов арифметической прогрессии (a_n), в которой $a_1 = -11$, $a_7 = 7$.

7.11. Найдите сумму первых восьми членов арифметической прогрессии $-19, -16, -13, \dots$. Проверьте ответ, выписав указанные члены прогрессии и сложив их.

7.12. Найдите сумму всех двухзначных чисел, кратных 6.

7.13. Найдите первый член и разность арифметической прогрессии, в которой $S_4 = 56$ а $S_9 = 36$.

7.3. Геометрическая прогрессия

Геометрическая прогрессия – это числовая последовательность, в которой каждое последующее число, начиная со второго, получается из предыдущего умножением его на определенное число (*знаменатель прогрессии*) $b_n = b_{n-1}q$.

Общий член геометрической прогрессии может быть найден по формуле: $b_n = b_1 q^{n-1}$, *где* b_1 – первый член прогрессии, q – знаменатель прогрессии.

Если $b_1 > 0$ и $q > 1$, прогрессия является возрастающей последовательностью; если $0 < q < 1$, – убывающей последовательностью, а при $q < 0$, – знакочередующейся.

Свойство элементов геометрической прогрессии:

$$|b_n| = \sqrt{b_{n-1} b_{n+1}},$$

то есть каждый член равен среднему геометрическому его соседей.

Сумма n первых членов геометрической прогрессии $S_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ находится по формулам:

$$S_n = \frac{b_1 - b_n q}{1-q} \text{ или } S_n = \frac{b_1\left(1-q^n\right)}{1-q}.$$

Бесконечно убывающей геометрической прогрессией называется геометрическая прогрессия $\left(b_n\right)$, в которой $|q| < 1$.

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогрессии – это предел суммы ее первых n членов при $n \to \infty$ Она вычисляется по формуле:

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \frac{b_1}{1-q}.$$

Пример 7.10. Вычислите сумму $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$

Данная сумма представляет собой сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии, в которой $b_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$.

По формуле получим: $S = \dfrac{b_1}{1-q} = \dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1.$

Таким образом: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots = 1.$

Пример 7.11. Найдите шестой член геометрической прогрессии, первый член которой равен 8 , а знаменатель $\frac{1}{2}$.

Дано: $b_1 = 8$; $q = \frac{1}{2}$. Найти: b_6.	$b_6 = b_1 \cdot q^5$, тогда подставив заданные по условию значения b_1 и q, получаем $b_6 = 8 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = 2^3 \cdot \frac{1}{2^5} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$.

Ответ: $b_6 = \frac{1}{4}$.

Пример 7.12. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_4 = 0{,}5$, $q = -0{,}1$.

Дано:
$b_4 = 0{,}5$;
$q = -0{,}1$.
Найти: b_1.

$b_4 = b_1 q^3$, тогда $b_1 = \dfrac{b_4}{q^3} = \dfrac{0{,}5}{(-0{,}1)^3} = \dfrac{0{,}5}{-0{,}001} = 500$.

Ответ: $b_1 = 500$.

Пример 7.13. Второй член геометрической прогрессии равен $\dfrac{1}{27}$, а пятый 1. Найдите первый член и знаменатель прогрессии.

Дано:
$b_2 = \dfrac{1}{27}$;
$b_5 = 1$
Найти:
b_1 и q.

$b_2 = b_1 q$, $b_5 = b_1 q^4$, найдем отношение пятого члена прогрессии ко второму:

$$\frac{b_5}{b_2} = \frac{b_1 q^4}{b_1 q} = q^3.$$

Тогда, подставив данные из условия задачи, получаем:

$$\frac{1}{\frac{1}{27}} = 27 = q^3 \Rightarrow q = 3.$$

Найдем b_1.

Так как $b_2 = b_1 q$, то $b_1 = \dfrac{b_2}{q} = \dfrac{\frac{1}{27}}{3} = \dfrac{1}{81}$.

Ответ: $b_1 = \dfrac{1}{81}$, $q = 3$.

Пример 7.14. Найдите четвертый член геометрической прогрессии (b_n), если первый член равен – 6, а седьмой член равен – 384.

Дано:
$b_1 = 6$;
$b_7 = 384$.
Найти:
b_4.

$b_7 = b_1 q^6$, найдем отношение седьмого члена прогрессии к первому:

$$\frac{b_7}{b_1} = \frac{b_1 q^6}{b_1} = q^6.$$

Тогда, подставив данные из условия задачи, получаем:

$$\frac{384}{6} = 64 = q^6 \Rightarrow q = 2.$$

Найдем b_4: $b_4 = b_1 q^3 = 6 \cdot 2^3 = 6 \cdot 8 = 48$.

Ответ: $b_4 = 48$.

Пример 7.15. Найдите сумму первых шести членов геометрической прогрессии: $4, 2, 1, \ldots$.

Дано:

$b_1 = 4$;

$q = \frac{1}{2}$.

Найти:

S_6.

Так как $q = \frac{1}{2} < 1$, то заданная геометрическая прогрессия является бесконечно убывающей. Поэтому сумма ее первых шести членов может быть найдена с помощью формулы: $S_n = \frac{b_1\left(1 - q^n\right)}{1 - q}$.

Подставив данные из условия задачи, получаем:

$$S_6 = \frac{4 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^6\right)}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\left(4 \cdot \frac{63}{64}\right)}{\frac{1}{2}} = \frac{63 \cdot 2}{16} = \frac{63}{8}$$

Ответ: $S_6 = \frac{63}{8}$.

Упражнения

7.14. Какие из последовательностей являются геометрическими прогрессиями:

а) $1, 4, 7, 10, \ldots$;

б) $1, 2, 4, 8, \ldots$;

в) $1, 3, 5, 7, \ldots$;

г) $-2, -4, -8, \ldots$?

7.15. Запишите формулу n-го члена геометрической прогрессии:

а) $3, 1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \ldots$;

б) $2, 4, 8, 16, \ldots$;

в) $4, -1, \frac{1}{4}, \ldots$;

г) $2, \sqrt{2}, 1, \ldots$.

7.16. В геометрической прогрессии (b_n) первый член равен 12, а знаменатель равен 2. Найдите третий и пятый члены прогрессии:

7.17. Указаны два члена геометрической прогрессии (b_n). Впишите три предшествующих и три последующих члена этой прогрессии.

$$\_\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\_,\ 12,\ 32,\ \_\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\_,\ \_\_\_\_\_.$$

7.18. Найдите первый член геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_4 = 9$, $q = \dfrac{1}{3}$.

7.19. Найдите знаменатель геометрической прогрессии (b_n), если $b_3 = 11$, $b_6 = 88$.

7.20. Найдите первый член и знаменатель геометрической прогрессии, в которой разность между четвертым и вторым членами равна 96, а разность между пятым и третьим членами равна 288.

7.21. Найдите сумму первых семи членов геометрической прогрессии $3, -6, 12, \ldots$.

7.22. Найдите сумму первых восьми членов геометрической прогрессии (b_n), в которой $b_1 = \dfrac{1}{8}$, $b_8 = 16$.

7.23. Найдите первый член геометрической прогрессии, знаменатель которой равен -2, а сумма первых пяти членов равна -66.

7.24. В геометрической прогрессии разность седьмого и пятого члена равна 48 и сумма шестого и пятого членов также равна 48. Найдите число n членов этой прогрессии, если известно, что $S_n = 1023$.

7.25. Найдите сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии: а) $2, 1, 0,5, \ldots$; б) $1, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{4}{9}, \ldots$.

Тема 8. Показательная и логарифмическая функции

8.1. Показательная функция

Функция $y = a^x$, где $a > 0, a \neq 1$ называется *показательной*, a – *основание*, x – *показатель*.

Пример 8.1. $y = 2^x$, $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ – показательные функции (рис. 8.1).

Так если $a > 1$, то функция $y = a^x$ возрастает при любом значении аргумента всей числовой оси (рис. 8.1).

Если $0 < a < 1$, то функция $y = a^x$ убывает при любом значении аргумента всей числовой оси (рис. 8.1).

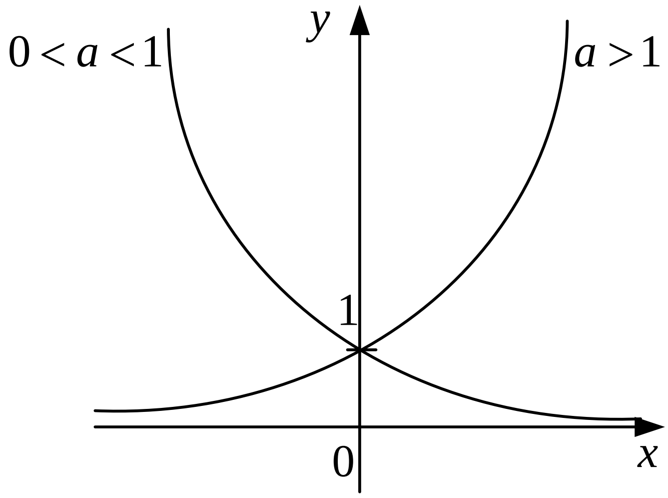


Рис. 8.1. **График показательной функции $y = a^x$**

Свойства показательной функции:

1) область определения функции $y = a^x$ - множество всех действительных чисел, или $-\infty < x < \infty$;

2) область значений $y \in (0; +\infty)$;

3) функция $y = a^x$ положительна при любом значении аргумента, или $a^x > 0$. График произвольной показательной функции всегда размещен в верхней полуплоскости;

4) если $x = 0$, то $a^x = 1$.

Следовательно, график произвольной показательной функции всегда проходит через точку $x = 0$, $y = 1$.

8.2. Показательные уравнения и неравенства. Способы решения

Для решения показательных уравнений необходимо воспользоваться следующим правилом: уравнение $a^{f(x)} = a^{\varphi(x)}$ при $a > 0, a \neq 1$ равносильно уравнению $f(x) = \varphi(x)$.

Рассмотрим наиболее распространенные *способы решения показательных неравенств*:

1) способ приведения к общему основанию:

а) $2^x = 64$, так как $64 = 2^6$ получим: $2^x = 2^6 \Rightarrow x = 6$.

$a^{(x-1)(x+2)} = 1$ учитывая, что $1 = a^0$, получим $(x-1)(x+2) = 0$, откуда $x_1 = 1,\ x_2 = -2, \Rightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -2;$

2) способ приведения к общему показателю: $2^x \cdot 5^x = 0{,}01;$ $(2 \cdot 5)^x = 10^x$, $0{,}01 = 10^{-2}$; $10^x = 10^{-2} \Rightarrow x = -2$;

3) способ вынесения общего множителя за скобки:

$2^{x+2} - 2^x = 96;\ 2^x \cdot 2^2 - 2^x = 96;\ 2^x(4-1) = 96;\ 2^x \cdot 3 = 96;\ 2^x = 32;$ $2^x = 2^5 \Rightarrow x = 5;$

4) способ сведения показательного уравнения к квадратному (к виду $ax^2 + bx + c = 0$): $4^x + 2^x = 72$; $2^{2x} + 2^x - 72 = 0$.

Пусть $2^x = t$, тогда $2^{2x} = t^2$.

Показательное уравнение $4^x + 2^x = 72$ запишется в следующем виде:

$$t^2 + t - 27 = 0,\ D = 1^2 - 4 \cdot (-72) = 17^2;\ t_1 = \frac{-1-17}{2} = -9;\ t_2 = \frac{-1+17}{2} = 8.$$

Вернемся к исходным переменным.

Если $2^x = -9$, то решений нет.

Если $2^x = 8$, то $x = 3$.

Таким образом $x = 3$.

Показательные неравенства. Для удобства решения показательных неравенств рекомендуем воспользоваться следующим правилом: неравенство $a^{f(x)} > a^{\varphi(x)}$ равносильно совокупности двух систем:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1;\\ f(x)>\varphi(x);\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1;\\ f(x)<\varphi(x).\end{cases}\end{array}\right.$$

Пример 8.2. $2^x > \frac{1}{2}$; $2^x > 2^{-1}$; так как $2>1$, то $x>-1$.

Пример 8.3. $0{,}5^{2x}<1$; $0{,}5^{2x}<0{,}5^0$; так как $0<0{,}5<1$, то $2x>0$, $x>0$.

Пример 8.4. $2^{x^2} > \left(\frac{1}{2}\right)^{2x-3}$; $2^{x^2} > 2^{-(2x-3)}$; $x^2 > -(2x-3)$; тогда $x^2+(2x-3)>0$; $x_1=3$; $x_2=-1$.

Так как $x^2+2x-3=(x-3)(x+1)$, то решая неравенство $(x-3)(x+1)>0$, получаем: $x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$.

8.3. Логарифмы. Логарифмическая функция

Логарифмом положительного числа N по основанию a $(a>0, a\neq 1)$ называется такое число b, что $a^b=N$.

Пример 8.5. $\log_2 4$ – логарифм 4 по основанию 2; $\log_{11} 32$ – логарифм 32 по основанию 11.

Существуют два вида логарифмов, которые записываются определенным образом: $\log_e x = \ln x$ – логарифм натуральный; $\log_{10} x = \lg x$ – логарифм десятичный.

Для решения математических задач, которые включают в себя логарифмические выражения, используют основные свойства логарифмов.

Основные свойства логарифмов:

1) $a^{\log_a N}=N$ (основное логарифмическое тождество);

2) $\log_a N^p = p\log_a N$;

3) $\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N$ и $\log_a \dfrac{M}{N} = \log_a M - \log_a N$;

4) $\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}$, при $b > 0$, $b \neq 1$.

Логарифмической функцией называется функция вида $y = \log_a x$, где $a > 0, a \neq 1$ (рис. 8.2).

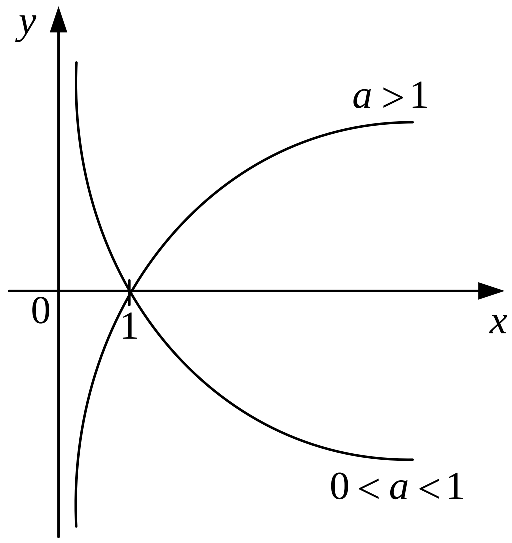


Рис. 8.2. **График логарифмической функции** $\boldsymbol{y = \log_a x}$

Свойства логарифмической функции:

1) область значений $y \in (-\infty; +\infty)$;

2) область определения $x \in (0; +\infty)$;

3) если $a > 1$, то функция возрастает на всей области определения, если $a < 1$, то функция убывает.

Для решения логарифмических уравнений и неравенств используем следующее правило:

а) уравнение $\log_a f(x) = \log_a \varphi(x)$, где $a > 0, a \neq 1$ равносильно системе: $\begin{cases} f(x) = \varphi(x); \\ f(x) > 0; \\ \varphi(x) > 0. \end{cases}$

б) неравенство $\log_a f(x) > \log_a \varphi(x)$ равносильно совокупности двух систем: $\begin{cases} a > 1; \\ f(x) > \varphi(x); \\ \varphi(x) > 0; \end{cases}$ и $\begin{cases} 0 < a < 1; \\ f(x) < \varphi(x); \\ f(x) > 0. \end{cases}$

Пример 8.6. Необходимо прологарифмировать выражение $x = 5ac$ $(a > 0, c > 0)$.

Используя свойства логарифма, получим: $\lg x = \lg 5 + \lg a + \lg c$.

Обратным действием по отношению к логарифмированию является *потенцирование*.

Пример 8.7. Пропотенцировать выражение $\lg x = 5\lg a - 3\lg c$; $\lg x = \lg a^5 - \lg c^3$; $\lg x = \lg \frac{a^5}{c^3}$; тогда $x = \frac{a^5}{c^3}$.

8.4. Решение логарифмических уравнений и неравенств

Рассмотрим на примерах методы решения логарифмических уравнений и неравенств.

Пример 8.8. Решить уравнение: $\log_{5-x}(2x^2 - 5x + 31) = 2$.

Данное уравнение равносильно следующей системе:

$$\begin{cases} 2x^2 - 5x + 31 = (5-x)^2, \\ 5\text{-}x > 0, \\ 5\text{-}x \neq 1. \end{cases}$$

Решая ее, получаем:

$$\begin{cases} x^2 + 5x + 6 = 0, \\ x < 5, \\ x \neq 4, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2, \quad x_2 = -3; \\ x < 5, \\ x \neq 4, \end{cases} \Rightarrow x_1 = -2,\ x_2 = -3.$$

Пример 8.9. Решите неравенство: $\log_{\frac{1}{2}}(3x-4)<\log_{\frac{1}{2}}(x-2)$.

Данное неравенство равносильно системе:

$$\begin{cases} x-2>0, \\ 3x-4>0, \\ 3x-4>x-2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>2, \\ x>\dfrac{4}{3}, \end{cases} \Rightarrow x>2.$$

Упражнения

8.1. Сравните значения выражений:

а) $3^{0,5}$ и $3^{\frac{1}{3}}$;

б) $\left(\dfrac{4}{9}\right)^5$ и $\left(\dfrac{4}{9}\right)^7$;

в) $\left(\sqrt{3}\right)^3$ и $\left(\sqrt{3}\right)^4$;

г) $\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^2$ и $\left(\dfrac{\pi}{5}\right)^3$;

д) $\left(\sqrt{3}\right)^{-3}$ и $\left(\sqrt{3}\right)^{-4}$;

е) 1 и 5^0.

8.2. Решите уравнения:

а) $3^x=81$;

б) $8^x=64$;

в) $9^{4x-3}=9^x$;

г) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\cdot\left(\dfrac{9}{8}\right)^x=\dfrac{16}{9}$;

д) $11^{x^2-4x-21}=1$;

е) $\left(5^{x-2}\right)^{x-4}=\dfrac{1}{5}$;

ж) $2^x\cdot 7^x=\left(14^{x-1}\right)^5$;

з) $\sqrt[3]{8^{x^2-1}}=4^x\cdot 0{,}25$

8.3. Решите уравнения:

а) $5^x+5^{x+2}=130$;

б) $2\cdot 3^{2x+1}-4\cdot 3^{2x-2}-25\cdot 3^{2x-3}=375$;

в) $2^{3\sqrt{x}}+3\cdot 2^{3\sqrt{x}-1}=20$;

г) $4^x-3^{x-0,5}=3^{x+0,5}-2^{2x-1}$.

8.4. Решите уравнения:

а) $5^{2x}-30\cdot 5^x+125=0$;

б) $4^x-10\cdot 2^{x-1}-24=0$;

в) $3\cdot 4^x+2\cdot 9^x=5\cdot 6^x$;

г) $4^x-2\cdot 5^{2x}+10^x=0$.

8.5. При каких значениях k

а) уравнение $25^x-(k-4)\cdot 5^x-2k^2+10k-12=0$ не имеет действительных корней;

б) уравнение $4^x-(k+3)\cdot 2^x+4k-4=0$ имеет один действительный корень?

8.6. Решите неравенства:

а) $4^x<\dfrac{1}{64}$;

б) $\left(\dfrac{2}{5}\right)^{x^2}\ge\left(\dfrac{5}{2}\right)^{4x-21}$;

в) $2\cdot 16^{\frac{1}{x}}\le\left(\dfrac{1}{2}\right)^{1-x}$;

г) $(0,1)^x>0,0001$.

8.7. Решите неравенства:

а) $2^{x+2}-2^{x+1}+2^{x-1}-2^{x-2}\le 9$;

б) $7^x-2^{x+2}<5\cdot 7^{x-1}-2^{x-1}$;

в) $3^{2x+1}-28\cdot 3^x+9\le 0$;

г) $9^{x+1}+26\cdot 3^x-3<0$.

8.8. Найдите значение выражения:

а) $\log_{\frac{1}{3}}\log_2 512$;

б) $\log_{64}\sqrt[3]{2}$;

в) $\log_2 32-\log_{21}\sqrt{21}-3\log_4\dfrac{1}{64}$;

г) $\log_{18}36+\log_{18}9$;

д) $\log_{13}26-\log_{13}2$;

е) $\dfrac{\lg 27}{\lg 3}$.

8.9. Найдите область определения функции:

а) $\log_{0,2}(2x-7)$;

б) $\lg\left(4-x^2\right)$;

в) $\log_{x-1}(5-x)$;

г) $\lg(1+\sin x)$.

8.10. Найдите значения выражения:

а) $\log_{\sqrt{8}}4\sqrt{2}$;

б) $\log_{\sqrt{5}}25\sqrt{5}$;

в) $\log_4\log_9 81$;

г) $\log_3\log_4 64$;

д) $4^{\log_2 5+2\log_{0,25}3}$;

е) $3^{\log_9 16-\log_{27}8}$;

ж) $\log_5 50-\log_5 2$;

з) $\log_5^4\left(\sqrt{5}\right)$.

8.11. Сравните с нулем:

а) $\log_8 10$; б) $\log_{0,6}0,4$; в) $\log_2 0,36$; г) $\log_{0,33}10$.

.

8.12. Найдите область определения функции:

а) $y=\log_7(3x+5)$;

б) $y=\log_{0,2}(3-2x-x^2)$;

в) $y=\lg(5-x^2)$;

г) $y=\ln(1+\sin x)$.

8.13. Решите уравнение:

а) $3^x=5$;

б) $7^{2x-3}=6$;

в) $2^{x+9}=12$;

г) $\log_2 x=4$;

д) $\log_x 8=3$;

е) $\log_x 128=7$;

ж) $\log_{0,1}(x-7)=-1$;

з) $\log_{x+3} 256=4$;

и) $\log_7\log_3\log_2 x=0$;

к) $\log_{x-2}(4x^2-14x+7)=2$;

л) $\log_2(9-2^x)=3-x$.

8.14. Решите уравнение:

а) $\log_3^2 x-4\log_3 x+3=0$;

б) $\log_6\sqrt{x-2}+\log_{36}(x-11)=1$;

в) $\log_3^2 x+2\log_3\sqrt{x}=2$;

г) $\log_3^2 x-\dfrac{1}{2}\log_3 x^2=2$;

д) $\log_5 x+\log_x 25=3$;

е) $\lg^2 x-\lg x^2-3=0$;

ж) $\log_3^2 x-\log_3 x^2=8$

з) $\log_x 9x^2\cdot\log_3^2 x=4$.

8.15. Решите неравенства:

а) $\log_2 x>4$;

б) $\log_9 x<2$;

в) $\log_{0,1} x\le -3$;

г) $\log_4(x+6)>3$;

д) $\log_{0,5}^2(2x-1)\le 9$;

е) $2\log_5^2 x-\log_5 x-3\le 0$;

ж) $\log_3^2 x-2\log_3 x-8\ge 0$;

з) $\log_2^2 x-3\log_2 x-4<0$.

8.16. При каких значениях a

а) число 3 является решением неравенства $\log_a(2x+3)>3$;

б) число -1 является решением неравенства $\log_a(1-3x)<4$?

8.17. Решите системы уравнений:

а) $\begin{cases}5^x+5^y=3,\\ 5^{x+y}=2;\end{cases}$

б) $\begin{cases}2\cdot 3^x-4^y=14,\\ 3^x+4^y=13;\end{cases}$

в) $\begin{cases}\log_4 x+\log_4 y=1,\\ y-2x=7;\end{cases}$

г) $\begin{cases}\log_2 x-\log_2 y=1,\\ \log_2 xy=3.\end{cases}$

Тема 9. Тригонометрические функции

9.1. Радианная и градусная мера. Тригонометрические функции острого угла

Длина окружности (рис. 9.1) вычисляется по формуле: $l = 2\pi R$. Пусть $R = 1$ (в этом случае говорят, что окружность единичная), тогда $l = 2\pi$. Таким образом, длине дуги в π радиан будет соответствовать угол в 180^0. Получим формулу связи радианной и градусной меры угла:

$$y_{рад} = \frac{x^0 \cdot \pi}{180^0} \text{ или } y^0 = \frac{x_{рад} \cdot 180^0}{\pi}$$

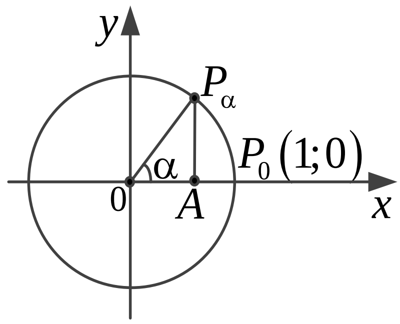


Рис 9.1. **Единичная окружность**

Пример 9.1. Найдите радианную меру угла 30^0:

$$30^0 = \frac{30^0 \cdot \pi}{180^0} = \frac{\pi}{6}.$$

Тригонометрические функции числового аргумента. Рассмотрим основные тригонометрические функции

$\cos\alpha$ – косинус альфа;

$\sin\alpha$ – синус альфа;

$tg\alpha$ – тангенс альфа;

$ctg\alpha$ – котангенс альфа.

9.1.1. Функция $y = \cos x$

Основные свойства:

1) область определения: $x \in (-\infty; \infty)$;

2) область значений: $y \in [-1;1]$;

3) нули функции: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$;

4) функция четная, $cos(-x) = cos\,x$. График симметричен относительно оси OY;

5) периодическая, $T = 2\pi$ – наименьший период;

6) точки экстремума функции (значения аргумента, при котором функция достигает своего максимального или минимального значения):

$$x_{\min} = \pi + 2\pi n, n \in Z;\ f_{\min}(x) = -1;$$

$$x_{\max} = 2\pi n, n \in Z;\ f_{\max}(x) = 1.$$

График функции $y = \cos x$ называется *косинусоидой* (рис. 9.2).

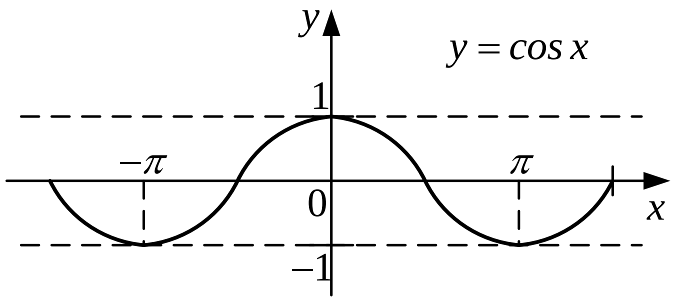


Рис. 9.2. **График функции** $y = \cos x$

9.1.2. Функция $y = \sin x$

Основные свойства:

1) область определения: $x \in (-\infty; \infty)$;

2) область значений: $y \in [-1;1]$;

3) нули функции: $x = \pi n, n \in Z$;

4) функция нечетная $\sin(-x) = -\sin x$, график симметричен относительно точки $O(0;0)$;

5) периодическая, $T = 2\pi$ – наименьший период;

6) точки экстремума функции:

$$x_{\min} = \frac{3}{2}\pi + 2\pi n, n \in Z;\ f_{\min}(x) = -1;$$

$$x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z;\ f_{\max}(x) = 1.$$

График функции $y = \sin x$ называется *синусоидой* (рис. 9.3).

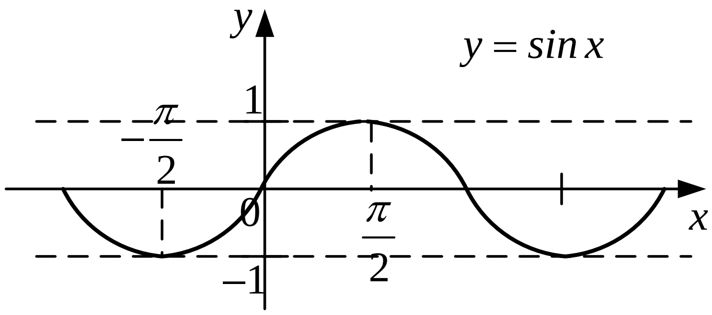


Рис. 9.3. **График функции** $y = sin\, x$

9.1.3. Функция $y = tgx$

Основные свойства:

1) область определения: множество всех действительных чисел за исключением точек $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$;

2) область значений: $y \in (-\infty; \infty)$;

3) нули функции: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$

4) функция нечетная $tg(-x) = -tgx$, график симметричен относительно точки $O(0;0)$;

5) функция периодическая с периодом $T = \pi$.

График функции $y = tgx$ представлен на рис. 9.4.

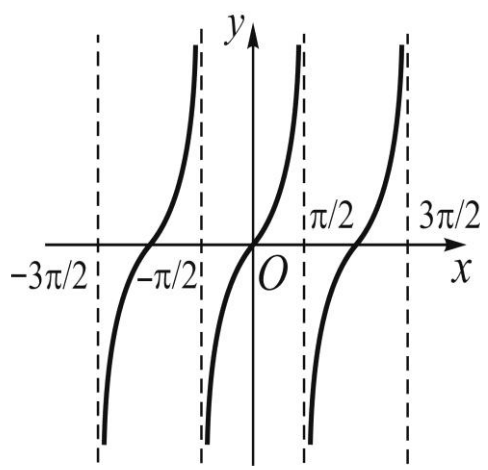


Рис. 9.4. **График функции** $y = tgx$

9.1.4. Функция $y = ctgx$.

Основные свойства:

1) область определения: множество всех действительных чисел за исключением точек $x = \pi n, n \in Z$;

2) область значений: $y \in (-\infty; \infty)$;

3) нули функции: $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n;\ n \in Z$;

4) функция нечетная $ctg(-x) = -ctgx$, график симметричен относительно точки $O(0;\, 0)$;

5) функция периодическая с периодом $T = \pi$.

График функции $y = ctgx$ представлен на рис. 9.5.

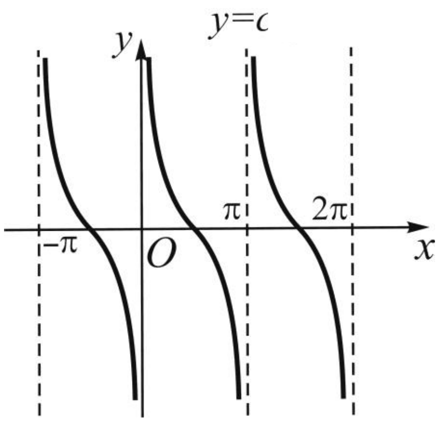


Рис. 9.5. **График функции** $y = ctgx$

Определение основных тригонометрических функций в прямоугольном треугольнике схематично представлено на рис. 9.6.

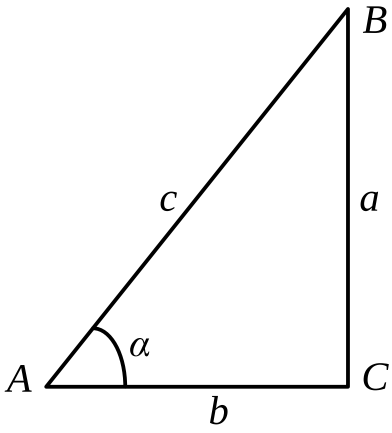


Рис. 9.6. **Прямоугольный треугольник**

Синусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к гипотенузе:

$$\sin\alpha = \frac{a}{c}.$$

Косинусом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к гипотенузе:

$$cos\ \alpha = \frac{b}{c}.$$

Тангенсом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение противолежащего катета к прилежащему:

$$tg\ \alpha = \frac{a}{b} \text{ или } tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\left(\cos\alpha \neq 0\right).$$

Котангенсом острого угла α в прямоугольном треугольнике называется отношение прилежащего катета к противолежащему:

$$ctg\ \alpha = \frac{a}{b} \text{ или } ctg\alpha = \frac{cos\ \alpha}{sin\,\alpha}\left(sin\,\alpha \neq 0\right).$$

9.1.5 .Основные формулы тригонометрии

Соотношения между тригонометрическими функциями одного и того же аргумента:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad tg\,x \cdot ctg\,x = 1$$

$$tg\,x = \frac{\sin x}{\cos x} \qquad 1 + tg^{\,2} x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$ctg\,x = \frac{\cos x}{\sin x} \qquad 1 + ctg^{\,2} x = \frac{1}{\sin^2 x}$$

Формулы сложения:

$$\sin\left(x + y\right) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\sin\left(x - y\right) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$$

$$\cos\left(x + y\right) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\cos\left(x - y\right) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$$

$$tg\left(x + y\right) = \frac{tg\,x + tgy}{1 - tgx \cdot tgy} \qquad ctg\left(x + y\right) = \frac{ctgx \cdot ctgy - 1}{ctg\,x + ctgy}$$

$$tg\left(x - y\right) = \frac{tg\,x - tgy}{1 + tgx \cdot tgy} \qquad ctg\left(x - y\right) = -\frac{ctgx \cdot ctgy + 1}{ctg\,x - ctgy}$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла:

$$\sin x = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad tgx = \frac{2tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} \qquad ctgx = \frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{2tg\frac{x}{2}}$$

Формулы двойного аргумента:

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$tg\,2x = \frac{2tg\,x}{1-tg^2 x}$$

$$ctg\,2x = \frac{ctg^2 x - 1}{2ctg\,x} = \frac{ctg\,x - tg\,x}{2}$$

Формулы половинного аргумента:

$$\sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{2} \qquad \cos^2\frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{2}$$

или $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ или $\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2}$

$$tg^2 x = \frac{1-\cos 2x}{1+\cos 2x} \qquad ctg^2 x = \frac{1+\cos 2x}{1-\cos 2x}$$

$$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1+\cos x} = \frac{1-\cos x}{\sin x} \qquad ctg\frac{x}{2} = \frac{\sin x}{1-\cos x} = \frac{1+\cos x}{\sin x}$$

Формулы преобразования произведения в сумму:

$$\sin x\sin y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) - \cos(x+y)\right)$$

$$\cos x\cos y = \frac{1}{2}\left(\cos(x-y) + \cos(x+y)\right)$$

$$\sin x\cos y = \frac{1}{2}\left(\sin(x-y) + \sin(x+y)\right)$$

Формулы преобразования суммы в произведение:

$$\sin x+\sin y=2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x-\sin y=2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$$

$$tgx+tgy=\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} \qquad ctgx+ctgy=\frac{\sin(x+y)}{\sin x\sin y}$$

$$tgx-tgy=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y} \qquad ctgx-ctgy=-\frac{\sin(x-y)}{\sin x\sin y}$$

$$tgx+ctgy=\frac{\cos(x-y)}{\cos x\sin y} \qquad tgx-ctgy=-\frac{\cos(x+y)}{\cos x\sin y}$$

$$\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(45^0-x\right)=\sqrt{2}\sin\left(45^0+x\right)$$

$$\cos x-\sin x=\sqrt{2}\sin\left(45^0-x\right)=\sqrt{2}\cos\left(45^0+x\right)$$

$a\sin x+b\cos x=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\varphi)$, где $\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$,

$$\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

Формулы приведения

Угол / Функция	$\beta=\frac{\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=\pi\pm\alpha$	$\beta=\frac{3\pi}{2}\pm\alpha$	$\beta=2\pi\pm\alpha$
$\sin\beta$	$\cos\alpha$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$
$\cos\beta$	$\mp\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\pm\sin\alpha$	$\cos\alpha$
$tg\beta$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$	$\mp ctg\alpha$	$\pm tg\alpha$
$ctg\beta$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$	$\mp tg\alpha$	$\pm ctg\alpha$

Значения тригонометрических функций некоторых углов

Угол в градусах	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0	180^0	270^0	360^0
Угол в радианах	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$tg\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	не сущ.	0	не сущ.	0
$ctg\alpha$	не сущ.	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	не сущ.	0	не сущ.

