МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

Л. М. Малярець
І. Л. Лебедєва
Л. О. Норік

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Практикум

У 2-х частинах

Частина 2

Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2019

УДК 519.8(075.034)
М21

Авторський колектив: д-р екон. наук, професор Л. М. Малярець – вступ, теми 6, 7; канд. фіз.-мат. наук, доцент І. Л. Лебедєва – теми 8, 9; канд. екон. наук, доцент Л. О. Норік – теми 10, 11.

Рецензенти: професор кафедри міжнародної електронної комерції та готельно-ресторанної справи Харківського національного університету імені В. Н. Каразіна, д-р екон. наук *В. О. Бабенко*; проректор з підготовки наукових кадрів Східноєвропейського університету економіки і менеджменту (м. Черкаси), д-р екон. наук, професор *Г. О. Ус.*

Рекомендовано до видання рішенням вченої ради Харківського національного економічного університету імені Семена Кузнеця.
Протокол № 8 від 22.04.2019 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Малярець Л. М.
М21 Дослідження операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : практикум : у 2-х ч. Частина 2 / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 161 с.
ISBN 978-966-676-755-7

Розглянуто основні принципи та концепції побудови математичних моделей для різних класів завдань економіки, вирішення яких спирається на застосування методів нелінійного й динамічного програмування, теорії ігор, теорії масового обслуговування, мережного планування та управління. До кожної теми подано термінологічний словник, тренувальні вправи, практичні завдання, тестові завдання для самостійної роботи і перелік запитань для самоперевірки.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей як базовий практикум із навчальної дисципліни і як допоміжний матеріал у процесі безперервної математичної підготовки, а також для використання викладачами під час проведення практичних занять і організації самостійної роботи студентів.

УДК 519.8(075.034)

ISBN 978-966-676-755-7

Зміст

Вступ

Однією з основних рис сучасного етапу розвитку економіки є високий рівень її формалізації. Стрімке зростання ролі аналітичних досліджень в управлінні соціальними та економічними процесами і їх оптимізації вимагає від майбутніх фахівців у галузі економіки та менеджменту поглибленої математичної підготовки, яка давала б можливість застосовувати потужний математичний інструментарій до розв'язання проблем, що виникатимуть у їхній професійній діяльності. Таким потужним інструментом, що дозволяє виконувати дослідження економічних систем і процесів різної складності й отримувати достовірну інформацію щодо характеристик економічних процесів та явищ, є саме економіко-математичні методи. Так, застосування математичних методів дозволяє розробляти економіко-математичні моделі економічних процесів, і надалі це стає підґрунтям для формування управлінських рішень щодо оптимізації цих процесів під час розв'язання реальних задач у різних сферах професійної діяльності суб'єктів господарювання. Завдяки широкому впровадженню інформаційних технологій та комп'ютеризації у всіх сферах людської діяльності взагалі й, зокрема, у процесі отримання освіти залишилося в минулому уявлення про навчання як просте передавання інформації від викладача до студента. У новітній освіті впроваджують концептуально новий підхід до процесу навчання, що передбачає спрямування на кінцевий результат, а саме на формування компетентного фахівця, який не лише здобув певні знання, але й отримав необхідні вміння та навички, що надалі дозволяє йому ефективно використовувати ці знання у професійній діяльності.

Сучасний фахівець у галузі економіки має володіти методикою виконання дослідження операцій, що є основою процесу ухвалення управлінських рішень у різних сферах господарської діяльності. Саме це і є метою вивчення такої навчальної дисципліни, як "Дослідження операцій та методи оптимізації". Водночас основну увагу приділено формуванню системи теоретичних знань та практичних навичок формалізації задач управління з використанням спеціальних економіко-математичних методів.

Програма навчальної дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації" складається з одинадцяти тем. Це видання, яке є другою частиною практикуму з навчальної дисципліни, містить завдання із шести завершальних тем (тоді як перша частина містила завдання з перших п'яти тем). Ці теми охоплюють нелінійне й динамічне програмування, теорію матричних ігор і аналіз та управління ризиком в економіці на базі концепції теорії ігор, методи мережного планування й управління, моделі управління запасами та моделі систем масового обслуговування. До кожної із цих тем наведено мету та професійні компетентності, що формують під час їх вивчення, подано детальний термінологічний словник, у якому викладено основні теоретичні відомості з тем, тренувальні вправи з коментарями та поясненням їх розв'язання, тестові завдання, практичні завдання для самостійного опрацювання, а також запитання для самоперевірки. Оскільки ці теми охоплюють фактично спеціальні розділи дослідження операцій, практикум містить детальний перелік рекомендованої літератури, що дозволяє студентові знайти відповіді на ті запитання, які можуть виникати в нього під час самостійної роботи.

Особливістю даного видання є його практична спрямованість. Студент самостійно опрацьовує основні теоретичні положення з метою відновлення інформації, яка необхідна для розв'язання задач (таку інформацію наведено в багатьох навчально-методичних виданнях кафедри вищої математики й економіко-математичних методів ХНЕУ ім. С. Кузнеця), а потім застосовує ці знання на практиці для розв'язання тренувальних вправ, практичних та тестових завдань. Тренувальні вправи подано таким чином, що студент крок за кроком, послідовно отримуючи підказки, самостійно вирішує завдання та додатково опрацьовує ключові теоретичні питання. Також наведено приклади виконання завдань за допомогою програмного середовища MS Excel 2010. Дидактичною метою практикуму є практичне підтвердження окремих теоретичних положень навчальної дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації" методикою експериментальних досліджень у цій предметній галузі.

Практикум із дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації" рекомендовано для студентів усіх спеціальностей. Його можна використовувати і як базовий практикум із навчальної дисципліни, і у процесі безперервної математичної підготовки як допоміжний засіб для засвоєння теоретичних знань у їх практичному застосуванні, а також він є корисним для викладачів під час проведення практичних занять і організації самостійної роботи студентів.

6. Нелінійні оптимізаційні моделі економічних систем

6.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення із загальними властивостями задач нелінійного програмування, їхньою економічною й математичною постановками, геометричною інтерпретацією таких задач, а також з основними підходами до їх розв'язання.

Професійні компетентності, що формують під час вивчення теми:

знання основних принципів, за якими виконують класифікацію задач нелінійного програмування, уявлення про основні труднощі, які виникають під час розв'язання задач нелінійного програмування, та наближені методи розв'язання таких задач;

знання особливостей побудови математичної моделі задачі нелінійного програмування із застосуванням методу множників Лагранжа залежно від вигляду основної системи обмежень;

навички розв'язання задач квадратичного програмування;

навички розв'язання задач дробово-лінійного програмування шляхом перетворення їхньої математичної моделі в математичну модель задачі лінійного програмування, застосовуючи заміну змінних;

вміння надавати геометричну інтерпретацію задачам нелінійного програмування.

6.2. Термінологічний словник

Асимптотичний екстремум – окремий випадок розв'язку в задачах дробово-лінійного програмування, що мають відкритий багатокутник планів, коли лінія рівня цільової функції виходить через бічну сторону багатокутника планів, яка є променем (півпрямою).

Глобальний екстремум – найбільше або найменше значення функції на заданій множині значень її аргументу, коли для всіх точок цієї множини виконується нерівність $f(x) \leq f(x_{\max})$, якщо йдеться про глобальний максимум, або, відповідно, $f(x) \geq f(x_{\min})$, якщо йдеться про глобальний мінімум. Для визначення глобального екстремуму порівнюють значення функції в точках локальних екстремумів та в граничних точках множини.

Задача дробово-лінійного програмування – це спеціальний клас задач нелінійного програмування, у яких усі функції основної системи обмежень є лінійними, а цільова функція має вигляд:

$$Z = \frac{c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n}{d_1x_1 + d_2x_2 + ... + d_nx_n}, \quad d_1x_1 + d_2x_2 + ... + d_nx_n \neq 0.$$

Задача квадратичного програмування – це спеціальний клас задач нелінійного програмування, у яких цільова функція є квадратичною функцією, а всі функції основної системи обмежень є лінійними.

Задача опуклого програмування – це задача оптимізації, що має таку математичну модель:

$$Z(x_1, x_2, ..., x_n) \to \max,$$
$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i, \quad i = \overline{1,m},$$
$$x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,n}$$

за умови, що функції $Z(x_1, x_2, ..., x_n)$ та $g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \leq b_i$ $(i = \overline{1,m})$ є опуклими.

Локальний екстремум – найбільше або найменше значення функції в деякому довільно малому колі заданої точки.

Метод найшвидшого спуску – один із методів розв'язання задач нелінійного програмування, за яким знаходження локального мінімуму (максимуму) функції виконують за допомогою руху уздовж її градієнта.

Метод невизначених множників Лагранжа – метод, що дозволяє перейти від дослідження цільової функції на умовний екстремум, якщо основна система обмежень надана у вигляді рівнянь, до дослідження функції Лагранжа на безумовний екстремум.

Нелінійне програмування – окремий випадок математичного програмування, коли у математичній моделі задачі цільова функція та/або функції основної системи обмежень є нелінійними. Для задач нелінійного програмування не має універсальних методів розв'язання.

Опукла функція (опукла вниз функція) – це функція, для якої будь-який відрізок між двома довільними точками графіка цієї функції у векторному просторі лежить не нижче від відповідної дуги графіка, тобто опуклою є функція, над графіком якої є опукла множина.

Регулярний процес – це такий процес z_1 із вихідним станом z, для якого момент часу ξ, коли внаслідок дискретного втручання випадкових подій відбулося накопичення незворотних змін, що призводять до зриву процесу, прямує до нескінченості з надійністю 1, тобто $P_z(\xi >> 1) = 1.$

Сепарабельність функції (у разі функції кількох змінних) – можливість поділу впливу аргументів функції на загальний результат.

Сідлова точка функції Лагранжа – це вектор $(\mathbf{X}^*, \mathbf{\Lambda}^*)$, відносно якого для всіх $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1,n}$) та $\lambda_i \geq 0$ ($i = \overline{1,m}$) відносно функції Лагранжа справджується співвідношення:

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}^*) \leq L(\mathbf{X}^*, \mathbf{\Lambda}^*) \leq L(\mathbf{X}^*, \mathbf{\Lambda}),$$

де $\mathbf{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ та $\mathbf{\Lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$.

Теорема Куна – Таккера: для задачі опуклого програмування, множина допустимих розв'язків якої має властивість регулярності, вектор $\mathbf{X}^* = \left(x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*\right)$ є оптимальним розв'язком тоді і тільки тоді, коли є такий вектор $\mathbf{\Lambda}^* = (\lambda_1^*, \lambda_2^*, ..., \lambda_m^*)$, де $\lambda_i^* \geq 0$ ($i = \overline{1,m}$), що точка $(\mathbf{X}^*, \mathbf{\Lambda}^*)$ є сідловою точкою функції Лагранжа:

$$L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda}) = Z(\mathbf{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (b_i - g_i(\mathbf{X})),$$

де цільова функція $Z(\mathbf{X})$ є угнутою для всіх $x_j \geq 0$ ($j = \overline{1,n}$), а всі функції основної системи обмежень $g_i(\mathbf{X})$ є опуклими ($i = \overline{1,m}$). Теорема Куна – Таккера є узагальненням методу невизначених множників Лагранжа на випадок, коли основна система обмежень задачі нелінійного програмування надана у вигляді нерівностей.

Увігнута функція (опукла вгору функція) – це функція, для якої будь-який відрізок між двома довільними точками графіка цієї функції у векторному просторі лежить не вище від відповідної дуги графіка, тобто увігнутою є функція, під графіком якої є опукла множина.

Умови Куна – Таккера – це необхідні й достатні умови існування сідлової точки для функції Лагранжа. У випадку коли цільову функцію задачі нелінійного програмування досліджують на максимум, умови Куна – Таккера мають вигляд такої системи нерівностей:

$$\frac{\partial L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})}{\partial x_j}\Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}^* \\ \mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}^*}} \le 0, \quad j=\overline{1,n},$$

$$x_j^* \cdot \frac{\partial L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})}{\partial x_j}\Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}^* \\ \mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}^*}} = 0, \quad j=\overline{1,n},$$

$$\frac{\partial L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \lambda_i}\Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}^* \\ \mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}^*}} \ge 0, \quad i=\overline{1,m},$$

$$\lambda_i^* \cdot \frac{\partial L(\mathbf{X}, \mathbf{\Lambda})}{\partial \lambda_i}\Big|_{\substack{\mathbf{X}=\mathbf{X}^* \\ \mathbf{\Lambda}=\mathbf{\Lambda}^*}} = 0, \quad i=\overline{1,m},$$

$$x_j \ge 0, \ \ j=\overline{1,n}; \quad \lambda \ge 0, \ \ i=\overline{1,m}.$$

У тому випадку коли цільову функцію вихідної задачі нелінійного програмування досліджують на мінімум, нерівності, що складають умови Куна – Таккера, змінюють знак на протилежний.

Функція Лагранжа – це функція, що складається за математичною моделлю задачі опуклого програмування і має такий вигляд:

$$\begin{aligned} L(x_1, x_2, ..., x_n, \lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) &= Z(x_1, x_2, ..., x_n) + \\ &+ \lambda_1(b_1 - g_1(x_1, x_2, ..., x_n)) + \lambda_2(b_2 - g_2(x_1, x_2, ..., x_n)) + \\ &+ ... + \lambda_m(b_m - g_m(x_1, x_2, ..., x_n)), \end{aligned}$$

де $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ – невизначені множники Лагранжа; $Z(x_1, x_2, ..., x_n)$ – цільова функція задачі математичного програмування; $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ – функції основної системи обмежень; b_i – праві частини основної системи обмежень, $i=\overline{1,m}$.

6.3. Тренувальні вправи

6.3.1. Задача про мінімізацію витрат. Борошномельний комбінат може реалізовувати борошно у два способи: у роздріб, через магазини або оптом, через торговельних агентів. Якщо комбінат продаватиме борошно в роздріб, то в разі продажу x_1 кг борошна витрати на його реалізацію становитимуть $0,3x_1^2$ грн, тоді як у разі продажу x_2 кг борошна оптом для торговельних агентів треба буде робити знижку $0,2x_2^2$ грн. Комбінат має виробляти щотижня не менше ніж 5 000 кг борошна. Визначте, скільки борошна слід продавати кожним способом, щоб загальні витрати на його реалізацію були мінімальними.

Розв'язання.

Побудуємо математичну модель задачі. Що є цільовою функцією? Загальні витрати на реалізацію борошна. У разі продажу в роздріб x_1 кг борошна витрати комбінату становитимуть $0,3x_1^2$ грн, а якщо продавати оптом, то на кожних x_2 кг борошна комбінат втрачатиме $0,2x_2^2$ грн. Отже, загальні витрати на реалізацію становлять:

$$Z(x_1, x_2) = 0,3x_1^2 + 0,2x_2^2 \to \min.$$

Це і є цільова функція, яку за умовою задачі досліджують на мінімум.

Які обмеження накладають на значення аргументів цієї функції? Комбінату необхідно виробляти не менше ніж 5 000 кг борошна, отже,

$$x_1 + x_2 \geq 5000.$$

Є ще обмеження? Інших обмежень основна система обмежень не містить, однак є ще обмеження на знак:

$$x_1, x_2 \geq 0.$$

Математичну модель задачі ми записали. Тепер визначимо, до якого класу вона належить. Як бачимо, цільова функція містить невідомі у другому ступені, відповідно, це задача нелінійного програмування, а саме квадратичного програмування. Оскільки невідомі x_1 та x_2 входять до складу різних доданків, то цільова функція є сепарабельною. Основна система обмежень містить лінійну нерівність. Який метод застосовуватимемо для розв'язання цієї задачі? Оскільки математична модель містить лише дві змінні, то задачу можна розв'язати графічно, а можна й аналітично, побудувавши функцію Лагранжа і дослідивши її на глобальний екстремум. Поєднаємо обидва методи для того, щоб зрозумілішим був процес розв'язання.

Для розв'язання цієї задачі побудуємо функцію Лагранжа:

$$L(x_1, x_2, \lambda) = 0,3x_1^2 + 0,2x_2^2 + \lambda(5000 - x_1 - x_2) \to \min .$$

Який алгоритм визначення сідлової точки цієї функції? Правильно, треба застосовувати теорему Куна – Таккера, оскільки основна умова обмежень записана у вигляді нерівності. Спочатку визначаємо всі частинні похідні першого порядку від функції Лагранжа:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = 0,6x_1 - \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = 0,4x_2 - \lambda,$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 5000 - x_1 - x_2.$$

Тепер записуємо умови Куна – Таккера. Зверніть увагу, що цільову функцію досліджують на мінімум, отже, умови Куна – Таккера відносно координат сідлової точки мають вигляд:

$$\begin{aligned}
&0,6x_1^* - \lambda^* \geq 0,\\
&x_1^* \cdot (0,6x_1^* - \lambda^*) = 0,\\
&0,4x_2^* - \lambda^* \geq 0,\\
&x_2^* \cdot (0,4x_2^* - \lambda^*) = 0,\\
&5000 - x_1^* - x_2^* \leq 0,\\
&\lambda^* \cdot (5000 - x_1^* - x_2^*) = 0,\\
&\lambda^* \geq 0, \quad x_1^*,\ x_2^* \geq 0.
\end{aligned}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо:

$$x_1^* = 2000, \quad x_2^* = 3000, \quad \lambda^* = 1200.$$

Отже, оптимальним планом вихідної задачі є $\mathbf{X}^* = (2000; 3000)$.

Водночас цільова функція (витрати на реалізацію борошна) має найменше значення.

Тепер розглянемо графічну інтерпретацію цієї задачі, для чого повернемося до її вихідної математичної моделі. Система обмежень лінійна. Отже, будуємо багатокутник планів (рис. 6.1). Виберіть правильну відповідь.

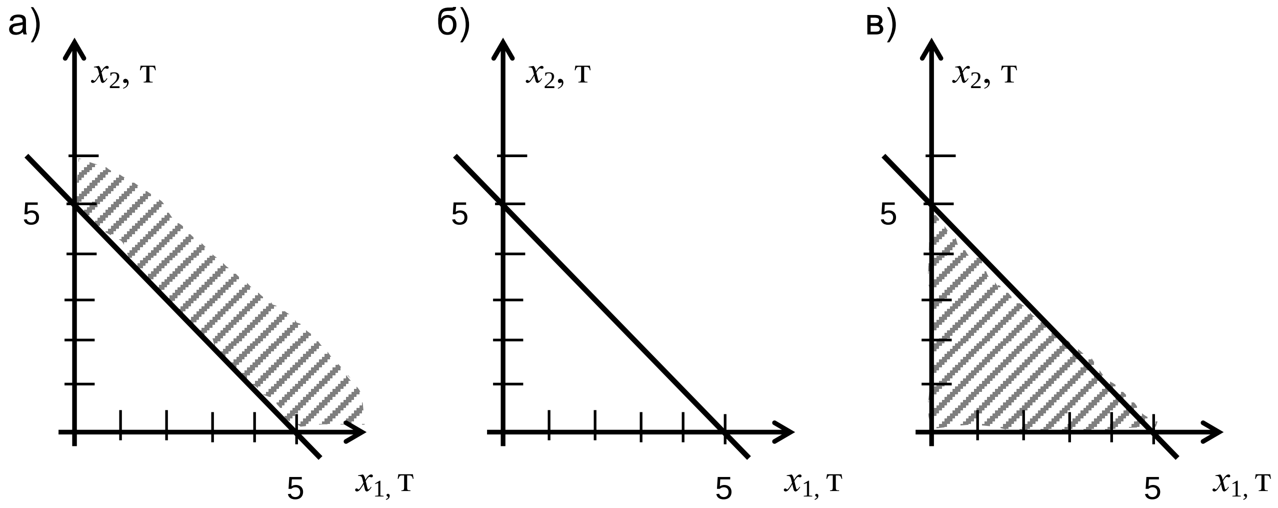

Рис. 6.1. **Багатокутник планів за моделлю вправи 6.3.1**

Правильною є відповідь на рис. 6.1а.

Побудуємо лінії рівня цільової функції. До якого типу кривих 2-го порядку вони належать? Зверніть увагу, що для функції $Z(x_1, x_2)$ знаки перед квадратами аргументів однакові, а коефіцієнти різні. Отже, це еліпс. Його осі співпадають з осями координат. А яка із піввісей більша? Якщо відповідь не спадає на думку відразу, перегляньте розділ "Аналітична геометрія" курсу "Математика для економістів". Записуємо рівняння лінії рівня для довільного значення $C = const$:

$$0,3x_1^2 + 0,2x_2^2 = C, \quad \text{де } C > 0.$$

Зводимо це рівняння до канонічного вигляду:

$$\frac{x_1^2}{10/3C} + \frac{x_2^2}{10/2C} = 1,$$

де $a^2 = 10/3C$, a – піввісь еліпса, що розташована вздовж осі 0x$_1$;

$b^2 = 10/2C$, b – піввісь еліпса, що розташована вздовж осі 0x$_2$.

Отже, більшою піввіссю є та, що розташована вздовж осі 0x$_2$.

Подивіться на рис. 6.2 і визначте, яке з положень лінії рівня відповідає оптимальному плану.

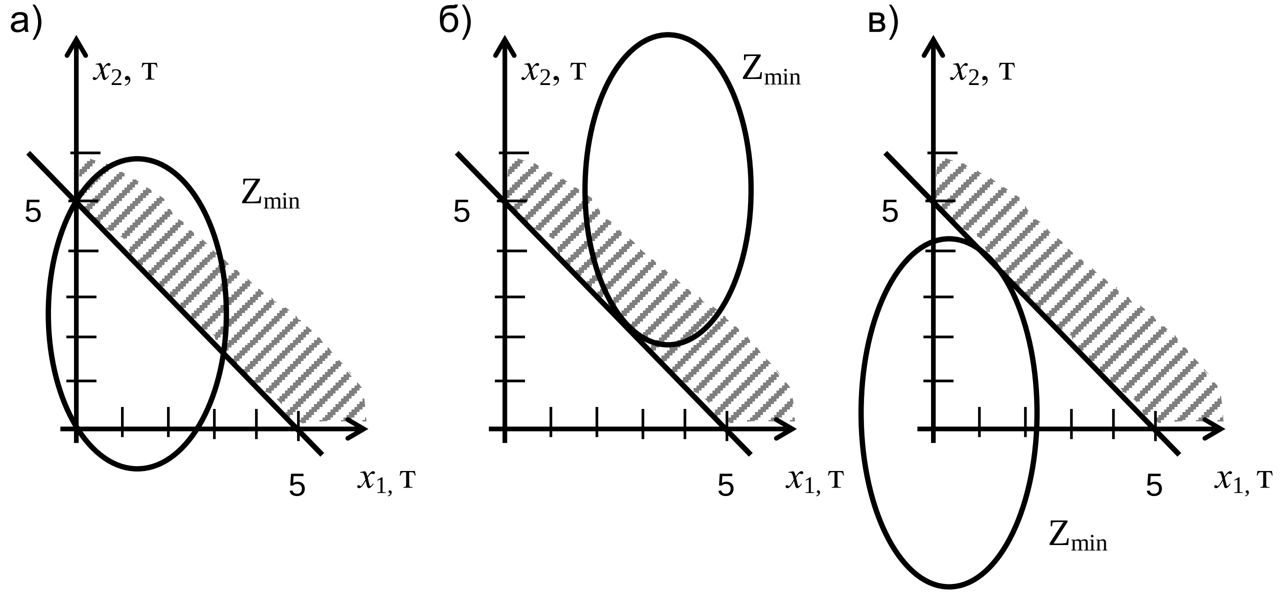

Рис. 6.2. **Оптимальний розв'язок за моделлю вправи 6.3.1**

Правильною є відповідь на рис. 6.2в, де зображено лінію рівня, яка відповідає найменшому з можливих значень цільової функції. За менших значень $Z(x_1, x_2)$, тобто для еліпса, що має менші піввісі, жодна з точок лінії рівня не належить багатокутнику планів.

Оскільки межею багатокутника планів є пряма, то компоненти оптимального плану можна визначити через коефіцієнт дотичної, якою є ця пряма відносно лінії рівня. Зверніть увагу, що на рис. 6.1 і 6.2 на осях 0x$_1$ та 0x$_2$ значення x_1 та x_2 відкладають у тонах, а для вихідної умови основної системи обмежень ці величини вимірюють у кілограмах, але це впливає лише на масштаб зображення, а сутність залишається тією самою.

За рівнянням ліній рівня визначаємо похідну (до речі, ця функція задана неявно): $2x_1 + 2x_2 \cdot x_2' = 0$. Звідси $x_2' = -x_1/x_2$. А за рівнянням прямої $x_1 + x_2 = 5000$ визначаємо, що тангенс кута її нахилу дорівнює –1.

Отже, для обчислення компонентів оптимального плану можемо записати таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1^* + x_2^* = 5000, \\ -x_1^* / x_2^* = -1. \end{cases}$$

Розв'язавши цю систему, дістанемо:

$$x_1^* = 2000, \quad x_2^* = 3000.$$

Зрозуміло, що відповідь та сама, що й за аналітичного розв'язання.

Таким чином, комбінату вигідно виробляти 5 т борошна, з яких 2 т борошна реалізовують у роздріб, а 3 т – оптом. У такому випадку витрати борошномельного комбінату на реалізацію готової продукції будуть найменшими і становитимуть 3 000 тис. грн.

6.3.2. Задача про мінімізацію питомих витрат виробництва. Для виробництва двох видів продукції (А та Б) підприємство використовує три типи технологічного обладнання. І продукція А, і продукція Б проходить оброблення на всіх трьох типах обладнання. Час, який витрачають на оброблення одиниці продукції кожного виду, матеріальні витрати, що пов'язані з виробництвом одиниці виробу кожного виду, а також граничний термін використання усіх типів обладнання наведено в табл. 6.1.

Таблиця 6.1

Вихідні дані

Типи обладнання	Види продукції		Гранична тривалість роботи обладнання, год
	А	Б	
1-й тип обладнання	14	7	56
2-й тип обладнання	12	16	96
3-й тип обладнання	6	12	48
Собівартість одиниці продукції, грн	40	80	

Обладнання 1-го в 3-го типів підприємство може використовувати не менше як 56 і 48 год відповідно, а обладнання 2-го типу – не більше як 96 год.

