УДК 519.863:658.15(477)

ОПТИМИЗАЦІЙНА МОДЕЛЬ ПЕРЕВЕЗЕННЯ КОНТЕЙНЕРІВ ПО СКЛАДАХ

Шевченко О.К.,к.т.н., доцент, Жуков А. В., к.е.н., викладач,

ХНЕУ, Харків, Україна

***Анотація* — пропонується застосування методу динамічного програмування до розв'язання виробничої задачі розподілення контейнерів по складах. В задачі наведений алгоритм методу динамічного програмування, що складається з прямого ходу та зворотнього. Отримана оптимальна модель розподілення контейнерів по складах.**

В процесі економічної діяльності на підприємстві виникає необхідність отримати оптимальне рішення. Економіка динамічна, економічний процес залежить від часу. Тому цікаво знайти оптимальне рішення не для одного моменту часу, а протягом деякого періоду. Період розбивають на декілька етапів і вирішують багатоетапну задачу, послідовно отримуючи оптимальне рішення на кожному етапі, його називають умовно оптимальним. Такі задачі розв'язуються методом динамічного програмування.

Проблемою застосування методу динамічного програмування в управлінні виробничою діяльністю підприємств, займалися вітчизняні та зарубіжні вчені. Серед них можна виділити: Беллман Р., Протосеня А., Куліш С., Азбель Е. та ін.

Ціль даної роботи знайти оптимальне рішення розподілу ресурсів на основі принципу оптимальності Беллмана та за допомогою методу динамічного програмування. [1]

Загальна постановка задачі динамічного програмування полягає в наступному. Припустимо, що ми маємо певний керований процесс. Позначимо S_0 - початковий стан системи. В результаті управління система переходить зі стану S_0 в стан S^*. Припустимо, що управління можна розбити на n етапів, тоді рішення прийматимемо послідовно на кожному кроці, тобто отримаємо багатокроковий процес.

Позначимо X_k - управління на k-му кроці $(k=1,2,...n)$. Змінні X_k можуть бути числом, точкою в n-вимірному просторі, якісною ознакою. Тоді $\overline{X}(X_1, X_2,...X_n)$ - управління, що переводить систему зі стану S_0 в S^*. [2]

Показник ефективності цієї керованої системи - функція цілі Z, яка залежить від початкового стану S_0 і управління $\overline{X}$:

$$Z = F(S_0, \overline{X}) \qquad (1)$$

Завдання полягає в тому, щоб з безлічі можливих управлінь знайти таке управління $\overline{X}^*(X_1^*, X_2^*,..., X_n^*)$, при якому функція цілі приймає екстремальне значення (максимальне або мінімальне). [3]

Сформулюємо розподільчу задачу на прикладі планування діяльності підприємства на n років. Нехай підприємство має ресурс в розмірі Y одиниць, який воно може вкласти у виробництво протягом n років. Функції $f_t(x)$ відображають ефективність використання x одиниць ресурсу в рік t.

Потрібно визначити план витрат наявного ресурсу за роками, щоб максимізувати сумарну ефективність:

Позначимо через x_t шукану величину ресурсу, що вкладається в розвиток виробництва в рік $t = 1,\dots,n$. Функцію цілі позначимо $S(y)$. Тоді математична модель може бути записана у вигляді

$$S(y) = \sum_{t=1}^{n} f_t(x_t) \to \max_{\{x_t\}},$$
$$\sum_{t=1}^{n} x_t = Y, \qquad (2)$$
$$x_t \ge 0,\ t = 1,\dots,n.$$

Алгоритм динамічного програмування складається з прямого ходу (процесу послідовного обчислення величини $S_k(y)$, $k = 1,\dots,n$; $0 \le y \le Y$) і зворотного ходу (відновлення оптимального рішення). На останньому кроці прямого ходу отримуємо оптимальне значення останньої змінної $x_n^* = x_n(Y)$ і оптимальні значення $x_n^*,\dots,x_{k+1}^*$. Тоді $x_k^* = x_k(y_k^*)$, де $y_k^* = y_{k+1}^* - x_{k+1}^*$.

Розглянемо виробничу задачу. Підприємству, яке перевозить контейнери з зерном потрібно розподілити їх по складах. На залізничну станцію прибуло 10 контейнерів, які необхідно розвести по чотирьох складах. Ємність i-го складу v_i - контейнерів, витрати на транспортування одного контейнера на цей склад - g_i, а вартість зберігання x контейнерів - $c_i(x)$. Необхідно розвести всі контейнери, що прибули, по складах, щоб сумарні витрати на транспортування і зберігання були мінімальні.

Введемо функції $h_i(x) = g_i x + c_i(x)$, $i = 1,\dots,4$, які задані в таблиці 1.

$h_i(x)$ - витрати на транспортування і зберігання x - контейнерів.