Пример 9.2. Необходимо вычислить:

а) $3tg\ 45^0 + 2\cos\ 60^0 - \sin\ 270^0 = 3\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\cdot\frac{1}{2} - (-1) = 2 + \frac{3}{\sqrt{2}} \approx 4{,}121;$

б) $tg\frac{\pi}{3}\ \cos\frac{\pi}{4}\left(\sin\frac{\pi}{6}\right)^2 = \sqrt{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{3}{2}} \approx 0{,}306.$

Пример 9.3. Необходимо вычислить, используя формулы приведения:

а) $\sin\frac{5\pi}{4} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\frac{\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$

б) $\cos 330^0 = \cos(270^0 + 60^0) = \sin 60^0 = \frac{\sqrt{3}}{2};$

в) $\sin\frac{5\pi}{3} = \sin\left(2\pi - \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

Пример 9.4. Найдите $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $\sin\frac{\alpha}{2}$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и угол $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Углы α и $\frac{\alpha}{2}$ находятся в первой четверти, а значит $\cos\alpha > 0$, $\sin\frac{\alpha}{2} > 0$. Поэтому: $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-(0{,}8)^2} = \sqrt{0{,}36} = 0{,}6$;

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = 1\frac{1}{3};$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}6}{2}} = \sqrt{0{,}2} \approx 0{,}447.$$

Пример 9.5. Упростите выражения:

а) $tg^2 3\alpha + \sin^2 4\alpha + \cos^2 4\alpha = tg^2 3\alpha + 1 = \frac{1}{\cos 3\alpha}$;

б) $\sin 14^0 \cos 31^0 + \cos 14^0 \sin 31^0 = \sin(14^0 + 31^0) = \sin 45^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

в) $\sin 5\alpha \sin 3\alpha = \frac{1}{2}\left(\cos(5\alpha - 3\alpha) - \cos(5\alpha + 3\alpha)\right) = \frac{1}{2}\left(\cos 2\alpha - \cos 8\alpha\right)$.

Упражнения

9.1. Выразите в радианах величину угла, градусная мера которого равна:

а) 360^0 ______________;

б) 270^0 ______________;

в) 45^0 ______________;

г) 135^0 ______________;

д) 30^0 ______________;

е) 180^0 ______________;

ж) 210^0 ______________;

з) 240^0 ______________.

9.2. Выразите в градусах величину угла, радианная мера которого равна:

а) $\frac{\pi}{2}$ ________________;

б) $-\frac{\pi}{12}$ ________________;

в) $\frac{5\pi}{3}$ ________________;

г) 2π ________________;

д) $-\frac{5\pi}{4}$ ________________;

е) $\frac{7\pi}{6}$ ________________;

ж) $\frac{7\pi}{6}$ ________________;

з) $\frac{3\pi}{5}$ ________________.

9.3. Определите знак:

а) $\sin 130^0$___;

б) $\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$___;

в) $tg\,5$___;

г) $ctg\,\frac{\pi}{2}$___;

д) $\cos 25^0$___;

е) $\sin\frac{2\pi}{3}$___.

9.4. Сравните:

а) $\sin 40^0$ ___ $\sin\frac{\pi}{4}$;

б) $\cos\frac{3\pi}{4}$ ___ $\cos\pi$;

в) $\sin 5$ ____ $\sin 3$;

г) $\cos 120^0$ ____ $\sin\left(-300^0\right)$;

д) $\cos 3$ ____ $\sin 3$;

е) $\cos\frac{13\pi}{4}$ ____ $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.

9.5. Найдите значения выражения:

а) $2\cos 0^0 + 5\sin 90^0 - 4tg180^0 =$ ______________________________;

б) $ctg\,\frac{\pi}{2} + 3\cos\frac{\pi}{2} - 4\sin\frac{3\pi}{2} =$ ____;

в) $tg\,45^0 \cos\,30^0\, ctg\,60^0 \sin\,270^0 =$ ______________________________;

г) $3\cos\frac{7\pi}{4} + 2\sin\frac{3\pi}{4} - \sin\left(-\frac{9\pi}{4}\right) + 7\cos\frac{13\pi}{2} =$ ____________________.

9.6. Существует ли такой угол, для которого:

а) $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\alpha = -1$;

б) $\cos\alpha = \frac{\pi}{2}$;

в) $\sin\alpha = \sqrt{3}$;

г) $\cos\alpha = \frac{12}{13}$, $\sin\alpha = \frac{5}{13}$;

д) $\sin\alpha = -\frac{21}{37}$;

е) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{7}}{3}$?

9.7. Найдите значения других трех основных тригонометрических функций, если:

а) $\cos\alpha = -\frac{1}{3}$, $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$;

б) $\cos\alpha = \frac{1}{4}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

9.8. Вычислите $\cos\alpha$, если:

а) $\sin\alpha = 0{,}8,\ \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$;

б) $tg\alpha = -\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;

в) $\sin 2\alpha = 0{,}8,\ 0 < \alpha < \pi$;

г) $ctg\,\alpha = \frac{1}{4},\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

9.9. Приведите к тригонометрической функции угла α:

а) $\sin(\pi - \alpha) =$ _________;

б) $\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) =$ _________;

в) $tg(\frac{\pi}{2} + \alpha) =$ __________;

г) $ctg\,(\alpha - \pi) =$ _________;

д) $\sin^2(\frac{7\pi}{2} + \alpha) =$ _________;

е) $\cos^2(360^0 - \alpha) =$ ______.

9.10. Упростите выражение:

а) $\sin^2\alpha - 1$;

б) $\sin^2 2\alpha + \cos^2 2\alpha + ctg^2 5\alpha$;

в) $2\sin\frac{\alpha}{2}\,ctg\,\frac{\alpha}{3} - \cos\frac{\alpha}{3}$;

г) $\frac{\cos^2\alpha - 1}{\sin^2\alpha - 1} + tg\alpha\ ctg\alpha$;

д) $\frac{tg\,\alpha\cos\alpha}{1 + ctg^2\alpha}$;

е) $\left(1 - \cos\frac{\alpha}{2}\right)\left(1 + \cos\frac{\alpha}{2}\right)$;

ж) $(1 + tg\alpha)^2 + (1 - tg\alpha)^2$;

з) $\frac{\sin\alpha}{1 + \cos\alpha} + ctg\,\alpha$;

и) $\frac{\sin\alpha}{1 - \cos\alpha} - \frac{1 + \cos\alpha}{\sin\alpha}$;

к) $\frac{ctg\,\alpha}{tg\alpha + ctg\alpha}$;

л) $\sin^4\alpha + \sin^2\alpha\cos^2\alpha + \cos^2\alpha$;

м) $\frac{\sin^3(-\alpha) + \cos^3(-\alpha)}{\sin(-\alpha) + \cos\alpha}$.

9.11. Приведите к значению тригонометрической функции положительного аргумента, меньшего $45^0\left(\frac{\pi}{4}\right)$:

а) $\sin 219^0 =$ ________________;

б) $\cos 127^0 =$ ________________;

в) $tg 172^0 =$ ________________;

г) $ctg 194^0 =$ ________________

д) $\sin\frac{5\pi}{9} =$ ________________;

е) $\cos 3000^0 =$ _______________;

ж) $tg(-298^0) =$ ______________;

з) $\cos 1{,}2\pi =$ ________________.

9.12. Упростите выражение:

а) $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{3}\right)$;

б) $\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)$;

в) $\sin\varphi\cos 3\varphi+\cos\varphi\sin 3\varphi$;

г) $\cos 61^0\cos 31^0+\sin 61^0\sin 31^0$;

д) $\sin\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{6}-\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{6}$;

е) $\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)-\cos\alpha-\sin\alpha$.

9.13. Упростите выражение:

а) $\dfrac{\sin\alpha}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$;

б) $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}-\cos\frac{\alpha}{2}}$;

в) $\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\alpha$;

г) $\dfrac{\sin^2 2\alpha-4\sin^2\alpha}{\sin^2 2\alpha+4\sin^2\alpha-4}$.

9.14. Понизьте степень следующих выражений:

а) $\cos^2 4\alpha$; б) $\cos^2\left(2\alpha-\frac{\pi}{8}\right)$; в) $\sin^2 3\alpha$.

9.15. Докажите тождество:

а) $2\sin^2\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha=1$;

б) $\dfrac{1-\sin 2\alpha}{1+\sin 2\alpha}=tg^2\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$;

в) $ctg\,2\alpha(1-\cos 4\alpha)=\sin 4\alpha$;

г) $\dfrac{1+\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2}}=-ctg\frac{\alpha}{4}$.

9.16. Преобразуйте в произведение:

а) $\cos 40^0+\cos 10^0$;

б) $\sin\frac{11}{12}\pi-\sin\frac{5}{12}\pi$;

в) $\sin 4\alpha+\sin 10\alpha$;

г) $\cos 3\alpha-\cos 7\alpha$;

д) $\cos\frac{\pi}{8}-\sin\frac{\pi}{10}$;

е) $\cos 70^0+\sin 40^0$;

ж) $\sqrt{3}-2\sin\alpha$;

з) $\cos\left(2\alpha-\frac{2\pi}{3}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+2\alpha\right)$;

и) $\sin\left(\frac{\alpha}{2}+\frac{\pi}{3}\right)-\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$;

к) $tg 14^0+tg 16^0$;

л) $tg 7\alpha-tg 3\alpha$;

м) $tg\frac{5}{24}\pi+ctg 8$;

н) $1+2\cos\alpha$.

9.17. Преобразуйте произведение в сумму:

а) $\cos 25^0 \cos 50^0$;

б) $\sin 4\alpha \cos 7\alpha$;

в) $\sin 2\alpha \sin \alpha$;

г) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$.

9.18. Найдите область определения, область значений данной функции и постройте ее график:

а) $y = \sin x + 3$;

б) $y = \sin\left(x - \dfrac{\pi}{6}\right)$;

в) $y = -\dfrac{1}{2}\cos\left(x + \dfrac{\pi}{4}\right)$;

г) $y = 2\sin 2x$;

д) $y = -3\cos x + 5$;

е) $y = 4tgx - 2$;

ж) $y = ctg\,\dfrac{2x}{3}$;

з) $y = |\sin x|$;

и) $y = \cos\left|x - \dfrac{\pi}{4}\right|$;

к) $y = |ctgx + 1|$.

9.2. Тригонометрические уравнения и неравенства

Решение уравнения $\sin x = a$ *имеет вид*:

$$x = (-1)^k \arcsin a + 2\pi n,\ \ n \in \mathrm{Z}.$$

Частные случаи:

$$\sin x = \pm 1:\ \ x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi n,\ \ n \in \mathrm{Z};$$

$$\sin x = 0:\ \ x = \pi n,\ \ n \in \mathrm{Z}.$$

Пример 9.6. Решите уравнение $\sin\left(\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

$$\frac{x}{2} - \frac{\pi}{3} = (-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n,\ \ n \in \mathrm{Z};$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{3} + (-1)^k \arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 2\pi n,\ \ n \in \mathrm{Z};$$

$$x = \frac{2\pi}{3} + (-1)^k 2\arcsin\frac{1}{\sqrt{2}} + 4\pi n,\ \ n \in \mathrm{Z}.$$

Решение уравнения $\cos x = a$ *имеет вид:*

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n,\ \ n \in \mathrm{Z}.$$

Частные случаи:

$$\cos x = 1:\ \ x = 2\pi n,\ \ n \in \mathrm{Z};$$

$$\cos x = -1: \; x = \pi + 2\pi n, \; n \in Z;$$

$$\cos x = 0: \; x = \frac{\pi}{2} + \pi n, \; n \in Z.$$

Пример 9.7. Решите уравнение $\cos x = \frac{1}{2}$.

$$x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi n = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi n, \; n \in Z.$$

Пример 9.8. Решите уравнение $\cos 4x = 0{,}3$.

$$4x = \pm \arccos 0{,}3 + 2\pi n, \; n \in Z;$$

$$x = \frac{\pm \arccos 0{,}3}{4} + \frac{\pi n}{2}, \; n \in Z$$

Решение уравнения $tgx = a$ имеет вид:

$$x = arctga + \pi n, \; n \in Z.$$

Пример 9.9. Решите уравнение $tgx = \sqrt{3}$.

$$x = \pm arctg\sqrt{3} + \pi n = \frac{\pi}{3} + \pi n, \; n \in Z.$$

Решение уравнения $ctgx = a$ имеет вид:

$$x = arcctga + \pi n, \; n \in Z.$$

Пример 9.10. Решите уравнение $ctgx = -\sqrt{3}$.

$$x = \pm arcctg(-\sqrt{3}) + \pi n = -\frac{\pi}{6} + \pi n, \; n \in Z.$$

Пример 9.11. Решите тригонометрическое неравенство $\sin t \geq -\frac{1}{2}$.

Все точки P_t единичной окружности при значениях t, удовлетворяющих данному неравенству, имеют ординату, большую или равную $-\frac{1}{2}$.

Множество таких точек дуга – l на рис. 9.7.

Совершая обход дуги против часовой стрелки, получим:

$$t_1 = \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6}, \; t_2 = \pi - \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7\pi}{6}.$$

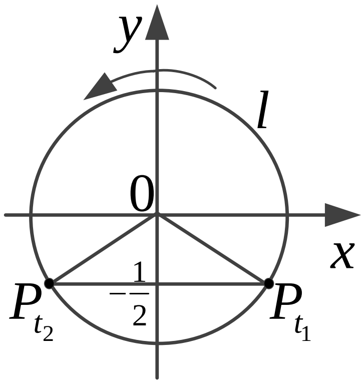


Рис. 9.7. **Решение тригонометрического неравенства**

Вследствие периодичности синуса приходим к ответу:

$$-\frac{\pi}{6}+2\pi n \le t \le \frac{7\pi}{6}+2\pi n,\ n\in \mathrm{Z}.$$

Пример 9.12. Решите тригонометрическое неравенство $\cos 2x \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Обозначим $2x$ через t, получим $\cos t \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$.

На рис. 9.8. выделена соответствующая дуга l.

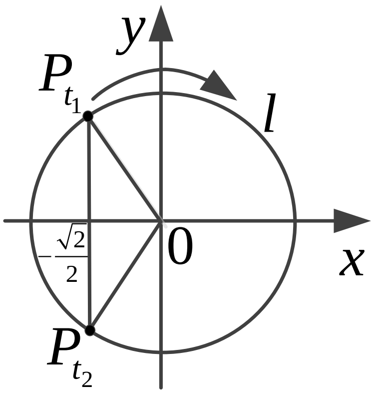


Рис. 9.8. **Решение тригонометрического неравенства**

Находим $t_1=\arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{3\pi}{4}$ и $t_2=-\frac{3\pi}{4}$,

тогда $-\frac{3\pi}{4}+2\pi n \le t \le \frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ n\in \mathrm{Z}$.

Переходя к переменной x, получаем:

$$-\frac{3\pi}{4}+2\pi n\le 2x\le\frac{3\pi}{4}+2\pi n,\ \ n\in\mathrm{Z},\quad -\frac{3\pi}{8}+\pi n\le x\le\frac{3\pi}{8}+\pi n,\ \ n\in\mathrm{Z}.$$

Пример 9.13. Решите тригонометрическое неравенство:

$$3tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)<\sqrt{3}\,.$$

Преобразовав данное неравенство, получим:

$$tg\left(\frac{\pi}{3}-\frac{x}{2}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad -tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)<\frac{\sqrt{3}}{3},\qquad tg\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)>-\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Обозначим $\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\right)$ через t, тогда $tgt>-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

На рис. 9.9. выделена соответствующая дуга l.

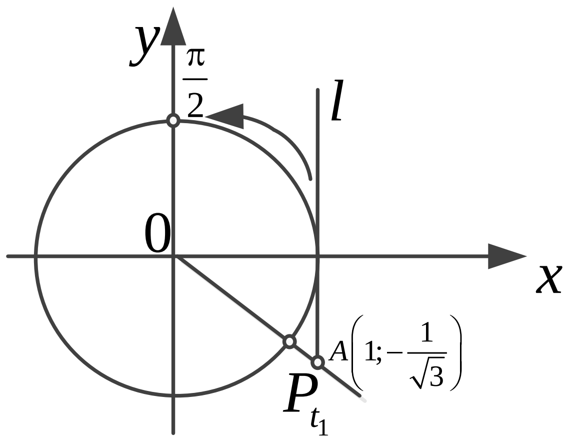


Рис. 9.9. **Решение тригонометрического неравенства**

Так как $t_1=arctg\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=-\frac{\pi}{6}$, получаем

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n\le t\le\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in\mathrm{Z}\,.$$

Переходя к переменной x, получаем:

$$-\frac{\pi}{6}+\pi n\le\frac{x}{2}-\frac{\pi}{3}\le\frac{\pi}{2}+\pi n,\ \ n\in Z\,,$$

$$\frac{\pi}{3}+2\pi n\le x\le\frac{5\pi}{3}+2\pi n,\ \ n\in Z\,.$$

Упражнения

9.19. Найдите решения уравнений:

а) $\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

б) $\cos x = -\frac{1}{2}$;

в) $tgx = -\sqrt{3}$;

г) $ctgx = 1$;

д) $\sin\frac{x}{4} = \frac{1}{2}$;

е) $\cos 5x = \frac{1}{\sqrt{2}}$;

ж) $\cos 6x = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

з) $tg\left(x - \frac{\pi}{10}\right) = 1$;

и) $ctg\left(2x + \frac{\pi}{8}\right) = 2$;

к) $\cos(6x - 12) = \frac{4}{7}$;

л) $\sin\left(\frac{\pi}{9} - \frac{2x}{5}\right) = \frac{2}{3}$;

м) $\cos\frac{2x}{\pi} = 0$;

н) $ctg(5 - 3x) = -3$;

о) $\sin(7x - 2) = \frac{\pi}{6}$;

п) $tg\left(3x - \frac{\pi}{8}\right) = 1$;

р) $ctg(5x - 7) = -1$;

с) $\cos 2x = 2$.

9.20. Решите уравнения:

а) $3 + 3\cos\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{18}\right) = 0$;

б) $3tg(3x + 1) + \sqrt{3} = 0$;

в) $3 + 3\sin\left(\frac{x}{6} + \frac{\pi}{24}\right) = 0$;

г) $3 + \sqrt{3}ctg\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$;

д) $\sqrt{3} + 2\sin\left(\frac{\pi}{6} - x\right) = 0$;

е) $\sqrt{3} + 2\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$.

9.21. Решите уравнения, применяя тригонометрические формулы или метод замены:

а) $2\cos^2\frac{x}{2} - \cos\frac{x}{2} - 1 = 0$;

б) $2\cos^2 x - 7\sin x - 5 = 0$;

в) $2\cos x - \cos 2x - \cos^2 x = 0$;

г) $tg^2 5x + 3tg 5x + 4 = 0$;

д) $2\sin x - 3\cos x = 0$;

е) $3\sin^2 x + 4\cos^2 x = 0$;

ж) $22\cos^2 x + 4\sin 2x = 7$;

з) $\sin 3x\cos 2x = \sin 5x$

и) $\sin x\sin 7x = \sin 3x\sin 5x$;

к) $4\sin^2 2x - 1 = \cos 2x\cos 6x$;

л) $\dfrac{\cos\frac{x}{2}}{1 + \sin\frac{x}{2}} = 0$;

м) $\dfrac{\sin 2x}{1 - \cos x} = 2\sin x$.

9.22. Решите тригонометрические неравенства:

а) $\sin x < \frac{\sqrt{2}}{2}$;

б) $\cos x \le \frac{1}{2}$;

в) $tgx < \frac{1}{\sqrt{3}}$;

г) $ctgx > \sqrt{3}$;

д) $\sin\frac{x}{5} > \frac{1}{2}$;

е) $\cos 4x \le \frac{\sqrt{3}}{2}$;

ж) $tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right) \le -2$;

з) $ctg\left(2x-\frac{\pi}{4}\right) > 1$;

и) $\cos\left(3x-\frac{3\pi}{4}\right) > \frac{\sqrt{2}}{2}$;

к) $\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right) \le -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

л) $2\sin^2\frac{x}{4} < 1{,}5$;

м) $\cos 2x - \cos x \ge 0$.

Тема 10. Предел. Непрерывность функции. Производная

10.1. Предел функции непрерывного аргумента

Число A называется *пределом функции* $y = f(x)$ при $x \to x_0$ (x стремится к x_0), если для всех значений аргумента x, которые практически не отличаются от x_0, соответствующие значения функции $y = f(x)$ как угодно мало отличаются от числа A.

Математическая запись предела:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A.$$

Точка x_0 называется *предельной точкой*.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1. Предел суммы конечного числа функций равен сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)+g(x)\right] = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Теорема 2. Предел произведения конечного числа функций равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to x_0}\left[f(x)\cdot g(x)\right]=\lim_{x\to x_0}f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}g(x).$$

Теорема 3. Постоянный множитель можно вынести за знак предела:

$$\lim_{x\to x_0}C\cdot f(x)=C\cdot\lim_{x\to x_0}f(x).$$

Как следствие заметим, что $\lim\limits_{x\to x_0}C=C$.

Теорема 4. Предел частного равен частному от деления пределов, если только предел знаменателя не равен нулю:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0}f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}g(x)},\ \text{если}\ \lim_{x\to x_0}g(x)\neq 0.$$

Из понятия предела вытекает понятие бесконечно малой величины.

Пусть существует некоторая функция $y=f(x)$, которая определена на промежутке (a,b), возможно кроме точки $x_0\in(a,b)$, и при этом существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, то функция $y=f(x)$ называется *бесконечно малой* в точке x_0.

Пример 10.1. Так как $\lim\limits_{x\to 1}(1-x)=0$, то функция $y=1-x$ в точке $x=1$ есть бесконечно малая величина.

Пример 10.2. Вычислите пределы функций:

1) $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-4x+3}{x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x-4)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x-4)=1-4=-3;$$

2) $$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-2x+3}{x^2-5x+6}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x-1)}{\cancel{(x-3)}(x-2)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-1}{x-2}=2;$$

3) $$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}}{x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{x+1}-\sqrt{1-x}\right)\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x+1-(1-x)}{x\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{2x}}{\cancel{x}\left(\sqrt{x+1}+\sqrt{1-x}\right)}=\frac{2}{2}=1;$$

4) $$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{x-4}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim_{x\to 4}\frac{\cancel{x-4}}{\cancel{(x-4)}\left(\sqrt{x}+2\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{\sqrt{4}+2}=\frac{1}{4};$$

5) $$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{4x+1}-3}{\sqrt{x+2}-2}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x+1}-3\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{(4x+1-9)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x+2-4)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=\lim_{x\to 2}\frac{4(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{4x+1}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{4\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{\sqrt{4x+1}+3}=\frac{4\cdot 4}{3+3}=\frac{8}{3};$$

6) $$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+2x}{x+1}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}(x+2)}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+2}{1+\frac{1}{x}}=\infty;;$$

7) $$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3-3x+1}{4+2x^2-3x^3}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(\frac{2x^3}{x^3}-\frac{3x}{x^3}+\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{4}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{3x^3}{x^3}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}}{\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x}-3}=-\frac{2}{3};$$

8) $$\lim_{x\to 0}\frac{tgx\cdot\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\cdot\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{tgx}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty.$$

Для дальнейшего исследования функции введем понятие непрерывности.

Функция $y=f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x_0\in(a,b)$, если выполняются следующие условия:

1) функция определена в точке x_0 и существует число $f\left(x_0\right)$;

2) существует предел $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right)$;

3) предел функции равен значению функции в этой точке: $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$.

Если условие непрерывности $\lim\limits_{x \to x_0} f\left(x\right) = f\left(x_0\right)$ нарушено, то точка $x = x_0$ называется *точкой разрыва* функции.

Пример 10.3. Для функции $y = \dfrac{1}{1-x}$ точка $x_0 = 1$ является точкой разрыва, потому что в этой точке предел не имеет числового значения:

$$\lim_{x \to 1} \frac{1}{1-x} = \infty.$$

Пример 10.4. Исследуйте следующие функции на непрерывность и найдите точки разрыва:

1) $y = \dfrac{1}{x-3}$; 2) $y = \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$; 3) $y = \dfrac{x-1}{x^2+x-2}$.

Решение

1) $y = \dfrac{1}{x-3}$ Функция терпит разрыв в точке $x = 3$.

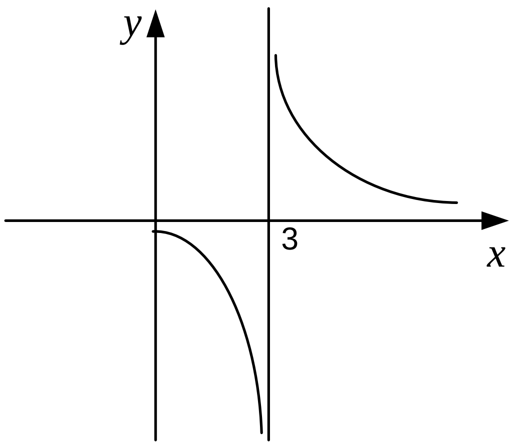


Рис. 10.1. **Поведение графика функции $y = \dfrac{1}{x-3}$ в окрестности точки $x = 3$**

Для определения поведения функции вблизи точки разрыва $(x=3)$ найдем правый и левый пределы:

$$\lim_{x\to 3-0}\frac{1}{x-3}=\begin{vmatrix}x=3-\alpha\\ \alpha\to 0\end{vmatrix}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{3-\alpha-3}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to 3+0}\frac{1}{x-3}=\begin{vmatrix}x=3+\alpha\\ \alpha\to 0\end{vmatrix}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{3+\alpha-3}=+\infty.$$

Так как правый и левый пределы функции равны бесконечности, то в точке $x=3$ функция терпит разрыв второго рода (см. рис. 10.1).

2) $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$

$x=1$ – точка разрыва.

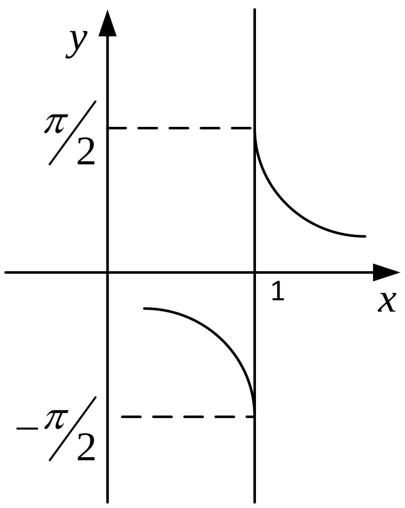


Рис. 10.2. **Поведение графика функции $y=\operatorname{arctg}\dfrac{1}{x-1}$ в окрестности точки $x=1$**

Вычислим левый и правый пределы функции в окрестности этой точки:

$$\lim_{x\to 1-0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\begin{vmatrix}x=1-\alpha\\ \alpha\to 0\end{vmatrix}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1-\alpha-1}=\operatorname{arctg}(-\infty)=-\frac{\pi}{2};$$

$$\lim_{x\to 1+0}\operatorname{arctg}\frac{1}{x-1}=\begin{vmatrix}x=1+\alpha\\ \alpha\to 0\end{vmatrix}=\lim_{\alpha\to 0}\frac{1}{1-\alpha-1}=\operatorname{arctg}(\infty)=\frac{\pi}{2}.$$

Пределы существуют, но не равны между собой, поэтому $x=1$ – точка разрыва второго рода (см. рис. 10.2).

3) $y=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$

В данном случае функция не определена в точках $x_1=1,\ x_2=-2.$

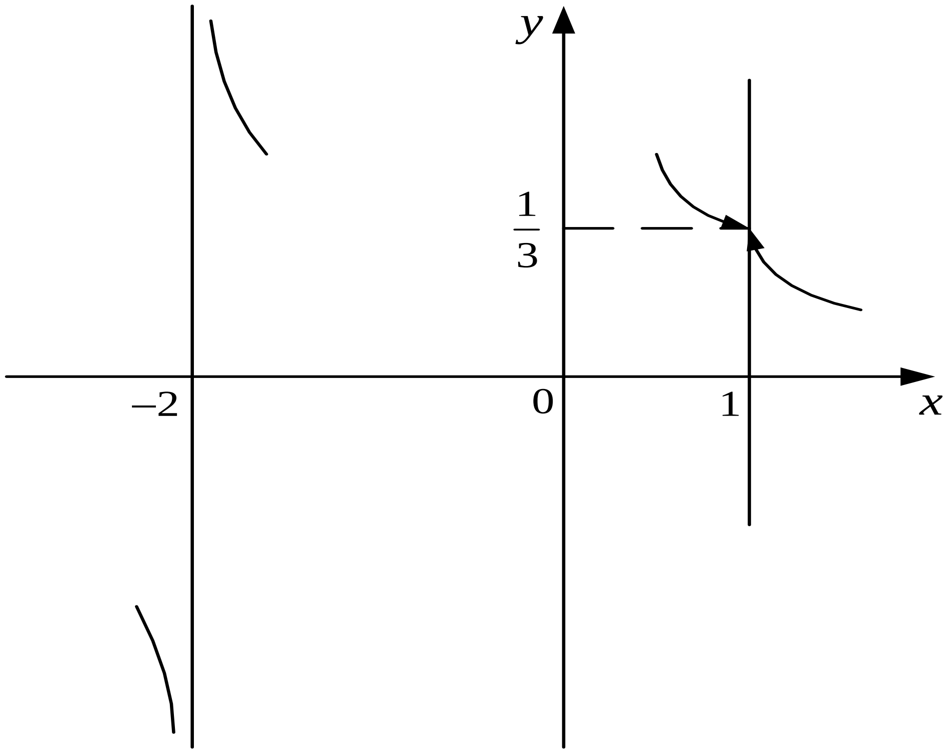


Рис. 10.3. **Поведение графика функции $y=\dfrac{x-1}{x^2+x-2}$ в окрестности**

точек $x_1=1$ и $x_2=-2$

Вычислим пределы функции вблизи этих точек :

$$\lim_{x\to 1-0}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1-0}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3};$$

$$\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to 1+0}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\frac{1}{3}.$$

Пределы существуют и равны между собой. Поэтому $x=1$ – точка устранимого разрыва первого рода (см. рис. 10.3).

Рассмотрим поведение функции в окрестности точки $x=-2$:

$$\lim_{x\to-2-0}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2-0}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\left|\begin{matrix}x=-2-\alpha\\ \alpha\to0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{-2-\alpha+2}=-\infty;$$

$$\lim_{x\to-2+0}\frac{x-1}{x^2+x-2}=\lim_{x\to-2+0}\frac{x-1}{(x-1)(x+2)}=\left|\begin{matrix}x=-2+\alpha\\ \alpha\to0\end{matrix}\right|=\lim_{\alpha\to0}\frac{1}{-2+\alpha+2}=+\infty.$$

Очевидно, что пределы равны бесконечности, поэтому точка $x=-2$ является точкой разрыва второго рода (см. рис. 10.3).

Упражнения

10.1. Вычислите пределы функций.

1) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{7x-14}{12}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\left(17x^3+2x-1\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{x^2-5x-6}{x^2-3x-18}$;

4) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{x^2-10x+21}{x^2-14x+49}$;

5) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{2x^2-4x-16}{x^2-5x+4}$;

6) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{x^2+8x+16}{2x^2+9x+4}$;

7) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2+10x-24}{x^2+5x-14}$;

8) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-8x+15}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-5x^2+2}{2x^3+5x-1}$;

10) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2-14x+17}{12x^3+7x-3}$;

11) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x^5-2x+4}{2x^4+3x^2+1}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3+4x+1}{2x^3-4x^2+5}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^4+7x+6}{2x^3+10x^2-3}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+3x-2}{5x^2+3x-1}$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+3x-5}{7x^3-2x^2+1}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-x^6}{x^2-2x+5}$;

17) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-1}{x}$;

18) $\lim\limits_{x\to-4}\dfrac{3-\sqrt{x^2-7}}{\sqrt{x+8}-2}$;

19) $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{\sqrt{2+x}-3}{x-7}$;

20) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{3-\sqrt{5+x}}{1-\sqrt{5-x}}$;

21) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{\sqrt{5x-1}}{x-1}$;

22) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{5x+1}-4}{x^2+2x-15}$;

23) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{3x-2}-2}{\sqrt{x+2}-2}$;

24) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin5x}{\operatorname{arctg}2x}$;

25) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x-\sin x}{\operatorname{tg}x}$;

26) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos4x}{x\cdot\sin x}$

27) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 5x}{\cos x-1}$

28) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tgx\cdot\sin x}{x^3}$;

29) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin3x+\sin x}{2x}$;

30) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{tg^2 2x}{x\cdot\sin4x}$.

10.2. Исследуйте функции на непрерывность:

1) $y=\frac{x^2+x}{x+1}$; 3) $y=\frac{(x-1)}{x^2-2x-3}$; 5) $y=\frac{3}{x^3-8}$;

2) $y=\frac{x}{x^3+1}$; 4) $y=\frac{x-1}{x^2+x-2}$; 6) $y=\frac{x}{4x^2-1}$.

10.2. Производная

Производной функции называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента (независимой переменной) при стремлении последнего к нулю:

$$f'(x)=y'=\lim_{\Delta x\to x_0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},$$

где Δx – приращение аргумента, $f(x+\Delta x)$ – приращение функции.

Таблица производных

$x'=1$	$(\arccos x)'_x=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$	$(arctg\ x)'_x=\frac{1}{1+x^2}$
$(\sin x)'=\cos x$	$(arcctg\ x)'_x=-\frac{1}{1+x^2}$
$(\cos x)'=-\sin x$	$(\ln\lvert x\rvert)'=\frac{1}{x}$
$(tg\ x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	$(\log_a\lvert x\rvert)'=\frac{1}{x\ln a}$
$(ctg\ x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$	$(a^x)'=a^x\ln a$
$(\arcsin x)'_x=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(e^x)'=e^x$

Основные правила дифференцирования:

1) производная постоянной величины равна нулю:

$$C' = 0,\ C = const;$$

2) производная алгебраической суммы двух дифференцируемых функций равна такой же сумме производных от этих функций:

$$\left(f(x) \pm g(x)\right)' = f'(x) \pm g'(x);$$

3) производная произведения двух дифференцируемых функций равна:

$$\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x);$$

4) постоянную величину можно выносить за знак дифференцирования:

$$\left(C \cdot f(x)\right)' = C \cdot f'(x);$$

5) производная частного двух дифференцируемых функций равна

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}.$$

Пример 10.5. Найдите производные заданных функций:

а) $y = 4x^2 - \dfrac{5}{6x^6} + 10\sqrt[5]{x^4}$; б) $y = \left(x^2 - 2x + 2\right)\sin 4x$;

в) $y = \left(x^2 - \ln 2x\right)^3$; г) $y = \dfrac{\sin 2x}{2x - 5}$.

Решение.

а) $y = 4x^2 - \dfrac{5}{6x^6} + 10\sqrt[5]{x^4}$.

Сначала преобразуем заданную функцию к виду, удобному для дифференцирования:

$$y = 4x^2 - \frac{5}{6x^6} + 10\sqrt[5]{x^4} = 4x^2 - \frac{5}{6}x^{-6} + 10x^{\frac{4}{5}}$$

Теперь найдем производную функции:

$$y' = \left(4x^2 - \frac{5}{6}x^{-6} + 10x^{\frac{4}{5}}\right)' = 8x + 5x^{-7} + 8x^{-\frac{1}{5}} = 8x + \frac{5}{x^7} + \frac{8}{\sqrt[5]{x}}.$$

б) $y' = \left(\left(x^2 - 2x + 2\right)\sin 4x\right)' = \left(x^2 - 2x + 2\right)' \sin 4x +$

$+\left(x^2 - 2x + 2\right)\left(\sin 4x\right)' = \left(2x - 2\right)\sin 4x + \left(x^2 - 2x + 2\right)\cdot 4\cos 4x$;

в) $y' = \left(\left(x^2 - \ln 2x\right)^3\right)' = 3\left(x^2 - \ln 2x\right)^2 \cdot \left(2x - \dfrac{2}{2x}\right) =$

$= 3\left(x^2 - \ln 2x\right)^2 \cdot \left(2x - \dfrac{1}{x}\right)$;

г) $y' = \left(\dfrac{\sin 2x}{2x - 5}\right)' = \dfrac{\left(\sin 2x\right)'\left(2x - 5\right) - \sin 2x \cdot \left(2x - 5\right)'}{\left(2x - 5\right)^2} =$

$= \dfrac{2\cos 2x \cdot \left(2x - 5\right) - 2\sin 2x}{\left(2x - 5\right)^2}$.

Пример 10.6. Найдите y'', y''' , если $y = x^2 + 3\sqrt{x}$.

а) найти y'' – это значит найти производную второго порядка.

$$y' = \left(x^2 + 3\sqrt{x}\right)' = \left(2x + 3\left(x^{\frac{1}{2}}\right)'\right) = 2x + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}};$$

$$y'' = \left(x^2 + 3\sqrt{x}\right)'' = \left(2x + \frac{3}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right)' = 2 - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}.$$

б) найти y''' – это значит найти производную третьего порядка.

$$y''' = \left(2 - \frac{3}{4}x^{-\frac{3}{2}}\right)' = \frac{9}{8}x^{-\frac{5}{2}}$$

Пример 10.7. Составьте уравнение касательной к графику заданной функции $y = f\left(x\right)$ в точке x_0, если $y = x^2 e^{-x}$, $x_0 = 1$.

Сначала найдем значение $y_0\left(x_0\right) = 1^2 e^{-1} = e^{-1}$, тогда точка касания задается координатами $\left(1;\, e^{-1}\right)$.

Вычислим производную функции:

$$y' = \left(x^2 e^{-x}\right)' = 2xe^{-x} - x^2 e^{-x}.$$

Найдем значение производной в точке касания:

$$y'(x_0) = 2e^{-1} - e^{-1} = e^{-1}.$$

Как известно, уравнение касательной имеет вид:

$$y - y_0 = y_0'(x - x_0).$$

В нашем случае:

$$y - e^{-1} = e^{-1}(x-1) \text{ или } y = e^{-1}x.$$

Упражнения

10.3. Вычислите производные следующих функций:

1) $y = (2+x)\sqrt{3-x}$;

2) $y = \dfrac{x}{x^2-1}$;

3) $y = x^3 \ln x$;

4) $y = \dfrac{3x-7}{5-2x}$;

5) $y = \dfrac{2x^2+3x}{x^2-1}$;

6) $y = \dfrac{1-\sin x}{1+\sin x}$;

7) $y = x\,arctg 5x$;

8) $y = e^x \cos x$;

9) $y = e^x \sin x$;

10) $y = x\sqrt{1+x^2}$;

11) $y = e^{-2x}\cos x$

12) $y = \dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+9}}$;

13) $y = 2x^5 - \dfrac{1}{3x^3} + 4\sqrt[4]{x^3}$;

14) $y = 3x^5 - \dfrac{2}{3x^3} + 6\sqrt[3]{x^2}$;

15) $y = (x^3+2x)(\sin 3x + 2\sqrt{x})$;

16) $y = (4x^2+1)\,arctg 2x$;

17) $y = e^{\sin 5x} + \ln 3x$;

18) $y = \sin 2x \cdot \ln(x^2-3)$;

19) $y = e^{2x}(x^3-3x)$;

20) $y = \dfrac{tg 3x}{x^2-2x}$.

10.4. Вычислите значение производной данной функции в точке x_0 .

а) $f(x) = x^4 - 2x^3 + x,\ \ x_0 = -1;$

б) $f(x) = \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^2}{2} - 2x + \sqrt{3},\ \ x_0 = 3.$

10.5. Найдите уравнение касательной к графику функции $f(x)=2x^2+2$, которая проходит через точку $M(0;1)$.

10.6. Составьте уравнение касательной к графику функции $y=\ln(2e-x)$ в точке $x_0=e$.

10.7. При каких значениях b и c парабола $y=ax^2+bx+c$ касается прямой $y=3x-1$ в точке с абсциссой $x_0=1$?

10.3. Применение производной к исследованию функции

Пример 10.8. Найдите наибольшее и наименьшее значения функции на заданном отрезке:

$$y=\frac{x}{3}+\frac{3}{x},\ x\in[-5;-1].$$

Решение. Сначала продифференцируем заданную функцию:

$$y'=\left(\frac{x}{3}+\frac{3}{x}\right)'=\frac{1}{3}-\frac{3}{x^2}.$$

Затем найдем критические точки первого рода, приравняв производную к нулю:

$$\frac{1}{3}-\frac{3}{x^2}=0\Rightarrow\frac{x^2-9}{3x^2}=0\Rightarrow\begin{cases}x^2-9=0,\\3x^2\neq 0,\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x_1=3,\\x_2=-3,\end{array}\right.\\x\neq 0.\end{cases}$$

Таким образом, критическими точками первого рода являются $x_1=-3$, $x_2=0$, $x_3=3$. Точки $x_2=0$ и $x_3=3$ не принадлежат рассматриваемому интервалу $[-5;-1]$. Поэтому находим значение функции только в точке $x_1=-3$ и на концах интервала $[-5;-1]$:

$$y(-3)=\frac{-3}{3}+\frac{3}{-3}=-2;$$

$$y(-5)=\frac{-5}{3}+\frac{3}{-5}=\frac{-25-9}{15}=-\frac{34}{15}=-2\frac{4}{15};$$

$$y(-1)=\frac{-1}{3}+\frac{3}{-1}=-\frac{1}{3}-3=-3\frac{1}{3}.$$

Выбираем среди этих значений наибольшее и наименьшее:

$$\max_{[-5;\,-1]} y=-2, \text{ а } \min_{[-5;-1]} y=-3\frac{1}{3}.$$

Пример 10.9. Найдите интервалы монотонности и экстремумы функции

$$y=2x^3+3x^2-1.$$

Решение. Сначала найдем производную заданной функции:

$$y'=\left(2x^3+3x^2-1\right)'=6x^2+6x=6x(x+1).$$

Приравнивая производную к нулю, найдем критические точки:

$$6x(x+1)=0\Rightarrow\left[\begin{array}{l}6x=0,\\x+1=0,\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x_1=0,\\x_2=-1.\end{array}\right.$$

Исследуем знак первой производной слева и справа от каждой критической точки (рис.10.4).

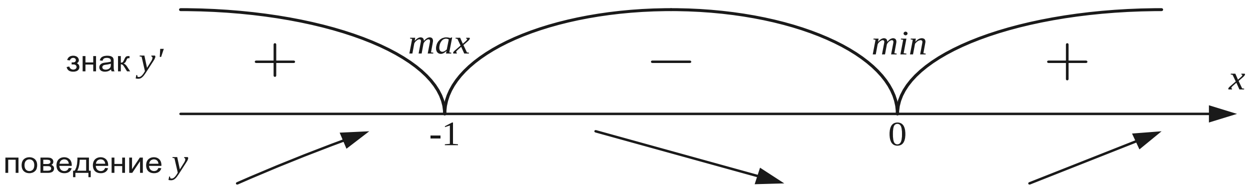


Рис. 10.4. **Знак первой производной**

Таким образом, получаем, что на интервалах $(-\infty;\,-1]$ и $[0;\,+\infty)$ функция $y=2x^3+3x^2-1$ возрастает, а на интервале $[-1;\,0]$ – убывает. Точки $x=-1$ и $x=0$ являются точками экстремума, а именно: точка $x=-1$ – точка максимума, а точка $x=0$ – точка минимума.

Значения функции в этих точках являются экстремальными значениями функции и равны:

$$y_{\max}(-1)=0,\ y_{\min}(0)=-1.$$

Пример 10.10. Проведите полное исследование функции

$$y=\frac{x^3+4}{x^2}$$

и постройте ее график.

Решение.

1) область определения функции – вся числовая ось OX, за исключением точки $x=0$, которая является точкой разрыва;

2) функция является функцией общего вида, поскольку

$$y(-x)=\frac{(-x)^3+4}{(-x)^2}=\frac{-x^3+4}{x^2}\neq\begin{cases}y(x),\\-y(x);\end{cases}$$

3) находим точки пересечения графика функции с осями координат. С осью OY график не пересекается, так как $x\neq0$, с осью OX пересекается в точке $\left(-\sqrt[3]{4};\,0\right)$;

4) функция в точке $x=0$ терпит разрыв 2-го рода, так как

$$\lim_{x\to0+0}\frac{x^2+4}{x^2}=+\infty;\ \lim_{x\to0-0}\frac{x^2+4}{x^2}=+\infty,$$

и следовательно, $x=0$ – это вертикальная асимптота;

5) найдем наклонные асимптоты: $y=kx+b$,

где $k=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\dfrac{f(x)}{x}$;

$b=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-kx\right)$;

$$k=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{x^3+4}{x^3}=1;\ b=\lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{x^3+4}{x^2}-x\right)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{4}{x^2}=0.$$

Наклонная асимптота: $y=x$;

6) найдем интервалы монотонности и экстремумы функции. Для этого находим критические точки:

$$y' = \frac{3x^2x^2 - 2x\left(x^3+4\right)}{x^4} = \frac{x^3-8}{x^3};$$

$$y' = 0 \text{ при } \frac{x^3-8}{x^3} = 0 \Rightarrow x = 2;$$

$y' = \infty$ при $x = 0$ (точка разрыва).

7) найдем интервалы вогнутости и выпуклости и точки перегиба. Определим критические точки с помощью второй производной:

$$y'' = \frac{3x^2x^3 - 3x^2\left(x^3-8\right)}{x^6} = \frac{24}{x^4};$$

$y'' \neq 0$;

$y'' = \infty$ при $x = 0$.

Следовательно, точек перегиба нет, график всюду вогнут, так как $y'' > 0$ для всех x $(x \neq 0)$.

Результаты исследования оформляем в виде таблицы (табл. 10.1).

Таблица 10.1

Результаты исследования функции $\boldsymbol{y = \frac{x^3+4}{x^2}}$

x	$(-\infty;0)$	0	$(0;2)$	2	$(2;+\infty)$
y'	+	не существует	-	0	+
y		не существует		3	
		экстремума нет		min	

Строим график функции $y = \frac{x^3+4}{x^2}$ (рис. 10.5).

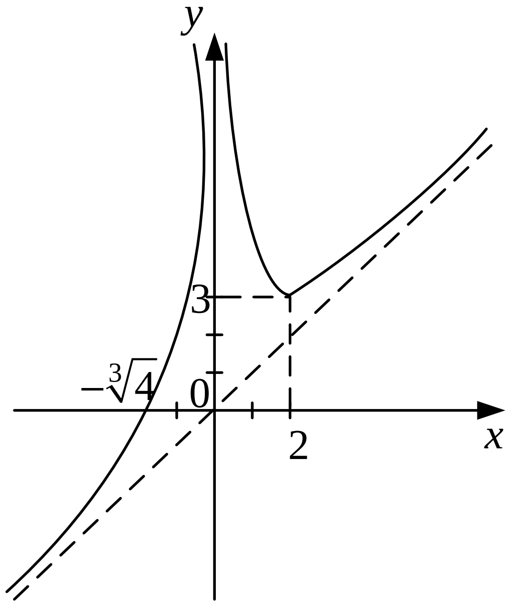


Рис. 10.5. **График функции** $\boldsymbol{y=\frac{x^3+4}{x^2}}$

Упражнения

10.8. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y=f\left(x\right)$ на отрезке $\left[a;b\right]$:

а) $f\left(x\right)=x^3-12x+7,\ \left[0;3\right]$;

б) $f\left(x\right)=3-x^2,\ \left[-1;3\right]$

в) $f\left(x\right)=x-\sin x,\ \left[-\pi;\pi\right]$;

г) $f\left(x\right)=2x^3+3x^2+1,\ \left[2;4\right]$;

д) $f\left(x\right)=\dfrac{x+1}{x-1},\ \left[0;4\right]$.

10.9. Исследуйте методами дифференциального исчисления функцию, используя результаты исследования, постройте ее график.

а) $y=\dfrac{x}{1+x^2}$;

б) $y=x^2+\dfrac{2}{x}$;

в) $y=\dfrac{x^2-1}{x^2+1}$;

г) $y=\dfrac{x^2-5}{x-3}$;

д) $y=\dfrac{2-4x^2}{1-4x^2}$;

е) $y=\dfrac{4x}{4+x^2}$.

Тема 11. Интеграл и его применение

11.1. Неопределенный интеграл

Первообразной для данной функции $y = f(x)$ называется такая функция $F(x)$, производная которой равна $f(x)$, то есть $F'(x) = f(x)$.

Пример 11.1. Дана функция $f(x) = x^2$. Необходимо найти функцию $F(x)$.

Из таблицы производных имеем:

$$\left(x^3\right)' = 3 \cdot x^2.$$

Следовательно, $x^2 = \dfrac{\left(x^3\right)'}{3} = \left(\dfrac{x^3}{3}\right)'$, тогда $F(x) = \dfrac{x^3}{3}$.

Существуют другие функции, производные от которых равны x^2.

$\left(\dfrac{x^3}{3}\right)' = x^2$, $\left(\dfrac{x^3}{3} + 5\right)' = x^2$, $\left(\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{1}{4}\right)' = x^2$ и так далее.

Следовательно, существует семейство функций, производные от которых равны x^2. Их можно записать в виде одного множества $\dfrac{x^3}{3} + C$, где C – произвольная постоянная (число).

Если $F(x)$ – одна из первообразных, то $F(x) + C$ – общий вид первообразной для функции $y = f(x)$ (это основное свойство первообразной) (табл. 11.1).

Таблица 11.1

Таблица первообразных элементарных функций

Функция $f(x)$	**Общий вид первообразной** $F(x) + C$
1	2
0	C
k, где k – постоянное число	$k \cdot x + C$

Окончание табл. 11.1

1	2
$x^n,\ n \neq -1$	$\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$x^{-1} = \dfrac{1}{x}$	$\ln x + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\dfrac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$
$\dfrac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$
e^x	$e^x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$

Правила нахождения первообразных

1) $\left(F(x) \pm G(x)\right)' = f(x) \pm g(x)$;

2) $\left(k \cdot F(x)\right)' = k \cdot F'(x) = k \cdot f(x)$, k – постоянное число;

3) $\left(\dfrac{1}{k} \cdot F(kx+b)\right)' = \dfrac{1}{k} \cdot F'(kx+b) = f(kx+b)$, где k, b – постоянные числа, причем $k \neq 0$.

Пример 11.2. Найдите общий вид первообразной для функций:

1) $x^4 + \dfrac{1}{x^2}$; 2) $\dfrac{1}{\cos^2 x} + \dfrac{1}{\sqrt{7x+2}}$.

Решение.

1) для $f(x) = x^4$ и $g(x) = \dfrac{1}{x^2}$ найдем $F(x)$ и $G(x)$.

По таблице первообразных (табл. 11.1) находим:

$$F(x)=\frac{x^{4+1}}{4+1}+C=\frac{x^5}{5}+C,\ G(x)=\frac{x^{-2+1}}{-2+1}+C=\frac{x^{-1}}{-1}+C=-\frac{1}{x}+C.$$

Тогда первообразной для функции $x^4+\frac{1}{x^2}$ по первому правилу нахождения первообразных является сумма первообразных:

$$F(x)+G(x)=\frac{x^5}{5}-\frac{1}{x}+C,$$

где C – произвольная постоянная.

2) для $f(x)=\frac{1}{\cos^2 x}$ и $g(x)=\frac{1}{\sqrt{7x+2}}$ найдем $F(x)$ и $G(x)$.

По таблице первообразных (табл. 11.1) имеем:

$$F(x)=tgx+C.$$

По третьему правилу нахождения первообразных первообразная для функции $g(x)=\frac{1}{\sqrt{7x+2}}$ равна:

$$\frac{1}{7}G(7x+2)=\frac{1}{7}\cdot 2\cdot\sqrt{7x+2}+C=\frac{2}{7}\sqrt{7x+2}+C.$$

Тогда, первообразной для функции $\frac{1}{\cos^2 x}+\frac{1}{\sqrt{7x+2}}$, согласно первому правилу нахождения первообразных, является сумма первообразных:

$$F(x)+G(x)=tgx+\frac{2}{7}\sqrt{7x+2}+C,$$

где C – произвольная постоянная.

Совокупность всех первообразных для функции $y=f(x)$ на промежутке X называется **неопределенным интегралом от функции** $f(x)$ и обозначается $\int f(x)dx$.

Символ $\int$ называют знаком интеграла, функцию $y=f(x)$ – подынтегральной функцией, $f(x)dx$ – подынтегральным выражением, переменную x – переменной интегрирования.

Операция нахождения неопределенного интеграла от некоторой функции называется *интегрированием этой функции*.

Интегрирование представляет собой операцию, обратную дифференцированию, поэтому результат вычисления неопределенного интеграла всегда можно проверить, взяв производную от $F(x)+C$, при этом должна получиться подынтегральная функция $f(x)$.

11.1.1. Основные свойства неопределенного интеграла

1. Неопределенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен сумме неопределенных интегралов от этих функций:

$$\int\left(f(x)\pm g(x)\right)dx=\int f(x)\,dx\pm\int g(x)\,dx.$$

2. Постоянный множитель можно выносить за знак интеграла:

$\int k\cdot f(x)dx=k\cdot\int f(x)\,dx$, где k – некоторое число.

3. Производная от неопределенного интеграла равна подынтегральной функции:

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x).$$

4. Дифференциал от неопределенного интеграла равен подынтегральному выражению:

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)\,dx.$$

11.1.2. Таблица основных неопределенных интегралов

1. $\int x^{\alpha}dx=\dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\,(\alpha\neq-1)$; при $\alpha=0$ имеем $\int dx=x+C$.
2. $\int\dfrac{dx}{x}=\ln|x|+C$.
3. $\int\sin x\,dx=-\cos x+C$.

4. $\int \cos x\,dx = \sin\ x + C$.

5. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$.

6. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$.

7. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$.

8. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\,x + C$.

9. $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a > 0$, $a \neq 1$.

10. $\int e^x\,dx = e^x + C$.

11. $\int tg\,x\,dx = -\ln|\cos x| + C$.

12. $\int ctg\,x\ dx = \ln|\sin x| + C$.

13. $\int \frac{dx}{\sin\ x} = \ln\ \left|\mathrm{tg}\frac{x}{2}\right| + C$.

14. $\int \frac{dx}{\cos\ x} = \ln\ \left|\mathrm{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right| + C$.

15. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\frac{x}{a} + C$, $a \neq 0$.

16. $\int \frac{dx}{a^2-x^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{a+x}{a-x}\right| + C$, $a \neq 0$.

17. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$, $a \neq 0$.

18. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin\frac{x}{a} + C$, $|x| < a$, $a \neq 0$.

19. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$.

20. $\int \sqrt{x^2+a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2+a^2} + \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2+a^2}\right| + C$.

21. $\int \sqrt{x^2-a^2}\,dx = \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{a^2}{2}\ln\left|x + \sqrt{x^2-a^2}\right| + C$.

11.2. Методы интегрирования

11.2.1. Непосредственное интегрирование

Метод непосредственного интегрирования является одним из основных методов. Он основан на таблице и свойствах неопределенного интеграла.

Пример 11.3. Необходимо найти $\int (x^4 - 4x^3 + 7x + 3)dx$.

Решение. Представляя интеграл от алгебраической суммы в виде суммы интегралов слагаемых, вынося постоянные множители за знаки интегралов и применяя формулы 2 и 3 таблицы основных интегралов, получим:

$$\int (x^4 - 4x^3 + 7x + 3)dx = \int x^4 dx - 4\int x^3 dx + 7\int x dx + 3\int dx =$$

$$= \frac{x^5}{5} - 4\frac{x^4}{4} + 7\frac{x^2}{2} + 3x + C = \frac{x^5}{5} - x^4 + 7\frac{x^2}{2} + 3x + C.$$

Замечание. Нет необходимости ставить произвольную постоянную после вычисления каждого интеграла, так как сумма произвольных постоянных есть также произвольная постоянная, которую обозначают одной буквой и записывают в окончательный ответ.

Пример 11.4. Найдите интеграл $\int \frac{x + 2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx$.

Решение. Запишем каждое слагаемое в виде степени. Затем, произведя почленное деление, представляя интеграл от алгебраической суммы в виде суммы интегралов слагаемых, вынося постоянный множитель за знак интеграла и применив формулу 1 таблицы основных интегралов, получим:

$$\int \frac{x + 2\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}} dx = \int \frac{x + 2x^{\frac{2}{3}}}{x^{\frac{1}{2}}} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx + 2\int x^{\frac{1}{6}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2\frac{x^{\frac{7}{6}}}{\frac{7}{6}} + C =$$

$$= \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{12}{7}x^{\frac{7}{6}} + C.$$

Пример 11.5. Найдите интеграл $\int\left(\frac{3x^2-2}{x}\right)^2 dx$.

$$\int\left(\frac{3x^2-2}{x}\right)^2 dx=\int\frac{9x^4-12x^2+4}{x^2}dx=\int\left(9x^2-12+4x^{-2}\right)dx=$$

$$=9\cdot\frac{x^3}{3}-12x+4\frac{x^{-1}}{-1}+C=3x^3-12x-\frac{4}{x}+C.$$

11.2.2. Интегрирование методом замены переменной (метод подстановки)

В основе метода замены переменной лежит следующее утверждение:

Если $\int f(x)dx=F(x)+C$, то $\int f(u(t))u'(t)dt=F(u(t))+C$.

Цель замены – подобрать функцию $x=u(t)$ так, чтобы, подставив ее вместо x в подынтегральное выражение $f(x)dx$, получить более простой интеграл $\int f(u(t))u'(t)dt$.

После его нахождения необходимо вернуться к первоначальной переменной.

Пример 11.6. Найдите интеграл $\int e^{3x-1}dx$.

$$\int e^{3x-1}dx=\left|\begin{array}{l} t=3x-1\\ dt=3dx\\ dx=\dfrac{dt}{3}\end{array}\right|=\frac{1}{3}\int e^t dt=\frac{1}{3}e^t+C=\frac{1}{3}e^{3x-1}+C.$$

Пример 11.7. Найдите интеграл $\int\frac{ln^3 x}{x}dx$.

$$\int\frac{ln^3 x}{x}dx=\left|\begin{array}{l} t=ln\,x\\ dt=\dfrac{1}{x}dx\end{array}\right|=\int t^3dt=\frac{t^4}{4}+C=\frac{ln^4 x}{4}+C.$$

11.2.3. Интегрирование по частям

Формула интегрирования по частям:

Если u, v – две дифференцируемые функции от x, то

$$\int u dv = uv - \int v du .$$

Классы функций, интегрируемых по частям и рекомендуемые разбиения

1 класс $\left.\begin{array}{l} \int P_n(x)\cos mx dx \\ \int P_n(x)\sin nx dx \\ \int P_n(x)a^{\alpha x}dx \\ \int P_n(x)e^{\alpha x}dx \end{array}\right\}$ $u = P_n(x)$, за dv выбрать все остальное

где $P_n(x)$ – полином степени n от x.

2 класс $\left.\begin{array}{l} \int P_n(x)\ln^m x dx \\ \int P_n(x)\arccos x dx \\ \int P_n(x)\arcsin x dx \\ \int P_n(x) arctg x dx \\ \int P_n(x) arcctg x dx \end{array}\right\}$ за $dv = P_n(x)dx$, а за u выбираем все остальное.

3 класс $\left.\begin{array}{l} \int a^{\alpha x}\cos mx dx \\ \int a^{\alpha x}\sin nx dx \\ \int e^{\alpha x}\cos mx dx \\ \int e^{\alpha x}\sin nx dx \end{array}\right\}$ разбиение произвольное.

Пример 11.8. Найдите интеграл $\int xe^{-2x}dx$.

$$\int xe^{-2x}dx = \left\| \begin{array}{c|c} u = x & du = dx \\ dv = e^{-2x}dx & v = \int e^{-2x}dx = -\frac{1}{2}e^{-2x} \end{array} \right\| = -\frac{1}{2}xe^{-2x} + \frac{1}{2}\int e^{-2x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}xe^{-2x} - \frac{1}{4}e^{-2x} + C = -\frac{e^{-2x}}{4}(2x+1) + C.$$

Упражнения

11.1. Найдите интегралы путем непосредственного интегрирования:

1. $\int x^2 dx$;
2. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x}}$;
3. $\int \left(3x^2 - 5x + 4x^3 - 1\right)dx$;
4. $\int \left(5\sqrt{x^9} - 3\sqrt[5]{x} + \frac{5}{x^4}\right)dx$;
5. $\int \left(\sqrt{x} - \sqrt[5]{x^3} + 7\right)dx$;
6. $\int \left(\frac{1}{7}\sqrt[4]{x^3} + \frac{x^2}{3} + 5x + 3\right)dx$;
7. $\int \left(\sqrt{x} + 2\sqrt[3]{x}\right)dx$;
8. $\int \left(1 + \frac{1}{5x} + \frac{3}{2x^2}\right)dx$;
9. $\int \frac{3x^2 + 2x - 7}{x}dx$;
10. $\int (x-1)(x+1)\,dx$;
11. $\int \frac{x^3 - 1}{x - 1}dx$;
12. $\int 2^x 3^x dx$;
13. $\int \frac{dx}{9x^2 + 4}$;
14. $\int \frac{dx}{4x^2 - 9}$;
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{9x^2 + 16}}$;
16. $\int \frac{dx}{\sqrt{4x^2 - 9}}$;
17. $\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}}$;
18. $\int \left(\frac{3}{1 + x^2} - \frac{4}{\sqrt{1 - x^2}}\right)dx$.

11.2. Найдите интегралы, используя метод замены переменной:

1. $\int (3x-5)^6 dx$;
2. $\int (2x-5)^7 dx$;
3. $\int \sqrt{2x+3}\,dx$;
4. $\int \sqrt[5]{2x+1}\,dx$;
5. $\int e^{-2x} dx$;
6. $\int e^{\sin x} \cos x dx$
7. $\int \frac{dx}{x(5 + \ln x)}$;
8. $\int \frac{\sin x dx}{2 + 7\cos x}$;
9. $\int \frac{dx}{\cos^2 x(3 - 2tgx)}$;
10. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\left(4 + ctg^2 x\right)}$;

11. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4+ctg^2 x}}$;

12. $\int \frac{dx}{\sin^2 x\sqrt{4-ctg^2 x}}$;

13. $\int \frac{x^2 dx}{5-x^3}$;

14. $\int \frac{xdx}{9-4x^4}$;

15. $\int \frac{xdx}{\sqrt{4x^2+5}}$;

16. $\int \frac{e^x dx}{\sqrt{e^x+2}}$;

17. $\int \frac{2x+7}{x^2+7x-3}dx$;

18. $\int \frac{x^3 dx}{9+x^8}$;

19. $\int \frac{7\cos xdx}{2+4\sin x}$;

20. $\int \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^8}}$;

21. $\int \frac{e^x dx}{81+e^{2x}}$;

11.3. Найдите интегралы, используя метод интегрирования по частям:

1. $\int (x+2)\cos xdx$;
2. $\int (x-4)\sin xdx$;
3. $\int xe^{-5x}dx$;
4. $\int x^2 e^{-x}dx$;
5. $\int x\ln xdx$;
6. $\int x\cdot 3^x dx$;
7. $\int \ln^2 xdx$;
8. $\int \arcsin xdx$;
9. $\int x\cdot \mathrm{arc}tgxdx$
10. $\int \ln(x+1)dx$;
11. $\int e^{2x}\sin 2xdx$;
12. $\int e^{2x}\cos 3xdx$.

11.3. Определенный интеграл

Интегральной суммой для функции $y=f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется выражение $\sum_{i=1}^{n} f\left(\hat{x}_i\right)\Delta x_i$, где n – число «элементарных» отрезков, на которые разбивается отрезок $[a;b]$; $\hat{x}_i$ – произвольная точка внутри отрезка $[x_{i-1};\,x_i]$, длина которого равна Δx_i.

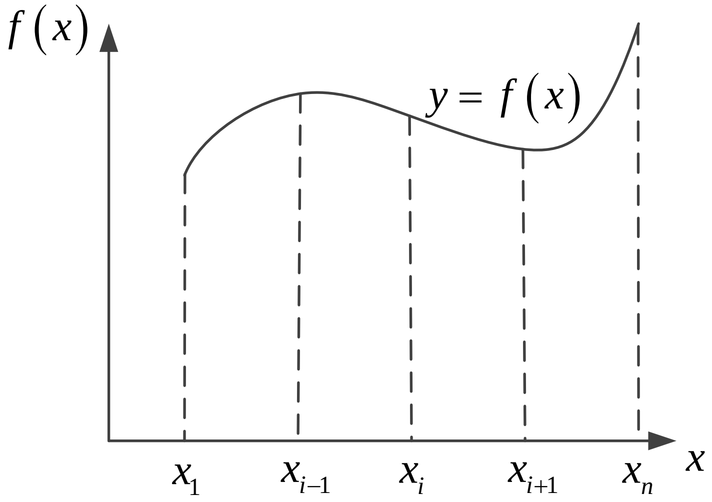


Рис. 11.1. **Графическое представление интегральной суммы**

Определенным интегралом функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ называется предел интегральной суммы при стремлении к нулю длины наибольшего «элементарного» отрезка

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\max|\Delta x_i|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\widehat{x}_i)\Delta x_i .$$

Число a называют *нижним пределом интегрирования,* b *– верхним пределом.*

11.3.1. Вычисление определенного интеграла

Определенный интеграл от непрерывной на отрезке $[a;b]$ функции $y = f(x)$ равен приращению первообразной этой функции на указанном промежутке:

$$\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b) = F(x)\Big|_a^b$$ (*формула Ньютона – Лейбница*).