Визначте обсяг виробництва продукції кожного виду за умови, що середня собівартість одного виробу буде найменшою.

Розв'язання.

Побудуємо математичну модель задачі. Почнемо з цільової функції. Нехай x_1 – кількість продукції А, виробленої підприємством, x_2 – кількість продукції Б. Тоді загальна собівартість виробленої продукції становить $40x_1 + 80x_2$. Для визначення середньої собівартості одиниці продукції здобуте значення треба поділити на загальний обсяг виробленої продукції. Отже, маємо таку цільову функцію, яку за умовою задачі досліджують на мінімум:

$$Z(x_1, x_2) = \frac{40x_1 + 80x_2}{x_1 + x_2} \quad \to \min .$$

За рядками табл. 6.1, де зазначено нормативні витрати часу кожного типу обладнання на виготовлення одиниці продукції кожного виду і граничний час роботи обладнання, записуємо основну систему обмежень на значення аргументів цієї функції. Пропонуємо це зробити самостійно. Якщо не впевнені, подивіться тему "Задача лінійного програмування та методи її розв'язання" (частина 1 цього практикуму). А тепер виберіть правильний варіант. Основною системою обмежень є:

а)
$$\begin{cases} 14x_1 + 7x_2 \geq 56, \\ 12x_1 + 16x_2 \geq 96, \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 48. \end{cases}$$

б)
$$\begin{cases} 14x_1 + 7x_2 \geq 56, \\ 12x_1 + 16x_2 \leq 96, \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 48. \end{cases}$$

в)
$$\begin{cases} 14x_1 + 7x_2 \leq 56, \\ 12x_1 + 16x_2 \leq 96, \\ 6x_1 + 12x_2 \geq 48. \end{cases}$$

Правильною є відповідь б.

Що ще потрібно записати? Правильно, обмеження на знак. Додаємо у систему обмежень обмеження на знак:

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Математична модель задачі містить лише дві змінних, отже, її можна розв'язати графічно. Побудуємо багатокутник планів. Варіанти відповідей надано на рис. 6.3. Виберіть правильну відповідь.

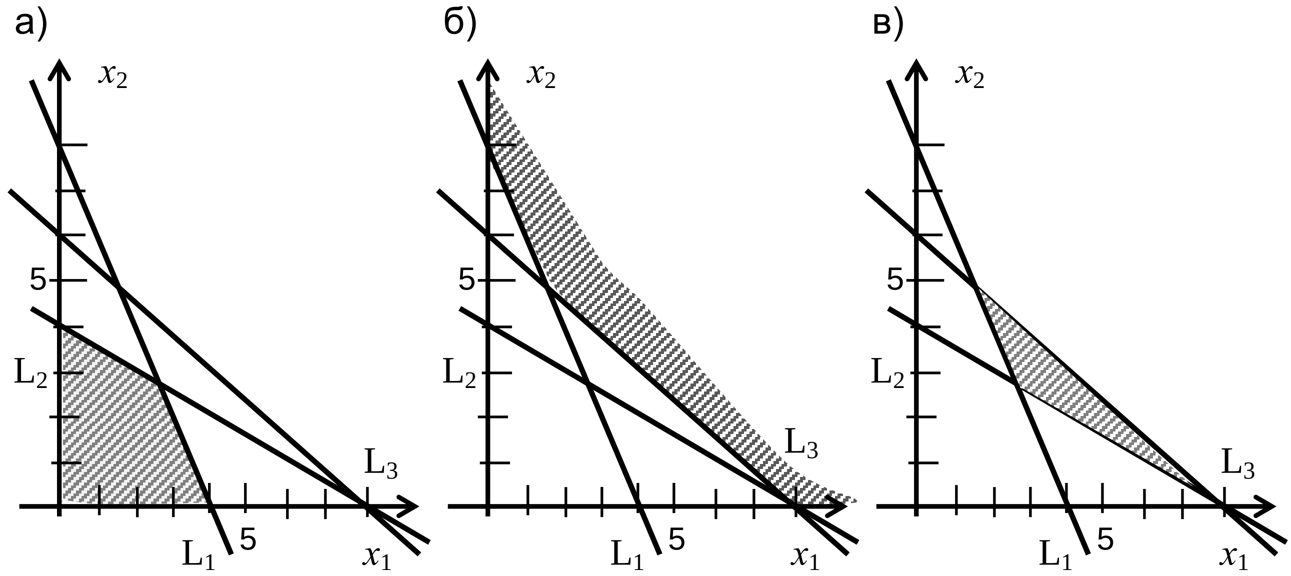

Рис. 6.3. **Багатокутник планів, побудований за умовами вправи 6.3.2**

Правильною є відповідь 6.3в.

Тепер побудуємо лінії рівня цільової функції, яка є дробово-лінійною. Записуємо рівняння лінії рівня:

$$\frac{40x_1 + 80x_2}{x_1 + x_2} = C, \quad \text{де } C = const.$$

Після перетворення дістанемо рівняння прямої, що проходить через початок координат:

$$x_2 = \frac{C - 40}{80 - C} \cdot x_1.$$

У разі зміни значення $C = const$ змінюватиметься кут нахилу цієї прямої. Можна дослідити напрям повороту прямої й визначити точку входження у багатокутник планів. Однак можна і скоротити обчислення.

З рис. 6.3в видно, що оптимальний план може відповідати точці перетину ліній L_1 і L_2 або ліній L_2 і L_3. Визначимо координати обох вершин багатокутника планів. Для ліній L_1 і L_2 маємо:

$$\begin{cases} 14x_1 + 7x_2 = 56, \\ 12x_1 + 16x_2 = 96 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{X}_1(1,6;\ 4,8).$$

Для точки перетину ліній L_2 і L_3 маємо:

$$\begin{cases} 12x_1 + 16x_2 = 96, \\ 6x_1 + 12x_2 = 48 \end{cases} \Rightarrow \quad \mathbf{X}_2(8;\ 0).$$

Що далі? Порівняємо значення цільової функції в цих точках. Маємо:

$$Z(\mathbf{X}_1) = \frac{40 \cdot 1,6 + 80 \cdot 4,8}{1,6 + 4,8} = 70,$$
$$Z(\mathbf{X}_2) = \frac{40 \cdot 8 + 80 \cdot 0}{8 + 0} = 40.$$

Оскільки найменше з цих значень цільової функції відповідає плану $\mathbf{X}_2(8;\ 0)$, то саме цей план є оптимальним.

Таким чином, середня собівартість продукції буде мінімальною, якщо підприємство вироблятиме лише продукцію А в кількості 8 одиниць.

Обчислимо залишки ресурсів. Як ви вважаєте, вони є? А які саме?

Знайдемо значення додаткових змінних. Оскільки оптимальний план виробництва відповідає перетину ліній L_2 і L_3, тобто 2-га та 3-тя нерівності основної системи обмежень перетворилися на рівняння, то ресурси часу обладнання 2-го і 3-го типів вичерпано: $x_4^* = x_5^* = 0$. А що з ресурсом обладнання 1-го типу? Його залишок становить: $x_3^* = 14 \cdot 8 - 56 = 56$.

Розгорнутий оптимальний план має вигляд: $\mathbf{X}^*(8;\ 0;\ 56;\ 0;\ 0)$. Йому відповідає найменше значення цільової функції: $Z(\mathbf{X}^*) = 40$.

Ми розв'язали задачу дробово-лінійного програмування графічно. А як бути в тому разі, коли кількість змінних більше ніж дві? Тоді за допомогою заміни змінних можна виконати перехід від задачі дробово-лінійного програмування до задачі лінійного програмування і розв'язувати цю нову задачу симплексним методом.

Використаймо цей алгоритм на прикладі тієї самої задачі. Введемо нові змінні:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \quad y_0 = \frac{1}{x_1 + x_2},$$

де $y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_0 > 0.$

Математична модель задачі набуває вигляду:

$$Z(y_1, y_2) = 40y_1 + 80y_2 \to \min$$

$$\begin{cases} 14y_1 + 7y_2 \geq 56y_0, \\ 12y_1 + 16y_2 \leq 96y_0, \\ 6y_1 + 12y_2 \geq 48y_0, \\ y_1 + y_2 = 1, \end{cases}$$

$$y_1 \geq 0, \quad y_2 \geq 0, \quad y_0 > 0.$$

Ми дістали математичну модель задачі лінійного програмування, яка містить три змінних. Розв'язуватимемо її симплексним методом. Ця математична модель надана у загальній формі, отже, спочатку її треба довести до канонічного вигляду. Вводимо додаткові змінні y_3, y_4 та y_5, на які теж розповсюджується вимога невід'ємності. Кількість цих змінних дорівнює кількості нерівностей основної системи обмежень. Вони входять у цільову функцію з нульовими коефіцієнтами. Отже, записуємо основну систему обмежень у вигляді рівнянь:

$$\begin{cases} 14y_1 + 7y_2 - y_3 - 56y_0 = 0, \\ 12y_1 + 16y_2 + y_4 - 96y_0 = 0, \\ 6y_1 + 12y_2 - y_5 - 48y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 = 1. \end{cases}$$

Однак в основній системі обмежень відсутній базис, відповідно, треба ввести фіктивні змінні для створення штучного базису. Вони увійдуть у цільову функцію з необмежено великими коефіцієнтами.

$$Z(y_1, y_2) = 40y_1 + 80y_2 + M_1y_6 + M_2y_7 + M_3y_8 \to \min$$

$$\begin{cases} 14y_1 + 7y_2 - y_3 + y_6 - 56y_0 = 0, \\ 12y_1 + 16y_2 + y_4 - 96y_0 = 0, \\ 6y_1 + 12y_2 - y_5 + y_7 - 48y_0 = 0, \\ y_1 + y_2 + y_8 = 1, \\ y_i \geq 0, \ i = \overline{1,8}, \quad y_0 > 0. \end{cases}$$

Ми дістали розширену М-задачу. Згадайте симплекс-метод і розв'яжіть цю задачу самостійно. Порівняйте кутові точки, що є проміжними планами, з результатами ітерацій симплексного методу. Якщо у вас виникатимуть запитання, то зверніться до теми "Задача лінійного програмування та методи її розв'язання" (частина 1 цього практикуму).

Застосувавши симплекс-метод, ми дістали такий розв'язок:

основні змінні $y_1^* = 1, \quad y_2^* = 0, \quad y_0^* = 0{,}125;$

допоміжні змінні $y_3^* = 7, \quad y_4^* = y_5^* = 0;$

значення цільової функції $Z\left(\mathbf{Y}^*\right) = 40$.

Зрозуміло, що значення фіктивних змінних дорівнюють нулю, у протилежному випадку розв'язок розширеної М-задачі не є розв'язком вихідної задачі.

Пам'ятаємо, що, отримавши оптимальний план задачі лінійного програмування, треба зробити зворотну заміну змінних і повернутись до вихідних змінних. Отже,

план виробництва: $x_1^* = \dfrac{y_1^*}{y_0^*} = \dfrac{1}{0{,}125} = 8; \quad x_2^* = \dfrac{y_2^*}{y_0^*} = \dfrac{0}{0{,}125} = 0$;

залишки ресурсів: $x_4^* = \dfrac{y_4^*}{y_0^*} = \dfrac{7}{0{,}125} = 56; \quad x_5^* = x_6^* = 0$;

значення цільової функції $Z\left(\mathbf{X}^*\right) = Z\left(\mathbf{Y}^*\right) = 40$.

Як бачите, ми отримали ті самі результати, що й у разі застосування графічного методу.

6.4. Виконання розрахунків у MS Excel

Завдання. Підприємство має можливість виробляти два види продукції, використовуючи для цього три типи технологічного обладнання. Кожна одиниця продукції обох видів проходить оброблення на кожному із цих типів обладнання. Тривалість оброблення одиниці продукції на кожному з типів обладнання, питомі витрати, що пов'язані з виробництвом відповідно до вимог технологічного процесу, а також нормативний термін роботи обладнання наведено в табл. 6.2.

Таблиця 6.2

Вихідні умови задачі

Тип обладнання	Витрати часу на оброблення одиниці продукції, год		Обмеження часу роботи обладнання, год
	Вид А	Вид Б	
I	2	8	≤ 26
II	1	1	≥ 4
III	12	3	≤ 39
Витрати на виробництво одиниці продукції, тис. грн	2	3	–

Необхідно визначити план виробництва продукції кожного виду, за яким середня собівартість буде мінімальною.

Розв'язання.

Здійснімо формалізацію задачі. Позначимо через x_1 кількість продукції виду А, що вироблятиме підприємство, а через x_2 – кількість продукції виду Б. Тоді за останнім рядком табл. 6.2 загальні витрати на виробництво продукції складають $2x_1 + 3x_2$ (тис. грн), а для визначення середньої собівартості ці витрати треба поділити на загальну кількість продукції, отже, питома собівартість дорівнює: $\dfrac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2}$. Це і є цільова функція даної задачі. Відповідно, маємо критерій оптимальності:

$$Z(X) = \frac{2x_1 + 3x_2}{x_1 + x_2} \quad \rightarrow \quad min.$$

Тепер за табл. 6.2 записуємо основну систему обмежень:

$$\begin{cases} 2x_1 + 8x_2 \le 26, \\ x_1 + x_2 \ge 4, \\ 12x_1 + 3x_2 \le 39. \end{cases}$$

Також математична модель задачі містить обмеження на знак:

$$x_1,\, x_2 \ge 0.$$

Отже, ми дістали математичну модель задачі дробово-лінійного програмування. Для того щоб скористатися можливостями програмного середовища MS Excel, необхідно перетворимо модель задачі дробово-лінійного програмування на модель задачі лінійного програмування. Для цього виконуємо заміну змінних. Введемо нові змінні:

$$y_1 = \frac{x_1}{x_1 + x_2}, \quad y_2 = \frac{x_2}{x_1 + x_2}, \quad y_0 = \frac{1}{x_1 + x_2},$$

де $y_1 \ge 0, \quad y_2 \ge 0, \quad y_0 > 0.$

У цих змінних математична модель задачі має вигляд:

$$Z(\mathbf{Y}) = 2y_1 + 3y_2 \quad \to \quad \min,$$

$$\begin{cases} 2y_1 + 8y_2 \le 26y_0; \\ y_1 + y_2 \ge 4y_0; \\ 12y_1 + 3y_2 \le 39y_0; \\ y_1 + y_2 = 1; \\ y_1, y_2 \ge 0, \;\; y_0 > 0. \end{cases}$$

Отже, дістали задачу лінійного програмування.

Математична модель цієї задачі записана в загальній формі, однак для застосування надбудови "Solver" програмного середовища MS Excel немає потреби зводити цю модель до канонічної форми (як цього вимагає застосування симплексного методу). Для зручності заповнення таблиці на робочому аркуші MS Excel перепишемо модель так:

$$Z(\mathbf{Y}) = 2y_1 + 3y_2 \quad \to \quad \min,$$

$$\begin{cases} -26y_0 + 2y_1 + 8y_2 \le 0; \\ -4y_0 + y_1 + y_2 \ge 0; \\ -39y_0 + 12y_1 + 3y_2 \le 0; \\ y_1 + y_2 = 1; \\ y_1,\ y_2 \ge 0,\ \ y_0 > 0. \end{cases}$$

Тепер на робочому аркуші MS Excel згідно з цією моделлю, записуємо таблицю вихідних даних (рис. 6.4).

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		**Розв'язання допоміжної задачі лінійного програмування**						
3								
4		Змінні	Y0	Y1	Y2			
5		Розв'язок	1	0,5	0,5			
6								
7			Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Права частина	
8			-26	2	8	-21	0	
9			-4	1	1	-3	0	
10			-39	12	3	-31,5	0	
11				1	1	1	1	
12		Цільова функція	0	2	3	2,5		
13								
14								

Рис. 6.4. **Вихідні дані задачі про собівартість продукції**

У комірках **C5:E5**, які відповідають керованим змінним, записуємо значення $y_1 = y_2 = 0{,}5$ та $y_0 = 1$ (оскільки $y_1 + y_2 = 1$). Значення комірок **F8:F11** ("Ліва частина" основної системи обмежень), заповнюємо, застосовуючи вбудовану функцію **СУМПРОИЗВ()**. Так, для комірки **F8** набираємо **= СУМПРОИЗВ($C$5:$E$5,C8:E8)**. Зверніть увагу, що посилання на комірки **$C$5:$E$5** є абсолютним. За аналогічною формулою в комірку **F12** вводимо значення цільової функції.

Стовпчик "Права частина" (рис. 6.4) містить у комірках **G8:G11** вихідні дані щодо правої частини основної системи обмежень.

Активізуємо режим **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения** та у вікні **Параметры поиска решения** виконуємо налаштовування математичної моделі задачі. Для цього заповнюємо поле **Оптимизировать целевую функцию** посиланням на комірку **F12**. Обираємо один із варіантів оптимізації.

У наведеному прикладі це варіант **Минимум**. Заповнюємо рядок **Изменяя ячейки переменных** посиланням на блок **C5:E5**. Заповнюємо вікно **В соответствии с ограничениями**, де вказуємо відношення між лівою та правою частинами основної системи обмежень. Будьте уважними під час заповнення вікна **В соответствии с ограничениями.** У рядку **Знак** слід обирати саме той знак відповідності, який діє для цього обмеження. Також додаємо обмеження на знак (хоча можна просто поставити відмову **Сделать переменные без ограничения на знак**). У комірці **Выберите метод решения** вказуємо: **Поиск решения линейных задач симплекс-методом** (рис. 6.5).

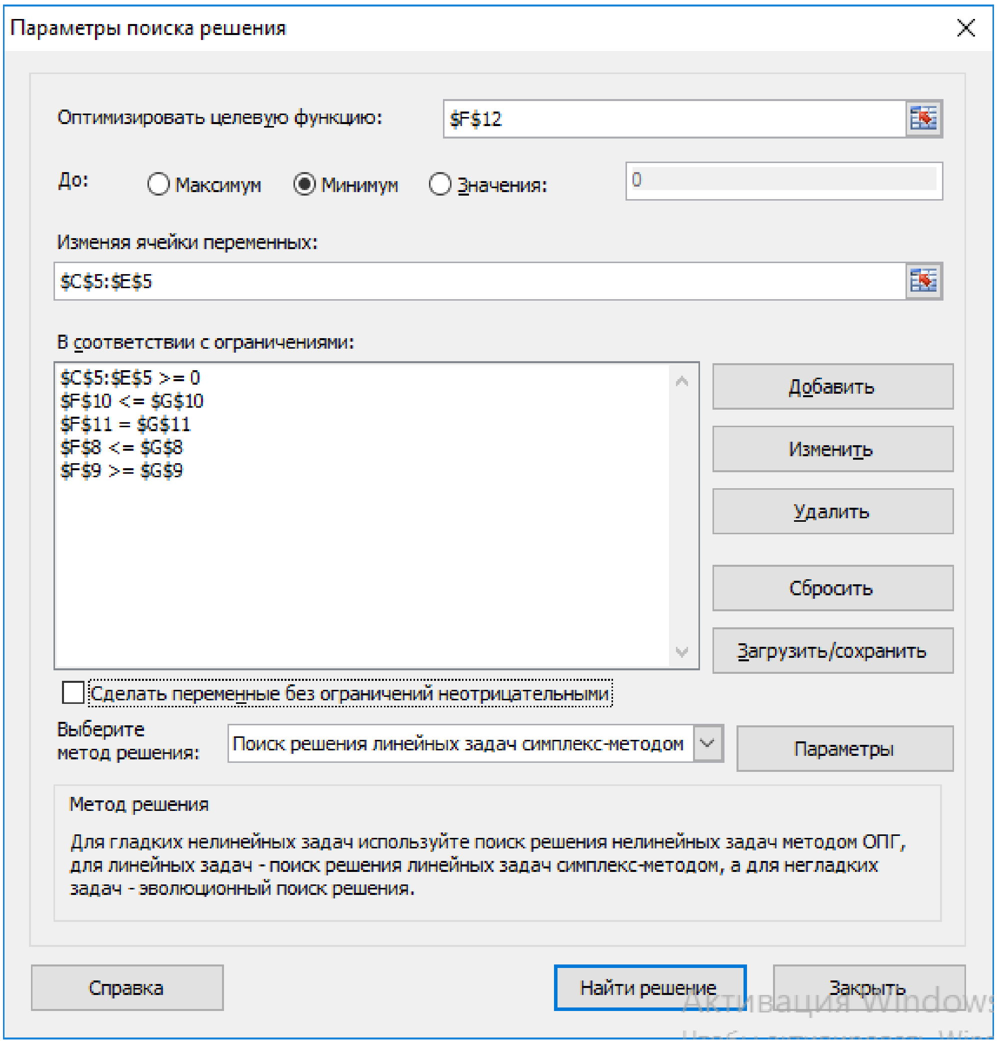

Рис. 6.5. **Діалогове вікно *Параметры поиска решения***

Тепер натискаємо клавішу **Найти решение**. Результат розв'язання допоміжної задачі лінійного програмування, до якої було зведено вихідну задачу дробово-лінійного програмування, наведено на рис. 6.6.

За цією таблицею можна записати оптимальний розв'язок допоміжної задачі. Отже, значення основних змінних: $y_0^* = 0{,}25;\ \ y_1^* = 0{,}75;\ \ y_2^* = 0{,}25$. Також ми можемо отримати інформацію щодо значення допоміжних змінних: $y_3^* = 3;\ y_4^* = 0;\ y_5^* = 0.$

Цьому оптимальному плану відповідає найменше значення цільової функції $Z(\mathbf{Y}^*) = 2{,}25$ тис. грн.

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2		Розв'язання допоміжної задачі лінійного програмування						
3								
4		Змінні	Y0	Y1	Y2			
5		Розв'язок	0,25	0,75	0,25			
6								
7			Матриця коефіцієнтів системи обмежень			Ліва частина	Права частина	
8			-26	2	8	-3	0	
9			-4	1	1	0	0	
10			-39	12	3	0	0	
11				1	1	1	1	
12		Цільова функція	0	2	3	2,25		
13								
14								

Рис. 6.6. **Результат розв'язання допоміжної задачі лінійного програмування**

Тепер за оптимальним планом допоміжної задачі лінійного програмування визначимо оптимальний план вихідної задачі дробово-лінійного програмування. Отримуємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 0,25x_1^* = 0,75; \\ 0,25x_2^* = 0,25 \end{cases} \Rightarrow \quad x_1^* = \frac{y_1^*}{y_0^*} = 3;\ \ x_2^* = \frac{y_2^*}{y_0^*} = 1.$$

Таким чином, питома середня собівартість продукції буде мінімальною і дорівнюватиме 2,25 тис. грн/од., якщо підприємство вироблятиме три одиниці продукції виду А й одну – продукції виду Б. Причому ресурс обладнання 2-го і 3-го типів буде вичерпано, а ресурс обладнання 1-го типу становитиме $x_3^* = 3/0,75 = 4$.

6.5. Запитання для самоперевірки

6.5.1. Сформулюйте означення задачі нелінійного програмування.

6.5.2. Які є типи задач нелінійного програмування, за якими принципами виконують їх класифікацію?

6.5.3. Сформулюйте необхідні умови оптимальності в задачах безумовної оптимізації.

6.5.4. У чому полягає сутність методу множників Лагранжа?

6.5.5. Наведіть означення сідлової точки функції Лагранжа.

6.5.6. Сформулюйте теорему Куна – Таккера.

6.5.7. Порівняйте задачі нелінійного програмування, у яких застосовують метод множників Лагранжа, з узагальненим випадком, коли застосовують теорему Куна – Таккера.

6.5.8. Сформулюйте умови Куна – Таккера.

6.5.9. У яких випадках необхідні умови екстремуму в задачах нелінійного програмування також є достатніми?

6.5.10. Яка множина називається опуклою?

6.5.11. Дайте означення опуклої й увігнутої функцій.

6.5.12. Що таке задача квадратичного програмування?

6.5.13. Як визначити оптимальний план у задачах квадратичного програмування під час їх розв'язання графічним методом? Чи є в цьому випадку відмінності порівняно з задачами лінійного програмування?

6.5.14. Наведіть приклади реальних економічних завдань, для розв'язання яких застосовують квадратичне програмування.

6.5.15. Чи завжди екстремуму цільової функції задачі квадратичного програмування відповідає точка, що належить границі багатокутника планів? Поясніть свої висновки за допомогою графічного розв'язку.

6.5.16. Що таке задача дробово-лінійного програмування?

6.5.17. Як визначити оптимальний план у задачах дробово-лінійного програмування під час їх розв'язання графічним методом? Чи є в цьому випадку відмінності порівняно із задачами лінійного програмування?

6.5.18. Наведіть економічну інтерпретацію задачі дробово-лінійного програмування.

6.5.19. За яким принципом виконують заміну змінних у задачах дробово-лінійного програмування для перетворення їхньої математичної моделі в математичну модель задачі лінійного програмування?

6.5.20. Що таке асимптотичний розв'язок? Наведіть його графічну інтерпретацію для задачі дробово-лінійного програмування.

6.6. Практичні завдання

6.6.1. За допомогою методу невизначених множників Лагранжа знайдіть найбільше значення функції $Z = 5 - 3x_1 - 4x_2$ за умови, що на її змінні накладають такі обмеження: $x_1^2 + x_2^2 = 25$ та $x_1,\, x_2 \geq 0$.

6.6.2. За допомогою методу невизначених множників Лагранжа розв'яжіть задачу квадратичного програмування, якщо її математична модель має вигляд:

$$Z = x_1 x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Розв'яжіть задачу аналітично й порівняйте отримані результати з результатами графічного розв'язання.

6.6.3. За допомогою методу невизначених множників Лагранжа розв'яжіть задачу квадратичного програмування, якщо її математична модель має вигляд:

$$Z = 2x_1^2 + 3x_2^2 + 4x_3^2 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 13, \\ x_j \geq 0, \quad j = \overline{1,3}. \end{cases}$$

6.6.4. Знайдіть глобальний екстремум функції

$$Z = 2x_1 + x_2 \to \max$$

за такої системи обмежень:

$$\begin{cases} x_1^2 + x_2^2 - 4x_2 \leq 0; \\ x_2 \geq 2; \\ x_1,\, x_2 \geq 0. \end{cases}$$

Розв'яжіть задачу аналітично й порівняйте здобуті результати з результатами графічного розв'язання.