Таблиця 1

Витрати на транспортування та зберігання x - контейнерів

x	$h_1(x)$	$h_2(x)$	$h_3(x)$	$h_4(x)$
1	2	2,8	2,5	1,7
2	5	4,6	5	3,9
3	7	6,4	8	5,6
4	-	8,7	-	7,3
5	-	-	-	8,2

Запишемо рекурентні співвідношення [4]:

$$S_1(y) = h_1(y),\ \ y = 0, 1,\dots,10;$$
$$S_k(y) = \min_{0 \le x \le \min\{y, v_k\}} \left[h_k(x) + S_{k-1}(y - x)\right],$$
$$k = 2,\dots,4;\ y = 0, 1,\dots,10 \qquad (3)$$

Прямий хід. В результаті прямого ходу заповнюємо таблицю 2, в яку поміщені значення $S_k(y)$, а через дріб (/) вказані умовно-оптимальні значення, які допоможуть відновити оптимальне рішення на етапі зворотного ходу.

Таблиця 2

Значения функции $S_k(y)$ і умовно-оптимальні рішення

y	$S_1(y)$	$S_2(y)$	$S_3(y)$	$S_4(y)$
0	0	0	0	0
1	**2/1**	2/0; 1	2/0; 1	-
2	5/2	4,6/2	4,5/2	-
3	7/3	7/0	7/0; 2	-
4	-	8,4/3	8,4/0	-
5	-	**10,7/4**	**10,7/0**	-
6	-	13,4/3	13,2/1	-
7	-	15,7/4	15,7/0	-
8	-	-	18,2/1	-
9	-	-	20,7/2	-
10	-	-	23,7/3	**18,9/5**

За результатами роботи прямого ходу алгоритму, тобто обчисленню всіх умовно-оптимальних рішень на кожному кроці, знайдено оптимальне значення цільової функції $S^* = S_4(10) = 18{,}9$, і оптимальне значення останньої змінної $x_4^* = x_4(10) = 5$.

Зворотний хід. Тому що на четвертий склад в оптимальному рішенні треба везти п'ять контейнерів $(x_4^* = 5)$, то $y_3^* = 10 - 5 = 5$, тобто ще п'ять контейнерів потрібно розподілити по першим трьом складам. Значить, для визначення оптимального значення передостанньої змінної досить звернутися до клітинки таблиці 2 із значенням $S_3(5)$. У цій клітинці зберігається умовно-оптимальне значення $10{,}7$ та оптимальне значення передостанньої змінної $x_3^* = 0$. Отже, на третій склад відправляти контейнери не потрібно. Тобто, п'ять контейнерів необхідно відправити на перший і другий склади. Обчислимо $y_2^* = y_3^* - x_3^* = 5 - 0 = 5$. В клітинці таблиці 2 $S_2(5)$ знаходимо умовно-оптимальне значення $10{,}7$ і $x_2^* = 4$. Знайдемо $y_1^* = y_2^* - x_2^* = 5 - 4 = 1$. В клітинці $S_1(1)$ маємо умовно-оптимальне значення 2 і $x_1^* = 1$. Тобто на склад один потрібно везти один контейнер.

Остаточно маємо оптимальний вектор задачі $\overline{X^*} = (1,\ 4,\ 0,\ 5)$ призводить до мінімальних витрат $S^* = 18{,}9$, які пов'язани з перевезенням та зберіганням десяти контейнерів. В таблиці 2 жирним шрифтом позначені клітинки за якими було встановлено оптимальне рішення на етапі зворотного ходу.

Таким чином, розв'язана задача перевезення та зберігання контейнерів на складах (на прикладі перевезення контейнерів з зерном) і отримано її оптимальне рішення. Отже, застосування методу динамічного програмування дозволяє розв'язувати виробничу задачу мінімізації або максимізації, коли функція цілі не задана аналітично, а всі вихідні дані записані в таблиці. Детально розглянуті функціональні рівняння Беллмана, що безпосередньо адаптовані до конкретної виробничої задачі, а саме, до проблеми перевезення матеріалів (або контейнерів) по складах. Отримана оптимальна математична модель розвитку економічного процесу, яка опрабована на виробничої задачі перевезення контейнерів з зерном, що має суттєвий економічний ефект. Це дозволяє управляти економічним процесом в цілому. Результати досліджень впроваджені у виробництво.

Список використаної літератури

1. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. – Москва: Изд. иностранной литературы, 1960. – 400 с.
2. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин и др.; под ред. проф. Н. Ш. Кремера. – Москва: Банки и биржи; ЮНИТИ, 1997. – 407 с.
3. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование : учеб. пособ. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. –Москва: Высш. школа, 1980 – 300 с., ил.
4. Норик Л. А. Высшая и прикладная математика : учеб. пособ. для иностранных студентов. Ч. 2 / Л. А. Норик, А. К. Шевченко. – Харьков: Изд. ХНЭУ, 2013. – 404 с. (Русск. яз.).

Автори

Шевченко Олександра Кирилівна, к.т.н., доцент, ХНЕУ, Харків, Україна.
akshev19@gmail.com

Жуков Андрій В'ячеславович, к.е.н., викладач, ХНЕУ, Харків, Україна.
okydoky87@ukr.net

Тези доповіді надійшли 09 січня 2019 року. (Пишіть дату, коли Ви відправили свою доповідь).

Опубліковано в авторській редакції.