Пример 11.9. Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}$.

Решение. Первообразной для функции $y=\frac{1}{\cos^2 x}$ на отрезке $[0;\frac{\pi}{4}]$ является функция $y=tgx$. Поэтому, применив формулу Ньютона – Лейбница, получим:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{dx}{\cos^2 x}=tgx\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=tg\frac{\pi}{4}-tg0=1.$$

11.3.2. Основные свойства определенного интеграла

1. При перестановке пределов интегрирования интеграл меняет знак на противоположный:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

2. Каковы бы ни были числа $a, b, c,$ имеет место равенство:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx.$$

3. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b Af(x)dx=A\int_a^b f(x)dx.$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы конечного числа непрерывных функций равен такой же алгебраической сумме определенных интегралов от этих функций:

$$\int_a^b \left(f_1(x)+f_2(x)+K+f_n(x)\right)dx=\int_a^b f_1(x)dx+\int_a^b f_2(x)dx+K+\int_a^b f_n(x)dx.$$

5. ***Теорема о среднем значении***. Определенный интеграл от непрерывной функции равен произведению длины промежутка интегрирования на значение подынтегральной функции при некотором промежуточном значении аргумента

$\int_a^b f(x)dx=f(c)(a-b)$, где c принадлежит $(a;b)$.

11.3.3. Замена переменной в определенном интеграле

Замену переменной в определенном интеграле выполняют по формуле:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(u(t))u'(t)dt,$$

где пределы интегрирования a, b, α, β связаны соотношением $a = u(\alpha)$, $b = u(\beta)$.

Замечание. В отличие от неопределенного интеграла возвращаться к первоначальной переменной при вычислении определенного интеграла не требуется.

Пример 11.10. Вычислите определенный интеграл $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+\sqrt{tgx}}{\cos^2 x} dx$.

Решение. Выполним замену переменной: $t^2 = tgx$, тогда $\frac{dx}{\cos^2 x} = 2tdt$;

новые пределы интегрирования: если $x = 0$, то $t = 0$, а если $x = \frac{\pi}{4}$, то $t = 1$.

Тогда: $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{2+\sqrt{tgx}}{\cos^2 x} dx = \int_0^1 (2+t)2tdt = 2\int_0^1 \left(t^2+2t\right)dt = 2\left(\frac{t^3}{3}+t^2\right)\Bigg|_0^1 = \frac{8}{3}$.

Пример 11.11. Вычислите определенный интеграл $\int_1^4 \frac{dx}{1+2\sqrt{x}}$.

Решение. Чтобы освободиться от иррациональности в подынтегральном выражении, выполним замену $\sqrt{x} = t$. Отсюда $x = t^2$, $dx = 2tdt$. Тогда новые пределы интегрирования: если $x = 1$, то $t = 1$; если $x = 4$, то $t = 2$.

$$\int_1^4 \frac{dx}{1+2\sqrt{x}} = \int_1^2 \frac{2tdt}{1+2t} = \int_1^2 \frac{(1+2t)-1}{1+2t} dt = \int_1^2 dt - \int_1^2 \frac{dt}{1+2t} =$$

$$= t\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln|1+2t|\Big|_1^2 = 1 + \frac{1}{2}\ln\frac{3}{5}.$$

Пример 11.12. Вычислите определенный интеграл $\int_0^1 \frac{arctgx + x}{1+x^2}dx$.

Решение. Разобьем исходный интеграл $\int_0^1 \frac{arctgx + x}{1+x^2}dx$ на сумму двух интегралов

$$\int_0^1 \frac{arctgx + x}{1+x^2}dx = \int_0^1 \frac{arctgx}{1+x^2}dx + \int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx$$

и каждый вычислим отдельно.

$$\int_0^1 \frac{arctgx}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{c} t = arctgx \\ dt = \dfrac{dx}{1+x^2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 0 \\ x = 1 \Rightarrow t = \dfrac{\pi}{4} \end{array} \right| = \int_0^{\pi/4} tdt = \frac{t^2}{2}\Bigg|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{16} - 0\right) = \frac{\pi^2}{32};$$

$$\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx = \left| \begin{array}{l} t = 1+x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \dfrac{dt}{2} \\ x = 0 \Rightarrow t = 1 \\ x = 1 \Rightarrow t = 2 \end{array} \right| = \frac{1}{2}\int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\left(\ln|t|\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{2}\left(\ln 2 - \ln 1\right) = \frac{1}{2}\ln 2.$$

Таким образом, $\int_0^1 \frac{arctgx + x}{1+x^2}dx = \frac{\pi^2}{32} + \frac{1}{2}\ln 2$.

11.3.4. Формула интегрирования по частям

Формула интегрирования по частям в определенном интеграле имеет вид:

$$\int_a^b u \cdot dv = u \cdot v\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du.$$

Пример 11.13. Вычислите $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2xdx$.

Решение. $\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2xdx$ вычислим, используя формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2xdx=\left\|\begin{array}{c|c} u=x-\dfrac{\pi}{2} & du=dx \\ dv=\cos 2xdx & v=\int\cos 2xdx=\dfrac{1}{2}\sin 2x\end{array}\right\|=$$

$$=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2xdx=\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\left.\frac{\sin 2x}{2}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\left.\frac{\cos 2x}{4}\right|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi-2}{8}.$$

Пример 11.14. Вычислите $\int\limits_1^e x^3\ln xdx$.

Решение. $\int\limits_1^e x^3\ln xdx$ вычислим, используя формулу интегрирования по частям в определенном интеграле.

$$\int\limits_1^e x^3\ln xdx=\left\|\begin{array}{c|c} u=\ln x & du=\dfrac{dx}{x} \\ dv=x^3dx & v=\dfrac{x^4}{4}\end{array}\right\|=\left.\left(\frac{x^4}{4}\ln x\right)\right|_1^e-\frac{1}{4}\int\limits_1^e x^4\,\frac{dx}{x}=\left.\left(\frac{x^4}{4}\ln x\right)\right|_1^e-$$

$$-\frac{1}{4}\int\limits_1^e x^3dx=\frac{1}{4}\left(e^4\ln e-1^4\ln 1\right)-\left.\left(\frac{1}{4}\cdot\frac{x^4}{4}\right)\right|_1^e=\frac{1}{4}e^4-\frac{1}{16}\left(e^4-1\right)=\frac{3}{16}e^4+\frac{1}{16}=$$

$$=\frac{1}{16}\left(3e^4+1\right).$$

Упражнения

11.4. Вычислите определенные интегралы:

1) $\int_1^3 xdx$;

2) $\int_1^2 \left(4+\frac{1}{x^3}-x\right)dx$;

3) $\int_1^2 \left(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{x^2}\right)dx$;

4) $\int_0^2 \left(x^2+2x\right)dx$;

5) $\int_1^2 (2x-1)^2\,dx$;

6) $\int_0^1 \frac{x^3dx}{x^2+1}$;

7) $\int_{-1}^1 2x\left(x^2+1\right)^4 dx$;

8) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin 4xdx$;

9) $\int_0^{\pi} \cos^2 xdx$;

10) $\int_0^1 \left(e^x-1\right)^{10} e^x dx$;

11) $\int_0^{\pi} \cos x \sin xdx$

12) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\sin^3 x}dx$;

13) $\int_{-1}^0 \frac{tg\,(x+1)}{\cos^2(x+1)}dx$;

14) $\int_1^e \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$;

15) $\int_0^1 x\sqrt{1+2x^2}dx$.

11.5. Вычислите определенные интегралы:

1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\cos xdx$;

2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin xdx$;

3) $\int_0^{2\pi} (2x-5)\cos 2xdx$;

4) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} (4-16x)\sin 4xdx$;

5) $\int_0^{\pi} x^2 \sin xdx$;

6) $\int_0^1 xe^{2x}dx$;

7) $\int_1^2 x\ln xdx$;

8) $\int_1^3 (x+1)e^x dx$;

9) $\int_0^1 x\ln(x+1)dx$;

10) $\int_0^{\pi} x\sin\frac{x}{2}dx$;

11) $\int_0^1 arctgxdx$

12) $\int_1^3 \ln xdx$;

13) $\int_1^2 \ln(x+2)dx$;

14) $\int_1^e (x+1)\ln xdx$.

11.4. Приложения определенного интеграла

11.4.1. Вычисление площадей плоских фигур

Площадь фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$ (функция расположена выше оси OX), осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 11.2 а):

$$S = \int_a^b f(x)dx.$$

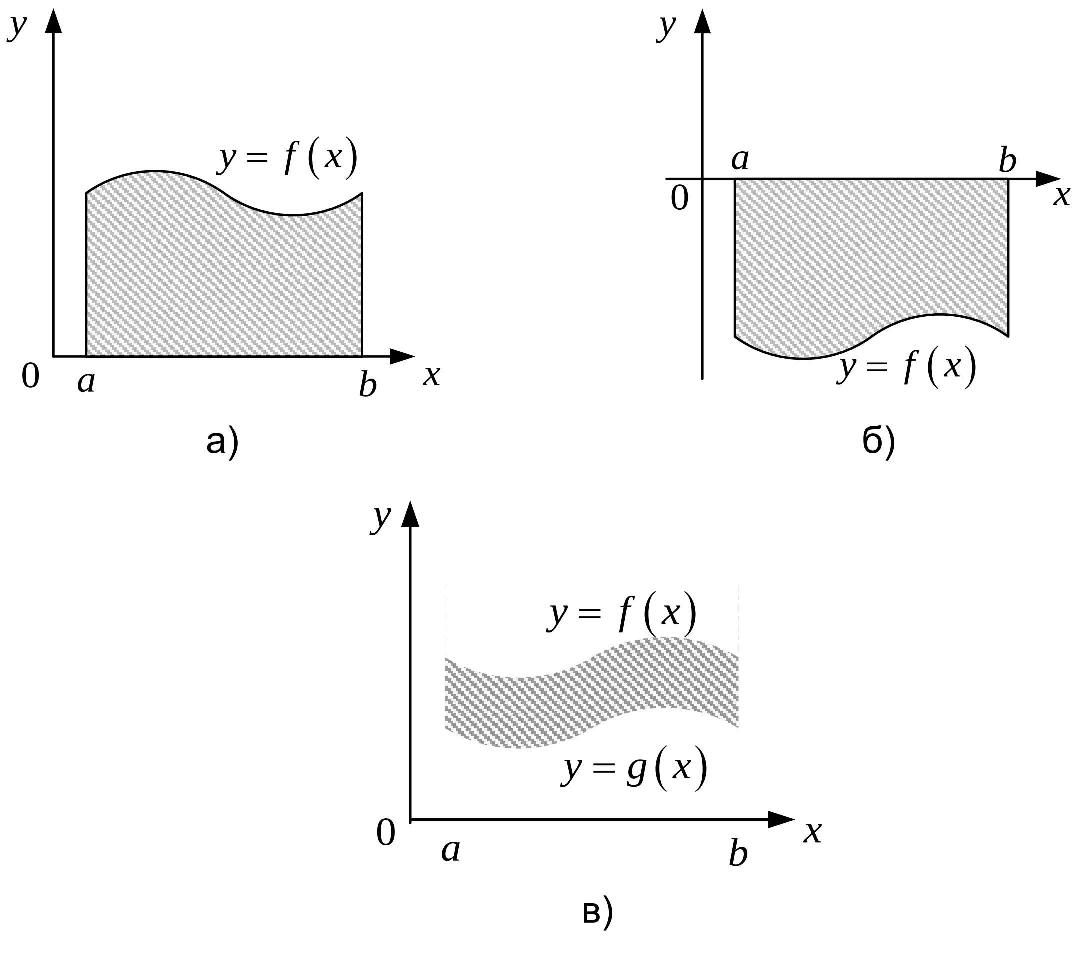


Рис. 11.2. **Виды фигур, ограниченных линиями $y = f(x)$ и $y = g(x)$**

Площадь фигуры, ограниченной функцией $y = f(x)$ (функция расположена ниже оси OX), осью OX и прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 11.2 б):

$$S = -\int_a^b f(x)dx$$

Площадь фигуры, ограниченной функциями $y = f(x)$ и $y = g(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$ (функция $y = f(x)$ расположена выше функции $y = g(x)$) (рис. 11.2 в):

$$S = \int_a^b \left(f(x) - g(x) \right) dx.$$

Пример 11.15. Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$.

Решение. Сначала построим фигуру, ограниченную линиями $y = e^x$, $y = e^{-x}$, $x = 1$, $x = -1$, $y = 0$ (рис. 11.3).

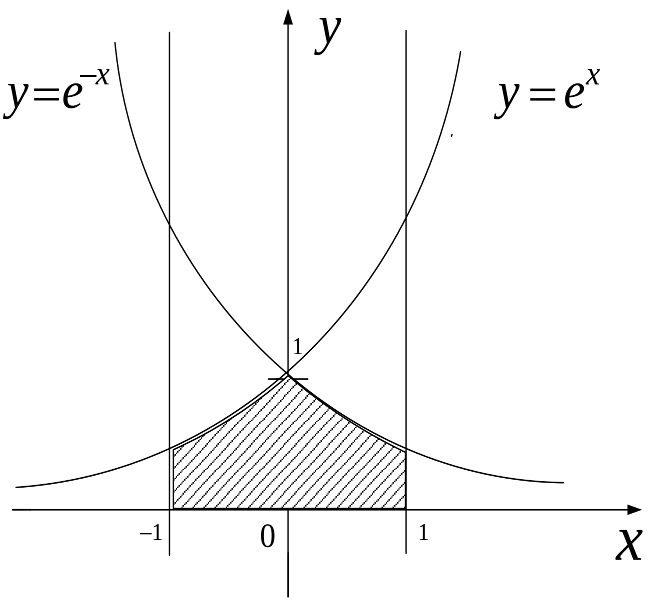


Рис. 11.3. **Фигура, ограниченная заданными линиями**

$$S = 2\int_0^1 e^{-x} dx = -2\left(e^{-x}\right)\Big|_0^1 = -2\left(\frac{1}{e} - 1\right) = 2\left(1 - \frac{1}{e}\right) = 2\frac{e-1}{e} \text{ (кв. ед.).}$$

Упражнения

11.6. Вычислите площадь фигуры, ограниченной заданными линиями

1) $y = \dfrac{5}{x}$, $y = 6 - x$;

2) $y = \dfrac{8}{x}$, $y = x^2$, $x = 4$;

3) $y = 2x - x^2$, $y = x$

4) $y = (x+1)^2$, $y^2 = x+1$;

5) $y = 2\sqrt{x}$, $6 - y = 0$, $x = 0$;

6) $y = \sqrt{4 - x^2}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$;

7) $y = \ln x$, $y = 0$, $x = 2$;

8) $y = (x-4)^2$, $y = 16 - x^2$, $y = 0$;

9) $y = 4x - x^2$, $y = -x$;

10) $y = \dfrac{1}{x^2}$, $y = x^2$, $x = 2$.

11.4.2. Вычисление объемов тел вращения

Объем тела, полученного в результате вращения вокруг оси OX криволинейной трапеции, ограниченной графиком непрерывной и неотрицательной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a;b]$ (рис. 11.4), вычисляется по формуле:

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx.$$

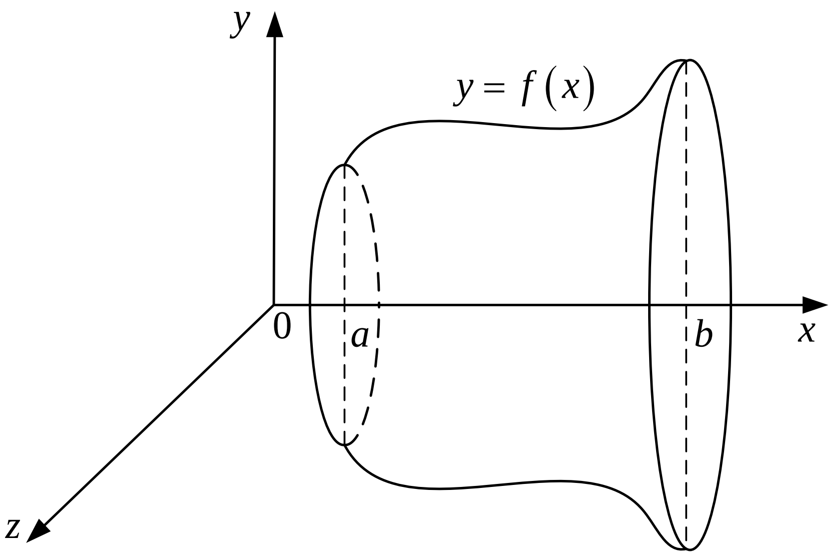


Рис. 11.4. **Тело вращения**

Пример 11.16. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной заданными линиями $y = e^x$, $y = e^{2x}$, $x = 2$.

Решение. Начертим рисунок согласно условию задания (рис. 11.5).

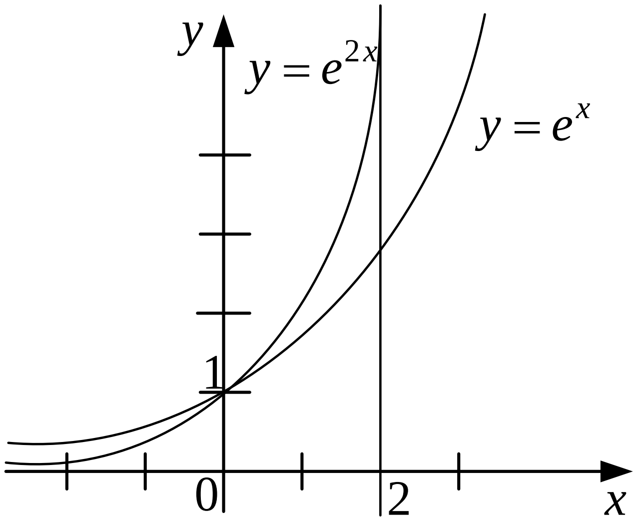


Рис. 11.5. **Фигура, ограниченная линиями $y = e^x$, $y = e^{2x}$ и $x = 2$**

Объем тела вращения V_x находим по формуле:

$$V_x = \pi\int_0^2\left(e^{4x} - e^{2x}\right)dx = \pi\left(\frac{e^{4x}}{4} - \frac{e^{2x}}{2}\right)\Bigg|_0^2 = \pi\left(\frac{e^4}{4} - \frac{e^2}{2}\right) - \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) =$$

$$= \frac{\pi\left(e^2 - 1\right)^2}{4}\left(e\partial^2\right).$$

Упражнения

11.7. Вычислите объем тела, образованного вращением вокруг оси OX фигуры, ограниченной заданными линиями:

1) $xy = 3,\ x + y = 4$;
2) $y = 0,\ y = 2 - x,\ y = \sqrt{x}$;
3) $y = x^2,\ x = 2,\ y = 0$;
4) $xy = 4,\ x = 1,\ x = 4,\ y = 0$;
5) $y = 5\cos x,\ y = \cos x,\ 0 \le x \le \frac{\pi}{2}$;
6) $x + y = 2,\ y = x^2$;
7) $y = 0,\ y = 2x^2 + 1,\ x = -1,\ x = 1$;
8) $y = 2x - x^2,\ y = x$;
9) $y = x^2,\ y = \frac{x^2}{2},\ y = 2x$;
10) $y = 3\sin x,\ y = \sin x,\ 0 \le x \le \pi$.

Тема 12. Элементы комбинаторики

Приведем наиболее часто используемые формулы комбинаторики.

Перестановками называют комбинации, состоящие из одних и тех же n различных элементов и отличающиеся только порядком их расположения. Число всех возможных перестановок

$$P_n = n!,\ \text{где}\ n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n.$$

По определению полагают $0! = 1$.

Размещениями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются либо составом элементов, либо их порядком. Число всех возможных размещений вычисляется по формуле:

$$A_n^m = n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)\ \text{или}\ A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!};$$

$$A_n^0 = 1.$$

Сочетаниями называют комбинации, составленные из n различных элементов по m элементов, которые отличаются хотя бы одним элементом. Число сочетаний может быть вычислено по формуле:

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\cdot \ldots \cdot (n-m+1)}{1\cdot 2\cdot \ldots \cdot m}\ \text{или}\ C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

В частности, $C_n^0 = C_n^n = 1$, $C_n^1 = n$.

Для вычисления C_n^m часто удобно использовать формулу:

$$C_n^m = C_n^{n-m}.$$

Например, $C_5^4 = C_5^1 = 5$.

Рассмотрим примеры использования формул комбинаторики.

Пример 12.1. Для ведения собрания нужно избрать президиум в составе трех человек из тридцати: председатель, секретарь и член президиума. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Из множества собравшихся (тридцать человек) необходимо выбрать упорядоченное множество из трех человек (председатель, секретарь, член президиума), то есть имеет место размещение из 30 по 3:

$$A_{30}^{3}=30\cdot 29\cdot 28=24\,360 \text{ способов.}$$

Пример 12.2. Собранию из 30 человек необходимо выбрать 3 делегата на конференцию. Сколькими способами это можно сделать?

Решение. Из множества в 30 человек нужно выбрать неупорядоченное множество из 3 человек. Это можно сделать

$$C_{30}^{3}=\frac{30\cdot 29\cdot 28}{1\cdot 2\cdot 3}=4\,060 \text{ способами.}$$

Пример 12.3. Вычислите:

а) $\dfrac{P_5+P_4}{P_3}=\dfrac{5!+4!}{3!}=\dfrac{4!(5+1)}{3!}=4\cdot 6=24$;

б) $\dfrac{A_{12}^{4}\cdot P_7}{A_{11}^{9}}=\dfrac{\dfrac{12!\cdot 7!}{(12-4)!}}{\dfrac{11!}{(11-9)!}}=\dfrac{12!\cdot 7!\cdot 2!}{8!\cdot 11!}=\dfrac{12\cdot 2}{8}=3$;

Пример 12.4. Докажите, что $C_6^3+C_6^2=C_7^3$.

$$C_6^3+C_6^2=\frac{6!}{3!\cdot 3!}+\frac{6!}{2!\cdot 4!}=\frac{4\cdot 5\cdot 6}{6}+\frac{5\cdot 6}{2}=20+15=35;$$

$$C_7^3=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=\frac{5\cdot 6\cdot 7}{6}=35.$$

Таким образом, $35=35$, что и требовалось доказать.

Пример 12.5. Сколькими способами можно составить список из пяти учеников?

$$P_5=5!=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120 \text{ способами.}$$

Пример 12.6. Сколько существует трехзначных чисел, все цифры которых нечетные и различные?

$$A_5^3=\frac{5!}{(5-3)!}=\frac{5!}{2!}=3\cdot 4\cdot 5=60 \text{ чисел.}$$

Пример 12.7. На плоскости расположены 25 точек так, что никакие три из них не лежат на одной прямой. Сколько существует треугольников с вершинами в этих точках?

$$C_{25}^{3}=\frac{25!}{3!\cdot 22!}=\frac{23\cdot 24\cdot 25}{6}=2\,300 \text{ треугольников.}$$

Пример 12.8. В группе 15 девушек и 12 юношей. Для дежурства необходима команда из трех девушек и четырех юношей. Сколько существует способов составить дежурную команду?

$$C_{15}^{3}\cdot C_{12}^{4}=\frac{15!}{3!\cdot 12!}\cdot\frac{12!}{4!\cdot 8!}=\frac{13\cdot 14\cdot 15\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 12}{6\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=225\,225 \text{ способов.}$$

Пример 12.9. Решите уравнение $A_x^2+C_x^1=256$.

$$\frac{x!}{(x-2)!}+\frac{x!}{(x-1)!}=256,$$

$$x(x-1)+x=256,$$

$$x^2=256,\ x=\pm 16.$$

Ответ: $x=16$.

Упражнения

12.1. Вычислите:

а) $\dfrac{P_5+P_6}{P_4}$;

б) $\dfrac{P_{12}-P_{11}}{11P_{10}}$;

в) $C_8^4+C_8^3$;

г) $\dfrac{A_{13}^3}{A_{14}^4-A_{13}^4}$;

д) $\dfrac{A_{15}^4+A_{14}^5}{A_{15}^3}$;

е) $C_4^2+C_4^0$;

ж) $\dfrac{A_{15}^{12}}{A_{16}^3\cdot P_{12}}$.

12.2. Решите уравнение:

1) $A_x^2=20$;

2) $A_{x+1}^2=156$;

3) $A_{x-1}^2-C_x^1=79$;

4) $3C_{x+1}^2+2x=4A_x^2$;

5) $A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101$;

6) $C_x^{15}=C_x^6$;

7) $C_{30}^7+C_{30}^6=C_{31}^x$;

8) $C_{x+2}^3=7(x+2)$.

12.3. Сколькими способами можно:

а) расставить шесть книг на одной полке;

б) в коробке положить в ряд десять разных конфет одинаковой формы;

в) рассадить за одним столом восемь человек?

12.4. Сколько различных пятизначных чисел можно записать с помощью цифр 0, 1, 3, 5, 7, если каждую из них можно использовать только один раз?

12.5. Из города $А$ в город $Б$ ведут шесть дорог, а из города $Б$ в город $В$ – четыре дороги. Сколькими способами можно проехать из города $А$ в город $В$?

12.6. Сколькими способами среди десяти спортсменов, участвующих в соревнованиях, могут распределиться три призовых места?

12.7. В группе изучают девять предметов. Дневное расписание содержит четыре пары. Сколькими способами можно составить дневное расписание?

12.8. Сколько существует правильных дробей, числитель и знаменатель которых – простые числа не больше 30?

12.9. Сколько существует четырехзначных чисел, все цифры которых различны и четны?

12.10. Из восьми рабочих необходимо пятерых выделить для выполнения некоторого задания. Сколько существует способов сделать это?

12.11. Сколькими способами группу из десяти туристов можно разместить на четырехместной и шестиместной лодках?

12.12. В отряде семь офицеров и двадцать рядовых. Сколькими способами можно сформировать группу из трех офицеров и двенадцати рядовых?

12.13. Сколькими способами можно выбрать восемь карт из полной колоды, содержащей 52 карты, так, чтобы среди них было ровно два туза?

12.14. На полке стоят десять книг, три из которых одного автора. Сколько существует способов расставить книги на полке так, чтобы книги одного автора стояли рядом?

12.15. В группе двадцать студентов. Для проведения деловой игры преподавателю необходимо объединить их в группы по пять человек в каждой. Сколькими способами это можно сделать?

Тема 13. Планиметрия

Планиметрия – это раздел геометрии, изучающий свойства фигур на плоскости.

13.1. Точка, луч, отрезок, прямая на плоскости

Геометрия – это наука о геометрических фигурах и их свойствах. Самая простая геометрическая фигура – ***точка***. *Точки* обозначаются большими буквами латинского алфавита. Например, на рис. 13.1 обозначены две точки A и B.

Прямая – это линия бесконечно продолжающаяся в обе стороны.

Прямая может обозначаться AB или BA, если она проведена через две точки, или a (рис. 13.1)

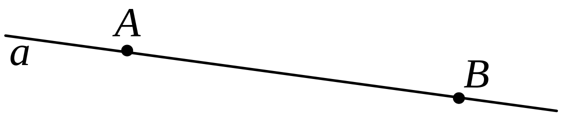


Рис. 13.1. **Прямая AB**

Отрезком AB называется та часть прямой, которая состоит из точек A и B и всех точек, лежащих между ними (рис. 13.2). Точки A и B называются концами отрезка. Все другие точки этого отрезка – его внутренние точки. Отрезок обозначается AB или BA.

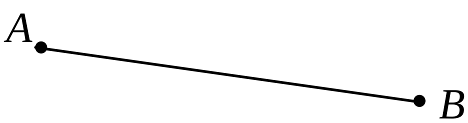


Рис. 13.2. **Отрезок AB**

Каждый отрезок имеет определенную длину – это расстояние между его концами.

Луч – это часть прямой, которая имеет начало (например, точка A на рис. 13.3), но не имеет конца, ее можно бесконечно продолжать только в одну сторону.

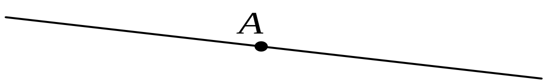


Рис. 13.3. **Луч**

Две прямые называются *параллельными,* если они нигде не пересекаются. Обозначается $a \parallel b$ (рис. 13.4).

Перпендикулярные прямые – прямые, которые пересекаются под углом 90^0. Обозначаются $c \perp d$ (рис. 13.4.).

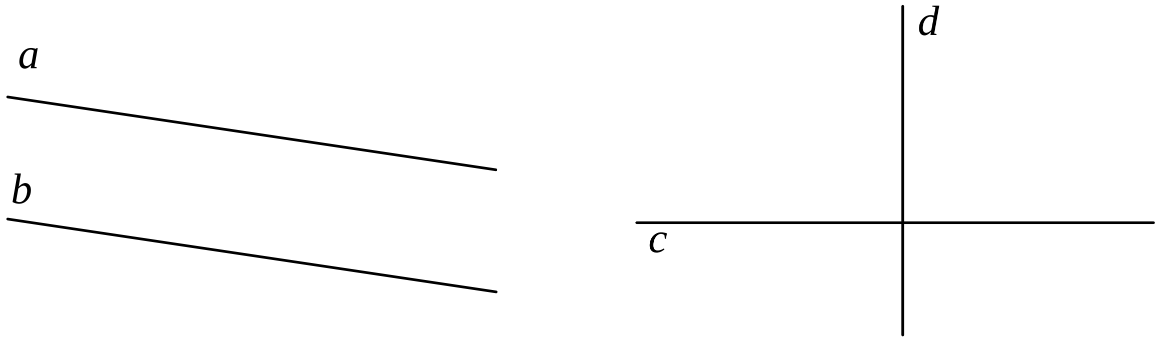


Рис. 13.4. **Параллельные и перпендикулярные прямые**

Если прямые пересекаются под углом, не равным 90^0, то они называются *пересекающимися прямыми,* и говорят, что прямые пересекаются в точке O, а эта точка называется *точкой пересечения прямых* (рис. 13.5).

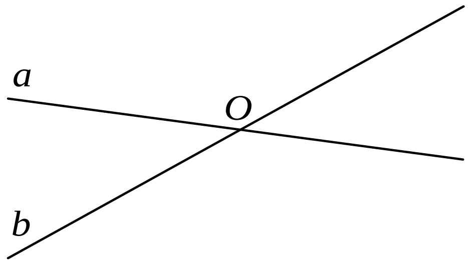


Рис. 13.5. **Пересекающиеся прямые**

Упражнения

13.1. Нарисуйте прямую AB и пять точек, две из которых лежат на прямой, а три нет.

13.2. Нарисуйте два отрезка:

а) AB и CD, которые пересекаются в точке O;

б) FR и NP, которые не пересекаются и не являются параллельными;

в) которые параллельны, обозначьте их самостоятельно.

13.3. Нарисуйте две прямые, которые перпендикулярны. Обозначьте их.

13.4. Постройте прямую CM. Отметьте на этой прямой точки A и B так, чтобы выполнялись условия: точка A лежит между точками C и M и точка M лежит между точками C и B. Напишите, какой луч совпадает с лучом AM и какой луч является продолжением луча AM.

13.5. Проведите произвольную прямую a, и луч KB, который ее пересекает.

13.2. Углы и их меры

Часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом, называется ***углом***.

Лучи, ограничивающие угол, называются *сторонами*, а их общее начало – *вершиной* (рис. 13.6).

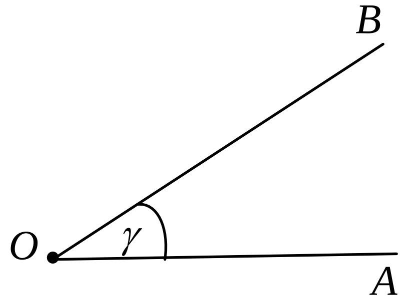


Рис. 13.6. **Угол BOA**

Углы в геометрии могут обозначаться по-разному. Допустимо обозначение угла только одной (большой) буквой латинского алфавита – *вершина угла*. Можно также обозначать угол тремя буквами с вершиной посередине. Возможна также запись с использованием букв греческого алфавита внутри угла.

Например, $\angle O = \angle AOB = \angle BOA = \angle\gamma$ (см. рис. 13.6).

Развернутым углом называется угол, градусная мера которого составляет 180^0 (рис. 13.7).