6.6.5. Знайдіть глобальні екстремуми функції $Z = 2x_1 + x_2$ за такої системи обмежень:

$$\begin{cases} 4x_1^2 + 4x_2^2 \le 36; \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'яжіть задачу аналітично й порівняйте здобуті результати з результатами її графічного розв'язання.

6.6.6. Застосовуючи умови Куна – Таккера, знайдіть глобальний екстремум функції

$$Z = 2x_1^2 + 10x_1x_2 + 3x_2^2 \to \min$$

за такої системи обмежень:

$$\begin{cases} 9x_1 + 13x_2 \ge 31; \\ x_1,\, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6.6.7. Задано математичну модель задачі квадратичного програмування:

$$Z = (x_1 - 4)^2 + (x_2 - 1)^2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 9, \\ x_1 + x_2 \ge 2, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Розв'яжіть її, застосовуючи умови Куна – Таккера. Порівняйте здобуті результати з результатами графічного розв'язку.

6.6.8. Задана математична модель задачі квадратичного програмування:

$$Z = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 + 13 \to \max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \le 12, \\ x_1 + x_2 \le 5, \\ x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,2}. \end{cases}$$

Розв'яжіть її, застосовуючи умови Куна – Таккера. Порівняйте здобуті результати з результатами графічного розв'язку.

6.6.9. Розв'яжіть графічно задачу дробово-лінійного програмування, якщо її математична модель має вигляд:

$$z = \frac{2x_1 - x_2}{x_1 + 2x_2 + 1} \to \max,$$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2, \\ 2x_1 + x_2 \le 6, \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

6.6.10. Задано математичну модель задачі дробово-лінійного програмування:

$$z = \frac{x_1 + 2x_2 - x_3}{3x_1 + x_2 + 5x_3} \to \max,$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 6x_2 + x_3 \le 12, \\ -x_1 + 7x_2 + 2x_3 \le 12, \\ 2x_1 - 4x_2 - x_3 \ge 1, \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0. \end{cases}$$

Розв'яжіть цю задачу шляхом зведення її математичної моделі до моделі задачі лінійного програмування.

6.7. Тестові завдання

6.7.1. Математична модель задачі нелінійного програмування містить нелінійну цільову функцію і нелінійні функції в основній системі обмежень.

Виберіть правильні твердження:

а) так, це обов'язково;

б) ні, цільова функція має бути нелінійною, а функції основної системи обмежень мають були лінійними;

в) ні, цільова функція має бути лінійною, а функції основної системи обмежень мають були нелінійними;

г) ні, це не обов'язково, нелінійною може бути лише одна з функцій, що входить у математичну модель задачі.

6.7.2. Для розв'язання будь-якої задачі нелінійного програмування є алгоритм, за допомогою якого можна або визначити розв'язок цієї задачі за скінченну кількість ітерацій, або довести, що задача не має розв'язків.

Виберіть правильні твердження:

а) так, такий алгоритм існує;

б) ні, загального алгоритму немає, однак є алгоритми для кожного окремого виду математичної моделі;

в) ні, загального алгоритму немає, є алгоритми лише для окремих видів математичної моделі.

6.7.3. Умови Куна – Таккера застосовують для визначення оптимального плану, за яким цільова функція задачі нелінійного програмування досягає локального екстремуму.

Виберіть правильні твердження:

а) так, усе правильно;

б) так, але на локальний екстремум досліджують функцію Лагранжа, до складу якої входить цільова функція;

в) так, але досліджують функцію Лагранжа, до складу якої входить цільова функція, і визначають її глобальний екстремум;

г) ні, умови Куна – Таккера визначають лише обов'язкові, але недостатні умови екстремуму.

6.7.4. Які змінні є аргументами функції Лагранжа:

а) ті самі змінні, що є аргументами цільової функції;

б) ті самі змінні, що є аргументами цільової функції, а також множники Лагранжа;

в) ті самі змінні, що є аргументами цільової функції, а також ті, що є аргументами функцій основної системи обмежень:

г) які під час побудови функції Лагранжа виконують заміну змінних.

6.7.5. Надано математичні моделі оптимізаційних задач. До яких із цих задач можна застосовувати метод невизначених множників Лагранжа?

1)
$$Z(\mathbf{X}) = 2x_1 + x_2 \to \min$$
$$x_1 - 2x_2 = 12$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2)
$$Z(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 \to \min$$
$$x_1 - 2x_2 = 12$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

3)
$$Z(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 \to \max$$
$$x_1 - 2x_2 = 12$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Виберіть правильні твердження:

а) тільки для моделі (3);

б) тільки для моделі (2);

в) тільки для моделей (2) і (3);

г) для всіх наведених моделей.

6.7.6. Які із задач, моделі яких наведених наведено далі, належать до задач квадратичного програмування?

1)
$$Z(\mathbf{X}) = 2x_1 \cdot x_2 \to \min$$
$$3x_1 - 2x_2 \geq 12$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

2)
$$Z(\mathbf{X}) = 2x_1 + x_2^2 \to \min$$
$$3x_1 - 2x_2 \geq 12$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

3)
$$Z(\mathbf{X}) = 2x_1^2 + x_2^2 \to \max$$
$$x_1 - 2x_2 \leq 12$$
$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0.$$

Виберіть правильні твердження:

а) тільки модель (3);

б) моделі (2) і (3);

в) тільки модель (2);

г) усі наведені моделі.

6.7.7. Який вигляд мають лінії рівня задачі дробово-лінійного програмування?

Виберіть правильні твердження:

а) система парабол, гілки яких розташовані у I та III чвертях декартової системи координат;

б) система парабол, однак розглядають тільки ті їхні гілки, що містяться у I чверті декартової системи координат;

в) система прямих, одна з яких проходить через початок координат, а інші паралельні до цієї прямої;

г) система прямих, які всі проходять через початок координат.

6.7.8. Для розв'язання задачі дробово-лінійного програмування, основна система обмежень якої містить лише лінійні функції, є алгоритм, за допомогою якого можна або визначити розв'язок цієї задачі за скінченну кількість ітерацій, або довести, що задача не має розв'язків.

Виберіть правильні твердження:

а) так, такий алгоритм є саме для задач дробово-лінійного програмування;

б) так, такий алгоритм є, це симплексний метод;

в) ні, загального алгоритму немає, однак є алгоритми для кожного окремого випадку основної системи обмежень.

6.7.9. Чи має асимптотичний розв'язок яка-небудь із цих задач дробово-лінійного програмування? Якщо так, то яка саме?

1)

$$Z(\mathbf{X}) = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \min$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

2)

$$Z(\mathbf{X}) = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \ge 12, \\ 2x_1 + 3x_2 \le 18 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

3)

$$Z(\mathbf{X}) = \frac{3x_1 + x_2}{x_1 + x_2} \to \max$$

$$\begin{cases} -3x_1 + 2x_2 \le 0, \\ 2x_1 - 3x_2 \le 0 \end{cases}$$

$$x_1 \ge 0, \quad x_2 \ge 0.$$

Виберіть правильні твердження:

а) тільки модель (1);

б) моделі (2) і (3);

в) тільки модель (3);

г) жодна модель не має асимптотичних розв'язків.

6.7.10. Чи може задача дробово-лінійного програмування мати розв'язок, якщо її багатокутник планів є відкритим?

а) так, але це може бути або максимум, або мінімум;

б) так, задача може мати як максимум, так і мінімум;

в) так, але цей екстремум може бути тільки асимптотичним.

6.8. Висновки до теми

Нелінійні задачі становлять широкий клас настільки складних завдань, що й досі не розроблено досконалих загальних методів, що були б за своїми можливостями подібні до симплексного методу в лінійному програмуванні, і які дозволяли б розв'язувати будь-які нелінійні задачі. На відміну від задач лінійних програмування, для розв'язання нелінійних задач навіть немає єдиного підходу.

Класифікацію задач нелінійного програмування виконують залежно від виду цільової функції і вигляду основної системи обмежень. Розглядають такі окремі класи нелінійних задач, як квадратичне та опукле програмування, дробово-лінійне програмування. Відповідно до цього розроблено спеціальні методи їх розв'язання, до яких належать метод множників Лагранжа, градієнтні методи, наближені методи розв'язання, графічний метод.

Рекомендована література: [1– 3; 5 – 11; 13 – 15; 18; 19; 21 – 27; 32 – 34; 36; 37; 40 – 47].

7. Теорія ігор. Аналіз та управління ризиком в економіці на базі концепції теорії ігор

7.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення із принципами постановки задачі стохастичного програмування та ухвалення рішень в конфліктних ситуаціях.

Професійні компетентності, що формують під час вивчення теми:

знання основних означень теорії матричних ігор та вміння застосовувати їх для побудови математичної моделі задачі щодо визначення оптимальної стратегії в конфліктних ситуаціях;

вміння розв'язувати парну гру з нульовою сумою у випадку, коли один із гравців має тільки дві стратегії;

навички розв'язувати матричні ігри, застосовуючи поняття домінувальної стратегії;

вміння ідентифікувати економічні задачі як задачі стохастичного програмування.

7.2. Термінологічний словник

Активна стратегія – чиста стратегія S_i (S_j) є активною, якщо її використовують у деякій оптимальній стратегії, якій відповідає матриця ймовірностей P^* (Q^*), з додатною ймовірністю. Інакше кажучи, якщо є оптимальна стратегія, яка задана матрицею ймовірностей P^* (Q^*), така, що $p_i > 0$ ($q_j > 0$), то чиста стратегія S_i (S_j) є активною для гравця A (гравця B).

Безкоаліційна гра – це гра, у якій гравці не укладають між собою жодних угод.

Верхня чиста ціна гри (мінімаксний програш) – максимальне значення, що обмежує програш гравця B, тобто, застосовуючи свої чисті стратегії за будь-яких дій гравця A, гравець B може гарантувати собі, що його програш не перевищить цього значення. Верхню чисту ціну гри визначають співвідношенням:

$$\beta = \min_j \max_i \{\pi_{ij}\} = \min_j \pi_j .$$

Випадковий хід – хід гравця "природа", який обирає свій хід випадково, не враховуючи при цьому ні власних інтересів, ні можливих стратегій супротивника.

Гра – сукупність правил та умов, які були заздалегідь обумовлені та схвалені учасниками.

Гра з нульовою сумою – гра, у якій сума виграшів усіх гравців дорівнює нулю.

Гра з природою – парна гра, у якій лише один із гравців є активним і свідомо обирає свої стратегії, інший гравець – "природа" – не користується міркуваннями доцільності, а обирає ту чи іншу із своїх чистих стратегій випадково. Під "природою" розуміють певну об'єктивну дійсність.

Гравець – учасник гри, тобто особа, що ухвалює рішення.

Домінована (над якою домінують) стратегія гравця $\boldsymbol{A}$ – це чиста стратегія S_i (рядок платіжної матриці), для якої є інша чиста стратегія S_i', така, що відносно її елементів виконується співвідношення:

$$\pi_{\boldsymbol{ij}} \leq \pi_{i'j}.$$

Домінована стратегія гравця A не може бути активною.

Домінована (над якою домінують) стратегія гравця $\boldsymbol{B}$ – це чиста стратегія S_j (стовпець платіжної матриці), для якої є інша чиста стратегія S_j', така, що відносно її елементів виконується співвідношення:

$$\pi_{\boldsymbol{ij}} \geq \pi_{ij'}.$$

Домінована стратегія гравця B не може бути активною.

Домінувальна стратегія гравця $\boldsymbol{A}$ – це чиста стратегія S_i (рядок платіжної матриці), для якої є інша чиста стратегія S_i', така, що відносно її елементів виконується співвідношення:

$$\pi_{\boldsymbol{ij}} > \pi_{i'j}.$$

Домінувальна стратегія гравця $\boldsymbol{B}$ – це чиста стратегія S_j (стовпець платіжної матриці), для якої є інша чиста стратегія S_j', така, що відносно її елементів виконується співвідношення:

$$\pi_{\boldsymbol{ij}} < \pi_{ij'}.$$

Змішана стратегія – це ймовірнісний розподіл на множині чистих стратегій (гравець обирає одну зі своїх чистих стратегій відповідно можливостей, що задані змішаною стратегією; вибір виконують перед початком кожної гри і не змінюють до її кінця). Змішану стратегію гравця A можна записати у вигляді матриці ймовірностей:

$$P = (p_1 \quad p_2 \quad \cdots \quad p_m)\,, \quad p_i \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = 1,$$

де p_i – ймовірність застосування гравцем A своєї *i*-ї чистої стратегії. Відповідно, змішану стратегію гравця B можна записати у вигляді матриці ймовірностей:

$$Q = (q_1 \quad q_2 \quad \cdots \quad q_n), \quad q_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = 1,$$

де q_j – ймовірність застосування гравцем B своєї *j*-ї чистої стратегії.

Конфлікт – суперечність між інтересами осіб, які ухвалюють рішень, унаслідок чого кожна сторона потенційно може дістати безпосередню вигоду, виконуючи дії, які завдають збитків іншій стороні.

Матрична гра – антагоністична парна гра, у якій обидва її учасники мають скінченну кількість чистих стратегій.

Набір стратегій – стратегії кожного з гравців $S_A = \{S_{A_1}, S_{A_2}, \ldots, S_{A_m}\}$ та $S_B = \{S_{B_1}, S_{B_2}, \ldots, S_{B_n}\}$, які повністю описують усі дії у грі.

Нижня чиста ціна гри (максимінний виграш) показує, який мінімальний виграш може гарантувати собі гравець A, застосовуючи свої чисті стратегії за будь-яких дій гравця B. Її визначають співвідношенням:

$$\alpha = \max_i \min_j \{\pi_{ij}\} = \max_i \pi_i$$

Оптимальна стратегія – така стратегія гравця A (гравця B), яка за багаторазового повторення гри забезпечує йому максимальний середній виграш (мінімальний середній програш).

Особистий хід – хід, який гравець виконує свідомо, дотримуючись певного правила (стратегії).

Парна гра – гра, у якій беруть участь два гравці.

Платіжна матриця – матриця $\Pi = (\pi_{ij})_{m\times n}$, рядки якої $i = \overline{1,m}$ відображають множину чистих стратегій гравця A ("продавець"), стовпці $j = \overline{1,n}$ – множину чистих стратегій гравця B ("покупець") і для будь-якої пари стратегій $S_i \cap S_j$ визначено ціну π_{ij}, яку заплатить гравець B і дістане гравець A.

Принцип обережності – принцип, яким керуються обидва гравці в антагоністичній матричній грі під час вибору своїх стратегій. Гравці поводять себе розумно, виключаючи елементи азарту та ризику. Дотримання саме цього принципу обумовлено тим, що кожен гравець виходить з того, що супротивнику відомі його стратегії, тому враховує найгірший для себе варіант розвитку подій.

Сідлова точка – це така пара номерів "рядок – стовпець" $(i_0;\ j_0)$ платіжної матриці $\Pi = \left(\pi_{ij}\right)_{m\times n}$, для якої є справедливими нерівності:

$$\pi_{ij_0} \le \pi_{i_0 j_0} \le \pi_{i_0 j},\ \text{де}\ i = \overline{1,m},\ \ j = \overline{1,n},$$

тобто елемент $\pi_{i_0 j_0}$ платіжної матриці є одночасно максимальним за стовпцем і мінімальним за рядком. У цьому випадку матрична гра має розв'язок у чистих стратегіях.

Скінченна гра – це гра, де в кожного із гравців є скінченний набір стратегій.

Слабко домінувальна стратегія – чиста стратегія S_j, відносно елементів якої порівняно з відповідними елементами іншої стратегії S_j' поряд із нерівностями одного знака виконуються також рівності:

$$\pi_{\boldsymbol{ij}} \ge \pi_{i'j}\ \ \text{для гравця}\ A;$$

$$\pi_{\boldsymbol{ij}} \le \pi_{ij'}\ \ \text{для гравця}\ B.$$

Стратегія гравця – це набір правил, яким користується гравець для визначення варіанта дій під час вибору кожного особистого ходу.

Теорема фон Неймана. У будь-матричній грі є така пара змішаних стратегій $(P^*,\ Q^*)$, що відносно ціни гри справджується твердження:

$$E(P,\ Q^*) \le E(P^*,\ Q^*) \le E(P^*,\ Q),$$

де $E(P,\ Q)$ – математичне сподівання виграшу гравця A (програшу гравця B) за умов дотримання обома учасниками певних стратегій; у свою чергу, це математичне сподівання виграшу (програшу) є добутком матриць: $E(P,\ Q) = P \cdot \Pi \cdot Q$; $P^*,\ Q^*$ – розподіли ймовірностей, з якими гравці A та B приймають свої чисті стратегії відповідно до їх оптимальних стратегій.

Теорія ігор – розділ прикладної математики (а саме дослідження операцій та методів оптимізації), що займається обґрунтуванням вибору рішення, яке буде оптимальним для кожної зі сторін – учасників конфлікту.

Формальний математичний опис гри (гра в нормальній формі) для двох гравців полягає у такому:

$$U = \{I,\ S = \{S_A, S_B\},\ \vartheta\},$$

де $I = \{A, B\}$ – множина учасників гри;

$S_A = \{S_{A_1}, S_{A_2}, \dots, S_{A_m}\}$ – сукупність чистих стратегій гравця A (продавця);

$S_B = \{S_{B_1}, S_{B_2}, \dots, S_{B_n}\}$ – сукупність чистих стратегій гравця B (покупця);

ϑ – функція виграшу, яка відповідає кожному набору стратегій.

Метою гри є визначення оптимальних стратегій для кожного із гравців та ціни гри.

Хід – дія одного з гравців у якийсь момент гри.

Ціна гри – значення виграшу υ, що відповідає оптимальному розв'язку гри (об'єктивно можливий середній виграш):

$$\alpha \le \vartheta \le \beta, \quad \vartheta = E(P^*,\ Q^*).$$

Чиста стратегія – стратегія, що визначає результат для кожного можливого вибору, який може зробити гравець; кожна чиста стратегія є окремим випадком змішаної, коли ймовірність однієї з чистих стратегій дорівнює одиниці, а інших можливих чистих стратегій – нулю.

7.3. Тренувальні вправи

7.3.1. Матрична гра в чистих стратегіях. Матричну гру задано платіжною матрицею:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Знайдіть оптимальні стратегії гравців та визначте ціну гри.

Розв'язання.

Спочатку визначимо нижню та верхню ціни гри. Якого принципу дотримуються гравці під час вибору своїх стратегій? Так, це принцип обережності. Дотримуючись цього принципу, гравець A переглядає свої чисті стратегії (рядки) і вибирає серед них найменші елементи:

$$\{0 \quad 1 \quad 0 \quad 3\}.$$

А тепер? Тепер серед цих елементів він вибирає найбільший. Це і є нижня чиста ціна гри:

$$\alpha = \max_{i}\{0 \;\; 1 \;\; 0 \;\; 3\} = 3.$$

Отже, стратегія гравця A є максимінною.

Дотримуючись того ж принципу обережності, гравець B переглядає свої чисті стратегії (стовпці) і вибирає серед них найбільші елементи:

$$\{3 \quad 6 \quad 7 \quad 5 \quad 9\}.$$

Тепер серед цих елементів він вибирає найменший. Це і є верхня чиста ціна гри:

$$\beta = \min_{j}\{3 \;\; 6 \;\; 7 \;\; 5 \;\; 9\} = 3.$$

Отже, стратегія гравця B є мінімаксною.

Оскільки $\alpha = \beta$, то це гра в чистих стратегіях. Відповідно, гравцеві A вигідно дотримуватись своєї 4-ї чистої стратегії, а гравцеві B – дотримуватися своєї 1-ї чистої стратегії. Отже, гравець A вибирає свої чисті стратегії з ймовірністю $P^* = (0; 0; 0; 1)$, а гравець B – з ймовірністю $Q^* = (1; 0; 0; 0; 0)$. Причому ціна гри дорівнює 3.

Розглянемо цей приклад з метою визначення домінувальних стратегій.

Порівняємо стратегії S_{A_1} та S_{A_2}. Чи можливий між ними вибір? Ні, оскільки для перших чотирьох елементів ціна гри більша за стратегією S_{A_2}, а щодо п'ятого елемента, то ціна гри більша за стратегією S_{A_1}. Тепер порівняємо стратегії S_{A_1} і S_{A_3}. Чи можливий вибір між цими стратегіями? Так, відносно усіх елементів цих стратегій виконується нерівність:

$$\pi_{1j} \geq \pi_{3j}, \;\; j = \overleftarrow{1,5}.$$

Отже, стратегія S_{A_1} є домінувальною, хоча і слабко домінувальною.

Відповідно, гравець A ніколи не буде користуватися стратегією S_{A_3}. Як ви вважаєте, чи можливий вибір між стратегіями S_{A_1} і S_{A_4}? Ні. Також неможливим є вибір між стратегіями S_{A_2} і S_{A_4}, оскільки серед них немає домінувальних.

Ми отримали платіжну матрицю меншого розміру, при цьому серед стратегій гравця A нема домінуючих:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 0 & 9 \\ 2 & 6 & 7 & 1 & 8 \\ 3 & 4 & 5 & 5 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тепер порівняємо стратегії гравця B. Як ви вважаєте, чи можливий вибір між стратегіями S_{B_1} і S_{B_2}? Так, ціна гри за стратегією S_{B_1} менша, яку б зі своїх чистих стратегій не застосовував гравець A. Отже, гравець B відмовляється від своєї стратегії S_{B_2}. Порівняємо тепер стратегії S_{B_1} і S_{B_3}. Стратегія S_{B_3} є домінованою, отже, гравець B відмовляється від цієї стратегії. Порівняємо стратегії S_{B_1} і S_{B_4}. Чи можливий між ними вибір? Ні, оскільки серед них нема домінувальної. Тепер порівнюємо стратегії S_{B_1} і S_{B_5}. Який вибір робить гравець B? Правильно, на користь стратегії S_{B_1}, оскільки за дотримання цієї стратегії він сплачуватиме менше, ніж за стратегією S_{B_4}.

Тепер платіжна матриця зменшилася до такого розміру:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Ситуація змінилася, тому продовжимо пошук домінувальних стратегій гравця A. Порівняємо стратегії S_{A_1} та S_{A_2}. Тепер між ними вибір стає можливим, і гравець A робить його на користь стратегії S_{A_2}, оскільки в цьому разі він дістає більше. Порівнюємо тепер стратегії S_{A_2} і S_{A_4} (номер стратегії S_{A_4}, що записана останнім рядком, відповідає її номеру за вихідною матрицею). Зрозуміло, що гравець A робить вибір на користь стратегії S_{A_4}. Отже, гравець A вибирає свою чисту стратегію S_{A_4}. Ми дістали таку платіжну матрицю:

$$\Pi = (3 \quad 5).$$

За цією матрицею гравець A має одну стратегію, а гравець B – дві. Отже, тепер вибір за гравцем B. Серед своїх чистих стратегій S_{B_1} і S_{B_4} (номер стратегії S_{B_4}, що записана останнім стовпцем, відповідає її номеру за вихідною матрицею) гравець B вибирає стратегію S_{B_1}, оскільки за нею він сплачуватиме менше.

Ми дістали розв'язок гри у чистих стратегіях. Для гравця A оптимальною є стратегія $P^* = (0; 0; 0; 1)$, а для гравця B – стратегія $Q^* = (1; 0; 0; 0; 0)$. Ціна гри у цьому разі становить $\vartheta = 3$. Зрозуміло, що ми дістали той самий розв'язок, що випливає з порівняння верхньої і нижньої цін гри, оскільки ці ціни співпадають.

7.3.2. Матрична гра у змішаних стратегіях. Матричну гру задано платіжною матрицею:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 4 & 0{,}5 & 3 \end{pmatrix}.$$

Застосувавши графічний метод, обчисліть нижню та верхню чисті ціни гри, визначте оптимальні стратегії кожного із гравців та ціну гри.

Розв'язання.

За платіжною матрицею гравець A має дві стратегії, тоді як гравець B має п'ять стратегій.

Перевіримо, чи має гра сідлову точку. Для цього порівняємо між собою нижню та верхню чисті ціни гри. Для визначення нижньої чистої ціни гри знайдемо за кожним із рядків платіжної матриці (стратегіями гравця A) найменші значення виграшів і виберемо серед них найбільше:

$$\alpha = \max_{i} \{1 \;\; 0{,}5\} = 1.$$

Тепер визначимо верхню чисту ціну гри, для чого знайдемо найбільші за кожною стратегією гравця B (стовпцями платіжної матриці) значення та виберемо серед них найменше:

$$\beta = \min_{j} \{2 \;\; 3 \;\; 5 \;\; 3 \;\; 4\} = 2.$$

Який робимо висновок? Оскільки $\alpha \neq \beta$, то гра не має сідлової точки, отже, вона має розв'язок у змішаних стратегіях, причому ціна гри задовольняє умову: $\alpha < \vartheta < \beta$. Визначимо активні стратегії гравця B за допомогою графічного методу. Це можна зробити, оскільки гравець A має тільки дві стратегії.

На координатній площині вздовж осі абсцис відкладемо відрізок одиничної довжини. Перпендикулярно до нього проводимо осі A_1 та A_2, на яких відкладаємо виграші гравця A, що відповідають стратегіям S_{A_1} та S_{A_2} за умов, що гравець B дотримується однієї із своїх стратегій (рис. 7.1).

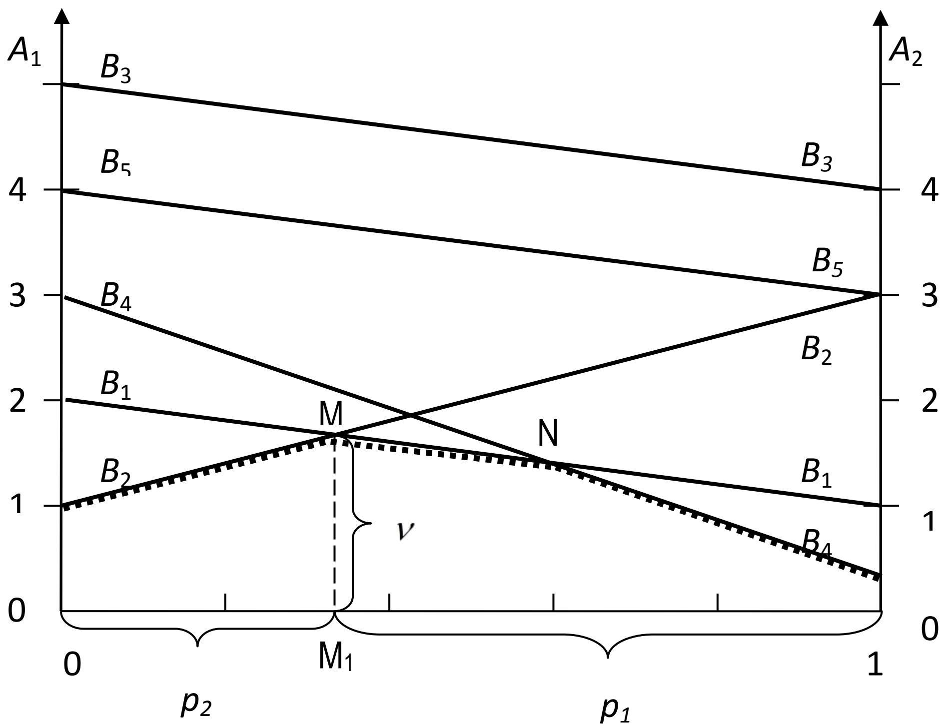

Рис. 7.1. **Розв'язання матричної гри графічним методом**

Що є нижньою межею можливого виграшу гравця A? Правильно, це ламана лінія B_2MNB_4. На цій ламаній визначаємо точку з максимальною ординатою. Яка це точка? Треба вибрати – M чи N? Правильною відповіддю є точка M. Оскільки ця точка утворена перетином ліній B_1 та B_2, то активними стратегіями гравця B є стратегії S_{B_1} та S_{B_2}. Як за графіком оцінити розв'язок гри? Ордината точки M відповідає ціні гри, а відрізки $0M_1$ та M_11, на які проєкція точки M поділяє одиничний відрізок осі абсцис, визначають імовірності p_2 та p_1, з якими гравець A дотримуватиметься, відповідно, своїх чистих стратегій S_{A_2} та S_{A_1}. Зверніть увагу, що відрізок $0M_1$ відповідає ймовірності, із якою гравець A дотримується стратегії S_{A_2}, а відрізок M_11 – ймовірності стратегії S_{A_1}.

Як уже зазначено, точка М розміщена на перетині ліній, що відповідають стратегіям S_{A_1} і S_{A_2}, відповідно, матриця активних стратегіях має вигляд:

$$\Pi = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Згідно з цією платіжною матрицею оптимальну стратегію гравця A визначає матриця ймовірностей $P^* = (p_1^* \quad p_2^*)$, а гравця B – матриця $Q^* = (q_1^* \quad q_2^* \quad 0 \quad 0 \quad 0)$. Для визначення елементів матриць P^* складемо систему рівнянь за стовпцями матриці активних стратегій. Перші два рівняння визначають математичне сподівання виграшу гравця A (тобто фіксованими є стратегії гравця B). Оскільки застосування гравцем A або своєї стратегії S_{A_1}, або стратегії S_{A_2} утворює повну групу подій, то сума ймовірностей цих подій дорівнює одиниці (це третє рівняння системи). Отже, маємо:

$$\begin{cases} 2p_1^* + p_2^* = \vartheta; \\ p_1^* + 3p_2^* = \vartheta; \\ p_1^* + p_2^* = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} p_1^* = 2/3; \\ p_2^* = 1/3; \\ \vartheta = 5/3. \end{cases}$$

Для обчислення компонентів q_1^* і q_2^* матриці ймовірностей Q^*, які визначають імовірність вибору певної стратегії гравцем B, записуємо аналогічну систему рівнянь, але вже за рядками матриці активних стратегій. У цьому випадку перші два рівняння системи визначають математичне сподівання програшу гравця B за умов, що гравець A дотримується певної чистої стратегії, а третє рівняння відображає той факт, що вибір гравцем B або своєї стратегії S_{B_1}, або стратегії S_{B_2} утворює повну групу подій. Маємо таку систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2q_1^* + q_2^* = \vartheta; \\ q_1^* + 3q_2^* = \vartheta; \\ q_1^* + q_2^* = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} q_1^* = 2/3; \\ q_2^* = 1/3; \\ \vartheta = 5/3. \end{cases}$$

Отже, імовірність, з якою гравець A дотримується своїх чистих стратегій, описують матрицею $P^* = (2/3 \quad 1/3)$, а ймовірність, із якою гравець B дотримується своїх чистих стратегій, описують матрицею $Q^* = (2/3 \quad 1/3 \quad 0 \quad 0 \quad 0)$. Ціна гри дорівнює $\vartheta(P^*) = \vartheta(Q^*) = 5/3$.

Як і випливає з першої теореми двоїстості, цільові функції прямої і двоїстої задач співпадають.

Здобуті результати обчислень можна порівняти з оцінками, що дає аналіз графічного розв'язання, де гру розглядають із позиції гравця A (див. рис. 7.1). Видно, що ми дістаємо ті самі значення ймовірностей, із якими гравець дотримується своїх чистих стратегій, і ту саму ціну гри.

7.3.3. Реалізація матричної гри. Розглянемо гру, яка відома під назвою "Море Бісмарка". Це модель реальної ситуації, яка склалася у 1943 році під час Другої світової війни. На Тихому океані учасниками воєнного протистояння були Японія та США. Історія така. Генерал Хітосі Імамура, який на той час був командувачем восьмого фронту (угруповання сухопутних військ японської імператорської армії, що перебувала в Південно-Західній частині Тихого океану), дістав наказ доправити підкріплення по морю Бісмарка в Лає, на Нову Гвінею. Конвой складався із восьми військових транспортів, восьми есмінців та близько сотні літаків. Американці перехопили повідомлення про морський конвой японців, і генерал ВПС США Джордж Кенні, який був командувачем ВПС союзників у південно-західній частині Тихого океану, мав знищити цей конвой. А далі розглянемо цю ситуацію як антагоністичну матричну гру. Генерал Імамура під час визначення шляху конвою мав вибрати між північним (коротшим) і південним маршрутами, а генерал Кенні – вирішити, куди посилати літаки, щоб розбомбити японський конвой. Слід мати на увазі, що протягом одного дня літаки можуть бомбити лише на одному з двох напрямів – або на північному, або на південному маршрутах (але не на двох одночасно). Отже, якщо Кенні направить літаки неправильним маршрутом, то вони повернуться, але кількість днів, коли можливе бомбардування, зменшується.

Розв'язання.

Цю реальну ситуацію розглядатимемо як матричну гру, яка задана платіжною матрицею, де кожен із гравців має по дві чисті стратегії. Елементами платіжної матриці є кількість днів, протягом яких можливе бомбардування. Відповідно, генерал Кенні – це гравець A, генерал Імамура – гравець B. Північний маршрут мав займати 2 дні, а південний – 3 дні. Якщо генерал Кенні зробить помилку під час вибору стратегії, то кількість днів для бомбардування скоротиться на один. Отже, маємо платіжну матрицю, яку подано у вигляді таблиці (табл. 7.1).

Таблиця 7.1

Платіжна матриця гри "Море Бісмарка"

Командувачі та їх стратегії		Імамура	
		Північ	Південь
Кенні	Північ	2	2
	Південь	1	3

Перевіримо, чи мають гравці домінувальні стратегії. Ні, жоден із гравців такої стратегії не має. Однак можна говорити про слабке домінування. Так, для Імамури це стратегія "Північ", оскільки для будь-якої стратегії Кенні програш Імамури (кількість днів, коли конвой піддаватимуть бомбардуванню) не більш ніж для стратегії "Південь". Отже, якщо Імамура вибере стратегію "Північ", то для Кенні доцільно теж вибрати стратегію "Північ", оскільки його виграш буде точно більшим, ніж у разі стратегії "Південь".

Насправді так і сталося. Із 2-го до 4-го березня 1943 року літаки ВПС США спільно з Королівськими ВПС Австралії атакували японський конвой, який ішов північним маршрутом, і потопили всі вісім транспортних кораблі та чотири есмінці супроводу, а із 6 900 військовослужбовців до Нової Гвінеї дісталися лише 1 200.

7.4. Виконання розрахунків у MS Excel

Завдання. За платіжною матрицею Π знайдіть ймовірності, з якими гравці A та B дотримуються своїх стратегій (оптимальні плани обох гравців), та ціну гри

$$\Pi = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 2 \\ 7 & 3 & 7 \\ 6 & 4 & 5 \\ 9 & 12 & 4 \\ 8 & 7 & 6 \end{pmatrix}.$$

Розв'язання.

Здійснімо формалізацію задачі. Оскільки обидва гравці мають більш ніж дві стратегії, то не має значення, з позиції якого гравця розв'язуватимемо цю гру. Нехай це буде гравець A. За платіжною матрицею гравець A має п'ять стратегій, яким поставимо у відповідність вектор імовірностей $\mathbf{P} = (p_1, p_2, p_3, p_4, p_5)$. Гравець B має три стратегії, які описуватимемо вектором імовірностей $\mathbf{Q} = (q_1, q_2, q_3)$. Цільову функцію (ціну гри) позначимо υ.

За платіжною матрицею складаємо систему обмежень вихідної задачі:

$$\begin{cases} 5p_1 + 7p_2 + 6p_3 + 9p_4 + 8p_5 \ge \upsilon; \\ 6p_1 + 3p_2 + 4p_3 + 12p_4 + 7p_5 \ge \upsilon; \\ 2p_1 + 7p_2 + 5p_3 + 4p_4 + 6p_5 \ge \upsilon; \\ p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 = 1; \\ 0 \le p_i \le 1, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

За виглядом цільової функції ця математична модель не є моделлю задачі лінійного програмування. Уведемо нові змінні $x_i = {p_i}/{\upsilon}$ $(i = \overline{1,5})$ і запишемо допоміжну задачу як задачу лінійного програмування. Система обмежень допоміжної задачі має вигляд:

$$\begin{cases} 5x_1 + 7x_2 + 6x_3 + 9x_4 + 8x_5 \ge 1; \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 12x_4 + 7x_5 \ge 1; \\ 2x_1 + 7x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 6x_5 \ge 1; \\ x_i \ge 0, \quad i = \overline{1,5}. \end{cases}$$

Відповідно, цільову функцію допоміжної задачі досліджують на мінімум (тоді як функцію вихідної задачі, яка є ціною гри для продавця A, досліджували на максимум):

$$Z(\mathbf{X}) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \quad \to \quad \min .$$

Отже, ми дістали математичну модель задачі лінійного програмування в канонічному вигляді. Проведемо оптимізацію стратегії обох гравців за допомогою надбудови Solver MS Excel.

На робочому аркуші книги MS Excel побудуємо таблицю вихідних даних, дотримуючись математичної моделі допоміжної задачі (рис. 7.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Визначення розв'язку допоміжної задачі**								
2	Стратегії гравця A	1-ша	2-га	3-тя	4-та	5-та	**Усього**		
3	Керовані змінні	1	1	1	1	1			
4	Цільові коефіцієнти	1	1	1	1	1	5		
5	Стратегії гравця B							**Обмеження**	
6	1-ша	5	7	6	9	8	35	≥	1
7	2-га	6	3	4	12	7	32	≥	1
8	3-тя	2	7	5	4	6	24	≥	1
9	**Вихідна задача:**	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2	0,2		

Рис. 7.2. **Вихідна таблиця задачі про визначення оптимальної стратегії**

Керовані змінні записані в комірках **B3:F3**. Вони містять вихідні значення допоміжних змінних, яким для зручності надано значення 1. У цих комірках буде виведено оптимальний план допоміжної задачі.

Комірки **B4:F4** містять значення коефіцієнтів цільової функції. Усі вони дорівнюють одиниці. У комірці **G4** виводимо значення цільової функції, застосувавши вбудовану функцію **СУММПРОИЗВ()**. Отже, для комірки **G4** застосовуємо формулу: **=СУММПРОИЗВ(B3:F3; B4:F4)**.

Блок комірок **B6:F8** містить елементи транспонованої платіжної матриці Π^{T}, а значення комірок **G6:G8** (ліва частина основної системи обмежень) обчислюють як добуток матриці Π^{T} і матриці керованих змінних. Так, значення комірки **G6** обчислюємо за допомогою вбудованої функції за формулою: **=СУММПРОИЗВ($B$3:$F$3; B6:F6)**. Зверніть увагу, що посилання на комірки **$B$3:$F$3** є абсолютним, що дозволяє розтягнути цю формулу на комірки **G7 та G8**. До комірок **I6:I8** записуємо значення правої частини основної системи обмежень. Також вводимо обмеження на знак.

Для зручності до таблиці вихідних даних (рис. 7.2), що містить умови допоміжної задачі, додаємо ще один, 9-й рядок, де в комірках **B9:F9** виводитимуться значення компонентів вектора ймовірностей для гравця A, які обчислюють за співвідношенням:

$$\mathbf{P}^* = \frac{1}{Z\left(\mathbf{X}^*\right)} \cdot \mathbf{X}^*.$$

Для цього, наприклад, у комірку **B9** записуємо формулу: **=B3/$G$4.**

Значення цільової функції вихідної задачі вводять до комірки **G9** і обчислюють за формулою: **=1/G4.**

Оптимальний план допоміжної задачі визначаємо за допомогою надбудови **Solver**. Для цього за допомогою послідовності команд **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения** викликаємо діалогове вікно **Параметры поиска решения** і заповнюємо його поля відповідно до математичної моделі допоміжної задачі (рис. 7.3).

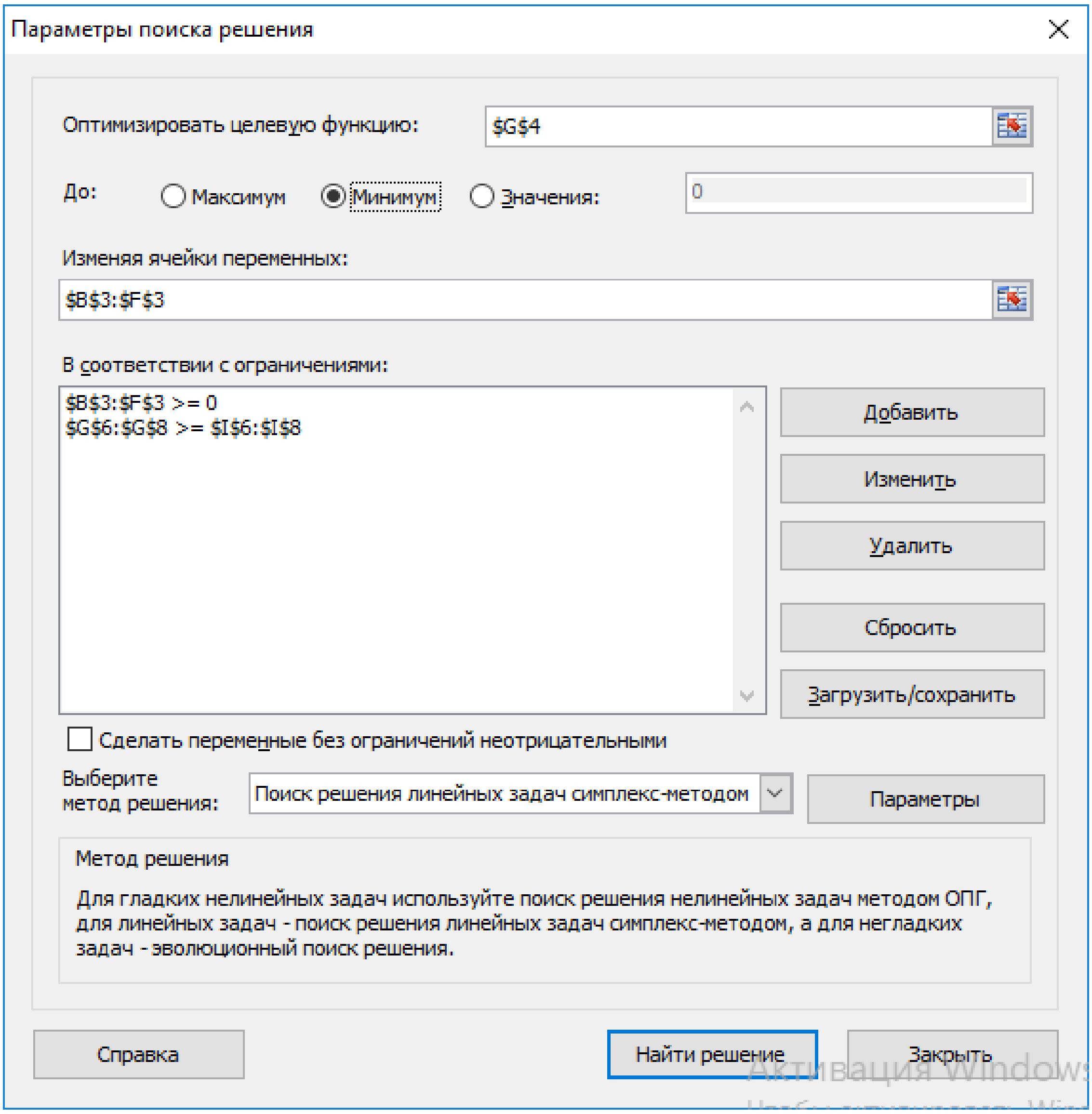

Рис. 7.3. В**игляд діалогового вікна *Параметры поиска решения***

Тепер натискаємо клавішу **Найти решение**, і з'являється діалогове вікно **Результаты поиска решения**, де виводиться повідомлення: **Решение найдено. Все ограничения и условия оптимальности выполнены**. Установлюємо перемикач у положення **Сохранить найденное решение** і в полі **Тип отчета** вказуємо звіт **Устойчивость**. Натискаємо **ОК**, і на екрані виводиться таблиця результатів (рис. 7.4), а на окремому аркуші виводиться звіт про стійкість (рис. 7.5).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Визначення розв'язку допоміжної задачі**								
2	Стратегії гравця A	1-ша	2-га	3-тя	4-та	5-та	**Усього**		
3	Керовані змінні	0	0,0323	0	0	0,1290			
4	Цільові коефіцієнти	1	1	1	1	1	0,1613		
5	Стратегії гравця B						**Обмеження**		
6	1-ша	5	7	6	9	8	1,2581	≥	1
7	2-га	6	3	4	12	7	1	≥	1
8	3-тя	2	7	5	4	6	1	≥	1
9	**Вихідна задача:**	0	0,2	0	0	0,8	6,2		

Рис. 7.4. **Таблиця результатів допоміжної задачі про визначення оптимальної стратегії**

За 9-м рядком результатів (рис. 7.4) визначаємо оптимальну стратегію гравця A: $\mathbf{P}^* = (0;\, 0{,}2;\, 0;\, 0;\, 0{,}8)$, а також відповідне йому значення цільової функції $\upsilon(\mathbf{P}^*) = 6{,}2$ ум. од. Ця стратегія є змішаною, тобто гравець A має дві активні стратегії, з яких з імовірністю $p_2^* = 0{,}2$ йому доцільно дотримуватись другої стратегії, а з імовірністю $p_5^* = 0{,}8$ – п'ятої. За цих умов він матиме найменший гарантований виграш на рівні, не нижчому ніж 6,2 ум. од.

Ограничения						
Ячейка	**Имя**	**Результ. значение**	**Теневая цена**	**Правая часть**	**Допустимое увеличение**	**Допустимое уменьшение**
$G$5	Усього	1,25807	0	1	0,25807	1E+30
$G$6	Усього	1	0,03226	1	0,16667	0,571429
$G$7	Усього	1	0,12903	1	1,33333	0,142857

Рис. 7.5. **Звіт щодо стійкості оптимального розв'язку з позиції гравця** A

Оптимальний план гравця B визначаємо за звітом щодо стійкості розв'язку, а саме з тієї його частини, що стосується обмежень (рис. 7.5). Так, стовпчик тіньових цін визначає розв'язок задачі, що є двоїстою до допоміжної. Для цієї задачі $\mathbf{Y}^* = (0;\ 0{,}03226;\ 0{,}12903)$ є оптимальним планом гравця B у допоміжних змінних. Щоб перейти до вихідних змінних, скористаємось формулою: $\mathbf{G}^* = \dfrac{1}{F(\mathbf{Y}^*)} \cdot \mathbf{Y}^*$. Згідно з першою теоремою двоїстості значення цільових функцій спряжених задач співпадають, тобто $Z(\mathbf{X}^*) = F(\mathbf{Y}^*)$. Звідси маємо вектор оптимальних стратегій гравця B: $\mathbf{G}^* = (0;\ 0{,}2;\ 0{,}8)$. Отже, гравець B має дві активні стратегії, і з імовірністю $q_2^* = 0{,}2$ йому доцільно дотримуватись другої стратегії, а з імовірністю $q_3^* = 0{,}8$ – третьої. За цих умов його найбільший програш не перевищуватиме 6,2 ум. од.

7.5. Запитання для самоперевірки

7.5.1. Наведіть означення матричної гри.

7.5.2. Поясніть, чому матричну гру визначають як антагоністична.

7.5.3. За якими критеріями класифікують матричні ігри? Наведіть приклади цих критеріїв і типи матричних ігор згідно з класифікацією за цими критеріями.

7.5.4. Поясніть, що відображають рядки і стовпці платіжної матриці, що є її елементами.

7.5.5. Чи може платіжна матриця містити від'ємні елементи? Якщо так, то поясніть їх сенс на прикладі матричної гри "Покупець – продавець".

7.5.6. Які саме характеристики є розв'язком матричної гри?

7.5.7. Чи можна математичну модель матричної гри вважати задачею лінійного програмування? Поясніть свої міркування.

7.5.8. Сформулюйте пару спряжених задач (вихідну і двоїсту) для матричної гра "Покупець – продавець". Поясніть, як саме реалізують у цьому випадку теореми двоїстості.

7.5.9. У чому полягає сенс принципу обережності? Як його реалізує кожен із гравців?

7.5.10. Що таке нижня чиста ціна гри? Наведіть її економічну інтерпретацію.

7.5.11. Що таке верхня чиста ціна гри? Наведіть її економічну інтерпретацію.

7.5.12. У якому випадку гру виконують у чистих стратегіях?

7.5.13. Поясніть, що таке змішана стратегія і як вона реалізується у реальному житті.

7.5.14. Які стратегії гравця слід вважати активними?

7.5.15. Які методи розв'язання матричної гри ви знаєте?

7.5.16. У чому полягає сутність графічного методу розв'язання матричної гри? Що саме визначають з його допомогою?

7.5.17. Які стратегії є домінованими для гравця A?

7.5.18. Чи можна визначити доміновані стратегії за допомогою графічного методу розв'язання матричної гри? Обґрунтуйте свої міркування.

7.5.19. Чи доцільно визначати домінувальні стратегії у матричній грі розміру $2 \times n$ або $m \times 2$?

7.5.20. Як під час застосування графічного методу розв'язання визначити, які стратегії є активними, якщо це гра в чистих стратегіях? Наведіть приклад.

7.5.21. Що таке "гра із природою"? Наведіть приклад, що розкриває її економічний сенс.

7.6. Практичні завдання

Матричну гру задано платіжною матрицею, за якою один із гравців має дві стратегії.

Необхідно:

визначити нижню і верхню чисті ціни гри;

дослідити, чи мають гравці доміновані стратегії, і видалити ці стратегії;

визначити матрицю активних стратегій графічним методом;

виходячи з принципу обережності, визначити ймовірності, з якими гравці A та B мають дотримуватися своїх чистих стратегій;

обчислити ціну гри, що відповідає оптимальним стратегіям гравців.

7.6.1	$\Pi=\begin{pmatrix}2&0&4&5&1\\1&6&8&4&7\end{pmatrix}$	**7.6.2**	$\Pi=\begin{pmatrix}8&2&6&5&4\\7&-1&7&7&3\end{pmatrix}$
7.6.3	$\Pi=\begin{pmatrix}4&7&5&5&2\\2&9&7&8&4\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$	**7.6.4**	$\Pi=\begin{pmatrix}3&7&4&5&6\\5&3&4&7&8\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$
7.6.5	$\Pi=\begin{pmatrix}7&2&-1&1&4\\4&5&4&2&0\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$	**7.6.6**	$\Pi=\begin{pmatrix}4&7&9&5&2\\6&10&7&3&8\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$
7.6.7	$\Pi=\begin{pmatrix}8&6&4&4&3\\5&9&6&-1&5\end{pmatrix}$	**7.6.8**	$\Pi=\begin{pmatrix}6&5&4&5&4\\1&3&6&7&8\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$
7.6.9	$\Pi=\begin{pmatrix}4&8&6&-2&2\\6&9&5&4&5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$	**7.6.10**	$\Pi=\begin{pmatrix}2&5&4&5&4\\-1&3&6&4&3\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$
7.6.11	$\Pi=\begin{pmatrix}8&9&6&10&8\\7&7&12&9&5\end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$	**7.6.12**	$\Pi=\begin{pmatrix}5&6&2&7&9\\6&7&-2&8&5\end{pmatrix}$

7.7. Тестові завдання

7.7.1. Виберіть правильні твердження:

Елементами платіжної матриці у матричної гри двох осіб є:

а) ціна гри, яку сплачує гравець B (покупець) і отримує гравець A (продавець) під час реалізації стратегій, на перетині яких розташований цей елемент;

б) усі можливі значення виграшу, які може отримати в цій грі гравець A (продавець), якщо розглядати з позиції гравця A;

в) усі можливі значення виграшу, які може отримати в цій грі покупець, якщо вони від'ємні, а гру розглядають з позиції гравця B (покупець).

7.7.2. Яку найбільшу кількість додатних значень має оптимальний план гравця A, якщо платіжна матриця матричної гри має розмір $m \times 2$?