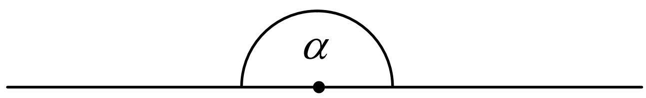
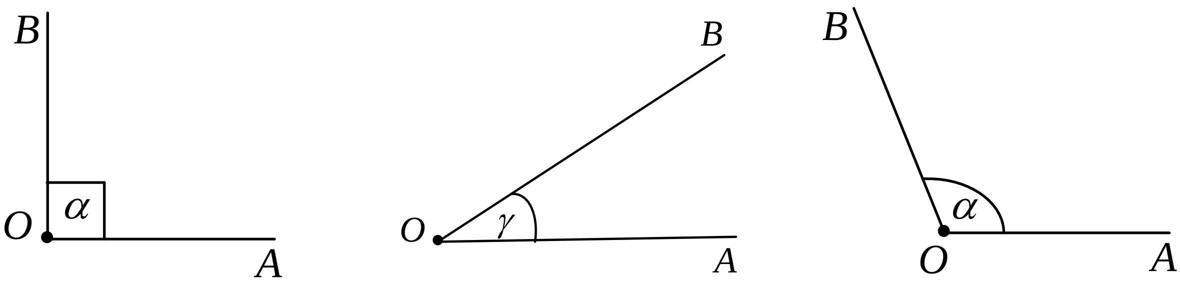


Рис. 13.7. **Развернутый угол**

Угол называется *прямым*, если его градусная мера равна 90^0, *острым* – если он меньше прямого, *тупым* – если он больше прямого, но меньше развернутого (рис. 13.8).



Прямой угол **Острый угол** **Тупой угол**

Рис. 13.8. **Виды углов**

Смежные углы – углы, имеющие общую сторону (рис. 13.9). Смежные углы в сумме составляют 180^0.

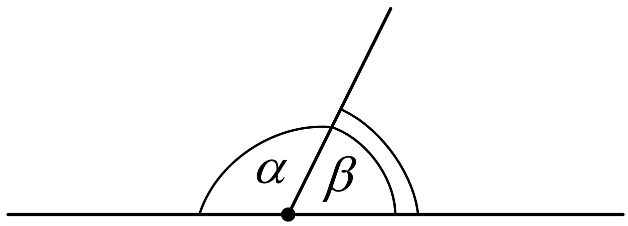


Рис. 13.9. **Смежные углы**

Вертикальные углы – это углы, которые образуются при пересечении любых двух прямых. Вертикальные углы равны.

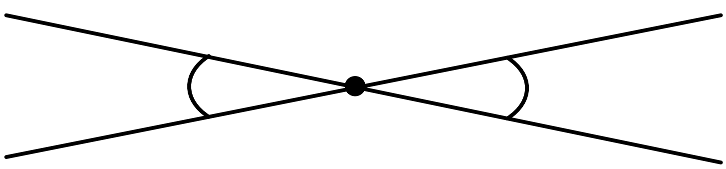


Рис. 13.10. **Вертикальные углы**

Пример 13.1. На рисунке 13.11. изображены углы. $\angle 1 = 120^0$. Найдите градусную меру всех изображенных на рисунке углов.

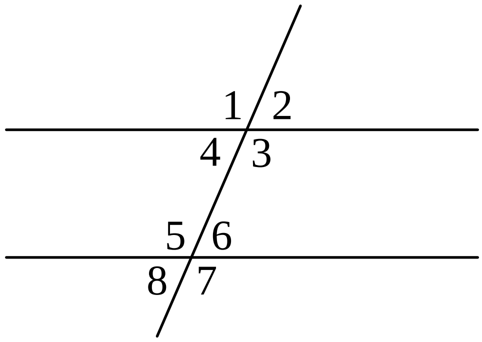


Рис. 13.11. **Углы**

Решение. $\angle 1+\angle 2=180^0$ как смежные, тогда $\angle 1=\angle 3=120^0$, $\angle 2=60^0$ и $\angle 2=\angle 4=60^0$ как накрест лежащие при параллельных прямых.

$\angle 4+\angle 5=180^0$ и $\angle 3+\angle 6=180^0$ как внутренние односторонние. Откуда $\angle 5=120^0$ и $\angle 6=60^0$. Аналогично через равенство внутренних накрест лежащих углов получаем: $\angle 6=\angle 8=60^0$, $\angle 5=\angle 7=120^0$.

Ответ: $\angle 1=\angle 3=\angle 5=\angle 7=120^0$ и $\angle 2=\angle 4=\angle 6=\angle 8=60^0$

Пример 13.2. Один из смежных углов в два раза больше другого. Найдите градусную меру этих углов.

Решение. Пусть величина первого угла – x, тогда величина другого – $2x$. Сумма обоих углов составит $x+2x=3x$, что равно 180^0 Составим и решим уравнение: $3x=180^0$. Тогда $x=60^0$ и $2x=120^0$.

Ответ: 60^0 и 120^0.

Упражнения

13.6. Постройте произвольный угол с вершиной в точке K.

13.7. Постройте три угла: прямой, острый и тупой, обозначьте их при помощи букв греческого алфавита: α, β, γ.

13.8. Нарисуйте пересекающиеся прямые, выпишите пары вертикальных углов и пары смежных.

13.9. Дан луч Ok (рис. 13.12).

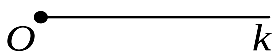


Рис. 13.12. **Луч**

Проведите лучи h и p с началом в точке O так, чтобы угол kp был развернутым. Назовите все получившиеся углы и запишите их обозначения.

13.10. Из приведенных утверждений выберите те, которые верны и которые неверны, и занесите их в две колонки таблицы.

Утверждения:

а) две прямые обязательно пересекаются;

б) на прямой может быть бесконечное множество точек и отрезков;

в) луч всегда пересекает прямую;

г) два смежных угла могут быть одновременно острыми;

д) из двух смежных углов один может быть острым, другой тупым;

е) при пересечении двух прямых может быть три вертикальных угла;

ж) если две прямые перпендикулярны, то они пересекаются под прямым углом;

з) если две прямые пересекаются, то в таком пересечении всегда существуют смежные углы.

Верные утверждения	Неверные утверждения

13.11. Рассчитайте величины всех углов на рис. 13.11, если $\angle 1 = 30^0$.

13.12. Заполните пропуски.

Данный угол	20^0	50^0	60^0	90^0	120^0	165^0
Вертикальный ему угол						
Смежный с ним угол						

13.3. Треугольник

Треугольник – это замкнутая ломаная из трех звеньев (рис. 13.13).

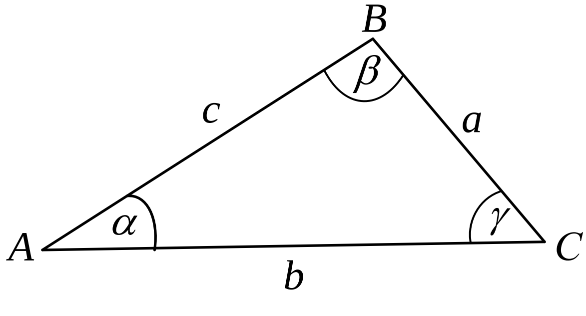


Рис. 13.13. **Треугольник ABC**

A, B, C – *вершины* треугольника, AB, BC, CA – *стороны* треугольника. Таким образом, каждый треугольник имеет три вершины и три стороны. На письме треугольник обозначается так: ΔABC.

Для произвольного треугольника выполняются следующие утверждения.

1. *Неравенство треугольника*. Каждая сторона треугольника меньше суммы двух других его сторон, но больше модуля их разности. Например: $|a-b| < c < a+b$.

2. Сумма углов треугольника равна 180^0: $\alpha+\beta+\gamma=180^0$.

3. Внешний угол треугольника (рис. 13.14) равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним: $\delta=\alpha+\beta$.

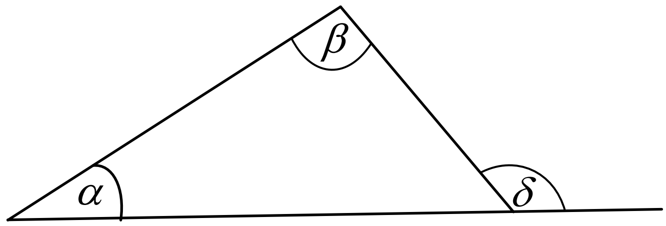


Рис. 13.14. **Треугольник**

4. Теорема косинусов: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\gamma$ (см. рис. 13.13).

5. Теорема синусов: $\dfrac{a}{sin\,A}=\dfrac{b}{sin\,B}=\dfrac{c}{sin\,C}=2R$, где R – радиус описанной окружности (рис. 13.15.)

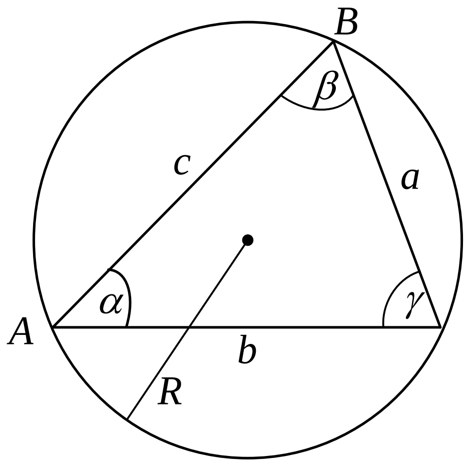
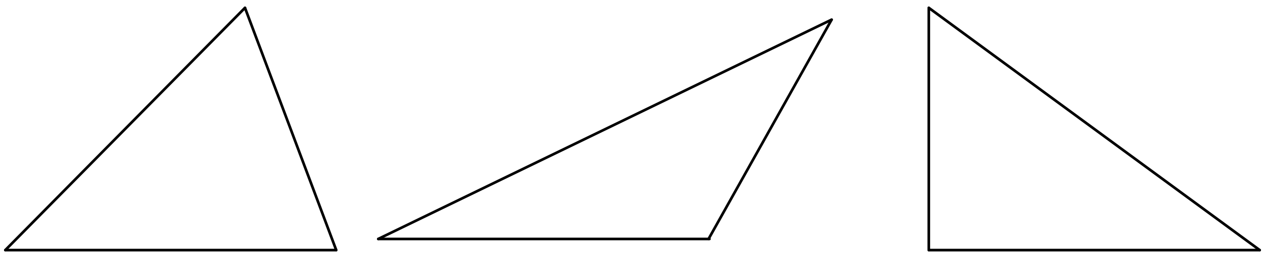


Рис. 13.15**. Окружность, описанная около треугольника**

Если в треугольнике все углы острые, то он называется *остроугольным* (рис. 13.16).

Если в треугольнике есть тупой угол, то такой треугольник называется *тупоугольным* (рис. 13.16).

Если треугольник имеет прямой угол, то такой треугольник называется *прямоугольным* (рис. 13.16). В нем стороны, которые образуют прямой угол, называются *катетами*, а противоположная сторона называется *гипотенузой*.

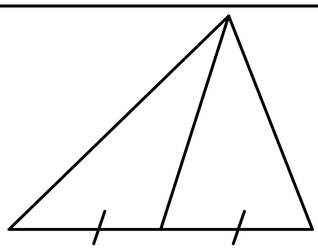
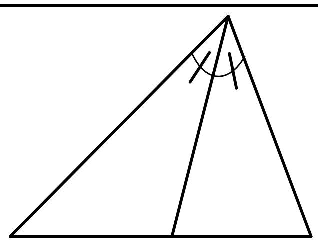
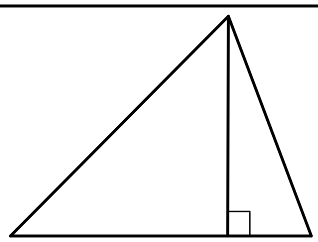


Остроугольный Тупоугольный Прямоугольный

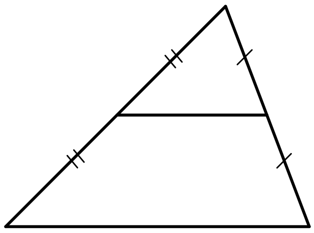
Рис. 13.16. **Виды треугольников**

Таблица 13.1

Замечательные линии треугольника

	*Медиана* – отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны
	*Биссектриса* – отрезок, который соединяет вершину треугольника с точкой на противолежащей стороне и делит внутренний угол пополам
	*Высота* – перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на прямую, содержащую противолежащую сторону треугольника

Окончание табл. 13.1

	*Средняя линия* – отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника. Она равна половине третьей стороны и параллельна ей

Если в треугольнике две стороны равны, то он называется *равнобедренным*. Равные стороны называются боковыми сторонами (рис. 13.17), а третья сторона – основанием.

Так, ΔABC – равнобедренный, AC – основание треугольника, а AB и BC – боковые стороны, причем $AB = BC$.

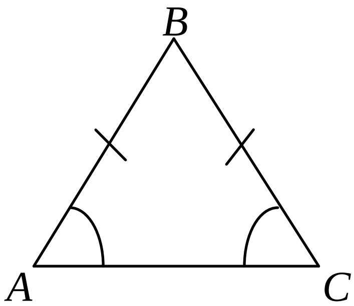


Рис. 13.17. **Равнобедренный треугольник ABC**

Для равнобедренного треугольника всегда выполняются утверждения:

1) у равнобедренного треугольника углы при основании равны $\angle A = \angle C$ (см. рис. 13.17).

2) медиана, биссектриса и высота равнобедренного треугольника, проведенные к основанию, совпадают (рис. 13.18).

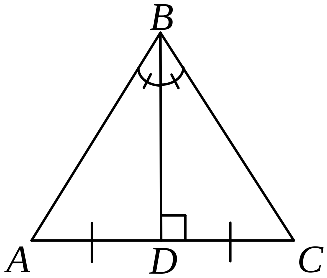


Рис. 13.18. **BD – медиана, биссектриса и высота в равнобедренном треугольнике ABC**

Равносторонний треугольник – это треугольник, у которого все стороны равны. Равносторонний треугольник называется также *правильным.*

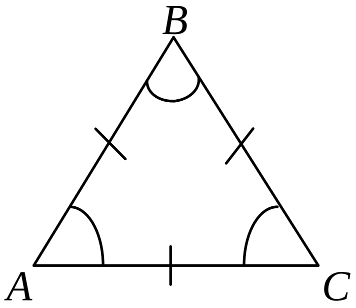


Рис. 13.19. **Равносторонний треугольник**

Для равностороннего треугольника всегда выполняются утверждения:

1) у равностороннего треугольника все углы равны и их градусная мера составляет 60^0;

2) медиана, биссектриса и высота равностороннего треугольника, проведенные к основанию, совпадают;

3) центры вписанной и описанной окружностей совпадают.

При этом их радиусы равны: $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}}$, $R = \dfrac{a}{\sqrt{3}}$, $R = 2r$.

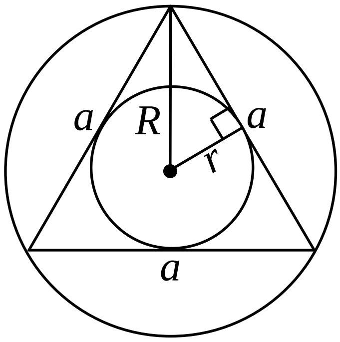


Рис. 13.20. **Описанная и вписанная окружности**

Для прямоугольного треугольника всегда справедлива теорема Пифагора.

Теорема Пифагора: сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, или $AB^2 = AC^2 + BC^2$ (рис. 13.21).

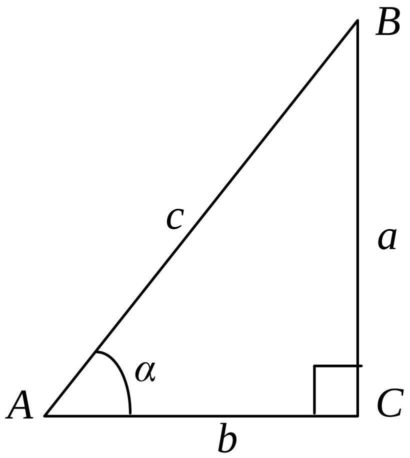


Рис. 13.21. **Прямоугольный треугольник**

Для прямоугольного треугольника:

1) $\dfrac{a}{c} = \sin\alpha$; $\dfrac{b}{c} = \cos\alpha$; $\dfrac{a}{b} = tg\alpha$; $\dfrac{b}{a} = ctg\alpha$;

2) центр описанной окружности совпадает с серединой гипотенузы, а радиус равен половине гипотенузы (рис. 13.22).

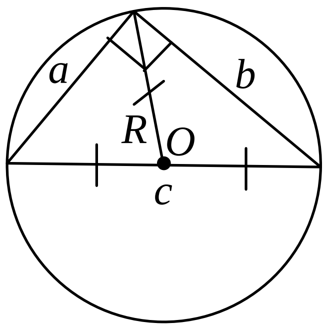


Рис. 13.22. **Прямоугольный треугольник, вписанный в окружность**

Пример 13.3. Средняя линия MN треугольника ABC равна 10 см (рис. 13.23). Найдите длину стороны, которой параллельна средняя линия.

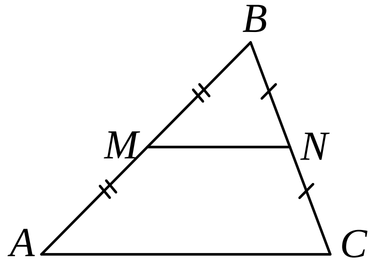


Рис. 13.23. **Треугольник ABC**

Решение. По свойству средней линии треугольника:

$$AB = 2MN = 20 \text{ см.}$$

Ответ: $AB = 20$ см.

Пример 13.4. Дан равнобедренный треугольник ABC. Один из внешних углов треугольника равен 70^0. Рассчитать все углы треугольника.

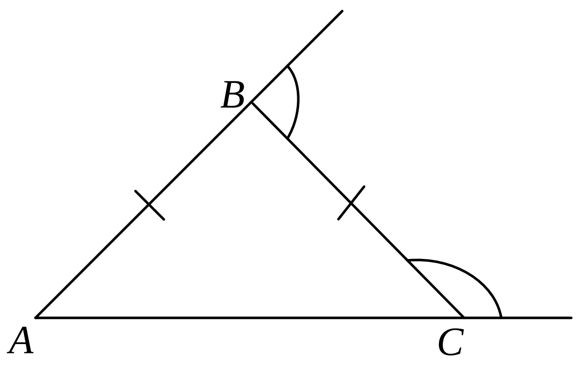


Рис. 13.24. **Треугольник $\boldsymbol{ABC}$**

Решение. Пусть внешний угол, который равен 70^0 – это угол при вершине C (рис. 13.24). Тогда внутренний угол $\angle C$ треугольника ΔABC равен: $\angle C = 180^0 - 70^0 = 110^0$.

Так как в равнобедренном треугольнике углы при основании равны, то $\angle C + \angle A = 220^0$, что является неверным, так как сумма всех углов треугольника равна 180^0.

Тогда предположим, что это угол при вершине B, получим $\angle B = 110^0$ и $\angle A = \angle C = 35^0$.

Ответ: $\angle B = 110^0$, $\angle A = \angle C = 35^0$.

Пример 13.5. Дан равнобедренный треугольник ABC. Найдите длину высоты BD, если $BC = 5$, $\angle C = 30^0$.

Решение. Рассмотрим $\triangle BDC$ (см. рис. 13.18). $\triangle BDC$ – прямоугольный; $\dfrac{BD}{BC} = \sin 30^0$.

Тогда длина высоты BD равна: $BD = 5 \cdot \sin 30^0 = 5 \cdot 0{,}5 = 2{,}5\,(\text{см})$.

Ответ: $BD = 2{,}5$ см.

Пример 13.6. В прямоугольном треугольнике (см. рис. 13.21) катеты равны 3 и 4 см. Найдите радиус описанной около треугольника окружности.

Решение. Найдем гипотенузу по теореме Пифагора:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{9+16} = 5 \text{(см)}.$$

Так как для прямоугольного треугольника радиус описанной окружности равен половине гипотенузы, то $R = \frac{5}{2} = 2{,}5$ см.

Ответ: $R = 2{,}5$ см.

Пример 13.7. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120^0$, $a = 12$ ед., $c = 10$ ед. Найдите длину третьей стороны.

Решение. По теореме косинусов: $b^2 = a^2 + c^2 - 2 \cdot a \cdot c \cdot \cos\angle B$;

$b^2 = 10^2 + 12^2 - 2 \cdot 10 \cdot 12 \cdot \cos 120^0 = 100 + 144 - 240 \cdot (-0{,}5) =$
$= 100 + 144 + 120 = 364$; тогда $b = \sqrt{364} \approx 19$ (ед.).

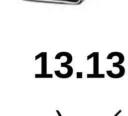
Ответ: $b = 19$ ед.

Пример 13.8. Дан треугольник ABC, в котором $\angle B = 120^0$, $\angle A = 30^0$, $a = 10$ ед. Найдите длину стороны b.

Решение. По теореме синусов: $\frac{\sin B}{b} = \frac{\sin A}{a}$, тогда, подставляя данные условия задачи, получаем: $\frac{\sin 120}{b} = \frac{\sin 30}{10}$. Отсюда находим

$$b = \frac{10 \sin 120^0}{\sin 30^0} = \frac{10 \sin\left(180^0 - 60^0\right)}{\sin 30^0} = \frac{10 \sin 60^0}{\sin 30^0} = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{2}{1} = 10\sqrt{3} \text{ (ед).}$$

Ответ: $b = 10\sqrt{3}$ ед.



Упражнения

13.13. Продолжите фразу: в треугольнике ABC:

а) $\angle A = 120^0$, он называется: _______________. Начертите его;

б) $\angle A = 90^0$, он называется:_______________. Начертите этот треугольник. Подпишите стороны: AB – это _____________, BC – это ____________, AC – это ________________;

в) $\triangle ABC$, в котором $\angle A = \angle B$, называется ______________; BC и AC называются _____________;

г) можно ли утверждать, что при заданных условиях $\angle C = 50^0$?

д) можно ли утверждать, что если $\angle C = 50^0$, то $\angle A = \angle B = 65^0$?

13.14. $\triangle ABC$, в котором $\angle A = \angle B = \angle C$, называется _____________. Рассчитайте градусную меру углов такого треугольника.

13.15. Какие из указанных треугольников, могут существовать, а какие нет:

а) $\angle A = 60^0; \angle B = 20^0; \angle C = 100^0$; в) $\angle A = 60^0; \angle B = 60^0; \angle C = 60^0$;

б) $\angle A = 60^0; \angle B = 120^0; \angle C = 30^0$; г) $\angle A = 60^0; \angle B = 50^0; \angle C = 100^0$.

13.16. Дан $\triangle ABC$. Рассчитайте все тригонометрические функции $\angle A$, если: $a = 5; b = 4$.

13.17. Найдите неизвестный угол треугольника, если у него два угла равны**:**

а) 30^0, 40^0; б) 80^0, 50^0.

13.18. Найдите углы треугольника, если их величины пропорциональны числам: 1; 2; 3.

13.19. Один из углов равнобедренного треугольника равен 30^0. Найдите величины остальных углов. Сколько решений имеет задача?

13.20. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием AC проведена биссектриса DC. Найдите все углы треугольника, если $\angle ADC$ равен:

а) 60^0; б) 75^0.

13.21. Один из внешних углов равнобедренного треугольника равен 70^0, найдите все внутренние углы треугольника.

13.22. Постройте угол, косинус которого равен:

а) $\frac{3}{5}$; б) $\frac{4}{9}$; в) $\frac{1}{2}$.

13.23. У прямоугольного треугольника заданы катеты a и b. Найдите гипотенузу c при условии, что:

а) $a = 3$, $b = 4$ б) $a = 5$, $b = 7$; в) $a = 1$, $b = 2$.

13.24. Отношение катетов прямоугольного треугольника $19:28$. Найдите все его углы.

13.25. Периметр треугольника равен 3 см. Середины сторон треугольника образуют второй треугольник. Вычислите площадь полученного треугольника.

13.26. Даны сторона и два угла треугольника. Найдите третий угол и остальные стороны, если:

а) $a=5; \beta=30^0; \gamma=45^0$;
б) $a=20; \beta=75^0; \gamma=60^0$;
в) $a=35; \beta=40^0; \gamma=120^0$;
г) $a=12; \beta=36^0; \gamma=25^0$.

13.27. Даны две стороны и угол, противолежащий одной из сторон. Найдите остальные углы и сторону треугольника, если:

а) $a=12; b=5; \alpha=120^0$;
б) $a=34; b=12; \alpha=164^0$;
в) $a=2; b=4; \alpha=60^0$;
г) $a=6; b=8; \alpha=30^0$.

13.28. Даны две стороны и угол между ними. Найдите остальные два угла и третью сторону:

а) $a=12; b=8; \gamma=60^0$;
б) $a=7; b=23; \gamma=130^0$;
в) $a=9; b=17; \gamma=95^0$;
г) $a=14; b=10; \gamma=145^0$;
д) $a=32; b=23; \gamma=152^0$;
е) $a=24; b=18; \gamma=15^0$.

13.29. Даны три стороны треугольника. Найдите его углы если:

а) $a=2; b=3; c=4$;
б) $a=7; b=2; c=8$;
в) $a=4; b=5; c=7$;
г) $a=15; b=24; c=18$;
д) $a=23; b=17; c=39$;
е) $a=55; b=21; c=38$.

13.4. Четырехугольники

Четырехугольник – плоская фигура, которая имеет четыре стороны и четыре вершины. Стороны, которые имеют общую вершину, называют *соседними,* которые не имеют – *противолежащими*. Вершины, являющиеся концами одной стороны, называются *соседними вершинами*. Сумма внутренних углов четырехугольника равна 360^0.

Так, $ABCD$ – многоугольник. A, B, C, D – вершины, AD и DC – соседние стороны, AD и BC – противоположные стороны (рис. 13.25).

Отрезки AC и DC называются диагоналями четырехугольника, а точка O – центром пересечения диагоналей.

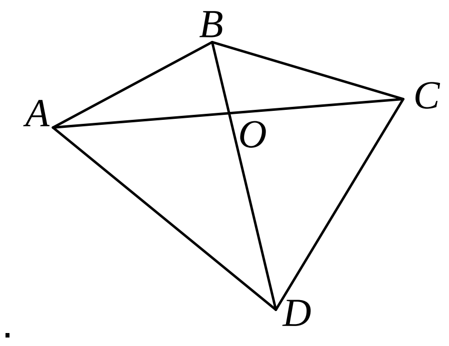


Рис. 13.25. **Четырехугольник $ABCD$**

13.4.1. Виды четырехугольников

Связь между четырехугольниками и их отдельными видами показана на рис. 13.26.

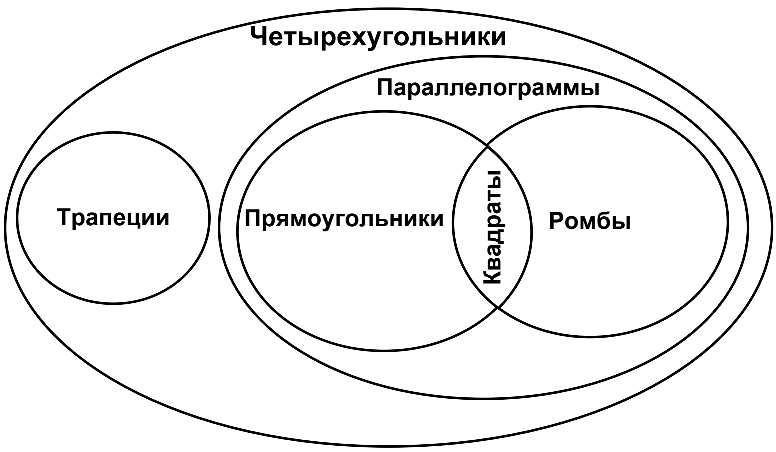


Рис. 13.26. **Виды четырехугольников**

Параллелограмм – это четырехугольник, у которого противоположные стороны параллельны. На рис. 13.27 изображен параллелограмм $ABCD$, у которого сторона BC параллельна AD, сторона BA параллельна стороне CD.

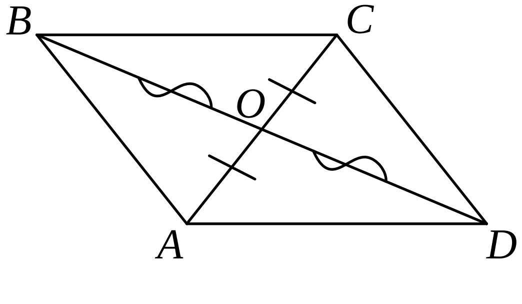


Рис. 13.27. **Параллелограмм $ABCD$**

Для параллелограмма выполняются следующие утверждения:

1) у параллелограмма противолежащие стороны попарно равны $BA = CD$, $BC = AD$ (см. рис. 13.27);

2) у параллелограмма противолежащие углы попарно равны $\angle B = \angle D$ и $\angle A = \angle C$ (см. рис. 13.27);

3) сумма углов, прилежащих к любой стороне, равна 180^0. Например, $\angle B + \angle A = 180^0$ или $\angle B + \angle C = 180^0$.

4) диагонали параллелограмма пересекаются и точкой пересечения делятся пополам: $BO = OD$, $AO = OC$ (см. рис. 13.27).

Пример 13.9. Биссектриса тупого угла параллелограмма делит его сторону в отношении 2:1, считая от вершины острого угла. Найдите стороны параллелограмма, если его периметр равен 60 см.

Решение. Напомним, что периметр параллелограмма – это сумма длин всех его сторон.

Пусть биссектриса тупого угла B параллелограмма $ABCD$ (рис. 13.28) пересекает сторону AD в точке M.

По условию $AM : MD = 2:1$.

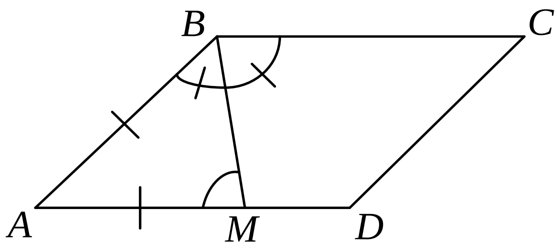


Рис. 13.28. **Параллелограмм**

Углы ABM и CBM равны по условию. Углы CBM и AMB равны как накрест лежащие при параллельных прямых BC и AD и секущей BM. Тогда $\angle ABM = \angle AMB$ и ΔBAM является равнобедренным. Отсюда $AB = AM$.

Пусть $MD = x$ см, тогда $AB = AM = 2x$ см, $AD = 3x$ см. Тогда периметр параллелограмма $ABCD$ равен $P = 2(AB + AD)$ или $2(2x + 3x) = 2 \cdot 5x = 10x$, что по условию задачи составляет 60 см. Решая уравнение $10x = 60$, получаем, что $x = 6$.

Следовательно, $AB = 2x = 12$ см, а $AD = 3x = 18$ см.

Ответ: 12 см, 18 см.

Прямоугольник – параллелограмм, у которого все углы прямые (рис. 13.29).

Для прямоугольника справедливы следующие утверждения:

1) диагонали прямоугольника равны и точкой пересечения делятся пополам;

2) две противолежащие стороны параллельны и равны, а углы, прилежащие к одной из этих сторон, прямые.

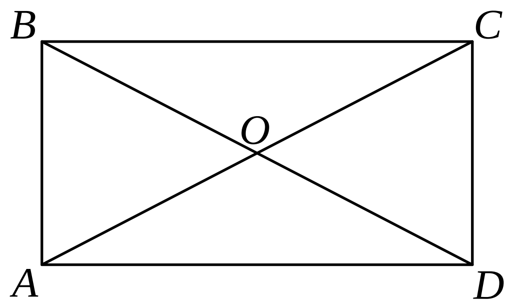


Рис. 13.29. **Прямоугольник** $\boldsymbol{ABCD}$

Пример 13.10. В прямоугольнике $ABCD$ $\angle AOD = 140^0$. Найдите значение $\angle ACD$.

Решение. Рассмотрим $\triangle AOC$ (см. рис. 13.28).

$\triangle AOD$ – равнобедренный, так как $AO = OD$.

Тогда $\angle OAD = \angle ODA = \dfrac{180^0 - 140^0}{2} = 20^0$.

Рассмотрим $\triangle ADC$. $\triangle ADC$ – прямоугольный, так как $\angle D = 90^0$, тогда $\angle ACD = 180^0 - 20^0 - 90^0 = 70^0$.

Ответ: $\angle ACD = 70^0$.

Ромб – это параллелограмм, у которого все стороны равны (рис. 13.30). $AB = CD = DA = BA$.

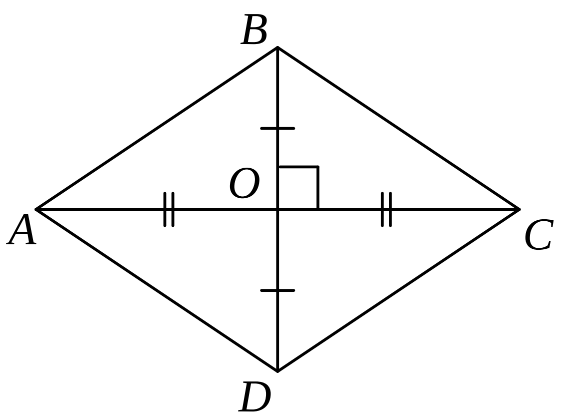


Рис. 13.30. **Ромб** $\boldsymbol{ABCD}$

Для ромба справедливы следующие утверждения:

1) все стороны равны;

2) диагонали ромба перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам;

3) обе диагонали ромба являются биссектрисами внутренних углов.

Пример 13.11. Дан ромб $ABCD$ со стороной a, к одной из его сторон проведена высота $BH = h = 3$см, $\angle BAD = \alpha = 30^0$. Найдите сторону и углы ромба.

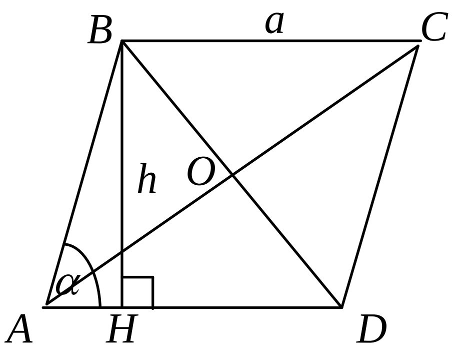


Рис. 13.31. **Ромб** $\boldsymbol{ABCD}$

Решение. Рассмотрим $\triangle ABH$ – прямоугольный.

$$\frac{h}{a} = \sin 30^0 \Rightarrow a = \frac{h}{\sin 30^0} = 3 : \frac{1}{2} = 6 \text{ (см).}$$

Таким образом, сторона ромба $a = 6$см. $\angle BAD = \angle BCD = 30^0$ (по условию), следовательно $\angle ABD = \angle ADC = 180^0 - 30^0 = 150^0$.