Виберіть правильну відповідь:

а) $m - 1$ за умови, що $m > 2$;

б) $m - 3$, оскільки $n = 2$;

в) 2, оскільки кількість активних стратегій не може перевищувати 2.

7.7.3. Які з наведених методів можна застосовувати до розв'язання матричної гри у випадку, коли кожен із двох гравців має більш, ніж 2 стратегії? Правильних відповідей може бути декілька:

а) застосувати безпосередньо симплексний метод, оскільки він є універсальним методом розв'язання ЗЛП;

б) застосувати метод визначення домінувальних стратегій, якщо він дає змогу виявити хоча б для одного гравця не більш дві активні стратегії;

в) застосувати симплексний метод, виконавши спочатку заміну змінних для зведення математичної моделі задачі до ЗЛП;

г) за значеннями верхньої та нижньої цін гри, якщо вони співпадають.

7.7.4. Яку задачу безпосередньо розв'язують під час застосування графічного методу до розв'язання матричної гри двох осіб?

Виберіть правильну відповідь:

а) визначення ймовірностей застосування своїх чистих стратегій обома гравцями та ціни гри;

б) визначення ймовірностей застосування своїх чистих стратегій тим із гравців, з позиції якого розв'язують гру, та ціни гри;

в) визначення активних стратегій того із гравців, який має більш ніж дві стратегії.

7.7.5. Виберіть правильні твердження:

Під час застосування графічного методу до розв'язання матричної гри двох осіб в умовах, коли верхня та нижня ціни гри співпадають:

а) оптимальний план визначають як координати точки перетину двох ліній, що відповідають активним стратегіям;

б) графічний метод не можна застосовувати, оскільки він не дає змоги визначити оптимальний план;

в) оптимальний план визначають як координати точки перетину лінії, що відповідає активній стратегії, з віссю ординат.

7.7.6. Чи застосовують графічний метод, якщо платіжна матриця має розмір $2\text{x}2$?

Виберіть правильну відповідь:

а) так, саме такий розмір матриці і є найбільш прийнятним для застосування графічного методу, оскільки гру можна розв'язати з позиції обох гравців;

б) ні, оскільки незрозуміло, з позиції якого із гравців слід розглядати матричну гру;

в) ні, застосування графічного методу недоцільне, оскільки матриця активних стратегій обох гравців уже відома.

7.7.7. Чи можна за графічним методом оцінити ймовірності, з якими гравці приймають свої активні стратегії?

Виберіть правильну відповідь:

а) так, саме для цього графічний метод і застосовують;

б) ні, графічний метод застосовують лише для визначення активних стратегій;

в) так, але тільки для того із гравців, із позиції якого розглядають гру.

7.7.8. Яка стратегія гравця A є домінувальною?

Виберіть правильну відповідь:

а) той рядок, усі елементи якого менші за відповідні елементи іншого рядка;

б) той рядок, усі елементи якого не більші за відповідні елементи іншого рядка;

в) той рядок, усі елементи якого не менші за відповідні елементи іншого рядка;

г) тільки той рядок, усі елементи якого більші за відповідні елементи іншого рядка.

7.7.9. Чи потрібно перевіряти платіжну матрицю на наявність домінувальних стратегій, якщо вона має розмір $m \times 2$ або $2 \times n$?

Виберіть правильну відповідь:

а) так, оскільки іншим методом не можна розв'язати таку гру;

б) так, це треба застосовувати, оскільки цей метод завжди дає змогу визначити матрицю активних стратегій;

в) можна застосовувати, але це не обов'язково, оскільки матрицю активних стратегій можна визначити графічним методом;

г) ні, в цьому випадку цей метод не застосовується.

7.7.10. Яка стратегія гравця B є домінувальною?

Виберіть правильну відповідь:

а) тільки той стовпець, усі елементи якого менші за відповідні елементи іншого стовпця;

б) той стовпець, усі елементи якого більші за відповідні елементи іншого стовпця;

в) той стовпець, усі елементи якого не більші за відповідні елементи іншого стовпця;

г) той стовпець, усі елементи якого не менші за відповідні елементи іншого рядка.

7.8. Висновки до теми

У теорії ігор досліджують моделі та методи ухвалення рішень у конфліктних ситуаціях, які можуть мати характер, наприклад, конкурентної боротьби.

Одна з характерних рис будь-якого соціально-економічного явища полягає у відмінності інтересів сторін, які беруть участь у цьому процесі. Використання теорії ігор допомагає особі, що ухвалює рішення, провести аналіз ситуації і на базі цього аналізу обґрунтовано й послідовно проводити стратегію поведінки під час вирішення складних проблем.

Формалізація конфліктної ситуації у формі гри полягає в описі її основних елементів, до яких належать суб'єкти гри (гравці), множина їхніх стратегій (допустимі альтернативи), способи вибору стратегій та інформація, якою володіє кожен гравець під час здійснення такого вибору, а також виграш кожного гравця для кожного набору обраних стратегій.

Теорія матричних ігор відіграє значну роль під час визначення оптимального розв'язку в умовах ризику. В основу визначення оптимального розв'язку матричної гри двох осіб покладено принцип найбільшої обережності, що передбачає вибір найкращої серед найгірших стратегій.

Рекомендована література: [1; 2; 5 – 11; 13 – 15; 18; 19; 21 – 28; 30; 32 – 34; 36; 38; 40 – 47].

8. Динамічне програмування

8.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення з принципами постановки задачі динамічного програмування та формування компетентностей щодо її розв'язання.

Професійні компетентності, що формують під час вивчення теми:

знання основних ознак задач динамічного програмування та можливостей їх використання в теорії дискретного оптимального управління;

уміння формалізувати різни типи задач як задачі оптимального дискретного управління;

навички в розв'язанні задачі динамічного програмування за методом рекурентних співвідношень;

вміння ідентифікувати економічні задачі як задачі динамічного програмування.

8.2. Термінологічний словник

Динамічне програмування – спеціальний розділ математичного програмування, де розглядають задачі, у яких для кожної змінної формулюють локальну оптимізаційну задачу, унаслідок розв'язування якої, дістають значення відповідної змінної, найкраще з точки зору будь-якої задачі в цілому.

Метод Р. Беллмана – метод розв'язування задач динамічного програмування, що дає змогу звести процес оптимізації функції n змінних до n-крокового процесу оптимізації функцій однієї змінної.

Основне рекурентне співвідношення методу динамічного програмування – математичне рівняння, яке відображає принцип оптимальності Р. Беллмана.

Параметр стану x_i – характеристика стану системи на кожному i-му кроці ($i = \overline{1,n}$), який залежить від свого значення на попередньому кроці та від обраного управління u_i на цьому кроці, тобто в системі відсутня післядія.

Принцип оптимальності Р. Беллмана – принцип розв'язування задач динамічного програмування, за якого оптимальна поведінка має властивість: у якому б стані не була система і які б рішення не ухвалювали в попередні моменти, наступні рішення мають бути оптимальними відносно стану, у якому опинилася система.

Функціональне рівняння – це рівняння, яке відображає функціональний зв'язок між множиною функцій.

Функція стану системи – характеристика найкращого ефекту на поточному етапі разом із розглянутими кроками.

8.3. Тренувальні вправи

8.3.1. Задача про заміну обладнання. На початку поточного періоду планування на підприємстві встановлено нове обладнання. Залежність продуктивності цього обладнання від часу його експлуатації, а також залежність витрат на зберігання і ремонт обладнання за різного часу його використання задано в табл. 8.1.

Таблиця 8.1

Вихідні дані задачі

Найменування	Термін t, протягом якого використовують обладнання, роки				
	0	1	2	3	4
Річний випуск продукції $R(t)$ у вартісному вираженні, тис. грн	90	80	75	70	65
Щорічні витрати $Z(t)$, які пов'язані зі зберіганням та ремонтом обладнання, тис. грн	25	25	30	35	45

Виходячи з того, що витрати підприємства, які пов'язані із придбанням і встановленням нового обладнання, що є ідентичним до вже встановленого, становлять 50 тис. грн, а обладнання, яке підлягає заміні, списують, складіть такий план заміни обладнання протягом чотирьох років, за якого загальний прибуток за цей часовий період буде максимальним.

Розв'язання.

Отже, задача полягає в тому, що потрібно отримати максимальний прибуток за чотирирічний плановий період з використанням операції заміни обладнання.

Спочатку слід пояснити, чому задачу заміни обладнання можна віднести до задач динамічного програмування. Весь процес планування програми заміни обладнання є *багатокроковим*. На кожному етапі, виходячи з максимальної величини прибутку, слід обрати окрему стратегію.

Загальний прибуток за чотирирічний плановий період дорівнює сумі прибутків окремих етапів (*властивість адитивності*).

Найбільший прибуток відстань за період залежить не від того, у який спосіб отримано прибуток на попередньому етапі, а лише від обраної стратегії на поточному етапі (*властивість незалежності оптимальної стратегії від передісторії*).

Отже, задача заміни обладнання задовольняє основні властивості задач динамічного програмування.

Для формалізації задачі динамічного програмування позначимо:

$ЗБ$ – рішення про збереження обладнання,

$ЗМ$ – рішення про заміну обладнання,

u_1, u_2, u_3, u_4 – управління – стратегії, використовувані на початку кожного року,

$t_k, \quad k = \overline{0{,}4}$ – термін використання обладнання.

Визначимо прибуток $W_k(t_k; u_k)$ підприємства за k-й рік.

Виберіть правильну відповідь:

а) $$W_k(t_k;u_k) = \begin{cases} R(t_k) - Z(t_{k+1}), & \text{якщо} \quad u_k = ЗБ, \\ R(0) - Z(0), & \text{якщо} \quad u_k = ЗМ, \end{cases}$$

б) $$W_k(t_k;u_k) = \begin{cases} R(t_k) - Z(t_k), & \text{якщо} \quad u_k = ЗБ, \\ R(t_k) - Z(0) + 50, & \text{якщо} \quad u_k = ЗМ, \end{cases}$$

в) $$W_k(t_k;u_k) = \begin{cases} R(t_k) - Z(t_k), & \text{якщо} \quad u_k = ЗБ, \\ R(0) - Z(0) - 50, & \text{якщо} \quad u_k = ЗМ. \end{cases}$$

Вибір "в" є правильним.

У цьому випадку основне функціональне рівняння Р. Беллмана має вигляд (виберіть правильний запис):

а) $$F_k(t_k) = max[W_k(t_k; u_k) + F_{k+1}(t_{k+1})] = \\ = max\begin{cases} R(t_k) - Z(t_k) + F_{k+1}(t_{k+1}), & якщо\ u_k = ЗБ, \\ R(0) - Z(0) - 50 + F_{k+1}(1), & якщо\ u_k = ЗМ, \end{cases}$$

б) $$F_k(t_k) = max[W_k(t_k; u_k) - F_{k+1}(t_{k+1})] = \\ = max\begin{cases} R(t_k) - Z(t_k) - F_{k+1}(t_{k+1}), & якщо\ u_k = ЗБ, \\ R(0) - Z(0) - 50 - F_{k+1}(1), & якщо\ u_k = ЗМ. \end{cases}$$

в) $$F_k(t_k) = max[W_k(t_k; u_k) + F_{k+1}(t_{k+1})] = \\ = max\begin{cases} R(t_k) - Z(t_k) + F_{k+1}(t_{k+1}), & якщо\ u_k = ЗБ, \\ R(0) - Z(0) - 50 + F_{k+1}(t_{k+1}), & якщо\ u_k = ЗМ. \end{cases}$$

Вибір "а" є правильним.

Це рівняння описує N-етапний процес, складається із двох частин: верхній рядок визначає прибуток, що отримують під час збереження обладнання; нижній – прибуток, що отримують під час заміни обладнання і продовження процесу роботи на новому обладнанні.

Функція $R(t_k) - Z(t_k)$ є різницею між вартістю виробленої продукції та експлуатаційними витратами на k-му етапі експлуатації обладнання.

Функція $F_{k+1}(t_{k+1})$ характеризує сумарний прибуток від $(N-1)$ етапів, що залишилися, для обладнання, вік якого на початку виконання цих стадій становить (t_{k+1}) років.

Функція $F_{k+1}(1) - 50$ становить чисті витрати із заміни обладнання, вік якого (t_{k+1}) років.

Функція $R(0)$ виражає прибуток, що отримують від нового обладнання віком 0 років. Передбачають, що перехід від роботи на обладнанні віком t_k років до роботи на новому обладнанні виконують миттєво, тобто період заміни старого обладнання і перехід на роботу на новому обладнанні укладається в один і той самий етап.

Структура цих рівнянь показує, що під час переходу від одного етапу до наступного вік обладнання збільшують з t_k до (t_{k+1}) років, а кількість етапів, що залишилися, зменшують із N до $(N-1)$.

У процесі оптимізації управління методом динамічного програмування багатокроковий процес виконують двічі за алгоритмом зворотного та прямого прогону. Зворотний прогін дає змогу знайти умовні оптимальні управління кожного кроку та умовний оптимум за всіма кроками, починаючи із заданого і до кінця процесу. Прямий прогін забезпечує знаходження оптимальних крокових управлінь за всіма кроками операції. Кількість етапів дорівнює кількості років віку обладнання.

Алгоритм зворотного прогону

Кожен етап розглядають на початку року. На кожному етапі обирають одне з можливих рішень: рішення про збереження обладнання та рішення про заміну обладнання залежно від величини розрахованого прибутку. Більший прибуток вказує на обраний шлях, а менший прибуток визначає заборонений шлях.

Унаслідок заміни або збереження обладнання на початку четвертого року t_4 може мати такий вік один, два і три роки.

Використовуючи функціональне рівняння Р. Беллмана, знайдемо умовні оптимальні розв'язки для четвертого року.

Функціональне рівняння Р. Беллмана для четвертого року має вигляд:

$$F_4(t_4) = max\begin{cases} R(t_4) - Z(t_4), & \text{якщо } u_4 = ЗБ, \\ R(0) - Z(0) - 50, & \text{якщо } u_4 = ЗМ. \end{cases}$$

За цими формулами виконуємо розрахунки:

$$F_4(1) = max\begin{cases} R(1) - Z(1), \\ R(0) - Z(0) - 50 \end{cases} = max\begin{cases} 80 - 25, \\ 90 - 25 - 50 \end{cases} = 55, \text{ стратегія } U = ЗБ;$$

$$F_4(2) = max\begin{cases} R(2) - Z(2), \\ R(0) - Z(0) - 50 \end{cases} = max\begin{cases} 75 - 30, \\ 90 - 25 - 50 \end{cases} = 45, \text{ стратегія } U = ЗБ;$$

$$F_4(3) = max\begin{cases} R(3) - Z(3), \\ R(0) - Z(0) - 50 \end{cases} = max\begin{cases} 70 - 35, \\ 90 - 25 - 50 \end{cases} = 35$$, стратегія $U = ЗБ$.

Таким чином, умовний оптимальний розв'язок для кожного з допустимих станів обладнання на початку четвертого року подано в табл. 8.2.

Таблиця 8.2

Умовний оптимальний розв'язок на початку четвертого року

Вік обладнання t_4, роки	Значення функції прибутку F_4, тис. грн	Умовний оптимальний розв'язок
1	55	ЗБ
2	45	ЗБ
3	35	ЗБ

Визначимо тепер умовний оптимальний розв'язок для кожного з допустимих станів обладнання на початку третього року. Зверніть увагу, що внаслідок заміни обладнання на нове або збереження старого обладнання на початку третього року t_3 обладнання на підприємстві може мати такий вік один і два роки.

Функціональне рівняння Р. Беллмана для третього року має вигляд:

$$F_3(t_3) = max\begin{cases} R(t_3) - Z(t_3) + F_4(t_4), & \text{якщо } u_3 = ЗБ, \\ R(0) - Z(0) - 50 + F_4(1), & \text{якщо } u_3 = ЗМ. \end{cases}$$

Відповідно до основного функціонального рівняння Р. Беллмана, вихідних даних та даних, наведених в табл. 8.2 отримуємо:

$$F_3(1) = max\begin{cases} R(1) - Z(1) + F_4(2), \\ R(0) - Z(0) - 50 + F_4(1) \end{cases} = max\begin{cases} 80 - 25 + 45, \\ 90 - 25 - 50 + 55 \end{cases} = 110,$$

стратегія $U = ЗМ$;

$$F_3(2) = max\begin{cases} R(2) - Z(2) + F_4(3), \\ R(0) - Z(0) - 50 + F_4(1) \end{cases} = max\begin{cases} 75 - 30 + 35, \\ 90 - 25 - 50 + 55 \end{cases} = 110,$$

стратегія $U = 3M$.

Умовний оптимальний розв'язок для кожного з допустимих станів обладнання на початку третього року подано в табл. 8.3.

Таблиця 8.3

Умовний оптимальний розв'язок на початку третього року

Вік обладнання t_3, роки	Значення функції прибутку F_3, тис. грн	Умовний оптимальний розв'язок
1	110	*ЗМ*
2	115	*ЗМ*

На початку другого року вік обладнання (t_2) дорівнюватиме тільки один рік, тому можна стверджувати, що (виберіть правильний варіант):

а) $F_2(1) = 165$, стратегія $U = 3M$,

б) $F_2(1) = 165$, стратегія $U = 3Б$,

в) $F_2(1) = 125$, стратегія $U = 3M$.

Вибір "б" є правильним, оскільки

$$F_2(1) = max\begin{cases} R(1) - Z(1) + F_3(2), \\ R(0) - Z(0) - 50 + F_3(1) \end{cases} = max\begin{cases} 80 - 25 + 110, \\ 90 - 25 - 50 + 110 \end{cases} = 165,$$

стратегія $U = 3Б$.

Нарешті, оскільки на початку планового періоду встановлено нове обладнання $(t_1 = 0)$, то маємо (виберіть правильний варіант):

а) $F_1(0) = 230$,

б) $F_1(0) = 190$,

в) $F_1(0) = 230$.

Вибір "а" є правильним, оскільки

$$F_1(0) = R(0) - Z(0) + F_2(1) = 90 - 25 + 165 = 230.$$

Алгоритм прямого прогону

Розглянемо здобуті результати.

1 рік. Для першого року розв'язок єдиний – слід зберегти тільки-но встановлене обладнання, отже, вік обладнання на початку другого року дорівнює одному року.

2 рік. У цьому випадку оптимальним розв'язком для другого року є рішення про збереження обладнання. Реалізація такого рішення призведе до того, що вік обладнання на початку третього року дорівнюватиме двом рокам.

3 рік. За такого віку обладнання вже слід замінити. Після заміни обладнання його вік на початку четвертого року становитиме один рік. Як видно з табл. 8.4, за такого віку обладнання його міняти не слід.

Таблиця 8.4

Оптимальний план заміни обладнання

Оптимальна стратегія заміни	Роки			
	1	2	3	4
	Зберегти обладнання	Зберегти обладнання	Провести заміну обладнання	Зберегти обладнання

Максимальний прибуток, який матиме підприємство за таким планом заміни обладнання, дорівнюватиме (Виберіть правильний варіант):

а) 190 тис. грн;

б) 220 тис. грн;

в) 230 тис. грн.

Вибір "в" є правильним.

Отже, максимальний прибуток підприємства за таким планом заміни обладнання дорівнюватиме 230 тис. грн.

8.3.2. Задача комівояжера. Визначте маршрут переїзду, який здійснює комівояжер, рухаючись із 1-го пункту у 5-й із обов'язковою зупинкою в пунктах 2, 3 і 4. Передбачають, що кожні два пункти безпосередньо пов'язані між собою відповідним шляхом, який не є пропорційним часу. Комівояжер відвідує кожний пункт лише один раз.

Вихідні дані задачі задано у вигляді несиметричної матриці відстаней:

$$R=(r_{ij})=\begin{pmatrix}0 & 1 & 8 & 7 & 6\\ 3 & 0 & 2 & 1 & 2\\ 5 & 4 & 0 & 8 & 9\\ 1 & 2 & 2 & 0 & 7\\ 4 & 5 & 6 & 8 & 0\end{pmatrix},\quad i,j=\overline{1,5}.$$

Розв'язання.

Спочатку слід пояснити, чому задачу комівояжера може бути віднесено до задач динамічного програмування.

Увесь процес пересування комівояжера за маршрутом слід розглядати як *багатокроковий*. На кожному етапі, виходячи з мінімальної відстані, необхідно обирати окремий пункт маршруту.

Загальна відстань від пункту 1 до пункту 5 дорівнює сумі відстаней між двома послідовними пунктами маршруту (*властивість адитивності*).

Найменша відстань від будь-якого пункту i до пункту 5 залежить не від того, у який спосіб подолано шлях до пункту i, а лише від розташування i-го пункту в загальній схемі шляхів, що поєднують усі пункти (*властивість незалежності оптимальної стратегії від передісторії*).

Отже, задача комівояжера задовольняє основні властивості задач динамічного програмування.

Далі позначимо f_{i5} – відстань від i-го пункту до пункту 5 у разі використання оптимальної стратегії.

Використовуючи принцип оптимальності Р. Беллмана, можна записати функціональні рівняння (Виберіть правильну відповідь):

а) $\begin{cases} f_{k5}=min(r_{ij}-f_{j5}), i=\overline{1,4};\\ f_{55}=0;\end{cases}$

б) $\begin{cases} f_{k5}=min(r_{ij}+f_{i5}), i=\overline{1,5};\\ f_{55}=0;\end{cases}$

в) $\begin{cases} f_{k5} = min\left(r_{ij} + f_{j5}\right), i = \overline{1,4}; \\ f_{55} = 0. \end{cases}$

Вибір "в" є правильним.

Розв'язання задачі виконують поетапно у прямому і зворотному напрямах.

Загальну схему розв'язання задачі на етапі s можна визначити так:

розгортання процесу у зворотному напрямі:

$$\begin{cases} f_{j5}^{(0)} = r_{j5},\ j = \overline{2,4}; \\ f_{k5}^{(s)} = min\left(r_{ij} + f_{j5}^{(s-1)}\right), j = \overline{2,4}; \end{cases}$$

розгортання процесу у прямому напрямі:

$$\begin{cases} f_{1j}^{(0)} = r_{1j},\ j = \overline{2,4}; \\ f_{1k}^{(s)} = min\left(r_{ij} + f_{1i}^{(s-1)}\right), j = \overline{2,4}. \end{cases}$$

Величини $f_{1k}^{(s)}$ та $f_{k5}^{(s)}$ є умовними оптимальними відстанями, а відповідні їм маршрути – умовними оптимальними маршрутами.

Алгоритм зворотного прогону

Нагадаємо, що комівояжер пересувається від 1-го пункту до 5-го. Водночас він має обов'язково відвідати пункти 2, 3 і 4, але це він може зробити лише один раз.

Отже, перший етап ($s = 0$).

Обчислюємо всі можливі значення відстаней за кожним із маршрутів, яким може скористатися комівояжер, для переміщення від пунктів 2, 3 і 4, відповідно, до пункту 5.

Виберіть правильну відповідь:

а) $f_{25}^{(0)} = 2,\quad f_{35}^{(0)} = 9,\quad f_{45}^{(0)} = 7;$

б) $f_{25}^{(0)}=1, \quad f_{35}^{(0)}=8, \quad f_{45}^{(0)}=7;$

в) $f_{25}^{(0)}=8, \quad f_{35}^{(0)}=7, \quad f_{45}^{(0)}=6.$

Вибір "а" є правильним.

Другий етап ($s=1$).

Обчислюємо умовні оптимальні відстані та визначаємо відповідні їм маршрути.

Обчислили? А тепер перевірте себе. Правильні відповіді наведено в табл. 8.5.

Таблиця 8.5

Відстані маршрутів

Номер пункту, що входить до маршруту, j	Пункт, що додають до маршруту, k	Маршрут	f_{k5}
2	3	$3 \to 2 \to 5$	$r_{32}+f_{25}^{(0)}=4+2=6$
	4	$4 \to 2 \to 5$	$r_{42}+f_{25}^{(0)}=2+2=4$
3	2	$2 \to 3 \to 5$	$r_{23}+f_{35}^{(0)}=2+9=11$
	4	$4 \to 3 \to 5$	$r_{43}+f_{35}^{(0)}=2+9=11$
4	2	$2 \to 4 \to 5$	$r_{24}+f_{45}^{(0)}=1+7=8$
	3	$3 \to 4 \to 5$	$r_{34}+f_{45}^{(0)}=8+7=15$

За даними табл. 8.5 маємо умовні оптимальні відстані (виберіть правильну відповідь):

а) $f_{25}^{(1)}=8, f_{35}^{(1)}=6, \quad f_{45}^{(1)}=11,$

б) $f_{25}^{(1)}=8, f_{35}^{(1)}=6, \quad f_{45}^{(1)}=4,$

в) $f_{25}^{(1)} = 11,\ f_{35}^{(1)} = 6,\ \ f_{45}^{(1)} = 4.$

Вибір "б" є правильним.

Дійсно, маємо умовні оптимальні відстані:

маршрут $2 \to 5$ через пункт 4, оскільки $f_{25}^{(1)} = min(11; 8) = 8;$

маршрут $3 \to 5$через пункт 2, оскільки $f_{35}^{(1)} = min(6; 15) = 6;$

маршрут $4 \to 5$через пункт 2, оскільки $f_{45}^{(1)} = min(4; 11) = 4.$

Третій етап ($s = 2$).

Обчислюємо умовні оптимальні відстані та визначаємо відповідні їм маршрути.

А тепер перевірте себе. Правильну відповідь наведено у табл. 8.6.

Таблиця 8.6

Відстані маршрутів

Пункт, що додають до маршруту, k	Маршрут	f_{k5}
3	$3 \to 2 \to 4 \to 5$	$r_{32} + f_{25}^{(1)} = 4 + 8 = 12$
	$3 \to 4 \to 2 \to 5$	$r_{34} + f_{45}^{(1)} = 8 + 4 = 12$
4	$4 \to 3 \to 2 \to 5$	$r_{43} + f_{35}^{(1)} = 2 + 6 = 8$
	$4 \to 2 \to 3 \to 5$	$r_{42} + f_{25}^{(1)} = 2 + 8 = 10$

За даними табл. 8.6 маємо умовні оптимальні відстані (виберіть правильну відповідь):

а) $f_{35}^{(2)} = 12,\ f_{45}^{(2)} = 10,$

б) $f_{35}^{(2)} = 12,\ f_{45}^{(2)} = 8.$

Вибір "б" є правильним.

Дійсно, маємо такі умовні оптимальні відстані:

маршрут $3 \to 2 \to 4 \to 5$ або $3 \to 4 \to 2 \to 5$:

$$f_{35}^{(2)} = min(12; 12) = 12;$$

маршрут $4 \to 3 \to 2 \to 5$:

$$f_{45}^{(2)} = min(8; 10) = 8.$$

Четвертий етап ($s = 3$).

На цьому етапі лише 1-й пункт додають до маршруту.

Тому:

маршрут $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5$ або $1 \to 3 \to 4 \to 2 \to 5$:

$$f_{15} = r_{13} + f_{35}^{(2)} = 8 + 12 = 20,$$

маршрут $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 5$:

$$f_{15} = r_{14} + f_{45}^{(2)} = 7 + 8 = 15.$$

Отже, за розгортанням маршруту комівояжера у зворотному напрямі оптимальним маршрутом є маршрут $1 \to 4 \to 3 \to 2 \to 5$, оскільки йому відповідає $f_{15}^{(3)} = min(20;15) = 15.$

Алгоритм прямого прогону

Перший етап ($s = 0$).

Значення відстані за можливими шляхами переміщення від пункту 1 до пунктів 2, 3, 4 (виберіть правильну відповідь):

а) $f_{12}^{(0)} = 1, \quad f_{13}^{(0)} = 8, \quad f_{14}^{(0)} = 6,$

б) $f_{12}^{(0)} = 1, \quad f_{13}^{(0)} = 7, \quad f_{14}^{(0)} = 8,$

в) $f_{12}^{(0)} = 1, \quad f_{13}^{(0)} = 8, \quad f_{14}^{(0)} = 7.$

Вибір "в" є правильним.

Другий етап ($s = 1$).

Обчислюємо умовні оптимальні відстані маршруту з пункту 1 із зупинкою в одному з інших пунктів (крім 5-го) та визначаємо відповідні їм маршрути.

А тепер перевірте результати (табл. 8.7).

Таблиця 8.7

Відстані маршрутів

Номер пункту, що входить до маршруту, j	Пункт, що додають до маршруту, k	Маршрут	f_{1j}
2	3	$1 \to 2 \to 3$	$r_{23} + f_{12}^{(0)} = 2 + 1 = 3$
	4	$1 \to 2 \to 4$	$r_{24} + f_{12}^{(0)} = 1 + 1 = 2$
3	2	$1 \to 3 \to 2$	$r_{32} + f_{13}^{(0)} = 4 + 8 = 12$
	4	$1 \to 3 \to 4$	$r_{34} + f_{13}^{(0)} = 8 + 8 = 16$
4	2	$1 \to 4 \to 2$	$r_{42} + f_{14}^{(0)} = 2 + 7 = 9$
	3	$1 \to 4 \to 3$	$r_{43} + f_{14}^{(0)} = 2 + 7 = 9$

За даними табл. 8.7 маємо умовні оптимальні відстані (виберіть правильну відповідь):

а) $f_{12}^{(1)} = 9,\ f_{13}^{(1)} = 9,\ f_{14}^{(1)} = 2,$

б) $f_{12}^{(1)} = 9,\ f_{13}^{(1)} = 3,\ f_{14}^{(1)} = 2,$

в) $f_{12}^{(1)} = 12,\ f_{13}^{(1)} = 3,\ f_{14}^{(1)} = 2.$

Вибір "б" є правильним.

Дійсно, умовні оптимальні відстані дорівнюють:

маршрут $1 \to 2$ через пункт 4, оскільки $f_{12}^{(1)} = min(12; 9) = 9,$

маршрут $1 \to 3$ через пункт 2, оскільки $f_{13}^{(1)} = min(3; 9) = 3,$

маршрут $1 \to 4$ через пункт 2, оскільки $f_{14}^{(1)} = min(2; 16) = 2.$

Третій етап ($s = 2$).

Обчислюємо умовні оптимальні відстані та визначаємо відповідні їм маршрути.

Обчислили? Тепер порівняйте результати (табл. 8.8).

Таблиця 8.8

Відстані маршрутів

Пункт, що додають до маршруту, k	Маршрут	f_{1k}
3	$1 \to 2 \to 4 \to 3$	$r_{43} + f_{14}^{(1)} = 2 + 2 = 4$
	$1 \to 4 \to 2 \to 3$	$r_{23} + f_{12}^{(1)} = 2 + 9 = 11$
4	$1 \to 3 \to 2 \to 4$	$r_{24} + f_{12}^{(1)} = 1 + 9 = 10$
	$1 \to 2 \to 3 \to 4$	$r_{34} + f_{13}^{(1)} = 8 + 3 = 11$

За даними табл. 8.8 маємо такі умовні оптимальні відстані (Виберіть правильну відповідь):

а) $f_{13}^{(2)} = 4$, $f_{14}^{(2)} = 10$,

б) $f_{13}^{(2)} = 4$, $f_{14}^{(2)} = 11$.

Вибір "а" є правильним.

Дійсно,

маршрут $1 \to 2 \to 4 \to 3$, оскільки $f_{13}^{(2)} = min(4;11) = 4$,

маршрут $1 \to 3 \to 2 \to 4$, оскільки $f_{14}^{(2)} = min(10;11) = 10$.

Четвертий етап ($s = 3$).

На цьому етапі лише 5-й пункт додають до маршруту.

Тому маршрут $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5$ має відстань:

$$f_{15} = r_{35} + f_{13}^{(2)} = 9 + 4 = 13,$$

маршрут $1 \to 3 \to 2 \to 4 \to 5$ має відстань:

$$f_{15} = r_{45} + f_{14}^{(2)} = 7 + 10 = 17.$$

Отже, за розгортанням маршруту у прямому напрямі оптимальним маршрутом є $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5$, оскільки $f_{15}^{(3)} = min(13;17) = 13$.

Як бачимо, здобута відстань маршруту є меншою, ніж та відстань, яку було обчислено за алгоритмом зворотного прогону. Тому маршрут $1 \to 2 \to 4 \to 3 \to 5$ є оптимальним розв'язком задачі.

8.4. Виконання розрахунків у MS Excel

Завдання. Інвестор планує наступного року вкласти кошти у розвиток бізнесу. Він вважає, що треба розподілити 5 млн грн між трьома компаніями. Водночас передбачають, що сума, яку буде інвестовано в кожну компанію, має бути величиною, яка кратна 1 млн грн. Прибуток $p_i\left(x\right)$, де $i=\overline{1,3}$, який може отримати кожна з компаній, не залежить від обсягу коштів, які вкладено в інші компанії. Розмір прибутку кожної компанії визначають обсягом коштів, які вкладено саме в цю компанію, і цю залежність задано в табл. 8.8.

Необхідно, спираючись на принцип оптимальності Р. Беллмана, побудувати план розподілу інвестицій між компаніями в такий спосіб, щоб ці інвестиції забезпечили отримання найбільшого загального прибутку.

Таблиця 8.8

Вихідні умови задачі

Обсяг інвестицій, млн. грн	Прибуток кожної компанії залежно від обсягу інвестицій, млн. грн		
x	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$
1	3,22	3,33	4,27
2	3,57	4,87	7,64
3	4,12	5,26	10,25
4	4,00	7,34	15,93
5	4,85	9,49	16,12

Розв'язання.

Розглядатимемо задачу про визначення оптимального плану розподілу інвестицій як задачу динамічного програмування, для якої кількість кроків дорівнює 3 (кількість компаній для інвестування).

Складемо математичну модель задачі.

Позначимо через S обсяг коштів, які доступні для інвестицій перед певним кроком розв'язання. Саме цей обсяг характеризуватиме стан системи на кожному кроці. Управління на i-му кроці ($i=\overline{1,3}$) позначаємо через x_i. Це обсяг коштів, що передбачають інвестувати в i-ту компанію.

Прибуток $p_i(x_i)$ на i-му кроці – це прибуток, який отримає i-та компанія у разі інвестування коштів у обсязі x_i. Тоді загальний прибуток становитиме: $W = p_1(x_1) + p_2(x_2) + p_3(x_3)$.

Якщо доступними є кошти в обсязі S млн грн та в i-ту компанію інвестовано x_i млн. грн, то для подальшого інвестування залишається $(S - x_i)$ млн. грн.

Таким чином, якщо на i-му кроці система перебувала в стані S і було вибрано управління x_i, то на $(i+1)$-му кроці система буде перебувати у стані $(S - x_i)$. Отже, функція переходу до нового стану має вигляд: $f_i(S, x_i) = S - x_i$.

На кроці $i = 3$ оптимальне управління відповідає обсягу доступних коштів і прибуток дорівнюватиме доходу, що принесе остання компанія: $x_3(S) = S, \quad W_3(S) = p_3(S)$.

Згідно з принципом оптимальності Беллмана, управління на кожному кроці (обсяг інвестування) потрібно вибрати таким чином, щоб оптимальною була сума прибутків на всіх, що залишилися до кінця процесу, кроках разом із прибутком цього кроку. Відповідно, основні функціональні рівняння мають вигляд:

$$W_i(S) = \max_{x \le S}\{p_i(x) + W_{i+1}(S - x)\}.$$

Розв'язання рівнянь Беллмана виконують через покрокову оптимізацію. Скористаємося для цього можливостями, що дає MS Excel. Результати обчислень наведено на рис. 8.1.

На робочому аркуші книги MS Excel будуємо таблицю (це рядки 2 – 7 на рис. 8.1). У рядку 10 подано номери кроків оптимального управління, у рядку 11 позначено обсяг інвестицій, що здійснюють у певну компанію, та прибуток на кожному кроці, починаючи з останнього. У комірках **A12:A16** таблиці записано можливі стани системи.

Оскільки на останньому кроці ($i = 3$) функціональні рівняння мають вигляд: $x_3(S) = S, \quad W_3(S) = p_3(S)$, то стовпці таблиці **B12:B16** та **C12:C16**, які відповідають третьому кроку $i = 3$, заповнюють безпосередньо за таблицею вихідних даних.

	A	B	C	D	E	F	G
1	x	p1(x)	p2(x)	p3(x)			
2	0	0	0	0			
3	1	3,22	3,33	4,27			
4	2	3,57	4,87	7,64			
5	3	4,12	5,26	10,25			
6	4	4	7,34	15,93			
7	5	4,85	9,49	16,12			
8							
10		i= 3		i= 2		i= 1	
11	S	x3(S)	W3(S)	x2(S)	W2(S)	x1(S)	W1(S)
12	1	1	4,27	0	4,27	-	-
13	2	2	7,64	0	7,64	-	-
14	3	3	10,25	1	10,97	-	-
15	4	**4**	15,93	0	15,93	-	-
16	5	5	16,12	1	19,26	0	19,26

Рис. 8.1. **Результат покрокової оптимізації**

На кроці $i = 2$ основні функціональні рівняння мають вигляд:

$$W_2(S) = \max_{x \le S}\{p_2(x) + W_3(S - x)\}.$$

Тому для обчислення значень, які виводять у комірках **D12:D16** та **E12:E16**, виконуємо допоміжні розрахунки оптимізації на другому кроці за допомогою таблиці для різних станів (рис. 8.2).

Пояснимо алгоритм розрахунків рис. 8.2.

У комірку **D19** вводимо формулу:

=ИНДЕКС($A$2:$D$7;ПОИСКПОЗ(B19;$A$2:$A$7);3)

і копіюємо цю формулу з комірки **D19** до комірки **D38**.

У комірку **E19** вводимо формулу:

=ИНДЕКС($A$2:$D$7;ПОИСКПОЗ(C19;$A$2:$A$7);4)

і копіюємо цю формулу з комірки **E19** до комірки **E38**.

У комірку **F19** вводимо формулу: **=D19+E19** і копіюємо цю формулу до комірки **F38.**

Знаходимо максимальне значення для кожного стану (від 0 до 5).

Для цього у комірку **G19** вводимо формулу **=МАКС(F19:F20)**; у комірку **G21** вводимо формулу **=МАКС(F21:F23)**; у комірку **G24** вводимо формулу **=МАКС(F24:F27)**; у комірку **G28** вводимо формулу **=МАКС(F28:F32)**; у комірку **G33** вводимо формулу **=МАКС(F33:F38)**.

	A	B	C	D	E	F	G
17							
18	S	x	S-x	p2(x)	W3(S-x)	p2(x)+W3(s-x)	W2(S)
19	1	0	1	0	4,27	4,27	
20	1	1	0	3,33	0	3,33	4,27
21	2	0	2	0	7,64	7,64	
22	2	1	1	3,33	4,27	7,6	
23	2	2	0	4,87	0	4,87	7,64
24	3	0	3	0	10,25	10,25	
25	3	1	2	3,33	7,64	10,97	
26	3	2	1	4,87	4,27	9,14	
27	3	3	0	5,26	0	5,26	10,97
28	4	0	4	0	15,93	15,93	
29	4	1	3	3,33	10,25	13,58	
30	4	2	2	4,87	7,64	12,51	
31	4	3	1	5,26	4,27	9,53	
32	4	4	0	7,34	0	7,34	15,93
33	5	0	5	0	16,12	16,12	
34	5	1	4	3,33	15,93	19,26	
35	5	2	3	4,87	10,25	15,12	
36	5	3	2	5,26	7,64	12,9	
37	5	4	1	7,34	4,27	11,61	
38	5	5	0	9,49	0	9,49	19,26

Рис. 8.2. **Розрахунки оптимізації на кроці** $i = 2$

На кроці $i = 1$ основні функціональні рівняння мають вигляд:

$$W_1(S) = \max_{x \le S}\{p_1(x) + W_2(S - x)\}.$$

Для обчислення значень комірок **F12:F16** та **G12:G16** виконуємо розрахунки оптимізації на першому кроці (рис. 8.3).

	A	B	C	D	E	F	G
40							
41	S	x	S-x	p1(x)	W2(S-x)	p1(x)+W2(s-x)	W1(S)
42	5	0	5	0	19,26	19,26	
43	5	1	4	3,22	15,93	19,15	
44	5	2	3	3,57	10,97	14,54	
45	5	3	2	4,12	7,64	11,76	
46	5	4	1	4	4,27	8,27	
47	5	5	0	4,85	0	4,85	19,26

Рис. 8.3. **Розрахунки оптимізації на кроці *i* = 1**

Аналогічно в комірку **D42** вводимо формулу:

=ИНДЕКС($A$2:$D$7;ПОИСКПОЗ(B42;$A$2:$A$7);2)

і копіюємо цю формулу з комірки **D42** до комірки **D47**.

Значення комірок **E42:E47** взято у зворотному порядку з комірок **G19:G38** таблиці, що зображено на рис. 8.2.

У комірку **F42** вводимо формулу **=D42+E42** і копіюємо формулу до комірки **F47**.

Тепер знаходимо максимальне значення, для чого в комірку **G42** вводимо формулу: **=МАКС(F42:F47).**

ІЗ таблиці на рис. 8.1 видно, що найбільшим значенням прибутку є 19,26 млн грн.

Отже, маємо таке оптимальне управління, тобто план інвестування:

на першому кроці $x_1(S) = 0, S = 5;$

на другому кроці $x_2(S) = 1, S = S - x_1(S) = 5 - 0 = 5;$

на третьому кроці $x_3(S) = 4, S = S - x_2(S) = 5 - 1 = 4.$

Це означає, що план $\mathbf{X}^* = (0; 1; 4)$ є оптимальним планом розподілу всього обсягу інвестицій (5 млн грн) між трьома компаніями. Інвестор отримає загальний прибуток у розмірі 19,26 млн грн, якщо вкладе кошти тільки у другу компанію обсягом 1 млн грн та у третю – обсягом 4 млн грн. Цей прибуток є найбільшим із можливих за даного загального обсягу інвестицій.

8.5. Запитання для самоперевірки

8.5.1. Сформулюйте задачу динамічного програмування.

8.5.2. Наведіть класифікацію задач динамічного програмування.

8.5.3. Як визначають критерій ефективності в задачах динамічного програмування?

8.5.4. Як визначають критерій ефективності за поетапного розгляду задачі динамічного програмування як сукупності статичних задач?

8.5.5. У чому полягає алгоритм розв'язання задач динамічного програмування?

8.5.6. Які вимоги висувають до параметрів задачі динамічного програмування під час поділу терміну її реалізації на періоди?

8.5.7. Порівняйте можливості методів розв'язування задач динамічного програмування та статичного програмування.

8.5.8. Наведіть приклади економічних задач, що належать до класу задач динамічного програмування.

8.5.9. Сформулюйте принцип оптимальності Р. Беллмана.

8.5.10. Які рівняння називаються функціональними рівняннями Р. Беллмана?

8.5.11. Чи забезпечує принцип оптимальності Р. Беллмана належність подальших розв'язків від здобутих раніше?

8.5.12. Визначте алгоритми прямого та зворотного прогону.

8.6. Практичні завдання

8.6.1. На початку аналізованого періоду на підприємстві встановлено нове обладнання. Визначте оптимальний цикл заміни обладнання, якщо: закупівельна ціна обладнання (P) становить 12 тис. грн; залишкова вартість обладнання $s(t)=0$; $f_N(t)=r(t)-u(t)$ – максимальний прибуток, отримуваний від обладнання віку t років за N років, що залишилися від циклу використання обладнання за умови оптимальної стратегії, де $r(t)$ – вартість продукції, що випускають за рік на одиниці обладнання віком t років, $u(t)$ – щорічні витрати на обслуговування обладнання віком t років; N = 8 років.

Залежність $f_N(t)$ від N задано в табл. 8.9.

Таблиця 8.9

Вихідні дані

N	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$f_N(t)$	12	11	10	8	6	4	2	0	0

8.6.2. Фірма планує визначити оптимальну політику заміни обладнання, термін експлуатації якого три роки, упродовж чотирьох подальших років, тобто до початку п'ятого року. Вихідні дані до задачі наведено в табл. 8.10. Фірма також потребує заміни обладнання, що експлуатують протягом шести років. Вартість нового обладнання становить 100 тис грн. Складіть такий план заміни обладнання, за якого загальний прибуток за цей період часу буде максимальним.

Таблиця 8.10

Вихідні дані

Час t, протягом якого використовують обладнання, роки	Вартість продукції, яку виготовляють на обладнанні за рік, тис. грн	Річні витрати на обслуговування обладнання, тис. грн	Залишкова вартість обладнання, тис. грн
0	20,0	0,2	–
1	19,0	0,6	80
2	18,5	1,2	60
3	17,2	1,5	50
4	15,5	1,7	30
5	14,0	1,8	10
6	12,2	2,2	5

8.6.3. Фірма-інвестор для фінансування трьох різних проєктів виділила 7 млн грн. Вартість та очікувані прибутки від кожного із проєктів наведено в табл. 8.11.

Таблиця 8.11

Вихідні дані

Проєкти	Вартість проєктів (млн грн)	Очікуваний прибуток (млн грн)
Реконструкція підприємства	2	0,4
Екологічний проєкт	3	0,8
Будівництво готелю	4	1,4

Необхідно ухвалити рішення щодо найбільш ефективного використання грошей та визначити очікувану величину найбільшого з можливих прибутку.

8.6.4. Фармацевтичній фірмі необхідно придбати три види нових приладів. Максимальний обсяг коштів, який може виділити фірма на їх закупівлю, не має перевищувати 120 тис. грн. Вартість одиниці приладу кожного виду, їхня необхідна кількість, а також збитки, яких зазнає фірма в разі відсутності однієї одиниці кожного виду приладів, наведено в табл. 8.12.

Визначте оптимальний варіант використання коштів на придбання приладів за умови мінімізації збитків.

Таблиця 8.12

Вихідні дані

Види приборів	Вартість (тис. грн)	Необхідна кількість (одиниць)	Збитки (тис. грн)
Перший	20	2	40
Другий	30	2	60
Третій	10	4	30

8.6.5. Інвестор розглядає можливості інвестицій у цінні папери (ЦП) 4 корпорацій. Бюджет інвестора становить 100 тис. грн. Кількість акцій кожного виду, їхню вартість та дохідність задано в табл. 8.13.

Таблиця 8.13

Вихідні дані

Вид ЦП	I	II	III	IV
Ціна (тис. грн)	10	10	50	20
Процентна ставка річних (%)	40	30	50	40
Кількість ЦП (шт.)	2	3	1	2

Визначте оптимальний інвестиційний портфель ЦП.

8.7. Тестові завдання

8.7.1. Серед наведених варіантів Виберіть ті, що є характерними для задачі динамічного програмування:

а) на останньому етапі ухвалюють рішення, яке не залежить від майбутніх наслідків і забезпечує найбільший ефект;

б) на першому етапі ухвалюють рішення, яке не залежить від майбутніх наслідків і забезпечує найбільший ефект;

в) оптимізацію починають із кінця процесу, тобто спочатку планують *n*-й крок;

г) оптимізацію починають від початку процесу, тобто спочатку планують 1-й крок.

8.7.2. Установіть відповідність між поняттями та їхнім описом:

1. Рекурентні співвідношення	а) метод оптимізації, пристосований до операцій, у яких процес ухвалення рішення може бути розбито на етапи
2. Метод динамічного програмування	б) установлюють зв'язок між $f_k(t)$ і $f_{k-1}(t)$
3. Керований процес	в) процес знаходження розв'язку відбувається в один етап або за один крок
4. Багатоетапна задача	г) процес, на хід розвитку якого можна мати вплив
5. Одноетапна задача	д) сукупність рішень, що ухвалюються на кожному етапі для впливу на хід розвитку процесу
6. Область можливих станів	е) процес знаходження розв'язку розбивають на кроки, які відповідають часовим періодам планування
7. Управління	ж) сукупність станів, у які може переходити система

8.7.3. Під час розв'язання задач якого виду програмування використовує принцип оптимальності Р. Беллмана:

а) лінійного програмування;

б) динамічного програмування;

в) нелінійного програмування.

8.7.4. Задача динамічного програмування має задовольняти умови:

а) відсутності наслідків і адитивності цільової функції задачі;

б) сепарабельності й адитивності цільової функції задачі;

в) обмеженості й сепарабельності цільової функції задачі;

г) серед запропонованих відповідей немає правильних.

8.7.5. Принцип оптимальності Р. Беллмана стверджує:

а) яким би не був стан системи перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибирати так, щоб ефективність на всіх наступних кроках була максимальною;

б) яким би не був стан системи перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибирати так, щоб ефективність на всіх наступних кроках була мінімальною;

в) якщо якась послідовність рішень оптимальна, то окремі наступні рішення всередині неї оптимальні відносно попередніх рішень;

г) яким би не був стан системи перед черговим кроком, управління на цьому кроці слід вибирати так, щоб ефективність кроку, що розглядають, плюс оптимальна ефективність на всіх наступних кроках була максимальною.

8.7.6. Рівняння Р. Беллмана для розв'язання задачі динамічного програмування належать до рівнянь:

а) рекурентних;

б) диференціальних;

в) алгебраїчних.

8.7.7. Установіть правильну послідовність етапів алгоритму розв'язання задач динамічного програмування:

а) введення умовно оптимальних управлінь на кожному кроці;

б) опис рекурентних співвідношень схеми динамічного програмування;

в) запис оптимального розв'язку для певного початкового стану;

г) введення цільової функції кроку і сумарної цільової функції;

д) визначення параметрів станів і змінних управління кожного етапу;

е) проведення умовної оптимізації;

ж) запис рівнянь станів;

з) розбиття процесу на кроки – періоди планування;

і) визначення послідовності станів та оптимального управління.

8.7.8. В основному функціональному рівнянні динамічного програмування

$$F_k(t_k) = max[W_k(t_k; u_k) + F_{k+1}(t_{k+1})]$$

функція $F_{k+1}(t_{k+1})$ вказує на:

а) умовне оптимальне значення цільової функції з $(i+1)$-го кроку тільки до $(i+2)$-го кроку;

б) безумовне оптимальне значення цільової функції з 1-го кроку до останнього кроку включно;

в) значення цільової функції на i-му кроці для всіх керувань;

г) умовне оптимальне значення цільової функції на $(i+1)$-му кроці до останнього кроку включно.

8.7.9. Виберіть правильні твердження

Задача про заміну обладнання може бути сформульована так:

а) обладнання можна зберігати, продати за залишковою вартістю або придбати нове. Необхідно визначити оптимальну стратегію заміни обладнання, щоб прибуток за плановий період був максимальним;

б) у процесі роботи обладнання, залежно від терміну його експлуатації, дає щорічний прибуток, потребує експлуатаційних витрат та має деяку залишкову вартість. Обладнання можна зберігати, продати за залишковою вартістю або придбати нове. Необхідно здійснити прогноз витрат, пов'язаних із відновленням обладнання, та розробити найбільш економічну стратегію проведення цієї роботи;

в) у випадку зберігання обладнання збільшуються витрати та знижується продуктивність, а в разі заміни потрібні додаткові вкладення. Необхідно визначити мінімальні витрати в разі заміни обладнання.

8.7.10. У задачі про оптимальну заміну обладнання параметром стану є:

а) щорічні експлуатаційні витрати;

б) купівельна вартість нового обладнання;

в) залишкова вартість обладнання;

г) вік обладнання;

д) довжина планового періоду;

е) вартість виготовленої за рік продукції.

8.8. Висновки до теми

Метод динамічного програмування дає змогу знайти оптимальний розв'язок у багатокроковому процесі ухвалення рішення. Цей метод використовують для розв'язання задач оптимального управління певної структури.

Специфіка методу динамічного програмування полягає в тому, що для пошуку оптимального управління заплановану операцію розподіляють на послідовні етапи. Сам процес планування стає багатокроковим й розвивається послідовно, водночас щоразу оптимізують управління тільки на одному етапі.

Розв'язання конкретної задачі методом динамічного програмування зводиться до вибору параметру стану, складання функції стану та рекурентних співвідношень, що пов'язують функції стану двох послідовних етапів, та їх використання у процесі вибору оптимального управління.