Ответ: $a = 6$см, углы ромба равны 30^0 и 150^0.

Квадрат – это прямоугольник, у которого все стороны равны (рис. 13.32).

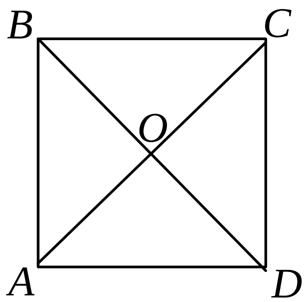


Рис. 13.32. **Квадрат** $\boldsymbol{ABCD}$

Для квадрата справедливы следующие утверждения:

1) все стороны равны и все углы прямые;

2) диагонали квадрата равны, перпендикулярны и точкой пересечения делятся пополам;

3) диагонали квадрата являются биссектрисами его углов.

Пример 13.12. Необходимо вычислить сторону квадрата, если его диагональ равна 20 см. Найдите его периметр.

Решение. Рассмотрим треугольник $\triangle ABC$ (см. рис. 13.29).

$\triangle ABC$ – прямоугольный, так как $\angle B = 90^0$.

$AB = BC = a$, так как $ABCD$ – квадрат.

Из $\triangle ABC$ по теореме Пифагора получаем: $AC^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$.

Тогда $a = \sqrt{\dfrac{AC^2}{2}} = \dfrac{AC}{\sqrt{2}} = \dfrac{400}{\sqrt{2}} = 200\sqrt{2}$ (см).

Так как периметр – это сумма длин всех сторон, то для квадрата:

$P = 4 \cdot a = 4 \cdot 200\sqrt{2} = 800\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $a = 200\sqrt{2}$ см, $P = 800\sqrt{2}$ см.

Трапеция – это четырехугольник, у которого две стороны параллельны (*нижнее основание* – AD и *верхнее основание* – BC), а две другие – не параллельны (*боковые стороны* AB и CD) (рис. 13.33).

Для произвольной трапеции сумма углов при боковых сторонах равна 180^0 (например: $\angle A + \angle D = 180^0$).

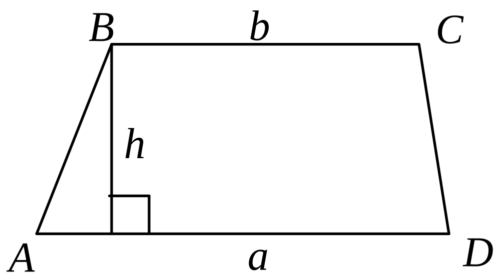


Рис. 13.33. **Трапеция** $\boldsymbol{ABCD}$

Если боковые стороны трапеции равны, то она называется *равнобокая*.

В равнобокой трапеции углы при соответственных основаниях равны ($\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$) и равны диагонали (рис. 13.34).

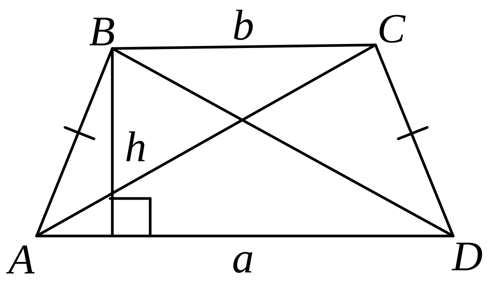


Рис. 13.34. **Равнобокая трапеция** $ABCD$

Кроме того существует еще *прямоугольная трапеция* (рис. 13.35).

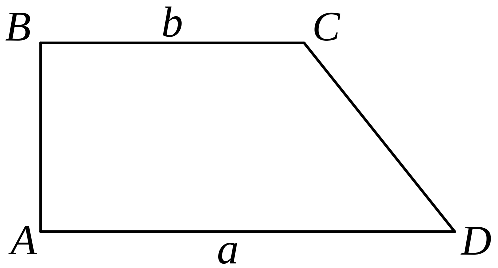


Рис. 13.35. **Прямоугольная трапеция** $ABCD$

Средняя линия трапеции – это отрезок, соединяющий середины боковых сторон. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований трапеции: $MN = \frac{1}{2}(BC + AD)$ (рис. 13.36).

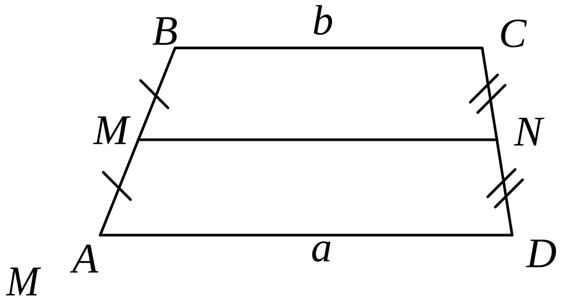


Рис. 13.36. **Средняя линия трапеции** $ABCD$

Пример 13.13. Дана трапеция: $ABCD$, где $AD = a$, $BC = b$, MN – средняя линия трапеции (см. рис. 13.36). Запишите выражение для вычисления средней линии, и найдите ее значение при $a = 10$ и $b = 2$.

Решение. Средняя линия трапеции равна полусумме оснований:

$$MN = \frac{AD + BC}{2} = \frac{a+b}{2}.$$

При $a = 10$ и $b = 2$ $MN = \frac{10+2}{2} = 6$ (см)

Ответ: $MN = \frac{a+b}{2}$, $MN = 6$ см.

Пример 13.14. Высота равнобокой трапеции, проведенная из вершины тупого угла, делит большее основание трапеции на отрезки длиной 3 см и 11 см. Найдите основания трапеции.

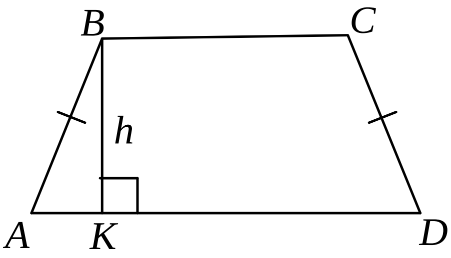


Рис. 13.37. **Трапеция**

Решение. В трапеции $ABCD$ (рис. 13.37) $AB = CD$, $BK \perp AD$ – высота, которая делит основание AD на отрезки $AK = 3$ см и $KD = 11$ см.

Нижнее основание трапеции $AD = AK + KD = 3 + 11 = 14$ (см).

Известно, что $KD = \frac{AD + BC}{2}$;

$BC = 2 \cdot KD - AD = 2 \cdot 11 - 14 = 22 - 14 =$
$= 8$ (см).

Таким образом, основания трапеции равны: $AD = 14$ (см), $BC = 8$ (см).

Ответ: 14 см, 8 см.

Упражнения

13.30. Если в четырехугольнике противолежащие стороны параллельны, то он называется ____________________.

13.31. Поставьте соответствие между записанными четырехугольниками: *параллелограмм, четырехугольник, квадрат, прямоугольник, ромб.*

Например**:** *квадрат* – это ромб, прямоугольник и параллелограмм одновременно.

13.32. Периметр параллелограмма равен 112 см. Найдите его стороны, если:

а) одна из них на 12 см меньше другой;

б) две его стороны относятся как 5:9.

13.33. В параллелограмме $ABCD$ $AB = 6$ см, $AC = 10$ см, $BD = 8$ см, O – точка пересечения его диагоналей. Найдите периметр треугольника COD.

13.34. Для какой фигуры верно утверждение:

а) диагонали равны: ______________________________________;

б) диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам: ____;

в) диагонали перпендикулярны: ______________________________

13.35. Верно ли утверждение: в трапеции с основаниями 5 и 10 см. средняя линия будет равна 8 см?

13.36. Стороны прямоугольника равны 60 и 91 см. Найдите его диагональ.

13.37. Можно ли из круглого листа диаметром 1,4 м вырезать квадрат со стороной 1 м?

13.38. Найдите высоту равнобокой трапеции, у которой основания равны 5 и 11 м, а боковая сторона равна 4 м.

13.39. Может ли у параллелограмма со сторонами 4 и 7 см одна из диагоналей быть равна 2 см?

13.40. Стороны прямоугольника равны 12,4 и 26 единиц. Найдите угол между его диагоналями.

13.41. Найдите все углы параллелограмма, если известно, что разность двух из них равна: 70^0; 140^0.

13.42. Биссектриса одного из углов прямоугольника делит сторону прямоугольника пополам. Найдите периметр прямоугольника, если его меньшая сторона равна 10 см.

13.43. Углы, образуемые диагоналями ромба с одной из его сторон, относятся как $4:5$. Найдите углы ромба.

13.44. В ромбе одна диагональ равна стороне. Найдите все углы ромба.

13.45. Чему равны углы равнобокой трапеции, если известно, что разность противолежащих углов равна 40^0?

13.5. Круг. Окружность

Окружность – это фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки, которая называется *центром окружности.*

Круг – часть плоскости, ограниченная окружностью.

Прямая, имеющая с окружностью только одну общую точку и лежащая в плоскости окружности, называется *касательной к окружности.*

Хорда окружности – отрезок, концы которого принадлежат данной окружности (отрезки AB и AC на рис. 13.38). Самая большая хорда – ее диаметр (отрезок BC на рис. 13.38).

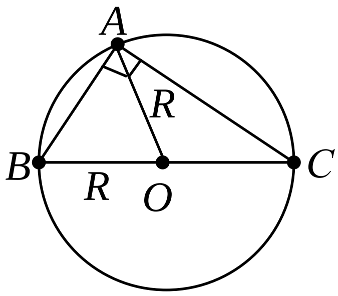


Рис. 13.38. **Окружность**

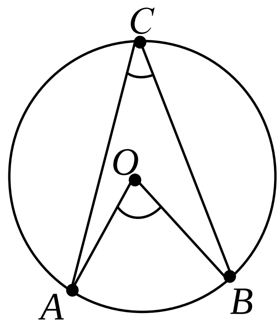


Рис. 13.39. **Вписанный и центральный углы**

Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется *центральным***.** Центральный угол $\angle AOB$ (рис. 13.39) опирается на дугу окружности AB. Все другие типы углов называются вписанными в окружность. Угол $\angle ACB$ – вписанный в окружность (см. рис. 13.39).

Градусная мера вписанного угла в два раза меньше градусной меры центрального угла, если они опираются на оду и туже дугу $\angle AOB = 2\angle ACB$ (см. рис. 13.39).

Градусная мера любого вписанного угла, если он опирается на диаметр, равна 90^0 (например, $\angle BAC$ на рис. 13.38).

Площадь круга $S = \pi r^2$.

Площадь сектора $S = \frac{1}{2}\alpha r^2$, где α – угол в радианах.

Длина окружности $L = 2\pi r$.

Длина дуги $l = \alpha r$, где α – угол в радианах.

13.5.1. Вписанные и описанные окружности

Окружность, проходящая через все вершины многоугольника, называется *описанной около данного многоугольника.*

Окружность называется *вписанной* в многоугольник, если касается всех его сторон.

В геометрии всегда *радиус вписанной окружности* обозначают маленькой буквой r, а *радиус описанной – большой* R.

Вокруг любого треугольника можно описать окружность, и в любой треугольник можно вписать окружность. Для четырехугольников и других многоугольников такая возможность есть не всегда.

Радиус вписанной окружности для любого треугольника лежит на пересечении серединных перпендикуляров, а радиус описанной окружности на пересечении биссектрис (рис 13.40, 13.41).

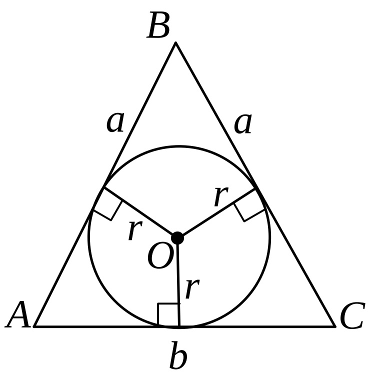


Рис. 13.40. **Окружность, вписанная в треугольник**

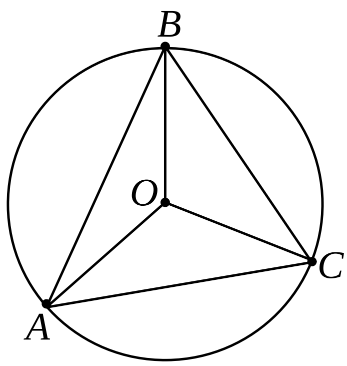


Рис. 13.41. **Окружность, описанная около треугольника**

Для вычисления радиусов описанной и вписанной окружностей в треугольник используются следующие формулы:

$$S = pr, \quad p = \frac{a+b+c}{2}, \quad R = \frac{abc}{4S}, \quad R = \frac{a}{2\sin\alpha},$$

где S – площадь треугольника, p – полупериметр, a, b, c – длины всех его сторон.

Для прямоугольного треугольника: $r = \dfrac{a+b-c}{2}$, где a, b – катеты, c – гипотенуза.

Вокруг четырехугольника можно описать окружность только в том случае, если суммы его противоположных углов равны 180^0 (прямоугольник, квадрат, равнобокая трапеция).

Для любого четырехугольника, если вокруг него описана или может быть описана окружность, выполняется теорема Птолемея.

Теорема Птолемея. Произведение диагоналей четырехугольника равно сумме произведений его противоположных сторон, или $DB \cdot AC = BC \cdot AD + AB \cdot DC$ (рис. 13.42).

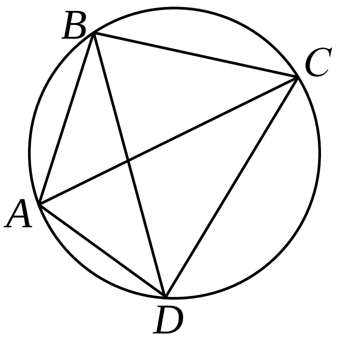


Рис. 13.42. **Теорема Птолемея**

Центр описанной окружности лежит на пересечении серединных перпендикуляров, проведенных к сторонам четырехугольника.

При решении задач удобно использовать такие формулы:

1) радиус описанной окружности для квадрата и прямоугольника равен половине его диагонали $R = \frac{d}{2}$;

2) радиус описанной окружности равнобокой трапеции равен:

$$R = \frac{adc}{4\sqrt{p(p-a)(p-d)(p-c)}},$$

где $p = \frac{(a+d+c)}{2}$ – полупериметр; d – диагональ; a – боковая сторона, c – большее основание.

В четырехугольник всегда можно вписать окружность, если суммы длин его противоположных сторон равны $AB + CD = AD + DC$ (рис. 13.43).

Таким образом, окружность всегда можно вписать в ромб или квадрат. При этом радиус окружности, вписанной в квадрат, равен половине его стороны $r = \frac{a}{2}$, а в ромб – $r = \frac{d_1 \cdot d_2}{4a} = \frac{h}{2}$, где $d_1 \cdot d_2$ – произведение диагоналей ромба; h – его высота.

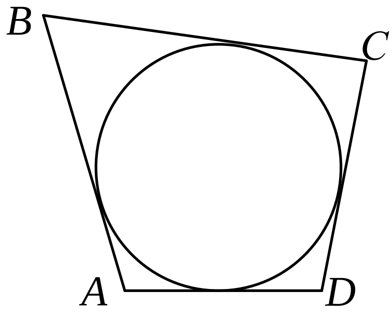


Рис. 13.43. **Окружность, вписанная в четырехугольник**

В трапецию также можно вписать окружность, если суммы противоположных сторон равны. Радиус вписанной окружности:

$$r = \frac{h}{2} = \frac{\sqrt{bc}}{2},$$

где b, c – длины оснований трапеции.

Пример 13.15. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей для треугольника со сторонами $13, 14, 15$ см**.**

Решение. Радиус окружности, вписанной в треугольник, можно найти исходя из того, что: $S = pr$, где полупериметр $p = \dfrac{a+b+c}{2}$.

Тогда $r = \dfrac{S}{p}$.

Вычислим сначала площадь треугольника. Для этого удобно использовать формулу Герона: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

Полупериметр $p = \dfrac{13+14+15}{2} = 21$(см), следовательно:

$S = \sqrt{21(21-13)(21-14)(21-15)} = 84$ (см^2), а $r = \dfrac{84}{21} = 4$(см).

Радиус описанной около треугольника окружности может быть вычислен по формуле: $S = \dfrac{abc}{4R} \Rightarrow R = \dfrac{abc}{4S}$.

Тогда $R = \dfrac{13 \cdot 14 \cdot 15}{4 \cdot 84} = 8{,}125$ (см).

Ответ: 4 см, 8,125 см.

Пример 13.16. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить в пять раз?

Решение. Площадь круга $S = \pi r^2 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$.

Тогда если диаметр увеличить в пять раз, то площадь круга будет равна: $S_2 = \pi\left(\frac{5d}{2}\right)^2 = \pi \cdot 25\left(\frac{d}{2}\right)^2$. Пусть $S_1 = \pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$, тогда $\frac{S_2}{S_1} = 25$.

Ответ: площадь круга увеличится в 25 раз.

Пример 13.17. Найдите отношение площади круга к площади вписанного в него квадрата (рис. 13.44).

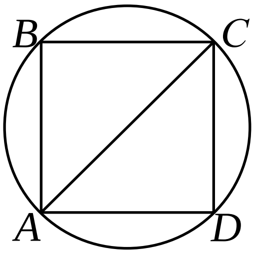


Рис. 13.44. **Квадрат, вписанный в окружность**

Решение. Пусть $ABCD$ – квадрат, который вписан в круг. Диагональ квадрата $AC = d$. Обозначим сторону квадрата через a и выразим ее через диагональ. Для этого рассмотрим $\triangle ABC$ – прямоугольный.

Тогда, $AC^2 = AD^2 + CD^2 = a^2 + a^2 = 2a^2$ и $2a^2 = d^2 \Rightarrow a = \frac{d}{\sqrt{2}}$.

Площадь квадрата: $S_{кв} = a^2 = \frac{d^2}{2}$.

Найдем теперь площадь круга. $S_{кр} = \pi R^2 = \pi\frac{d^2}{4}$, так как радиус описанной окружности лежит на середине диагонали квадрата и $R = \frac{d}{2}$.

Таким образом, получаем, что: $\frac{S_{кр}}{S_{кв}} = \frac{\pi d^2}{4} : \frac{d^2}{2} = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{2}{d^2} = \frac{\pi}{2}$.

Ответ: площадь круга, описанного около квадрата, в $\frac{\pi}{2}$ раз больше площади самого квадрата.

Упражнения

13.46. Заполните пропуски:

а) площадь окружности равна 9π см^2, тогда ее длина равна ________см;

б) сторона квадрата равна 10 см, тогда радиус вписанной в него окружности равен ________см;

в) радиус описанной окружности для прямоугольника со сторонами 3 и 4 см равен ________см;

г) вписанный в окружность угол равен 30^0, а центральный угол, опирающийся на эту же дугу, равен _______.

13.47. Вписанный $\angle ABC$ опирается на диаметр AC. Найдите величину соответствующего центрального угла $\angle AOC$.

13.48. Радиус окружности увеличили: 1) в 2 раза; 2) на 2 см. Как при этом изменилась длина окружности?

13.49. Сумма противоположных углов трапеции равна 220^0. Можно ли вокруг этой трапеции описать окружность?

13.50. Какое утверждение является верным:

а) в любой треугольник всегда можно вписать окружность;

б) вокруг прямоугольного треугольника можно всегда описать окружность;

в) вокруг любого ромба можно описать окружность;

г) в любой ромб можно вписать окружность?

13.51. Сторона правильного треугольника равна 4 см. Найдите радиусы его вписанной и описанной окружностей.

13.52. Дан четырехугольник со сторонами: $AB = 3$; $BC = 5$; $CD = 6$; $DA = 4$. Можно ли утверждать, что:

а) вокруг данного четырехугольника можно описать окружность;

б) в данный четырехугольник можно вписать окружность?

13.53. Боковая сторона равнобедренного треугольника 6 см, высота, проведенная к основанию 4 см. Найдите радиус описанной окружности.

13.54. Катеты прямоугольного треугольника 40 и 42 см. Найдите радиусы вписанной и описанной окружностей.

13.55. Найдите радиусы вписанной и описанной окружности для треугольника со сторонами:

а) 3см, 4см, и 5см;
б) 4см, 13см, и 15см;
в) 8см, 29см и 35см;
г) 4см, 5см и 7см.

13.56. Сторона правильного треугольника, вписанного в окружность, равна $\sqrt{6}$ см. Найдите сторону квадрата, вписанного в эту окружность.

13.57. Найдите радиус вписанной и описанной окружности вокруг квадрата со стороной 16 см.

13.58. Угол между высотой и диагональю ромба, проведенными из одной вершины, равен 42^0. Найдите углы ромба.

13.59. Сторона ромба равна 13 см, острый угол равен 58^0. Найдите радиус окружности, вписанной в ромб.

13.60. Высота равнобокой трапеции, проведенная из вершины тупого угла делит большее основание трапеции на отрезки длиной 3 и 11 см. Найдите основания трапеции.

13.61. Найдите высоту трапеции, в которую вписана окружность радиуса 14 см.

13.62. В прямоугольной трапеции тупой угол больше острого в пять раз. Найдите углы трапеции.

13.63. Средняя линия трапеции равна 19 см, а одно из оснований меньше другого на 6 см. Найдите основания трапеции.

13.64. Может ли средняя линия трапеции быть меньше меньшего из оснований?

13.65. В трапецию вписана окружность. Ее боковые стороны равны 19 и 13 см. Найдите длину средней линии трапеции.

13.66. В прямоугольную трапецию вписана окружность. Периметр трапеции равен 80 см, а большая боковая сторона равна 30 см. Найдите радиус списанной окружности.

13.67. Найдите радиус окружности, описанной около прямоугольника, если его стороны равны 13 и $\sqrt{155}$ см.

13.68. Найдите площадь квадрата, если радиус окружности, описанной около него, равен $45\sqrt{2}$ см.

13.69. Меньшая сторона прямоугольника равна 16 см, угол между диагоналями равен 60^0. Найдите радиус описанной окружности.

13.70. Около трапеции описана окружность. Периметр трапеции равен 60 см, средняя линия – 25 см. Найдите боковую сторону трапеции.

13.6. Площади фигур

Основные формулы для вычисления площадей плоских фигур приведены в табл. 13.2 и табл. 13.3.

Таблица 13.2

Площади треугольников

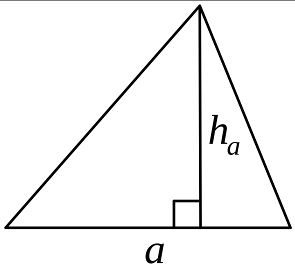
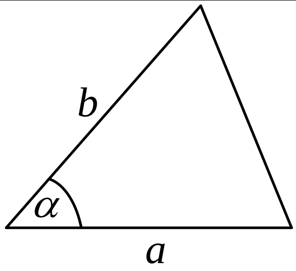
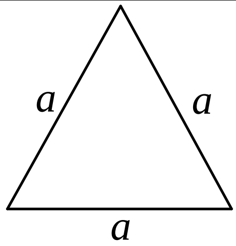
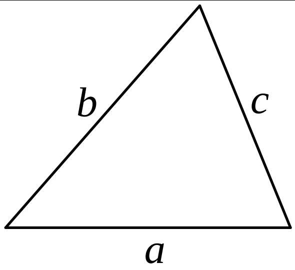
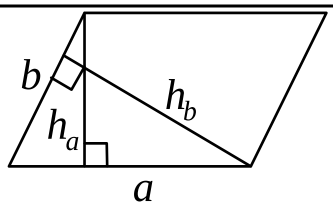
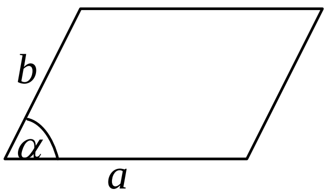
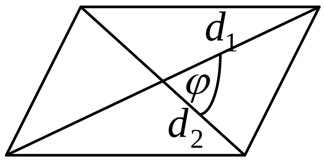
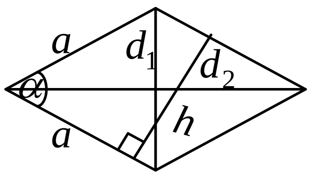
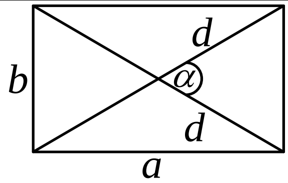
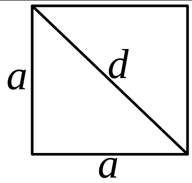
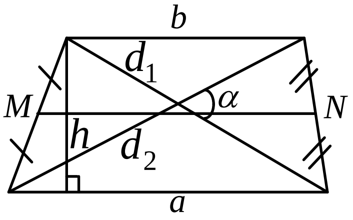
<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$S = \frac{1}{2} a h$</td><td>$S = \frac{1}{2} a b \sin\alpha$</td><td>$S = \frac{\sqrt{3} a^2}{4}$</td></tr>
<tr><td></td><td colspan="2">Формула Герона
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}, \quad p = \frac{a+b+c}{2}$</td></tr>
</table>

Таблица 13.3

Площади четырехугольников

<table>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$S = a h_0 = b h_b$</td><td>$S = a b \sin\alpha$</td><td>$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\varphi$</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$S = a h = \frac{1}{2} d_1 d_2 = a^2 \sin\alpha$</td><td>$S = a b = \frac{d^2 \sin\alpha}{2}$</td><td>$S = a^2 = \frac{1}{2} d^2$</td></tr>
</table>

Окончание табл. 13.3

	$S=\frac{a+b}{2}\cdot h=MN\cdot h=\frac{d_1 d_2\sin\alpha}{2}$

Пример 13.18. Известны стороны параллелограмма $a=10$ см, $b=12$ см. и угол между ними $\alpha=45^0$. Найдите его площадь.

Решение. Известно, что $S=ab\sin\alpha$. Тогда, подставляя данные из условия задачи, получим $S=10\cdot 12\cdot \sin 45^0=\frac{120\sqrt{2}}{2}=60\sqrt{2}$ (ед^2).

Ответ: площадь параллелограмма $S=60\sqrt{2}$ (ед^2).

Пример 13.19. Дана произвольная трапеция, средняя линия которой равна 10 см, высота 5 см. Найдите площадь трапеции.

Решение. Площадь трапеции может быть вычислена по формуле $S=MN\cdot h$, где MN – средняя линия трапеции, h – высота трапеции. Тогда, $S=10\cdot 5=50$ см^2.

Ответ: площадь трапеции 50 см^2.

Пример 13.20. В произвольном треугольнике две стороны равны 3 и 5 см, а угол между ними равен 60^0. Найдите площадь треугольника. Результат вычислений округлите до десятых.

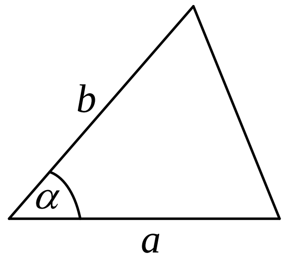


Рис. 13.45. **Треугольник**

Решение. Для вычисления площади треугольника воспользуемся формулой Герона. Для этого необходимо найти третью сторону треугольника. Пусть $a=3, b=5, \alpha=60^0$. Тогда величину третьей стороны найдем по теореме косинусов: $c^2=a^2+b^2-2ab\cos\alpha$,

$$c^2 = 9 + 25 - 2 \cdot 3 \cdot 5 \frac{1}{2} = 19$$, следовательно $c = \sqrt{19} \approx 4{,}4$ см.

Вычислим полупериметр: $p = \dfrac{a+b+c}{2} = \dfrac{3+5+4{,}4}{2} = 6{,}2$ см, тогда:

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{6{,}2(6{,}2-3)(6{,}2-5)(6{,}2-4{,}4)} =$$

$= 6{,}55 \approx 6{,}6$ см^2.

Ответ: $6{,}6$ см^2.

Пример 13.21. Квадрат и ромб имеют одинаковые периметры (рис. 13.46). Какая из данных фигур имеет большую площадь? Объясните ответ.

Рис. 13.46. **Квадрат и ромб**

Решение. Пусть сторона квадрата равна a и сторона ромба a. Тогда, площадь квадрата $S = a^2$, а площадь ромба $S = a \cdot h$, где h – высота. Так как $h < a$ по построению, то площадь ромба всегда меньше площади квадрата при одинаковых сторонах.

Ответ: площадь ромба меньше площади квадрата.

Пример 13.22. Боковые стороны треугольника равны 30 и 25 см. Найдите высоту треугольника, опущенную на третью сторону, если величина третьей стороны 11 см.

Решение. Вычислим площадь заданного треугольника по формуле Герона. Для этого сначала найдем полупериметр:

$$p = (30 + 25 + 11) : 2 = 33.$$

Тогда, $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{33(33-30)(33-25)(33-11)} =$

$= \sqrt{33 \cdot 3 \cdot 8 \cdot 11} = 66\sqrt{2}$ см^2.

Площадь треугольника может быть вычислена по формуле $S = \dfrac{1}{2}ah$, где a – основание, h – высота, опущенная на это основание.

Получим: $66\sqrt{2}=\frac{1}{2}11\cdot h$, следовательно $h=\frac{66\cdot 2\sqrt{2}}{11}=12\sqrt{2}$ (см).

Ответ: $h=12\sqrt{2}$ см.

Пример 13.23. Найдите стороны ромба (рис. 13.46), если его диагонали относятся как $1:2$, а площадь равна 16 см^2.

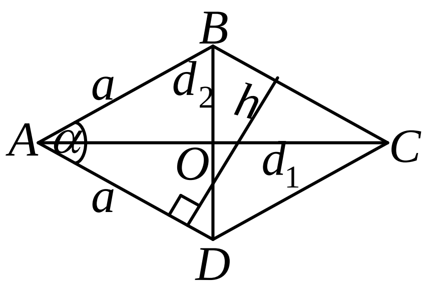


Рис. 13.47. **Ромб**

Решение. Пусть $AC=d_1=2x$; $BD=d_2=x$ – диагонали ромба (рис. 13.47).

Тогда $S=\frac{d_1\cdot d_2}{2}=\frac{2x^2}{2}=x^2$, $16=x^2$, $x=4$.

Диагонали ромба: $d_1=2x=8$ см и $d_2=4$ см.

Рассмотрим $\triangle ABO$ – прямоугольный. Обозначим: $AO=\frac{d_1}{2}$,

$BO=\frac{d_2}{2}$ и $AB=a$ – сторона ромба.

Тогда по теореме Пифагора:

$a^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2+\left(\frac{d_2}{2}\right)^2$, $a^2=16+4=20$.

Откуда найдем сторону ромба: $a=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ см.

Ответ: сторона ромба $a=2\sqrt{5}$ см.

Пример 13.24.

В равнобокой трапеции стороны основания равны 10 и 25 см. Боковая сторона равна 25 см. Найдите площадь трапеции.

Решение. Рассмотрим трапецию $ABCD$ (рис. 13.48). $AB=CD$ по условию.

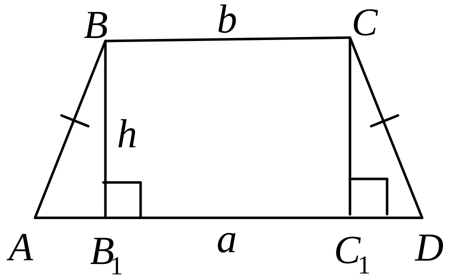


Рис. 13.48. **Трапеция**

Рассмотрим $\triangle AB_1B$ и $\triangle CC_1D$. Они равные и прямоугольные, BB_1 и CC_1 – высоты трапеции $ABCD$. Пусть $AD = 25$ см и $BC = 10$ см, тогда $AB_1 = DC_1 = \frac{(25-10)}{2} = 15$ см. Из прямоугольного треугольника $\triangle AB_1B$ по теореме Пифагора найдем высоту трапеции:

$$BB_1 = \sqrt{AB^2 - (AB_1)^2} = \sqrt{(25)^2 - (15)^2} = 20 \text{ см.}$$

Тогда искомая площадь $S = \frac{(BC + AD)}{2} BB_1 = \frac{(10+25)}{2} 20 = 350$ см^2.

Ответ: площадь трапеции равна 350 см^2.

Упражнения

13.71. Во сколько раз увеличится площадь квадрата, если каждая из его сторон увеличится в два раза?

13.72. Площадь треугольника равна 98 см^2. Найдите сторону треугольника, если высота, проведенная к ней, равна 14 см.

13.73. Во сколько раз увеличится площадь круга, если его диаметр увеличить в два раза; в три раза?

13.74. Чему равны стороны прямоугольника, если его периметр 74 см, а площадь 3 см^2?

13.75. Параллелограмм и прямоугольник имеют одинаковые длины сторон. Найдите острый угол параллелограмма, если его площадь равна половине площади прямоугольника.

13.76. Найдите площадь ромба, если его высота 12 см, а меньшая диагональ 13 см.

13.77. Найдите площадь равнобедренного треугольника с основанием 120 см. и стороной 100 см.

13.78. Найдите площадь равнобедренного треугольника, боковая сторона которого равна 17 см, а высота, опущенная на основание, равна 5 см.

13.79. Найдите площадь треугольника, две стороны которого равны 9 и $3\sqrt{2}$ см, а угол между ними: 1) 45^0; 2) 150^0.