Рекомендована література: [1; 2; 5 – 15; 18; 19; 21 – 27; 32 – 34; 36; 40 – 47].

9. Методи мережного планування та управління

9.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення із принципами постановки задач мережного планування й управління, а також формування компетентностей щодо їх розв'язання.

Професійні компетентності, що формують під час вивчення теми:

знання основних означень теорії графів, принципів їх побудови та можливостей щодо застосування графів до розв'язання завдань оптимального управління;

вміння формалізувати різни типи економічних задач щодо пошуку максимального потоку;

навички розв'язання задач мережного планування й управління щодо знаходження найкоротшого шляху у мережі;

вміння застосовувати мережне планування й управління до розв'язання таких економічних задач, як задача про заміну обладнання.

9.2. Термінологічний словник

Вага вершини – дійсне число $b_i = \varphi(v_i)$, де $i = \overline{1, n}$, яке характеризує кожну вершину графа зі зваженими вершинами.

Вага ребра – дійсне число $c_j = \psi(e_j)$, де $j = \overline{1, m}$, яке характеризує кожне ребро графа зі зваженими ребрами.

Величина $val(f)$ ***потоку*** f – це сумарний потік через джерело v_1 мережі, який одночасно є сумарним потоком через стік v_n цієї мережі:

$$val(f) = \sum_{e_j \in out(v_1)} f(e_j) = \sum_{e_j \in in(v_n)} f(e_j).$$

Вершина графа **–** це елемент основної множини $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ графа.

Вільний резерв $R_в(i, j)$ ***часу роботи*** (i, j) – це максимальний час, на який може бути збільшено тривалість роботи (i, j) або відтерміновано її початок без зміни ранніх термінів початку наступних робіт; вільний резерв становить:

$$R_в(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i, j).$$

Гілка – це те ребро графа $G = (V; E)$, що входить до складу кістякового дерева $(V; T)$ цього графа.

Граф – графічна структура $G = (V; E)$, що складається з основної множини елементів (вершин) $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ і множини відношень між цими елементами (ребер, або дуг) $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$.

Граф зі зваженими вершинами – це граф, для якого задано відображення множини вершин V на множину дійсних чисел:

$$\varphi: \quad V \to R.$$

Граф зі зваженими ребрами – це граф, для якого задано відображення множини ребер E на множину дійсних чисел:

$$\psi: \quad E \to R.$$

Дерево – зв'язний граф, що не містить циклів.

Довжина шляху – кількість дуг шляху (або сума довжин його дуг, якщо задано ваги дуг).

Дуга – орієнтоване ребро графа.

Завершальна подія (стік) – це подія, яка не має наступних робіт і подій, що належать до комплексу робіт, які розглядають у цій моделі.

Зв'язний граф – граф, що містить рівно одну компоненту зв'язності, тобто між будь-якою парою вершин цього графа є як мінімум один шлях.

Жадібний алгоритм – це алгоритм вибору найкращого варіанта на кожному кроці розв'язання задачі оптимізації.

Кістякове (каркасне) дерево, або остів довільного зв'язаного неорієнтованого *графа* $G = (V; E)$ – це структура $(V; T)$, що містить мінімальну підмножину T множини ребер E графа ($T \subseteq E$) таку, що з будь-якої вершини графа можна потрапити в будь-яку іншу вершину, якщо рухатись цими ребрами.

Коефіцієнт напруженості роботи $K_н(i, j)$ – відношення тривалості незбіжних (укладених між одними й тими самими подіями) відрізків шляху, одним із яких є шлях максимальної тривалості, що проходить через роботу (i, j), а інший – критичний шлях:

$$K_н(i, j) = \frac{t_{\max}(i, j) - t'_{кр}}{t_{кр}(i, j) - t'_{кр}},$$

де $t_{\max}(i, j)$ – тривалість максимального шляху, який проходить через роботу (i, j); $t_{кр}(i, j)$ – тривалість критичного шляху; $t'_{кр}$ – тривалість відрізка розглянутого шляху, що співпадає із критичним шляхом.

Критичний шлях – максимальний за тривалістю повний шлях, тобто найбільш тривалий шлях мережного графіка, який веде до завершення комплексу робіт.

Критична робота – це робота, що лежить на критичному шляху.

Максимальний потік $f_{\max}$ – це потік у мережі, величина якого не менша від величини будь-якого можливого потоку f у цій мережі:

$$val(f_{\max}) \geq val(f).$$

Маршрут – послідовність вершин і ребер у графі.

Матриця досяжності орграфа $G = (V; E)$ – це булівська матриця $R = (r_{ij})_{n \times n}$, елемент якої r_{ij} дорівнюють одиниці (true) тоді і тільки тоді, коли з вершини v_i виходить дуга до вершини v_j, або нулю (false) в усіх інших випадках; ця матриця містить інформацію щодо існування шляхів між вершинами орграфа.

Матриця інцидентності орграфа $G = (V; E)$ – це матриця $A = (a_{ij})_{m \times n}$, елемент якої a_{ij} дорівнює одиниці тоді і тільки тоді, коли з вершини v_i виходить дуга e_j, дорівнює мінус одиниці, коли у вершину v_i входить дуга e_j або дорівнює нулю в усіх інших випадках.

Мережа – це орієнтований граф $G=(V;E)$ разом з ваговою функцією $\psi: \quad E \to N$ переходу від множини ребер E до множини натуральних чисел N та вершинами v_1 $(in(v_1)=0)$ та v_n $(out(v_1)=0)$, що мають нульові степені входу й виходу, відповідно, тобто жодна дуга не закінчується у вершині v_1 та жодна дуга не починається у вершині v_n.

Мережна модель – це план виконання комплексу взаємопов'язаних робіт (операцій), послідовність виконання яких задано у формі графіка (графа).

Орграф (орієнтований граф) – це сукупність множини вершин V та множини ребер E, де E – множина упорядкованих двоелементних підмножин множини V, тобто $E=\{(v_1,v_2),(v_1,v_3),...,(v_{n-1},v_n)\}$.

Петля – ребро графа, що поєднує певну вершину із самою собою.

Підкритичній шлях – повний шлях, який є найближчим за тривалістю до критичного шляху.

Пізній термін завершення події $t_n(i)$ – це термін, який визначають як різницю між тривалістю критичного шляху і тривалістю максимального шляху, що є наступним за цією подією:

$$t_n(i)=T_{кр}-\max\sum_i t(i,j).$$

Повний резерв часу роботи $R_n(i,j)$ – це максимальний час, на який може бути збільшено тривалість роботи (i,j) або відтерміновано її початок, щоб тривалість максимального шляху, який проходить через неї, не перевищила тривалості критичного шляху. Повний резерв, що належить не одній даній роботі (i,j), а всім роботам, що лежать на шляхах, які проходять через цю роботу, становить

$$R_n(i,j)=t_n(j)-t_p(i)-t(i,j).$$

Повний шлях – це шлях від початкової до завершальної події.

Подія – це момент завершення якогось процесу, що відображає окремий етап виконання проєкту.

Потік f ***у мережі*** – це функція $f: \quad E \to N \cup \{0\}$, що відображає множину ребер E на множину невід'ємних цілих чисел, водночас:

для довільної дуги e_j справджуються нерівності: $0 \le f(e_j) \le c(e_j)$;

для довільної вершини v_i $(0 < i < n)$ виконується рівність:

$$\sum_{e_j \in out(v_i)} f(e_j) = \sum_{e_j \in in(v_i)} f(e_j),$$

де $c(e_j)$ – максимальна швидкість транспортування дугою e_j;

$f(e_j)$ – (реальна) швидкість здійснення транспортування дугою e_j.

Початкова подія (***джерело***) – це подія, яка не має попередніх робіт і подій, що належать до комплексу робіт, що розглядають у цій моделі.

Потужність графа $|E|$ – це потужність множини його ребер $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$, тобто $|E| = m$.

Пропускна спроможність дуги – це вага дуги в задачах про максимальний потік у мережі.

Ранній термін завершення події $t_p(i)$ – це термін, який потрібен для виконання всіх робіт, що передують цій події; його визначають шляхом вибору максимального значення тривалості всіх шляхів, що ведуть від вихідної до заданої події, тобто $t_p(i) = \max \sum_i t(i, j)$.

Ребра графа – це лінії $E = \{e_1, e_2, ..., e_m\}$ на мережному графіку, які визначають відносини між вершинами графа $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$. Ребра графа також можуть бути задані і як послідовність його вершин $E = \{(v_1, v_2), (v_1, v_3), ..., (v_{n-1}, v_n)\}$.

Резерв часу $R(i)$ ***настання події*** i – це такий проміжок часу, на який може бути відтерміновано настання події i без порушення термінів завершення проєкту в цілому (початкові й кінцеві події критичних робіт мають нульові резерви подій):

$$R(i) = t_n(i) - t_p(i).$$

Робота – це частина виробничого або проєктного процесу, який сприяє досягненню певного результату; робота має початок і закінчення у формі кількісно описуваного результату, що потребує витрат часу й інших ресурсів.

Розмір графа $|V|$ – це потужність множини його вершин $V = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$, де n – кількість вершин графа, тобто $|V| = n$.

Скінченний граф – це граф, який має скінченні множини своїх елементів (вершин і ребер).

Фіктивна робота (залежність) – логічний зв'язок між роботами, який показує, що початок однієї роботи обумовлено закінченням іншої, але додаткового часу на виконання фіктивної роботи не потрібно.

Цикл – це шлях, який закінчується в тій самій вершині, з якої й починається, проходячи (на відміну від петлі) через декілька інших вершин графа.

Шлях – це така послідовність ребер (у неорієнтованому графі) і/або дуг (в орієнтованому графі), що кінець однієї дуги (ребра) є початком іншої дуги (ребра).

9.3. Тренувальні вправи

9.3.1. Визначення основних параметрів мережного графіка.

Задано орієнтований граф зі зваженими ребрами, що визначають тривалість роботи (рис. 9.1).

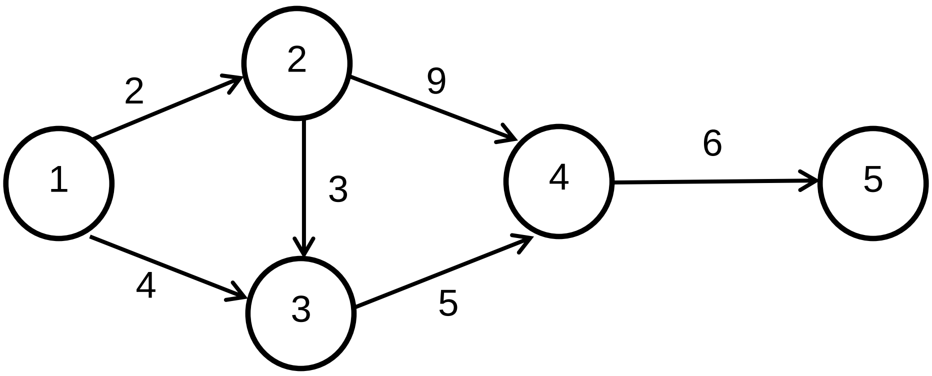

Рис. 9.1. **Мережний графік**

Необхідно визначити основні параметри цього графа.

Розв'язання.

Згадаємо, що є основними параметрами мережного графіка. Це такі параметри, як критичний шлях, резерв часу подій і резерв часу робіт.

1. Перед тим як визначити критичний шлях, необхідно знайти всі повні шляхи, тобто шляхи, якими можна дістатися від початкової події (вершина 1) до завершальної події (вершина 5).

Таких шляхів три:

шлях: $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$, якому відповідає час $2+3+5+6=16$;

шлях: $1 \to 2 \to 4 \to 5$, якому відповідає час $2+9+6=17$;

шлях: $1 \to 3 \to 4 \to 5$, якому відповідає час $4+5+6=15$.

Який із них є критичним? Той, якому відповідає найбільший час, тобто це шлях $1 \to 2 \to 4 \to 5$. Довжина його $T_{кр}$ дорівнює 17 одиниць.

2. Тепер обчислимо резерв часу подій, який показує, на скільки часу може затримати завершення цієї події без зміни терміну настання завершальної події. Для цього спочатку необхідно обчислити ранні та пізні терміни звершення подій.

Обчислення ранніх термінів настання подій – це прямі розрахунки. Знайшли в термінологічному словнику, за якою формулою здійснюють обчислення? Ось ця формула:

$$t_p(j) = \max(t_p(i) + t(i, j)).$$

За цією формулою для кожної з подій дістаємо такі ранні терміни їх завершення. Починаємо з першої події. Чи є події, які передують початковій події? Ні. Отже, для 1-ї події (джерела) ранній термін завершення дорівнює нулю. Для всіх інших подій ранні терміни їх завершення залежать від шляхів, що ведуть до цих подій:

$$t_p(1) = 0;$$

$$t_p(2) = t_p(1) + t(1,2) = 0 + 2 = 2;$$

$$t_p(3) = \max\{(t_p(1) + t(1,3)); (t_p(2) + t(2,3))\} = \max\{0 + 4; 2 + 3\} = 5;$$

$$t_p(4) = \max\{(t_p(2) + t(2,4)); (t_p(3) + t(3,4))\} = \max\{2 + 9; 5 + 5\} = 11;$$

$$t_p(5) = t_p(4) + t(4,5) = 11 + 6 = 17.$$

Прямі розрахунки завершено.

Тепер визначимо пізні терміни настання подій – це зворотний перебіг розрахунків. Повертаємося до термінологічного словника і знаходимо відповідну формулу:

$$t_n(i) = \min\{t_n(j) - t(i, j)\}.$$

Пізній термін настання події визначає найпізніший момент часу, після якого залишається стільки часу до критичного терміну, скільки необхідно для завершення всіх робіт, що має бути виконано після цієї події.

Починаємо розгляд із завершальної, 5-ї події. Чи є в переліку подій такі, що наступають після цієї події? Ні, 5-та подія є завершальною, відповідно, пізній термін її настання дорівнює тривалості критичного шляху. Для всіх інших подій пізні терміни їх завершення залежать від шляху, що веде до цих подій.

Отже, маємо:

$t_n(5) = 17;$

$t_n(4) = t_n(5) - t(4,5) = 17 - 6 = 11;$

$t_n(3) = t_n(4) - t(3,4) = 11 - 5 = 6;$

$t_n(2) = \min\{(t_n(3) - t(2,3)); (t_n(4) - t(2,4))\} = \min\{6 - 3; 11 - 9\} = 2;$

$t_n(1) = \min\{(t_n(2) - t(1,2)); (t_n(3) - t(1,3))\} = \min\{2 - 2; 6 - 4\} = 0.$

Тепер визначаємо резерви часу для кожної з подій як різницю між її пізнім і раннім термінами їх завершення. Вони дорівнюють:

$R(1) = t_n(1) - t_p(1) = 0 - 0 = 0;$

$R(2) = t_n(2) - t_p(2) = 2 - 2 = 0;$

$R(3) = t_n(3) - t_p(3) = 6 - 5 = 1;$

$R(4) = t_n(4) - t_p(4) = 11 - 11 = 0;$

$R(5) = t_n(5) - t_p(5) = 17 - 17 = 0.$

Зверніть увагу, що події 1, 2, 4 та 5 не мають резервів часу. Чому? Може, це помилка? Ні, тут немає помилки. Навпаки, так і має бути.

Оскільки ці події лежать на критичному шляху (див. пункт 1 розв'язання), то їхні резерви часу мають дорівнювати нулю. Отже, цей момент можна використовувати для перевірки правильності обчислень.

3. Перейдемо до визначення резерву часу робіт. Однак спочатку згадаємо, що слід розрізняти повний і вільний резерви. Для визначення повного резерву часу роботи застосовуємо формулу:

$$R_n(i, j) = t_n(j) - t_p(i) - t(i, j).$$

Значення всіх величин, що входять у формулу, нам уже відомі, отже, перевірте себе:

$$R_n(1,2) = 2 - 0 - 2 = 0;$$
$$R_n(1,3) = 6 - 0 - 4 = 2;$$
$$R_n(2,3) = 6 - 2 - 3 = 1;$$
$$R_n(2,4) = 11 - 2 - 9 = 0;$$
$$R_n(3,4) = 11 - 5 - 5 = 1;$$
$$R_n(4,5) = 17 - 11 - 6 = 0.$$

Обчислимо тепер вільний резерв часу роботи, який визначають як максимальну кількість часу, на який можна збільшити тривалість цієї роботи, не змінюючи водночас ранніх термінів початку наступних робіт за умови, що подія, яка безпосередньо передує даній, настала у свій ранній термін.

Скориставшись формулою

$$R_в(i, j) = t_p(j) - t_p(i) - t(i, j),$$

дістаємо:

$$R_в(1,2) = 2 - 0 - 2 = 0;$$
$$R_в(1,3) = 5 - 0 - 4 = 1;$$
$$R_в(2,3) = 5 - 2 - 3 = 0;$$
$$R_в(2,4) = 11 - 2 - 9 = 0;$$

$R_в(3,4) = 11 - 5 - 5 = 1;$
$R_в(4,5) = 17 - 11 - 6 = 0.$

Зверніть увагу, що резерв часу події пов'язаний із резервами часу роботи, яку позначено дугою, що входить у цю подію, а саме, це є різниця між повним і вільним резервами часу цієї роботи:

$R(2) = R_п(1,2) - R_в(1,2) = 0 - 0 = 0;$
$R(3) = R_п(1,3) - R_в(1,3) = 2 - 1 = 1;$
$R(3) = R_п(2,3) - R_в(2,3) = 1 - 0 = 1;$
$R(4) = R_п(2,4) - R_в(2,4) = 0 - 0 = 0;$
$R(4) = R_п(3,4) - R_в(3,4) = 1 - 1 = 0;$
$R(5) = R_п(4,5) - R_в(4,5) = 0 - 0 = 0.$

Дійсно, ці результати співпадають з даними щодо резерву часу подій, що були обчислені за означенням. Це свідчить про те, що під час обчислень ми не припустилися помилки.

Отже, визначено всі параметри орієнтованого графа зі зваженими ребрами.

9.3.2. Оптимізація мережевого графіка за критерієм часу.

Для виконання певного комплексу робіт визначено перелік робіт, їхню послідовність і тривалість. Вихідні дані наведено у вигляді таблиці (табл. 9.1).

Таблиця 9.1

Опис мереживної моделі за допомогою кодування робіт

Номер події		Код роботи	Тривалість роботи, дні
Початкова (i)	Кінцева (j)		
1	2	3	4
1	2	(1, 2)	8
1	3	(1, 3)	5
2	3	(2, 3)	3
2	4	(2, 4)	6
2	5	(2, 5)	4

Закінчення табл. 9.1

1	2	3	4
3	5	(3, 5)	9
4	5	(4, 5)	0
4	6	(4, 6)	6
5	6	(5, 6)	7

Необхідно організувати виконання всього комплексу робіт таким чином, щоб час, який для цього потрібен, був якомога меншим.

Розв'язання.

Для розв'язання цієї задачі скористаємося можливостями, які надає мережне планування.

1. У табл. 9.1 коди робіт, що входять до складу комплексу, визначено початковою (i) і кінцевою (j) подіями, а також задано тривалість кожної події. Побудуємо за цими даними орієнтований граф (рис. 9.2).

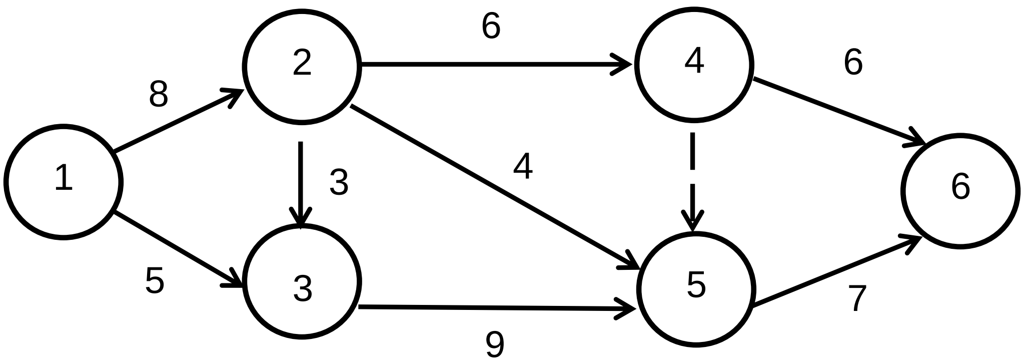

Рис. 9.2. **Орієнтований граф зі зваженими ребрами**

Зверніть увагу, що дуга (4, 5) має нульову вагу. Це означає, що вона описує фіктивну роботу, тобто відображає той факт, що 4-та подія передує 5-ій події.

2. Визначаємо основні параметри орієнтованого графа. Спочатку обчислюємо тривалість усіх шляхів. Скільки існує шляхів від джерела до витоку? Ось вони:

шлях: $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6$, якому відповідає час $8+3+9+7=27$;

шлях: $1 \to 2 \to 4 \to 6$, якому відповідає час $8+6+6=20$;

шлях: $1 \to 3 \to 5 \to 6$, якому відповідає час $5+9+7=21$;

шлях: $1 \to 2 \to 5 \to 6$, якому відповідає час $8+4+7=19$;

шлях: $1 \to 2 \to 4 \to 5 \to 6$, якому відповідає час $8+6+0+7=21$.

Який із цих шляхів є критичним? Той, якому відповідає найбільша тривалість. Правильно, це шлях $1 \to 2 \to 3 \to 5 \to 6$, де $T_{кр} = 27$ днів.

Тепер обчислюємо ранні та пізні терміни завершення подій, резерв часу для кожної події, повний резерв часу робіт та вільний резерв (див. приклад виконання вправи 9.3.1). Перевіряйте правильність обчислень за мережним графом. Пряме проходження дає нам такі значення ранніх термінів завершення подій:

$$t_p(1) = 0;$$
$$t_p(2) = t_p(1) + t(1,2) = 0 + 8 = 8;$$
$$t_p(3) = \max\{(t_p(1) + t(1,3)); (t_p(2) + t(2,3))\} = \max\{0+5; 8+3\} = 11;$$
$$t_p(4) = t_p(2) + t(2,4) = 8 + 6 = 14;$$
$$t_p(5) = \max\{(t_p(2) + t(2,5)); (t_p(3) + t(3,5)); (t_p(4) + t(4,5))\} =$$
$$= \max\{8+4; 11+9; 14+0\} = 20;$$
$$t_p(6) = \max\{(t_p(4) + t(4,6)); (t_p(5) + t(5,6))\} = \max\{11+6; 20+7\} = 27.$$

Зворотне проходження застосовуємо для визначення пізніх термінів завершення подій. Дістаємо такі значення:

$$t_n(6) = 27;$$
$$t_n(5) = t_n(6) - t(5,6) = 27 - 7 = 20;$$
$$t_n(4) = \min\{(t_n(5) - t(4,5)); ((t_n(6) - t(4,6))\} = \min\{20-0; 27-6\} = 20;$$
$$t_n(3) = t_n(5) - t(3,5) = 20 - 9 = 11;$$
$$t_n(2) = \min\{(t_n(3) - t(2,3)); (t_n(4) - t(2,4)); (t_n(5) - t(2,5))\} =$$
$$= \min\{11-3; 20-6; 20-4\} = 8;$$
$$t_n(1) = \min\{(t_n(2) - t(1,2)); (t_n(3) - t(1,3))\} = \min\{8-8; 11-4\} = 0.$$

Тепер визначаємо резерви часу для кожної з подій як різницю між її пізнім і раннім термінами їх завершення. Вони дорівнюють:

$$R(1) = t_n(1) - t_p(1) = 0 - 0 = 0;$$
$$R(2) = t_n(2) - t_p(2) = 8 - 8 = 0;$$
$$R(3) = t_n(3) - t_p(3) = 11 - 11 = 0;$$

$$R(4) = t_n(4) - t_p(4) = 20 - 14 = 6;$$
$$R(5) = t_n(5) - t_p(5) = 20 - 20 = 0;$$
$$R(6) = t_n(6) - t_p(6) = 27 - 27 = 0.$$

Переходимо до визначення повного резерву часу роботи. Перебіг розрахунків контролюємо за мережним графіком (рис. 9.2). Отже, перевірте себе:

$$R_n(1,2) = t_n(2) - t_p(1) - t(1,2) = 8 - 0 - 8 = 0;$$
$$R_n(1,3) = t_n(3) - t_p(1) - t(1,3) = 11 - 0 - 5 = 6;$$
$$R_n(2,3) = t_n(3) - t_p(2) - t(2,3) = 11 - 8 - 3 = 0;$$
$$R_n(2,4) = t_n(4) - t_p(2) - t(2,4) = 20 - 8 - 6 = 6;$$
$$R_n(2,5) = t_n(5) - t_p(2) - t(2,5) = 20 - 8 - 4 = 8;$$
$$R_n(3,5) = t_n(5) - t_p(3) - t(3,5) = 20 - 11 - 9 = 0;$$
$$R_n(4,5) = t_n(5) - t_p(4) - t(4,5) = 20 - 14 - 0 = 6;$$
$$R_n(4,6) = t_n(6) - t_p(4) - t(4,6) = 27 - 14 - 6 = 7;$$
$$R_n(5,6) = t_n(6) - t_p(5) - t(5,6) = 27 - 20 - 7 = 0.$$

Обчислимо тепер, на яку максимальну кількість часу можна збільшити тривалість кожної роботи, не змінюючи водночас ранніх термінів початку наступних робіт. Це вільний резерв часу:

$$R_в(1,2) = t_p(2) - t_p(1) - t(1,2) = 8 - 0 - 8 = 0;$$
$$R_в(1,3) = t_p(3) - t_p(1) - t(1,3) = 11 - 0 - 5 = 6;$$
$$R_в(2,3) = t_p(3) - t_p(2) - t(2,3) = 11 - 8 - 3 = 0;$$
$$R_в(2,4) = t_p(4) - t_p(2) - t(2,4) = 14 - 8 - 6 = 0;$$
$$R_в(2,5) = t_p(5) - t_p(2) - t(2,5) = 20 - 8 - 4 = 8;$$
$$R_в(3,5) = t_p(5) - t_p(3) - t(3,5) = 20 - 11 - 9 = 0;$$
$$R_в(4,5) = t_p(5) - t_p(4) - t(4,5) = 20 - 14 - 0 = 6;$$
$$R_в(4,6) = t_p(6) - t_p(4) - t(4,6) = 27 - 14 - 6 = 7;$$
$$R_в(5,6) = t_p(6) - t_p(5) - t(5,6) = 27 - 20 - 7 = 0.$$

І знову можемо скористатись властивостями графа для того, щоб виконати перевірку правильності наших обчислень. Для цього визначимо резерв часу події (ми вже обчислювали ці величини за означенням) як різницю між повним і вільним резервами часу роботи, яка безпосередньо передує цій події:

$$R(2) = R_n(1,2) - R_в(1,2) = 0 - 0 = 0;$$
$$R(3) = R_n(1,3) - R_в(1,3) = 6 - 6 = 0;$$
$$R(3) = R_n(2,3) - R_в(2,3) = 0 - 0 = 0;$$
$$R(4) = R_n(2,4) - R_в(2,4) = 6 - 0 = 6;$$
$$R(5) = R_n(2,5) - R_в(2,5) = 8 - 8 = 0;$$
$$R(5) = R_n(3,5) - R_в(3,5) = 0 - 0 = 0;$$
$$R(5) = R_n(4,5) - R_в(4,5) = 6 - 6 = 0;$$
$$R(6) = R_n(4,6) - R_в(4,6) = 7 - 7 = 0;$$
$$R(6) = R_n(5,6) - R_в(5,6) = 0 - 0 = 0.$$

Порівняли? Так, ці результати за всіма дугами співпадають із результатами обчислень резервів часу події, що було здобуто шляхом безпосередніх розрахунків цих величин. Отже, помилок в обчисленнях не виявлено.