13.80. Боковая сторона равнобедренного треугольника равна 50 см, а основание треугольника в 1,5 раза больше высоты, проведенной к нему. Найдите площадь треугольника.

13.81. Точка касания окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, делит гипотенузу на отрезки длиной 10 и 24 см. Найдите площадь треугольника.

13.82. Найдите площадь параллелограмма, если его стороны 2 и 3 см, а один из углов 70^0.

13.83. Площадь параллелограмма равна 120 см^2, а две его стороны – 15 и 10 см. Найдите высоты параллелограмма.

13.84. Острый угол ромба равен 30^0, а площадь круга, вписанного в ромб, равна 6π см^2. Найдите площадь ромба.

13.85. Найдите площадь ромба, сторона которого равна $9\sqrt{2}$ см, а один из углов 45^0.

13.86. Найдите площадь ромба, сторона которого равна 25 см, а разность диагоналей – 10 см.

13.87. Найдите площадь трапеции, у которой основания равны 10 и 24 см, а боковая сторона – 25 см.

13.88. Найдите площадь равнобокой трапеции, меньшее основание которой равно 10 см, боковая сторона – 6 см, а тупой угол равен 120^0.

13.89. В равнобокой трапеции большее основание равно 44 см, боковая сторона – 17 см, диагональ – 39 см. Найдите площадь трапеции.

13.90. Разность оснований прямоугольной трапеции равна 14 см, а большее основание – 50 см. Найдите площадь трапеции, если ее большая диагональ делит прямой угол трапеции пополам.

Тема 14. Стереометрия

Стереометрия – это раздел геометрии о свойствах фигур в пространстве. Фигуры, которые изучаются в стереометрии, называются *геометрическими* или *пространственными.* Все фигуры, которые рассматривались на плоскости, можно рассматривать и в пространстве. Однако в пространстве рассматривается еще одна основная фигура – плоскость. *Плоскость* обозначается одной маленькой буквой греческого алфавита. Например, плоскость α (рис. 14.1).

Рис. 14.1. **Плоскость**

Для основных фигур стереометрии (точки, прямой и плоскости) верны следующие утверждения.

Теорема 1. Через прямую и точку, не принадлежащую ей, можно провести плоскость, и притом только одну.

Теорема 2. Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит этой плоскости.

Теорема 3. Через три точки, не принадлежащие одной прямой, можно провести плоскость, и притом только одну.

В стереометрии вводится понятие *параллельных* и *перпендикулярных* плоскостей. Например, плоскости на рис. 14.2. *параллельны,* а прямые, которые лежат в данных плоскостях, называются *скрещивающимися*, так как они не пересекаются и через них нельзя провести общую плоскость.

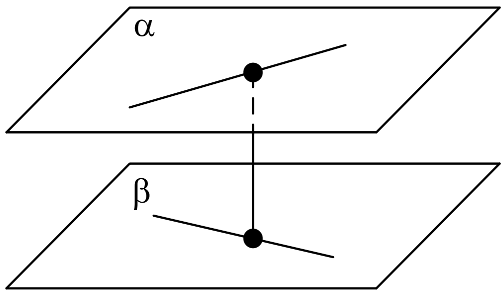


Рис. 14.2. **Скрещивающиеся прямые и параллельные плоскости**

Расположение двух прямых в пространстве может быть следующим:

1) прямые пересекаются, если они имеют только одну общую точку;
2) прямые параллельны, если они не пересекаются и лежат в одной плоскости;
3) прямые скрещиваются, если они не пересекаются и не параллельны;
4) прямые совпадают, если они имеют хотя бы две общие точки.

Объемные фигуры делятся на два класса: *многогранники и тела вращения.*

14.1. Многогранники

Призма – это многогранник, две грани которого (основания) – равные n-угольники, лежащие в параллельных плоскостях, а остальные n граней (боковые грани) – параллелограммы (рис. 14.1).

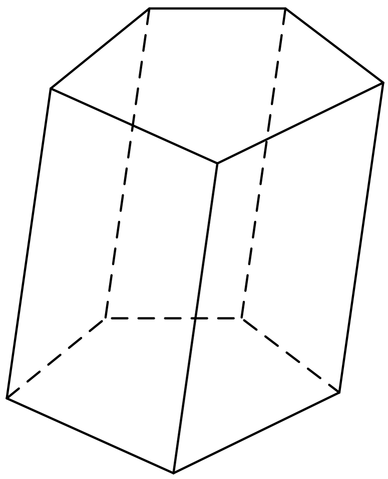


Рис. 14.1. **Наклонная призма**

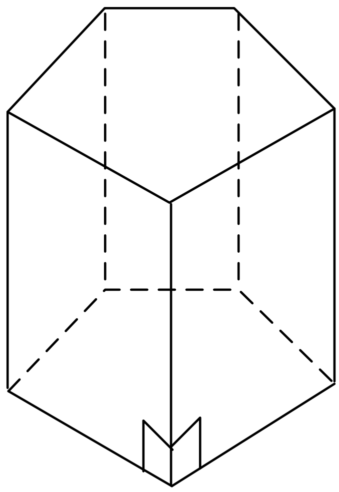


Рис. 14.2. **Прямая призма**

Призма называется *прямой*, если все ее боковые ребра перпендикулярны основаниям (рис. 14.2).

Призма называется *правильной*, если она прямая и ее основания – правильные многоугольники.

Формулы для вычисления площади поверхности и объема призмы удобно представить в виде таблицы (табл. 14.1).

Таблица 14.1

Площадь поверхности и объем призмы

	Наклонная призма	Прямая призма
Боковая поверхность	$S_{бок} = P_{сеч} \cdot l$, где $P_{сеч}$ – периметр перпендикулярного сечения; l – длина бокового ребра	$S_{бок} = P_{осн} \cdot H$, где $P_{осн}$ – периметр основания; H – высота
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + 2 \cdot S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + 2 \cdot S_{осн}$
Объем	$V = S_{сеч} \cdot l$, где $S_{сеч}$ – площадь перпендикулярного сечения; l – длина бокового ребра	$V = S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ – площадь основания призмы; H – высота

Если четырехугольная призма имеет в основании параллелограммы, то она называется *параллелепипедом* (рис. 14.3).

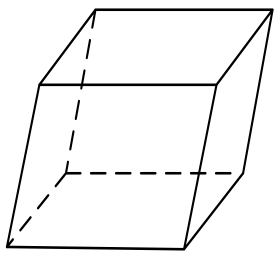


Рис. 14.3. **Наклонный параллелепипед**

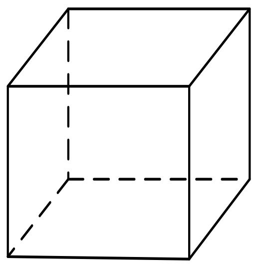


Рис. 14.4. **Прямой параллелепипед**

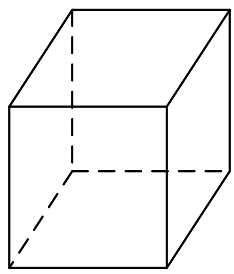


Рис. 14.5. **Куб**

Если же боковые ребра перпендикулярны основаниям, то параллелепипед называется *прямым* (рис. 14.4). Прямой параллелепипед, основания которого – прямоугольники, называется *прямоугольным параллелепипедом*.

Кубом называется прямая, правильная призма, у которой все ребра равны (рис. 14.5).

Пирамида – это такой многогранник, одна грань которого (основание) – многоугольник, а все остальные грани (боковые) – треугольники, имеющие одну общую вершину (вершина пирамиды) (рис. 14.6).

Усеченной пирамидой называется часть пирамиды, заключенная между ее основанием и сечением пирамиды, параллельным основанию (рис. 14.7).

Пирамида называется *правильн*ой, если у нее в основании лежит правильный многоугольник, а вершина проецируется в центр основания.

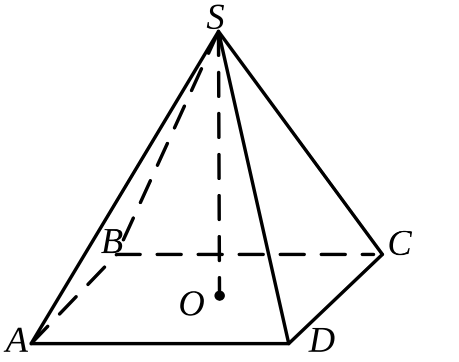


Рис. 14.6. **Пирамида** $ABCD$

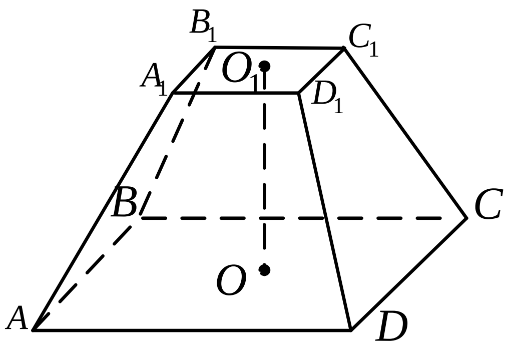


Рис. 14.7. **Усеченная пирамида**

Формулы для вычисления площади поверхности и объема произвольной и правильной пирамиды удобно представить в виде таблицы (табл. 14.2 и табл. 14.3).

Таблица 14.2

Площадь поверхности и объем произвольной пирамиды

	Пирамида	Усеченная пирамида
Боковая поверхность	$S_{бок} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где S_i – площадь одной боковой грани	$S_{бок} = \sum_{i=1}^{n} S_i$, где S_i – площадь одной боковой грани
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{нижн.осн} + S_{верхн.осн}$, где $S_{нижн.осн}$ – площадь нижнего основания; $S_{верхн.осн}$ – площадь верхнего основания
Объем	$V = \frac{1}{2} S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ – площадь основания; H – высота	$V = \frac{1}{3} H \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где S_1 – площадь нижнего основания; S_2 – площадь верхнего основания; H – высота

Таблица 14.3

Площадь поверхности и объем правильной пирамиды

	Пирамида	Усеченная пирамида
Боковая поверхность	$S_{бок} = P \cdot l$, где P – периметр основания; l – апофема (высота боковой грани)	$S_{бок} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2) \cdot l$, где P_1 – периметр нижнего основания; P_2 – периметр верхнего основания; l – апофема
Полная поверхность	$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$	$S_{полн} = S_{бок} + S_{нижн.осн} + S_{верхн.осн}$, где $S_{нижн.осн}$ – площадь нижнего основания; $S_{верхн.осн}$ – площадь верхнего основания
Объем	$V = \frac{1}{2} S_{осн} \cdot H$, где $S_{осн}$ – площадь основания; H – высота	$V = \frac{1}{3} H \cdot (S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где S_1 – площадь нижнего основания; S_2 – площадь верхнего основания; H – высота

Пример 14.1. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5.

Решение. Пусть $ABCDE$ – заданная пирамида (рис. 14.8).

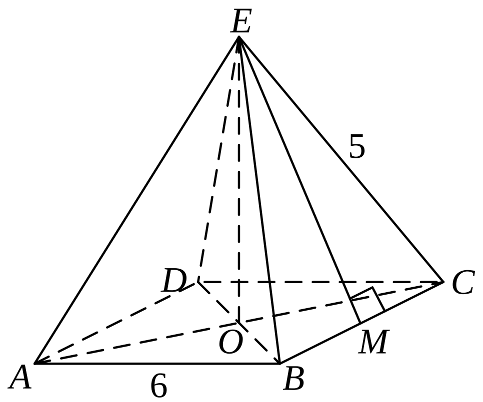


Рис. 14.8. **Пирамида**

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}.$$

Площадь основания пирамиды равна: $S_{осн} = 6^2 = 36$ (ед^2).

Найдем площадь боковой поверхности. Для этого проведем высоту боковой грани пирамиды EM (рис. 14.8).

Рассмотрим треугольник BEC – равнобедренный. Тогда, EM также является его медианой и значит $MC = BM = 3$(ед).

Из ΔEMC получаем, что $EM = \sqrt{EC^2 - MC^2} = \sqrt{5^2 - 3^2} = 4$ (ед).

Следовательно, площадь S боковой грани пирамиды равна:

$$S = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot EM = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 4 = 12 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 4S = 4 \cdot 12 = 48$ (ед^2).

Таким образом, площадь поверхности пирамиды равна:

$$S_{полн} = S_{бок} + S_{осн} = 36 + 48 = 84 \text{ (ед}^2\text{)}.$$

Ответ: 84 (ед^2).

Пример 14.2. Площадь каждой из трех граней прямого параллелепипеда соответственно равна: 1 дм^2, 2 дм^2, 3 дм^2. Найдите площадь полной поверхности и объем параллелепипеда.

Решение. Обозначим ребра параллелепипеда (рис. 14.9) через a, b, h. Причем h – высота параллелепипеда.

Тогда, как следует из условия задачи**:** $ab = 3$ дм^2**,** $ah = 2$ дм^2**,** $bh = 1$ дм^2 и $S_{полн} = 2 \cdot (1 + 2 + 3) = 12$ дм^2.

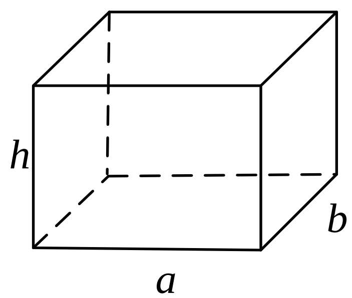


Рис. 14.9. **Прямой параллелепипед**

Вычислим объем: $V = S_{осн} \cdot h = ab \cdot h$. Для этого составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} ab = 3, \\ ah = 2, \\ bh = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3/a, \\ h = 2/a, \\ \dfrac{3}{a} \cdot \dfrac{2}{a} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3/a, \\ h = 2/a, \\ \dfrac{6}{a^2} = 1, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3/a, \\ h = 2/a, \\ a^2 = 6, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 3/\sqrt{6}, \\ h = 2/\sqrt{6}, \\ a = \sqrt{6}. \end{cases}$$

Тогда искомый объем: $V = ab \cdot h = 3 \cdot \frac{2}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$ дм^3.

Ответ: $S_{полн} = 12$ дм^2, $V = \sqrt{6}$ дм^3.

Пример 14.3. В правильной треугольной пирамиде сторона основания равна 10 см. Каждая из боковых граней наклонена к плоскости основания пирамиды по углом 45^0. Найдите объем пирамиды.

Решение. Пусть дана пирамида $ACDK$ (рис. 14.9).

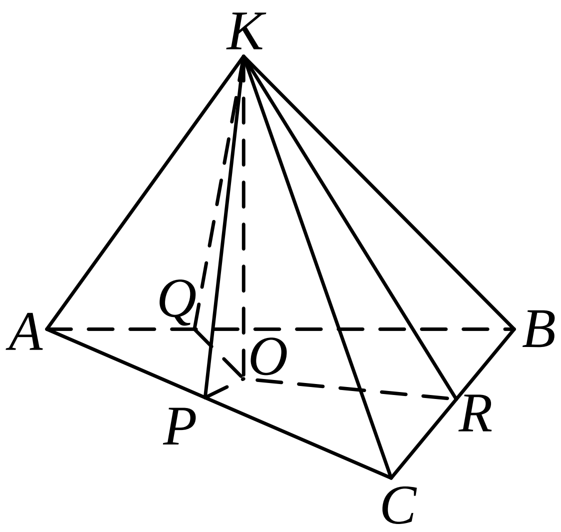


Рис. 14.9. **Треугольная пирамида**

Объем пирамиды может быть вычислен по формуле $V = \frac{1}{3} S_{осн} h$, где $S_{осн}$ – площадь основания, в данном случае площадь треугольника ΔABC, h – высота (KO).

Рассмотрим $\triangle ABC$. Он равносторонний по построению, а значит его площадь равна $S = \frac{a^2}{4}$(ед^2) (см. табл. 13.2), где a – сторона основания. По условию $a = 10$ см, а следовательно $S = \frac{10^2}{4} = \frac{100}{4} = 25$ед^2.

Вычислим высоту $KO = h$. Для этого рассмотрим ΔKOR.

$\triangle KOR$ – прямоугольный, так как $\angle KOR = 90^0$. Тогда $\frac{KO}{OR} = tg 45^0$.

$OR = r$ – радиус вписанной окружности в равносторонний треугольник, значит: $r = \dfrac{a}{2\sqrt{3}} = \dfrac{10}{2\sqrt{3}} = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$.

Высота пирамиды равна: $KO = tg45^0 \cdot r = \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ (см).

Окончательно получаем: $V = \dfrac{1}{3} S \cdot h = \dfrac{1}{3} \cdot 25 \cdot \dfrac{5}{\sqrt{3}} = \dfrac{125}{3\sqrt{3}}$ (см^3).

Ответ: $V = \dfrac{125}{3\sqrt{3}}$ см^3.

Упражнения

14.1. Усеченной может быть:

а) призма;

б) пирамида;

в) куб;

г) параллелепипед.

14.2. Верно ли, что куб и параллелепипед являются разновидностью призмы?

14.3. Апофема бывает в ______________, это ____________________.

14.4. Выберите правильное утверждение о высоте многогранника:

а) всегда перпендикулярна основанию;

б) перпендикулярна основанию только тогда, когда многогранник правильный;

в) перпендикулярна только тогда, когда многогранник прямой.

14.5. Пирамида имеет __________________(*количество)* вершину.

14.6. Боковые стороны усеченной пирамиды – это _________________.

14.7. В формуле: $V = S \cdot H$, S – это__________, H – это___________.

14.8. Для четырехугольной пирамиды осевым сечением является:

а) квадрат;

б) четырехугольник;

в) параллелограмм;

г) ромб.

14.9. Найдите площадь боковой поверхности прямой призмы, в основании которой лежит ромб с диагоналями 25 и 60 см, боковое ребро призмы равно 25 см.

14.10. Найдите боковое ребро правильной четырехугольной призмы, если сторона ее основания 15 см, а площадь боковой поверхности 930 см^2.

14.11. Стороны основания прямоугольного параллелепипеда равны 5 и 6 см, а диагональ – $\sqrt{65}$ см. Найдите площадь полной поверхности параллелепипеда.

14.12. Основание прямоугольной призмы – прямоугольный треугольник с катетами 4 и 6 см, боковое ребро – 5 см. Найдите объем призмы.

14.13. Площадь поверхности правильной треугольной призмы равна 19 см^2. Какой будет площадь поверхности призмы, если длину всех ее ребер увеличить в семь раз?

14.14. Основанием пирамиды является прямоугольник со сторонами 4и 6 см. Объем пирамиды равен 48 см^3. Найдите высоту пирамиды.

14.15. Найдите отношение площади основания правильной пирамиды к площади боковой поверхности, если апофема образует с плоскостью основания угол 60^0.

14.16. Во сколько раз увеличится объем пирамиды, если ее высоту увеличить в два раза?

14.17. Во сколько раз увеличится площадь боковой поверхности правильной пирамиды, если сторону основания увеличить в три раза, а апофему – в два раза?

14.18. Стороны основания правильной четырехугольной пирамиды равны 42 см, боковые ребра 72 см. Найдите площадь полной поверхности пирамиды.

14.19. В правильной усеченной треугольной пирамиде стороны основания равны 8 и 16 см, а ее высота – 4 см. Найдите площадь боковой поверхности усеченной пирамиды.

14.20. Стороны оснований правильной усеченной четырехугольной пирамиды равны 8 и 6 см, боковое ребро – 5 см. Найдите площадь полной поверхности усеченной пирамиды.

14.21. Боковые ребра правильной треугольной пирамиды взаимоперпендикулярны (боковые грани – прямоугольные треугольники, расположенные под прямым углом к вершине), каждое ребро равно 12 ед. Найдите объем призмы.

14.22. Во сколько раз увеличится площадь поверхности правильного тетраэдра, если все его ребра увеличить в пять раз. (Правильный тетраэдр – это треугольная призма, у которой все ребра равны, а грани, соответственно, – равносторонние треугольники.)

14.2. Тела вращения

К телам вращения относятся *цилиндр*, *конус* и *шар (сфера)*.

Цилиндр – это объемная фигура, образованная вращением прямоугольника (квадрата) вокруг оси, содержащей одну из его сторон. Например, цилиндр образован вращением прямоугольника O_1A_1AO вокруг своей стороны O_1O (рис. 14.10).

O_1O называется *высотой* или *осью симметрии* цилиндра, AA_1 – *образующей*, плоскости (круги), содержащие B_1A_1 и BA, – *верхним и нижним основаниями*.

Если через центр цилиндра провести сечение (прямоугольник A_1B_1BA), то такое сечение называется *осевым.*

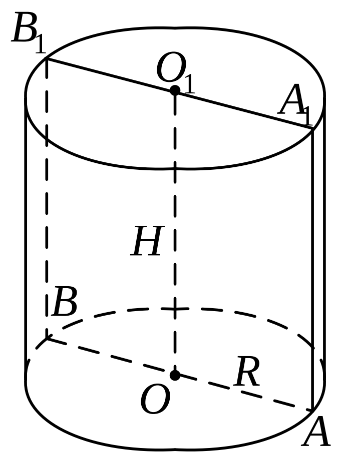


Рис. 14.10. **Цилиндр**

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = 2\pi lH$.

Площадь полной поверхности: $S = 2\pi R^2 + 2\pi lH$.

Объем цилиндра: $V = S \cdot H$, где $S = \pi R^2$ – площадь основания, $R = OA$ – радиус основания, $H = O_1O$ – высота цилиндра, $2\pi l$ – длина дуги окружности основания.

Конус – это объемная фигура, полученная вращением прямоугольного $\triangle BPO$ вокруг оси, содержащей его катет PO.

$PO = H$ – *высота* конуса (ось симметрии), $OA = R$ – *радиус основания*, $PA = l$ – *образующая*, P – *вершина конуса*.

Окружность, содержащая отрезок BA называется *основанием конуса,* $\triangle BPA$ – *осевое сечение* конуса (рис. 14.11).

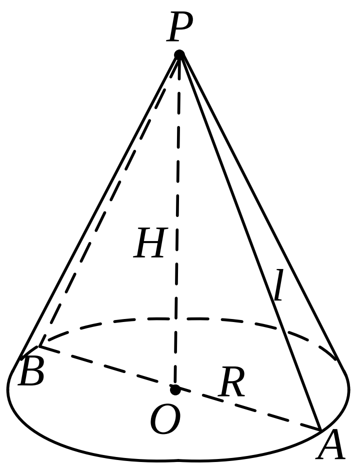


Рис. 14.11. **Конус**

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \pi Rl$.

Площадь полной поверхности: $S = \pi Rl + \pi R^2$.

Объем конуса: $V = \frac{1}{3} S \cdot H = \frac{1}{3} \pi R^2 H$, где $S = \pi R^2$ – площадь основания, $R = OA$ – радиус основания, $H = PO$ – высота цилиндра, l – образующая.

Усеченный конус – это часть конуса, ограниченная его основанием и сечением, параллельным основанию (рис. 14.12).

Обычно *радиус верхнего основания* обозначают маленькой буквой r, а *нижнего* – большой R. Такой конус имеет также высоту h и образующую l.

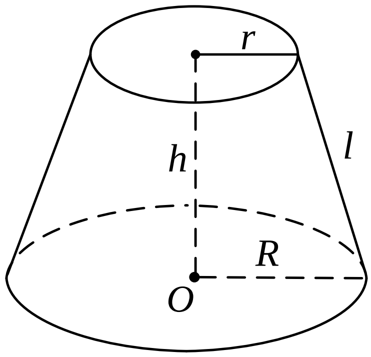


Рис. 14.12. **Усеченный конус**

Площадь боковой поверхности: $S_{бок} = \pi l\left(r + R\right)$.

Площадь полной поверхности: $S = \pi l\left(r + R\right) + \pi\left(r^2 + R^2\right)$.

Объем конуса: $V = \dfrac{1}{3}\pi h(r^2 + R^2 + rR)$.

Сфера – множество всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии R от данной точки O.

Шаром называется множество всех точек пространства, находящихся от данной точки O на расстоянии, не большем данного расстояния R. Сфера является поверхностью шара.

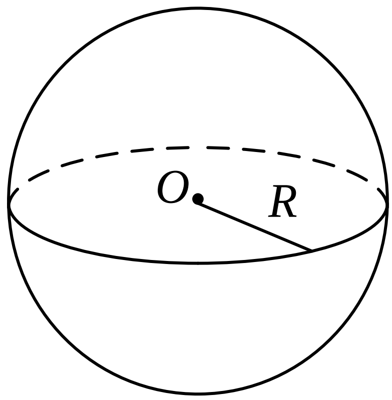


Рис. 14.13. **Сфера. Шар**

Площадь сферы: $S = 4\pi R^2$.

Объем шара: $V = \dfrac{4}{3}\pi R^3$.

Осевым сечением (большим кругом) сферы является сечение, которое проходит через центр сферы, радиус осевого сечения равен радиусу самой сферы (рис. 14.13).

Части шара

Шаровой сегмент (рис. 14.14).

Объем $V = \dfrac{1}{3}\pi H^2\left(3R - H\right)$.

Площадь сегментной поверхности $S = 2\pi RH$.

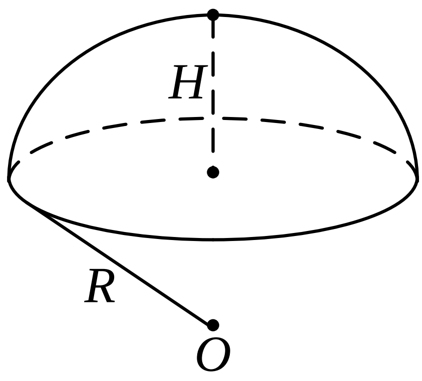


Рис. 14.14. **Шаровой сегмент**

Шаровой сектор (рис. 14.15).

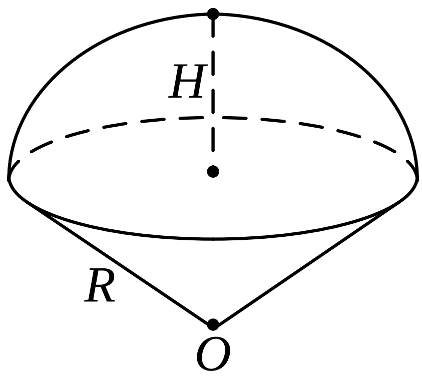


Рис. 14.15. **Шаровой сектор**

Объем $V = \frac{2}{3}\pi R^2 H$.

Площадь полной поверхности $S = \pi R\left(2H + \sqrt{2RH - H^2}\right)$.

Пример 14.4. Радиусы усеченного конуса равны 3 и 5 м., высота равна 4 м. Найдите образующую.

Решение. Пусть дан усеченный конус с радиусами основания R и r, высотой h и образующей l. Проведем осевое сечение конуса, как показано на рис. 14.12.

Полученное сечение – трапеция с боковыми сторонами l и высотой h (рис. 14.16). Трапеция по построению равнобокая и $h \perp R$.

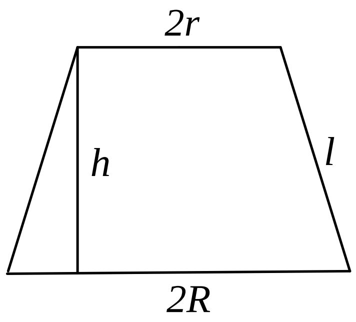


Рис. 14.16. **Сечение**

Тогда по теореме Пифагора получим: $h^2+\left(\frac{2R-2r}{2}\right)^2=l^2$; подставляя данные из условия задачи и выполняя вычисления, находим образующую: $4^2+(5-3)^2=l^2$, $20=l^2$, $l=2\sqrt{5}$ см.

Ответ: длина образующей усеченного конуса: $l=2\sqrt{5}$ (см.).

Пример 14.5. Высота цилиндра 8 см, радиус 5 см. Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси так, что в сечении получился квадрат. Найдите расстояние от этого сечения до оси цилиндра (рис. 14.17).

Решение. Пусть $ABCD$ – сечение цилиндра (рис. 14.18), $h=5$см – высота. По построению: $SO=CB=DA=h$. $CD=DA=BA=BC=8$см, так как сечение квадрат по условию задачи.

Рассмотрим $\triangle SCD$, он равнобедренный: $CS=DS=R$, где $R=5$ – радиусы основания цилиндра.

Проведем в треугольнике $\triangle SCD$ высоту SO_1, так что $SO_1\perp CD$ $SO_1\perp CD$ (рис. 14.18).

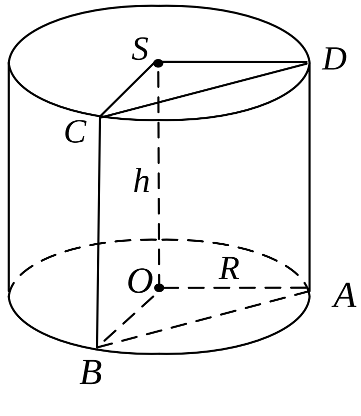


Рис. 14.17. **Цилиндр**

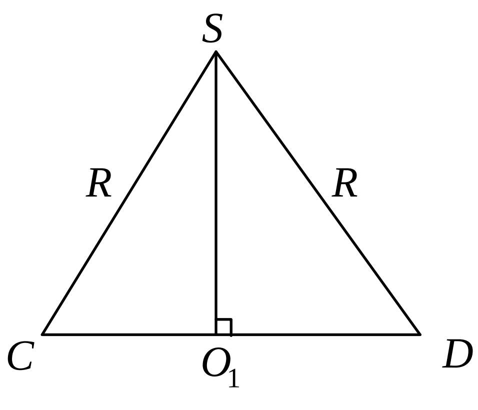


Рис. 14.18. **Сечение**

Из прямоугольного треугольника $\triangle SO_1D$ по теореме Пифагора имеем: $SO_1 = \sqrt{R^2 - (O_1D)^2} = \sqrt{25-16} = 3$ (см).

Ответ: $SO_1 = 3$ см.

Пример 14.6. Внешний диаметр полого шара 18 см. Толщина стенок 3 см. Найдите объем материала, который потребовался на изготовление такого шара.

Решение. Пусть объем большого шара $V_{б.ш.} = \frac{4}{3}\pi R^3$, объем маленького шара $V_{м.ш.} = \frac{4}{3}\pi r^3$, тогда радиус большого шара равен: $R = \frac{D}{2}$, а радиус маленького шара – $r = \frac{d}{2}$.

По условию диаметр большого шара равен: $D = 18$ см, а диаметр маленького – $d = D - 6 = 12$ см.

Вычислим радиусы: $R = \frac{18}{2} = 9$ см., $r = \frac{12}{2} = 6$ см.

Тогда объем материала, потраченного на изготовление такого полого шара – это разница между объемами большого и маленького шаров:

$$\Delta V = V_{б.ш.} - V_{м.ш.} = \frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3);$$

$$\Delta V = V_{б.ш.} - V_{м.ш.} = \frac{4}{3}\pi(9^3 - 6^3);$$

$$\Delta V = V_{б.ш.} - V_{м.ш.} = \frac{4}{3}\pi(729 - 216) \approx 2052 \text{ (см}^3\text{)}.$$

Ответ: на изготовление такого шара необходимо израсходовать ≈ 2052 см^3 материала.

Пример 14.7. Образующая конуса l наклонена к плоскости основания под углом 30^0. Найдите высоту и объем конуса.

Решение. Пусть дан конус APB (рис. 14.19).

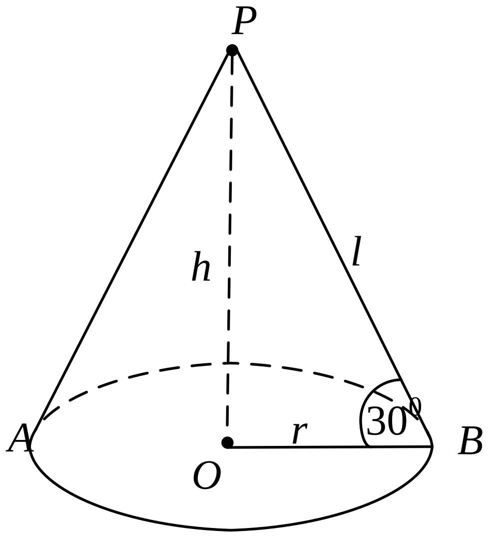


Рис. 14.19. **Конус**

Найдем высоту конуса h.

Рассмотрим $\triangle POB$ – прямоугольный. Тогда $\dfrac{PO}{PB} = \dfrac{h}{l} = \sin 30^0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ h = l \cdot \sin 30^0 = \dfrac{l}{2}$. Таким образом: $h = \dfrac{l}{2}$(ед).

Вычислим объем конуса: $V = \dfrac{1}{3} S_{осн} \cdot h$, где $S_{осн} = \pi r^2$.

Выразим длину радиуса основания через образующую. Из $\triangle POB$ получаем: $\dfrac{r}{l} = \cos 30^0$. Тогда: $\dfrac{r}{l} = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = \dfrac{l\sqrt{3}}{2}$ (ед).

Площадь основания: $S_{осн} = \pi r^2 = \dfrac{3\pi l^2}{4}$ (ед^2).

Подставив найденные выражения в формулу для вычисления объема конуса, окончательно получим: $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{3\pi l^2}{4} \cdot \dfrac{l}{2} = \dfrac{\pi l^3}{8}$ (ед^3).

Ответ: высота конуса $h = \dfrac{l}{2}$(ед), объем конуса: $V = \dfrac{\pi l^3}{8}$ (ед^3).

Пример 14.8.

Шар, радиус которого 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от его центра. Найдите, как относится площадь полученного сечения к площади большого круга.

Решение. Пусть радиус шара $OA = R = 41$ дм, а расстояние до сечения: $OO_1 = 9$ дм (рис. 14.20).

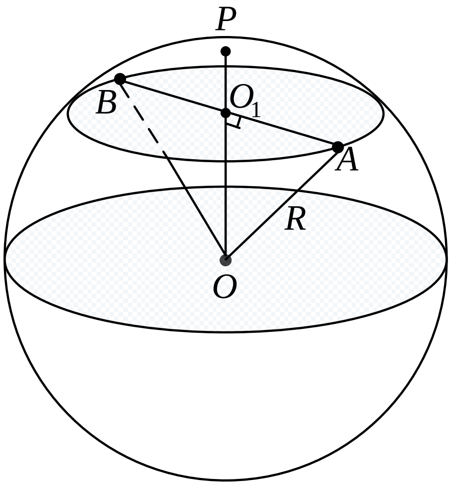


Рис. 14.20. **Шар**

Рассмотрим $\triangle AOO_1$ – прямоугольный.

Из $\triangle AOO_1$ найдем величину радиуса сечения с помощью теоремы Пифагора: $r = O_1A = \sqrt{OA^2 - OO_1} = \sqrt{41^2 - 9^2} = 40$ (дм).

Пусть: $S_2 = \pi R^2$ – площадь большого круга, $S_1 = \pi r^2$ – площадь сечения. Тогда их площади относятся как:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\pi r^2}{\pi R^2} = \frac{r^2}{R^2} = \frac{40^2}{41^2} = \frac{1600}{1681} = 0{,}95.$$

Ответ: $\frac{S_1}{S_2} = 0{,}95$.

Упражнения

14.23. Вставьте правильный ответ:

1) усеченный_________:

а) конус; б) цилиндр; в) шар.

14.24. Конус образуется при помощи вращения_________:

а) квадрата;
б) ромба;
в) равностороннего треугольника;
г) прямоугольного треугольника.

14.25. Образующая имеется у_________:

а) конуса; б) цилиндра; в) шара.

14.26. Верно ли утверждение: если конус (*цилиндр)* наклонен к площади основания под углом 30^0, это значит, что его высота также наклонена к плоскости основания также под углом 30^0?

14.27. Дан шар радиуса 4 см. Найдите площадь большого круга и длину окружности большого круга.

14.28. Нарисуйте шар, у которого одно из сечений находится на расстоянии от большого круга 5 см. Вычислите площадь этого сечения.

14.29. Если в конусе провести сечение плоскостью, которая параллельна основанию, то оно будет в виде_________:

а) круга; в) треугольника;

б) овала; г) прямоугольника.

14.30. Если в конусе провести сечение плоскостью, содержащей ось симметрии конуса, то оно будет в виде_________:

а) круга; в) треугольника;

б) овала; г) прямоугольника.

14.31. Если в цилиндре провести сечение плоскостью, параллельной основаниям, то оно будет в виде _________:

а) круга; в) треугольника;

б) овала; г) прямоугольника.

14.32. Если в конусе провести сечение плоскостью, содержащей ось симметрии конуса, то оно будет в виде_________:

а) круга; в) треугольника;

б) овала; г) прямоугольника.

14.33. Радиус основания конуса равен 5 см, его высота 7 см. Найдите площадь полной поверхности, объем конуса и длину его образующей.

14.34. Осевое сечение цилиндра – квадрат, площадь которого равна Q. Найдите объем цилиндра.

14.35. Правильная четырехугольная призма описана вокруг цилиндра, радиус основания и высота которого равны 1 м. Найдите объем призмы.

14.36. Призма вписана в цилиндр, радиус основания цилиндра $6\sqrt{3}$ ед., высота 3 ед. Найдите площадь боковой поверхности этой призмы.

14.37. Образующая l наклонена к плоскости основания цилиндра под углом 30^0, найдите радиус основания и высоту цилиндра.

14.38. Радиус основания конуса R, осевое сечение – прямоугольный треугольник. Найдите площадь этого треугольника (площадь осевого сечения).

14.39. Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая l наклонена под углом 30^0 к плоскости основания. Найдите высоту конуса H.

14.40. Радиусы оснований усеченного конуса равны 3 и 7 см, образующая – 5 см. Найдите площадь осевого сечения.

14.41. Радиус шара 3 дм. Найдите площадь его поверхности, объем и площадь большого круга шара.

14.42. Площадь большого круга шара 64π см, на расстоянии 3 см от центра шара проведено некоторое сечение. Найдите площадь полученного сечения.

14.43. Радиусы шаров равны 6, 8 и 10 см. Найдите тот шар, объем которого равен сумме объемов двух других шаров.

14.44. Одна цилиндрическая кружка вдвое выше другой, зато вторая в два раза шире. Найдите отношение объемов первой кружки ко второй.

14.45. Цилиндр и конус имеют общее основание и высоту (получается, что конус вписан в цилиндр). Вычислите объем конуса, если объем цилиндра равен 27 ед^3.

14.46. Площадь осевого сечения цилиндра равна 23 ед^2. Найдите площадь боковой поверхности цилиндра деленную на π.

Тема 15. Векторы

15.1. Векторы на плоскости

Вектор $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$ – это направленный отрезок, для которого точка A его начало, а точка B – конец (рис. 15.1).

Длина (модуль) вектора $|\overrightarrow{AB}|$ – это длина отрезка AB.

Нулевой вектор – это вектор, для которого начало и конец совпадают. Любую точку A можно считать нулевым вектором $\overrightarrow{AA}$. Нулевой вектор не имеет определенного направления, а его длина равна нулю.

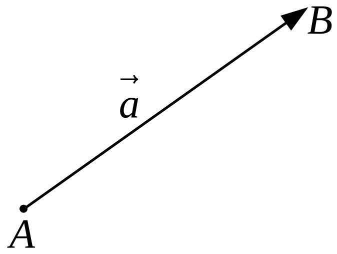


Рис 15.1. **Вектор** $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}}$

Координаты вектора на плоскости с началом в точке $A(x_1;\, y_1)$ и концом в точке $B(x_2;\, y_2)$ называют числа $a = x_2 - x_1$ и $b = y_2 - y_1$. Координаты вектора записывают так: $\overrightarrow{AB} = (a;\, b)$.

Длина вектора $\overrightarrow{AB} = (a;\, b)$ находится по формуле: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Ненулевые векторы называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых. Они могут быть одинаково направленными (*сонаправленными*) или противоположно направленными (рис. 15.2).

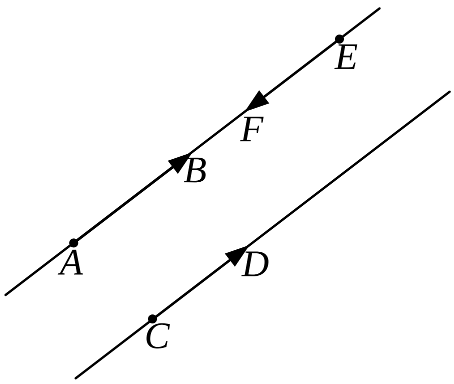


Рис. 15.2. $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \uparrow\uparrow \overrightarrow{\boldsymbol{CD}}$, $\overrightarrow{\boldsymbol{AB}} \uparrow\downarrow \overrightarrow{\boldsymbol{EF}}$

Равные векторы имеют одинаковые координаты, и наоборот: если соответствующие координаты векторов равны, то эти векторы равны.

Пример 15.1. Найдите вектор $\overrightarrow{AB} = (a;\, b)$ и его длину, если $A(6;-3)$ и $B(3;1)$.

Решение. Так как $a = 3 - 6 = -3$ и $b = 1 - (-3) = 4$, то координаты вектора имеют вид: $\overrightarrow{AB} = (-3;\, 4)$.

Длина вектора будет равна: $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$.

Пример 15.2. Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма $ABCD$, если $A(-2;1)$, $B(0;4)$, $C(4;1)$.

Если четырехугольник $ABCD$ – параллелограмм (рис. 15.3), то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$. Пусть искомая вершина – $D(x;\, y)$. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{DC}$: $\overrightarrow{AB} = (\overrightarrow{0-(-2);4-1}) = (\overrightarrow{2;3})$; $\overrightarrow{DC} = (\overrightarrow{4-x;1-y})$.

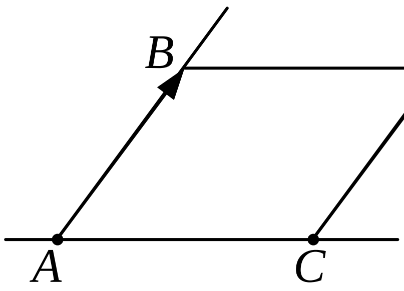


Рис. 15.3. **Параллелограмм $ABCD$**

Получаем уравнения: $4 - x = 2$, $1 - y = 3$, откуда $x = 2$; $y = -2$.

Ответ: $(2;\, -2)$.

Суммой векторов $\vec{a}(a_1;a_2)$ и $\vec{b}(b_1;b_2)$ называется вектор $\vec{c}(c_1;c_2)$, для которого: $\overrightarrow{(c_1;c_2)} = \overrightarrow{(a_1;a_2)} + \overrightarrow{(b_1;b_2)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1;a_2 + b_2)}$.

Разностью векторов $\vec{a}(a_1;a_2)$ и $\vec{b}(b_1;b_2)$ называется вектор $\vec{d}(d_1;d_2)$, для которого: $\overrightarrow{(d_1;d_2)} = \overrightarrow{(a_1;a_2)} + \overrightarrow{(b_1;b_2)} = \overrightarrow{(a_1 + b_1;a_2 + b_2)}$.

Скалярным произведением $\vec{a} \cdot \vec{b}$ векторов $\vec{a}(a_1;a_2)$ и $\vec{b}(b_1;b_2)$ называется число $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$. Также скалярное произведение находится по формуле:

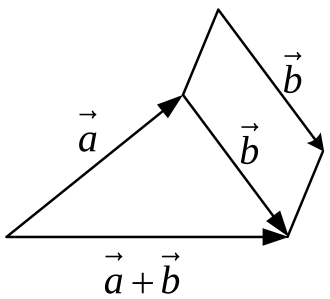
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \cos\angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right).$$

Если $\vec{a} \perp \vec{b}$, то $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, и наоборот: если для ненулевых векторов $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, то $\vec{a} \perp \vec{b}$.

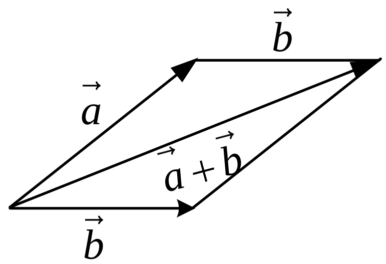
Чтобы найти угол между векторами, можно вычислить его косинус:

$$\cos \angle\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right|} = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2} \cdot \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2}}.$$

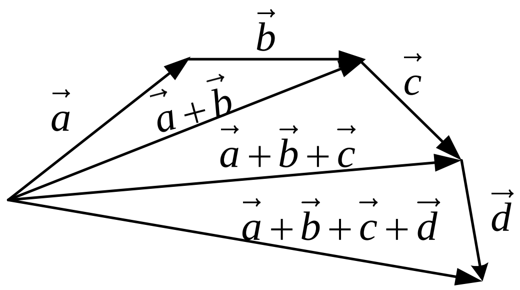
На рис. 15.4. показаны правила построения суммы и разности векторов.



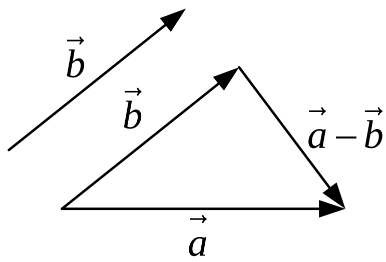
Правило треугольника



Правило параллелограмма



Правило многоугольника



Разность векторов

Рис. 15.4. **Правила построения суммы и разности векторов**

Пример 15.3. Даны векторы $\vec{a}(2; 3)$ и $\vec{b}(-4; 5)$. Найдите координаты вектора $\vec{c} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ и длину вектора $\vec{d} = \vec{a} - \vec{b}$.

Решение. Искомый вектор $\vec{c}(c_1, c_2)$, его координаты будут равны: $c_1 = 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-4) = -8$ $c_2 = 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 = 21$.

Для вектора $\vec{d}(d_1, d_2)$: $d_1 = 2 - (-4) = 6$ $d_2 = 3 - 5 = -2$, $\vec{d}(6, -2)$. Тогда его длина: $\left|\vec{d}\right| = \sqrt{6^2 + 2^2} = \sqrt{40} = 2\sqrt{10}$.

Ответ: $\vec{c}(-8, 21)$, $\left|\vec{d}\right| = 2\sqrt{10}$.

Пример 15.4. Найдите, при каком значении x векторы $\vec{a}(2;-1)$ и $\vec{b}(3;\,x)$ перпендикулярны.

Решение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны при условии $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Записав это условие в координатах, получим:

$$2\cdot 3+(-1)x=0,\;\; 6-x=0,\;\; x=6.$$

Ответ: $x=6$.

Пример 15.5. Найдите угол между векторами $\vec{a}(2;-1)$ и $\vec{b}(-4;-8)$

Решение.

$$\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{2\cdot(-4)+(-1)\cdot(-8)}{\sqrt{2^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{(-1)^2+(-8)^2}}=0\,;\; \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right)=90^0.$$

Ответ: 90^0.

Пример 15.6. Найдите координаты вектора $\vec{c}(c_1,c_2)$, коллинеарного вектору $\vec{p}(12,-5)$, если $\left|\vec{c}\right|=26$.

Векторы $\vec{c}$ и $\vec{p}$ коллинеарные, а значит, справедливо соотношение: $\dfrac{c_1}{c_2}=-\dfrac{12}{5}$. Выразим одну координату через другую $c_1=-\dfrac{12}{5}c_2$ и подставим в формулу длины вектора $\vec{c}$:

$$\left|\vec{c}\right|^2=c_1^2+c_2^2=\frac{144}{25}c_2^2+c_2^2=\frac{169}{25}c_2^2=26^2.$$

Решая уравнения, получим: $c_2=\pm 10$, $c_1=\pm 24$.

Ответ: $\vec{c}(-24,10)$ или $\vec{c}(24,-10)$.

Пример 15.6. Найдите угол между боковыми сторонами равнобедренного треугольника, если медианы, проведенные к боковым сторонам, взаимно перпендикулярны.

Решение. Дан равнобедренный ΔABC с основанием AC, AE и CD – медианы, $AE\perp CD$ (рис. 15.5.).

Пусть $\vec{a}=\overrightarrow{BD}$ и $\vec{b}=\overrightarrow{BE}$.

Тогда $\overrightarrow{CD}=\vec{a}-2\vec{b}$, $\overrightarrow{AE}=\vec{b}-2\vec{a}$. Так как $AE\perp CD$, то $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{CD}=0$, то есть $(\vec{a}-2\vec{b})(\vec{b}-2\vec{a})=0$.

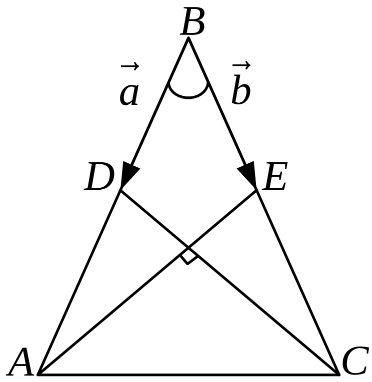


Рис. 15.5. **Равнобедренный ΔABC**

Учитывая, что $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos B$ имеем:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 + 4\vec{a} \cdot \vec{b} = 0, \quad 5\vec{a} \cdot \vec{b} - 2\vec{a}^2 - 2\vec{b}^2 = 0,$$

$$5|\vec{a}|^2 \cos B - 4|\vec{a}|^2 = 0, \quad \cos B = \frac{4}{5}, \quad \angle B = 37^0.$$

Ответ: $\angle B = 37^0$.

Упражнения

15.1. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длину, если:

а) $A(-4; 1)$, $B(5; -3)$;

б) $A(2; -7)$, $B(0; 2)$;

в) $A(8; 4)$, $B(-2; 1)$;

г) $A(-4; -3)$, $B(0; -2)$;

д) $A(5; 6)$, $B(10; -7)$;

е) $A(3; -1)$, $B(-1; -2)$.

15.2. Найдите координаты четвертой вершины параллелограмма $ABCD$, если $A(3; 1)$, $B(5; 0)$, $C(2; -3)$.

15.3. Стороны прямоугольника $ABCD$ равны 3 и 4 см. Найдите длину вектора $\overrightarrow{AC}$.

15.4. В прямоугольной трапеции $ABCD$ $AD \parallel BC$, $AB = 4$, $AD = 7$, $\angle D = 45^0$. Найдите длину векторов $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$ и $\overrightarrow{BD}$.

15.5. Длина вектора $\vec{a}(m-3; m-1)$ равна 10 ед. Найдите m.

15.6. Длина вектора $\overrightarrow{AB}$ равна 5 ед. Найдите координаты точки B, если $A(4; -2)$, а точка B лежит на прямой $y = 2x$.

15.7. Даны векторы $\vec{a}\,(4;-7)$ и $\vec{b}(-3;6)$. Найдите:

а) $3\vec{a}+\vec{b}$;

б) $4\vec{a}+6\vec{b}$;

в) $\vec{a}-4\vec{b}$;

г) $5\vec{b}-3\vec{a}$.

15.8. Заполните пропуски:

A	$(5;-2)$	$(\_\_\_;\ \_\_\_)$	$(-3;0)$
B	$(3;0)$	$(-2;1)$	
$\overrightarrow{AB}$	$(\_\_\_;\ \_\_\_)$	$(8;0)$	
$2\overrightarrow{AB}$			$(6;4)$
$-0,5\overrightarrow{AB}$			

15.9. Найдите координаты векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если их сумма имеет координаты $\overrightarrow{(-4;5)}$, а разность $\overrightarrow{(3;7)}$.

15.10. Дан вектор $\vec{c}(3,-2)$ и точка $M(-4,5)$. Найдите координаты точки F такой, что векторы $\vec{c}$ и $\overrightarrow{FM}$ противоположно направлены, а модуль $\overrightarrow{FM}$ в два раза больше модуля $\vec{c}$.

15.11. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a}\,(2;-1)$, $\vec{b}\,(4;3)$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______________________________;

б) $\vec{a}\,(-3;4)$, $\vec{b}\,(3;-2)$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______________________________;

в) $\vec{a}\,(6;-3)$, $\vec{b}\,(2;4)$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______________________________.

15.12. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}|=4$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=30^0$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______________________________;

б) $|\vec{a}|=7$, $|\vec{b}|=2$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=180^0$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______________________________;

в) $|\vec{a}|=3$, $|\vec{b}|=12$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=0^0$: $\vec{a}\cdot\vec{b}=$______________________________.

15.13. Даны векторы $\vec{a}\,(5;-y)$, $\vec{b}\,(4;6)$. При каком значении y $\vec{a}\cdot\vec{b}=-18$?

15.14. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}\,(4;-1)$, $\vec{b}\,(-6;-8)$.

15.15. Найдите косинусы углов ΔABC и установите вид этого треугольника, если $A(-1;2)$, $B(3;7)$, $C(2;-1)$.

15.16. Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ равен 30^0, $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$. Найдите:

а) $\vec{a}\cdot\vec{b}$;

б) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}$;

в) $(\vec{a}-\vec{b})\cdot\vec{b}$;

г) $(3\vec{b}-2\vec{a})\cdot\vec{a}$.

15.17. Даны векторы $\vec{a}\,(2;-4)$, $\vec{b}\,(3;-3)$. Найдите:

а) $|\vec{a}+\vec{b}|$;

б) $|\vec{b}-3\vec{a}|$;

15.18. Запишите уравнение высоты треугольника ABC, если $A(-3;-1)$, $B(2;4)$, $C(3;-2)$.

15.19. Даны точки $A(-2;-3)$, $B(-3;4)$, $C(4;5)$.

а) Докажите, что в треугольнике ABC углы A и C равны.

б) Найдите площадь треугольника ABC.

15.20. Докажите, что четырехугольник $ABCB$ – ромб, и найдите его площадь, если $A(-3;4)$, $B(7;9)$, $C(5;-2)$, $C(-5;-7)$.

15.2. Векторы в пространстве

В пространстве все точки, а значит и векторы имеют три координаты: x, y, z. Поэтому во всех формулах появится еще одна координата.

Координаты вектора в пространстве с началом в точке $A(x_1;y_1;z_1)$ и концом в точке $B(x_2;y_2;z_2)$ имеют вид:

$$\overrightarrow{AB}(x_2-x_1;y_2-y_1;z_2-z_1).$$

Длина вектора $\vec{a}(a_1;a_2;a_3)$ находится по формуле:

$$|\vec{a}|=\sqrt{a_1^{\ 2}+a_2^{\ 2}+a_3^{\ 2}}.$$

Скалярное произведение в пространстве находится по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3.$$

Угол между векторами находится по формуле:

$$\cos\angle\left(\vec{a},\vec{b}\right)=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^{\,2}+a_2^{\,2}+a_3^{\,2}}\cdot\sqrt{b_1^{\,2}+b_2^{\,2}+b_3^{\,2}}}.$$

Упражнения

15.21. Найдите координаты вектора $\overrightarrow{AB}$, если:

а) $A(3;-4;-7)$, $B(-1;5;3)$; б) $A(-4;0;8)$, $B(0;-6;2)$.

15.22. Даны точки $M(-3;2;z)$, $N(4;6;3)$, $K(x;1;-10)$, $E(2;y;-15)$. Найдите $x,\ y,\ z,$ если $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{EK}$.

15.23. Точка $K(-8;3;-5)$ – конец вектора $\vec{a}(6;-9;2)$. Тогда координаты начала вектора равны: ____________________.

15.24. Среди векторов $\vec{a}\,(5;-3;4)$, $\vec{b}\,(-2;1;-7)$, $\vec{c}\,(2;-6;\sqrt{10})$, $\vec{d}\,(-3;6;3)$, $\vec{m}\,(-5;5;-2)$. Найдите те, у которых одинаковый модуль.

15.25. Модуль вектора $\vec{n}\,(x;-10;8)$ равен 13. Найдите x.

15.26. Даны вектора $\vec{c}\,(-3;1;2)$ и $\vec{d}\,(5;-6;7)$. Найдите:

а) $\vec{c}+\vec{d}$; в) $\vec{c}-\vec{d}$;

б) $\left|\vec{c}+\vec{d}\right|$; г) $\left|\vec{c}-\vec{d}\right|$.

15.27. Найдите координаты точки K такой, что $\overrightarrow{MK}-\overrightarrow{KN}=0$, где $M(0;5;-8)$, $N(-6;3;7)$.

15.28. Даны векторы $\vec{c}\,(4;-7;-3)$ и $\vec{d}\,(-3;6;22)$. Найдите:

а) $3\vec{c}+\vec{d}$; в) $\vec{d}-4\vec{c}$;

б) $4\vec{c}+6\vec{d}$; г) $3\vec{d}-5\vec{c}$.

15.29. Среди векторов $\vec{a}\,(4;-3;5)$, $\vec{b}\,(-8;6;-10)$, $\vec{c}\,(12;-9;15)$, $\vec{d}\,(-0{,}8;0{,}6;-1)$ найдите одинаково направленные и противоположно направленные векторы.

15.30. Найдите координаты единичного вектора, который противоположно направлен к векторам:

а) $\vec{a}\,(4;-3;5)$; б) $\vec{a}\,(4;-3;5)$; в) $\vec{a}\,(4;-3;5)$.

15.31. Найдите значения x y, при которых векторы $\vec{a}\,(x; -8; 12)$ и $\vec{b}\,(24; y; -36)$ коллинеарны.

15.32. Разложите вектор $\vec{m}\,(11; -4; 11)$ по направлениям векторов $\vec{a}\,(1; 2; 3)$, $\vec{b}\,(2; -1; 1)$, $\vec{c}\,(3; -5; 2)$.

15.33. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $\vec{a}\,(1; -3; 8)$, $\vec{b}\,(4; 2; -6)$: $\vec{a}\cdot\vec{b} =$______________________________;

б) $\vec{a}\,(-3; -8; 9)$, $\vec{b}\,(-7; -1; -2)$: $\vec{a}\cdot\vec{b} =$___________________________;

в) $\vec{a}\,(4; 2; 5)$, $\vec{b}\,(-10; 5; 6)$: $\vec{a}\cdot\vec{b} =$_______________________________.

15.34. Найдите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если:

а) $|\vec{a}\,| = 8$, $|\vec{b}| = 7$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 45^0$: $\vec{a}\cdot\vec{b} =$____________________________;

б) $|\vec{a}\,| = 10$, $|\vec{b}| = 11$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 120^0$: $\vec{a}\cdot\vec{b} =$__________________________;

в) $|\vec{a}\,| = 5$, $|\vec{b}| = 6$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 90^0$: $\vec{a}\cdot\vec{b} =$______________________________;

15.35. Даны векторы $\vec{a}\,(4; -2; p)$, $\vec{b}\,(-5; p; -3)$. При каком значении p скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b} = 8$?

15.36. Найдите косинус угла между векторами $\vec{a}\,(5; -1; -2)$ и $\vec{b}\,(2; 6; -3)$.

15.37. Найдите косинусы углов ΔABC и установите вид этого треугольника, если $A(1; -4; -1)$, $B(4; 7; 0)$, $C(-2; 1; 6)$.

15.38. Даны векторы $\vec{a}\,(6; -1; -5)$, $\vec{b}\,(x; 2; 2)$. При каком значении x векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны?

15.39. Даны векторы $\vec{a}\,(4; -7; -2)$, $\vec{b}\,(3; y; 01)$. При каких значениях y угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

а) острый; б) прямой; в) тупой?

15.40. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, $|\vec{a}\,| = 4$, $|\vec{b}| = 75$, $(\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 135^0$. Найдите:

а) $|\vec{a} + \vec{b}|$; б) $|\vec{b} - 3\vec{a}|$; в) $|2\vec{b} + 5\vec{a}|$.

Рекомендуемая литература

1. Алгебра. 11 кл. : сб. задач и контрольных работ / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович и др.; под ред. А. Г. Мерзляка. – Харьков : Гимназия, 2013. – 96 с.

2. Бевз Г. П. Алгебра : підручник для 7 кл. загальноосвіт. навч. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – Київ : Зодіак-ЕКО, 2007. – 304 с.

3. Бевз Г. П. Геометрія : підручник для 7 кл. загальноосвіт. закл. / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова; пер. з укр. – Київ : Вежа, 2007. – 208 с.

4. Геометрия. 10 кл. : сб. задач и контрольных работ / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович и др.; под ред. А. Г. Мерзляка – Харьков : Гимназия, 2010. – 144 с.

5. Геометрия. 11 кл. : сб задач и контрольных работ / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович и др.; под ред. А. Г. Мерзляка – Харьков : Гимназия, 2012. – 112 с.

6. Збірник тестових завдань з математики для слухачів підготовчого відділення та підготовчих курсів усіх форм навчання : навч. посіб. / укл. Л. М. Малярець, О. Д. Анохіна та ін.; за ред. Л. М. Малярець. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2007. – 320 с.

7. Збірник тестових завдань для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання знань з математики / укл. Л. М. Малярець, О. Д. Анохіна та ін.; за ред. Л. М. Малярець. – Харків : Вид ХНЕУ, 2009. – 268 с.

8. Ігначкова А. В. Математика для абітурієнтів : навч. посіб. / А. В. Ігначкова, Л. М. Малярець. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2004. – 576 с.

9. Литвиненко І. М. Збірник завдань для атестації з математики учнів 10 – 11 кл. / І. М. Литвиненко, Л. Я. Федченко, В. О. Швець. – Харків : ББН, 2000. – 164 с.

10. Малярець Л. М. Завдання для контрольних робіт з курсу "Мате-матика" для слухачів підготовчих курсів заочної форми навчання : навч. посіб. / Л. М. Малярець, В. А. Ігначкова. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2006. – 88 с.

11. Малярець Л. М. Програма навчальної дисципліни "Математика" для слухачів підготовчих курсів усіх форм навчання / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2007. – 24 с.

12. Математика для экономистов: от Арифметики до Эконометрики : учебн.-справ. пособ. / под. ред. проф. Н. Ш. Кремера. – Москва : Высшее образование, 2007. – 646 с.

13. Математика : учеб. пособ. для слушателей подготовительного отделения ХНЭУ / Л. М. Малярец, А. В. Игначкова, Л. Д. Широкорад и др.; под ред. Л. М. Малярец. – Харьков : Изд. ХНЭУ, 2013. – 336 с.

14. Медолазов А. А. Математика: арифметика, алгебра и начала анализа : конспект лекц.-практ. занятий с иностранными студентами / А. А. Медолазов, Г. И. Тохтарь, А. П. Кулик. – Харьков : Гимназия, 2004. – 162 с.

15. Нелин Е. П. Алгебра в таблицах : учеб. пособ. для учащихся 7–11 кл. / Е. П. Нелин. – 3-е изд. – Харьков : Гимназия, 2011. – 128 с.

16. Сборник задач и заданий для тематического оценивания по геометрии для 7 кл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович и др.; под ред. А. Г. Мерзляка. – Харьков : Гимназия, 2010. – 112 с.

17. Сборник задач и контрольных работ по алгебре для 8 кл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович и др.; под ред. А. Г. Мерзляка. – Харьков : Гимназия, 2010. – 96 с.

18. Сборник задач и контрольных работ по геометрии для 8 класса. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович и др.; под ред. А. Г. Мерзляка. – Харьков : Гимназия, 2009. – 112 с.

19. Сборник задач и контрольных работ по геометрии для 9 кл. / А. Г. Мерзляк, В. Б. Полонский, Е. М. Рабинович и др.; под ред. А. Г. Мерзляка. – Харьков : Гимназия, 2010. – 120 с.

20. Тематичні тести для підготовки до зовнішнього незалежного оцінювання знань з математики : навч. посіб. / укл. Л. М. Малярець, О. Д. Анохіна та ін.; за ред. Л. М. Малярець. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2009. – 352 с.

21. Шкіль М. І. Алгебра і початки аналізу : підруч. для 10 – 11 кл. середньої школи / М. І. Шкіль, Е. С. Слєпкань, О. С. Дубінчук. – Київ : Зодіак-Еко, 2001. – 688 с.

Содержание

Вступление 3
Тема 1. Основные математические понятия. Арифметика 5
1.1. Цифры и числа. Обозначение и чтение чисел 5
1.2. Арифметические действия над числами 6
1.3. Понятие множества. Операции над множествами 10
1.4. Числовые множества. Числовая ось. Модуль числа 12
1.5. Рациональные числа и действия над ними. Сравнение чисел 13
Тема 2. Одночлены и многочлены 25
2.1. Степень рационального числа 25
Тема 3. Функции и графики 34
3.1. Понятие функции 34
3.2. Способы задания функции 35
3.3. Основные свойства функций 36
3.4. Классификация функций 38
3.5. Общие представления о неэлементарных функциях 41
3.6. Преобразование графиков 42
Тема 4. Уравнения и системы уравнений первого порядка 49
4.1. Уравнения первого порядка 49
4.2. Системы уравнений первого порядка 50
Тема 5. Квадратные уравнения и уравнения, которые приводятся к квадратным 53
Тема 6. Алгебраические неравенства 57
Тема 7. Прогрессии 62
7.1. Числовая последовательность 62
7.2. Арифметическая прогрессия 63
7.3. Геометрическая прогрессия 66
Тема 8. Показательная и логарифмическая функции 70
8.1. Показательная функция 70
8.2. Показательные уравнения и неравенства. Способы решения 72
8.3. Логарифмы. Логарифмическая функция 73
8.4. Решение логарифмических уравнений и неравенств 75

Тема 9. Тригонометрические функции 79
9.1. Радианная и градусная мера. Тригонометрические функции острого угла 79
9.2. Тригонометрические уравнения и неравенства 91
Тема 10. Предел. Непрерывность функции. Производная 96
10.1. Предел функции непрерывного аргумента 96
10.2. Производная 103
10.3. Применение производной к исследованию функции 107
Тема 11. Интеграл и его применение 112
11.1. Неопределенный интеграл 112
11.2. Методы интегрирования 117
11.3. Определенный интеграл 121
11.4. Приложения определенного интеграла 128
Тема 12. Элементы комбинаторики 132
Тема 13. Планиметрия 136
13.1. Точка, луч, отрезок, прямая на плоскости 136
13.2. Углы и их меры 138
13.3. Треугольник 141
13.4. Четырехугольники 150
13.5. Круг. Окружность 159
13.6. Площади фигур 166
Тема 14. Стереометрия 172
14.1. Многогранники 173
14.2. Тела вращения 181
Тема 15. Векторы 190
15.1. Векторы на плоскости 190
15.2. Векторы в пространстве 197
Рекомендуемая литература 200

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до практичних занять для слухачів підготовчого відділення

(рос. мовою)

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Железнякова** Еліна Юріївна
Сілічова Тетяна Василівна
Мінєнкова Олена Вадимівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *Н. І. Ганцевич*

Коректор *Н. І. Ганцевич*

Наведено основний матеріал за темами навчальної дисципліни для іноземних студентів підготовчого відділення. Відображено широке коло питань з арифметики, алгебри й елементарних функцій, диференційного та інтегрального числення, геометрії, комбінаторики. Кожна тема містить стислий теоретичний матеріал. Основні положення проілюстровані схемами, графіками, таблицями та практичними завданнями з розв'язками. Запропоновано значну кількість вправ для закріплення здобутих знань, що сприяє формуванню математичної компетентності в іноземних студентів.

Рекомендовано для слухачів підготовчого відділення.

План 2017 р. Поз. № 238 ЕВ. Обсяг 204 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.