3. Перейдемо тепер до оптимізації графіка виконання робіт за критерієм часу. Визначити ступінь складності дотримання терміну виконання кожної групи робіт некритичного шляху можна за допомогою коефіцієнта напруженості робіт. Для цього застосовуємо формулу:

$$K_н(i,j) = \frac{t_{\max}(i,j) - t'_{кр}}{t_{кр}(i,j) - t'_{кр}},$$

де $t_{\max}(i,j)$ – тривалість максимального шляху, до якого належить робота (i,j);

$t_{кр}(i,j)$ – тривалість критичного шляху, до якого належить робота (i,j);

$t'_{кр}$ – тривалість відрізка шляху, що розглядають.

Порівняємо коефіцієнти напруженості робіт для тих частин шляху, що мають за попередніми розрахунками резерви часу.

Дістаємо такі результати:

шлях $1 \to 3$: $K_н(1,3) = \dfrac{5}{8+3} \approx 0,46$;

шлях $2 \to 4 \to 5$: $K_н(2,5) = \dfrac{6}{3+9} = 0,5$;

шлях $2 \to 4 \to 5 \to 6$: $K_н(2,6) = \dfrac{(6+7)-7}{(3+9+7)-7} = 0,5.$

Отже, найменш напруженою є ділянка загальної роботи $1 \to 3$, а ділянки $2 \to 4 \to 5$ та $2 \to 4 \to 5 \to 6$ мають однакову напруженість. Оскільки (2, 5) має 8 днів вільного резерву, то частину виконавців, за якими закріплена ця робота, можна перевести на однорідну роботу (3, 5). Водночас тривалість робіт не має зрости більш ніж на 0,5 вільного резерву часу, тобто на 4 дні.

Припустимо, що до виконання роботи (2, 5) спочатку планували долучити 8 осіб, тобто $W(2,5) = 8$, а до роботи (3, 5) – 7 осіб, тобто $W(3,5) = 8$. Отже, скільки спочатку становила трудомісткість $Q(i, j)$ кожної роботи? Треба тривалість роботи (див. табл. 9.1) помножити на кількість виконавців. Маємо:

$Q(2,5) = t(2,5) \cdot W(2,5) = 4 \cdot 8 = 32$ (людино-дні);

$Q(3,5) = t(3,5) \cdot W(3,5) = 9 \cdot 7 = 63$ (людино-дні).

Визначимо кількість працівників, яких доцільно додатково залучити до роботи (3, 5), звільнивши їх від виконання роботи (2, 5) за формулою:

$$W(2,5) - \frac{Q(2,5)}{t(2,5) + 0,5 \cdot R_в(2,5)} = 8 - \frac{32}{4 + 0,5 \cdot 8} = 4 \text{ (особи)}.$$

Отже, для оптимізації виконання комплексу робіт за критерієм часу доцільно перерозподілити однотипну роботу між виконавцями. Якщо 4 особи, що становлять половину виконавців роботи (2, 5), перевести на виконання роботи (3, 5), то зміняться терміни виконання цих робіт.

Відповідно, матимемо такі нові терміни:

$$t_{опт}(2,5)=\frac{Q(2,5)}{W_{опт}(2,5)}=\frac{32}{8-4}=8 \text{ (днів);}$$

$$t_{опт}(3,5)=\frac{Q(3,5)}{W_{опт}(3,5)}=\frac{63}{7+4}\approx 5,7 \text{ (днів).}$$

Отже, завдяки перерозподілу виконавців тривалість роботи (2, 5) зросла до 8 днів, а роботи (3, 5) – скоротилася, вважатимемо, до 6 днів.

Після оптимізації за критерієм часу мережний графік набуває вигляду (рис. 9.3).

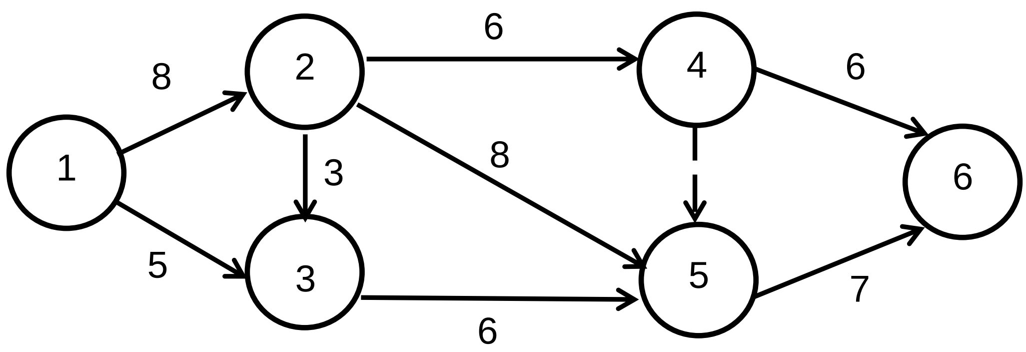

Рис. 9.3. **Мережний графік, здобутий унаслідок оптимізації за критерієм часу**

За скорегованим графіком (рис. 9.3) обчислимо довжину всіх шляхів та визначимо критичний шлях і його тривалість. Ось вони:

шлях: $1\to 2\to 3\to 5\to 6$, якому відповідає час $8+3+6+7=24$;

шлях: $1\to 2\to 4\to 6$, якому відповідає час $8+6+6=20$;

шлях: $1\to 3\to 5\to 6$, якому відповідає час $5+6+7=18$;

шлях: $1\to 2\to 5\to 6$, якому відповідає час $8+8+7=23$;

шлях: $1\to 2\to 4\to 5\to 6$, якому відповідає час $8+6+0+7=21$.

Критичним є шлях, якому відповідає найбільша тривалість. Правильно, критичним є шлях $1\to 2\to 3\to 5\to 6$, для якого $T_{кр}=24$ дні. Давайте порівняємо ці результати з попередніми. Чи змінився критичний шлях? Ні, критичний шлях залишився тим самим, але внаслідок оптимізації за критерієм часу загальний час його скоротився із 27 до 24 днів.

9.4. Виконання розрахунків у MS Excel

Завдання. У процесі ремонту автомобіля необхідно виконати роботи, перелік яких, а також їхню тривалість та потреби у фахівцях певного рівня для їх виконання наведено в табл. 9.2.

Таблиця 9.2

Роботи з обслуговування автомобіля

№ роботи	Код роботи	Кількість виконавців, особи	Тривалість роботи, хв	Попередні роботи	Участь фахівців у роботі
1	(1, 2)	1	5	–	№1
2	(2, 3)	1	10	(1, 2)	№2
3	(2, 4)	1	5	(1, 2)	№1
4	(4, 5)	2	6	(2, 3), (2, 4)	№1, №2
5	(5, 6)	2	8	(4, 5)	№1, №2

Необхідно побудувати мережний графік та визначити його основні параметри (критичний шлях, резерви часу подій та резерви часу робіт), а також виконати обчислення критеріїв оптимальності графіка виконання робіт (коефіцієнти завантаженості кожного з фахівців та їхні коефіцієнти простою).

Розв'язання.

За даними табл. 9.2 побудуємо мережний графік (рис. 9.4). Як видно, до переліку реальних робіт потрібно було додати ще й фіктивну.

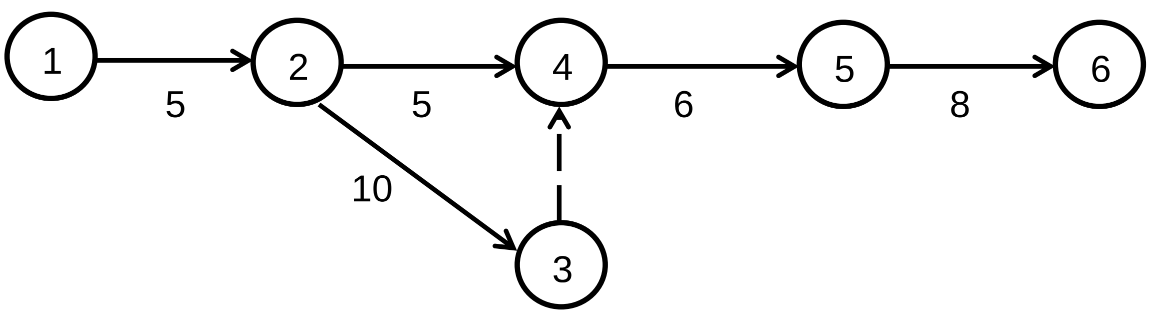

Рис. 9.4. **Мережний графік робіт із ремонту автомобіля**

Обчислення параметрів мережного графіка виконуватимемо, скориставшись можливостями MS Excel. Для цього на робочому аркуші книги MS Excel сформуємо таблицю, що містить вихідні дані з табл. 9.2, і таблицю, де й виконуватимемо розрахунки (рис. 9.5). Для зручності обчислень у новій таблиці події пронумеруємо таким чином, як вони розташовані у часі (див. рис. 9.4).

B14 =МАКС(B12+D4;B13+0)

Лист Microsoft Excel *

№ роботи	Код роботи	Кількість виконавців, особи	Тривалість роботи, хв.	Попередні роботи
1	(1, 2)	1	5	–
2	(2, 3)	1	10	(1, 2)
3	(2, 4)	1	5	(1, 2)
4	(4, 5)	2	6	(2, 3), (2, 4)
5	(5, 6)	2	8	(4, 5)

№ події	Ранній термін події, хв	Пізній термін події, хв	Резерв часу події, хв
1	0	0	0
2	5	5	0
3	15	15	0
4	15	15	0
5	21	21	0
6	29	29	0

Рис. 9.5. **Таблиця розрахунків основних параметрів мережного графіка**

Для визначення раннього терміну настання подій (комірки **B11:B16**) застосовували вбудовану функцію **МАКС()**, за якої під час прямого проходження виконували вибір найбільшого з можливих термінів настання подій. Для комірки **B11** ранній термін настання події дорівнює нулю, оскільки подія №1 є джерелом. Для інших комірок їхні значення обчислюють згідно з означенням раннього терміну настання події (див. термінологічний словник). Так, для комірки **B14** її ця формула має вигляд: **=МАКС(B12+D4;B13+0)**.

Для визначення пізнього терміну настання подій (комірки **C11:C16**) застосовували вбудовану функцію **МИН()**, за якої під час зворотного проходження виконували вибір найменшого з можливих термінів настання подій. Для комірки **C16** пізній термін настання події дорівнює 29, оскільки подія №6 є завершальною подією. Для інших комірок значення обчислюють згідно з означенням пізнього терміну настання події. Так, для комірки **C14** її значення обчислювали за формулою: **=МИН(C15-D5)**. Для комірки **C12** маємо: **=МИН(C13-D3;C14- D4)**.

Резерв часу події (комірки **D11:D16**) визначають як різницю між пізнім та раннім термінами настання події. Так, у комірку **D14** записуємо формулу: **=C14- B14**.

Як видно з таблиці розрахунків (див. рис. 9.2), довжина критичного шляху становить 29 хв, а сам критичний шлях проходить через усі події мережного графіка.

Для визначення того, наскільки виконуються критерії оптимальності графіка виконання робіт, обчислимо коефіцієнти завантаженості кожного із фахівців, які зайняті у виконанні робіт. Фахівець №1 бере участь у виконанні робіт (1, 2), (2, 4), (4, 5) та (5, 6). Відповідно, його коефіцієнт завантаженості становить:

$$\alpha_1 = \frac{\sum T_i}{T_{кр}} = \frac{5+5+6+8}{29} \approx 0{,}83.$$

Тоді коефіцієнт простою цього фахівця дорівнює:

$$\beta_1 = 1 - \alpha_1 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17.$$

Для другого фахівця маємо:

$$\alpha_2 = \frac{\sum T_i}{T_{кр}} = \frac{10+6+8}{29} \approx 0{,}83,$$

$$\beta_2 = 1 - \alpha_2 = 1 - 0{,}83 = 0{,}17.$$

Як бачимо, коефіцієнти завантаженості фахівців, які зайняті у виконанні робіт, однакові, і ці коефіцієнти є достатньо високі. Це свідчить про високий рівень організації робіт. Це підтверджується й тим, що жодна подія не має резерву часу.

9.5. Запитання для самоперевірки

9.5.1. Сформулюйте задачі, для розв'язання яких застосовують мережне планування.

9.5.2. Що таке мережний графік (граф)? Яку інформацію треба мати для його побудови?

9.5.3. Яку вершину називають витоком, а яку – стоком графа?

9.5.4. Що таке орграф? З яких елементів він складається?

9.5.5. Що відображає матриця досяжності орграфа?

9.5.6. Які характеристики мережного графа обчислюються під час виконання прямого проходження?

9.5.7. Що визначає вага ребер графа і як її враховують під час розв'язання задач оптимізації на мережах?

9.5.8. Які характеристики мережного графа обчислюють під час виконання зворотного проходження?

9.5.9. Що таке критичний шлях мережного графіка і як його визначають?

9.5.10. Чому дорівнює резерв часу певної події?

9.5.11. Яких значень можуть набувати резерви часу критичних подій і критичних робіт?

9.5.12. Яку інформацію відображає вага вершин у графах зі зваженими вершинами? У яких задачах цю інформація використовують?

9.5.13. Яку інформацію відображає вага ребер у графах, що мають зважені ребра? В яких задачах ця інформація використовується?

9.5.14. Як визначити повний резерв часу певної роботи? У чому полягає відмінність між повним і вільним резервами роботи?

9.5.15. Які є внутрішні критерії, за якими можна перевірити правильність розрахунків під час обчислення параметрів графа?

9.5.16. Що таке мережа? У чому полягає її відмінність від будь-якого довільного графа?

9.5.17. Яку інтерпретацію мають потоки у мережах?

9.5.18. Наведіть алгоритм визначення максимального потоку в мережі.

9.5.19. За якими критеріями можна виконувати оптимізацію під час застосування мережного планування й управління?

9.5.20. Які ресурси доцільно перерозподіляти задля скорочення загального терміну виконання комплексу робіт?

9.6. Практичні завдання

Під час складання проєкту робіт виділено 8 подій: 1, 2, 3, 4, 5, 6. 7 та 8. Ці події пов'язані між собою роботами (i, j), де $i = \overline{1,7}$, $j = \overline{1,7}$, $i \neq j$. Також визначено штатний розпис для виконання проєкту в такому складі:

1. Керівник проєкту (КП), ставка якого становить 800 грн/дн.;
2. Провідний інженер (ПІ), ставка якого становить 600 грн/дн.;
3. Виконавець 1 (В1), ставка якого становить 400 грн/дн.;
4. Виконавець 2 (В2), ставка якого становить 400 грн/дн.

Необхідно:

побудувати мережний графік виконання проєкту;

визначити критичний шлях;

провести аналіз використання ресурсів;

провести аналіз вартості проєкту.

Вихідні дані щодо тривалості кожної робіти (у днях) і закріплення цієї роботи за виконавцем наведено в таблиці (табл. 9.3) відповідно до номера варіанта.

Таблиця 9.3

Вихідні дані для побудови мережного графіка

1	КП	КП	ПІ	В1	В2	В1	ПІ	В2	ПІ	ПІ	В2	КП	КП
	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,5)	(2,6)	(3,5)	(3,6)	(4,7)	(5,6)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	8	11	14	8	8	4	14	6	11	12	8	7	5
2	КП	ПІ	ПІ	В1	В2	В1	ПІ	В2	ПІ	В1	В2	КП	КП
	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,5)	(2,6)	(3,5)	(3,6)	(4,7)	(5,6)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	5	12	16	12	8	6	10	6	8	10	8	4	4
3	КП	ПІ	КП	В1	В2	В1	ПІ	В2	ПІ	В2	ПІ	ПІ	КП
	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,5)	(4,7)	(4,8)	(5,7)	(5,8)	(6,8)	(7,8)
	5	10	8	12	14	7	9	11	8	6	10	3	4
4	КП	КП	ПІ	В1	В2	В2	В1	В2	ПІ	В2	ПІ	КП	КП
	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,5)	(4,7)	(4,8)	(5,7)	(5,8)	(6,8)	(7,8)
	8	10	14	20	24	17	9	15	12	8	10	5	4

Закінчення табл. 9.3

	КП	КП	ПІ	В1	В2	В1	ПІ	В1	ПІ	В1	ПІ	КП	КП
5	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,5)	(3,6)	(4,6)	(4,8)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	5	12	10	9	8	11	10	12	8	10	12	3	4
	КП	ПІ	ПІ	В1	В2	ПІ	ПІ	В1	В2	В1	ПІ	КП	КП
6	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,5)	(3,6)	(4,6)	(4,8)	(5,6)	(5,7)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	9	15	10	20	18	8	8	12	16	10	5	6	5
	КП	ПІ	ПІ	В1	В2	В1	В1	В2	В1	В2	ПІ	ПІ	КП
7	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,5)	(2,6)	(3,5)	(3,6)	(4,7)	(5,8)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	5	8	14	12	8	6	10	12	8	10	10	8	5
	КП	КП	ПІ	В1	В2	В1	В1	В2	ПІ	В1	В2	КП	КП
8	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,3)	(2,5)	(2,6)	(3,5)	(3,6)	(4,7)	(5,8)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	4	6	12	14	15	9	14	12	8	12	12	7	4
	КП	ПІ	ПІ	В1	В2	ПІ	В1	В2	ПІ	В1	В2	КП	КП
9	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(3,4)	(3,6)	(4,7)	(5,7)	(5,8)	(6,8)	(7,8)
	5	8	9	11	10	9	16	13	8	12	18	7	4
	КП	ПІ	ПІ	В1	В2	В1	В1	В2	В1	В2	В1	ПІ	КП
10	(1,2)	(1,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,7)	(5,8)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	6	12	9	10	18	21	10	9	12	10	16	8	6
	КП	КП	В1	В1	В2	ПІ	В1	В2	ПІ	В1	В2	ПІ	КП
11	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(2,5)	(3,5)	(3,6)	(3,7)	(4,7)	(5,6)	(5,8)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	10	8	11	15	10	12	16	13	8	12	9	10	5
	КП	ПІ	В2	В1	В2	В1	В2	В2	В1	В2	ПІ	КП	КП
12	(1,2)	(1,3)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(3,4)	(3,5)	(3,6)	(4,7)	(5,8)	(6,7)	(6,8)	(7,8)
	4	10	9	10	18	15	10	21	12	16	10	5	4

9.7. Тестові завдання

9.7.1. Чи слід вважати роботою очікування під час побудови мережного графіка? Виберіть правильне твердження:

а) так, якщо очікування передбачено технологічним процесом і потребує певних витрат часу;

б) ні, оскільки очікування не потребує виконання певних операцій;

в) так, це робота, однак вона є фіктивною.

9.7.2. Які з цих графів, що наведено на рис. 9.6, можна вважати мережним графіком (за умови, що задано ваги всіх дуг)?

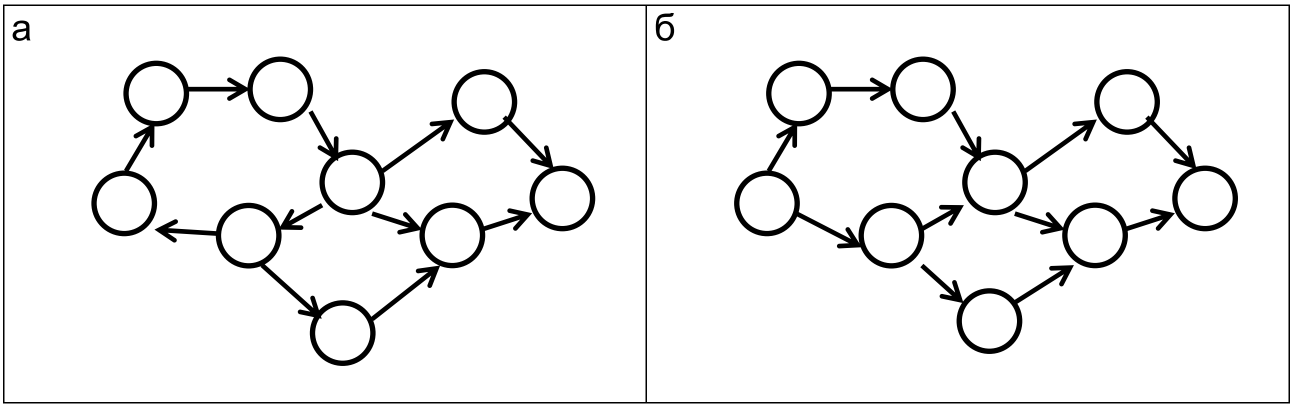

Рис. 9.6. **Приклад орієнтованих графів**

Виберіть правильне твердження:

а) кожен із двох графів може бути мережним графіком;

б) жоден із наведених графів не може бути мережним графіком;

в) мережним графіком може бути тільки граф на рис. 9.6а;

г) мережним графіком може бути тільки граф на рис. 9.6б.

9.7.3. Параметри мережного графіка обчислюють, послідовно пересуваючись від джерела до стоку.

Виберіть правильне твердження:

а) саме так, іншого способу немає;

б) можна й так, хоча є також інші способи розрахунків;

в) ні, спочатку визначають критичний шлях, а потім рухаються цим шляхом у зворотному напрямку;

г) ні, для обчислення всіх параметрів треба виконати пряме і зворотне проходження за мережним графіком.

9.7.4. Скільки подій містить комплекс робіт, який задано у вигляді мережного графіка (рис. 9.7).

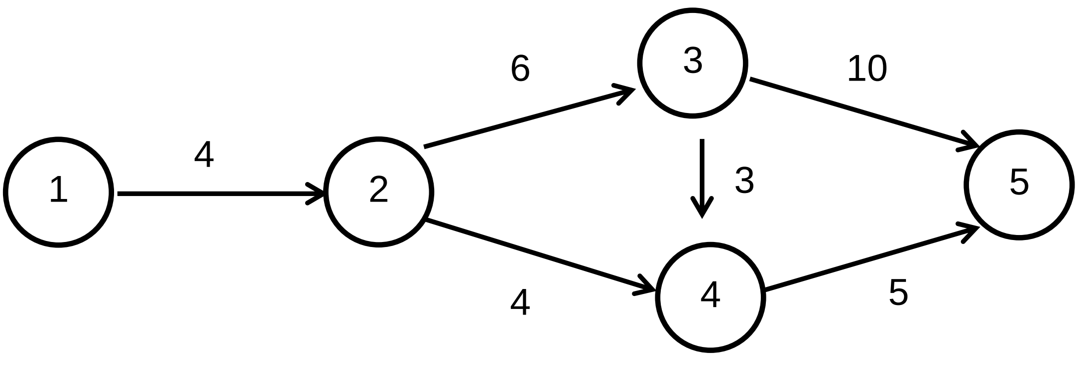

Рис. 9.7. **Мережний графік комплексу робіт**

Виберіть правильне твердження:

а) п'ять подій;

б) шість подій;

в) одинадцять подій.

9.7.5. Для мережного графіка, який наведено на рис. 9.7, визначте який шлях є критичним.

Виберіть правильне твердження:

а) шлях $1 \to 2 \to 3 \to 4 \to 5$;

б) шлях $1 \to 2 \to 3 \to 5$;

в) шлях $1 \to 2 \to 4 \to 5$.

9.7.6. Для мережного графіка, який наведено на рис. 9.7, визначте тривалість критичного шляху.

Виберіть правильне твердження:

а) $T_{кр} = 4+6+4+3+10+5=32$;

б) $T_{кр} = 4+6+10=20$;

в) $T_{кр} = 4+6+3+5=18$;

г) $T_{кр} = 4+4+5=13$.

9.7.7. Для мережного графіка, який наведено на рис. 9.7, назвіть події, що не мають резерву часу.

Виберіть правильне твердження:

а) події 1, 2, 3, 5;

б) події 1, 2, 4, 5;

в) події 1, 2, 5;

г) події 1 та 5.

9.7.8. Для мережного графіка, який наведено на рис. 9.7, назвіть роботи, які належать до критичного шляху і, відповідно, не мають резерву часу.

Виберіть правильне твердження:

а) роботи (1, 2), (2, 3), (3, 5);

б) роботи (1, 2), (2, 4), (4, 5);

в) роботи (1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5);

д) для відповіді на запитання треба спочатку визначити тривалість критичного шляху.

9.7.9. Чи слід застосовувати таке поняття, як коефіцієнт напруженості роботи, до тих робіт, що не належать до критичного шляху?

Виберіть правильне твердження:

а) ні, вони мають резерви часу, тому й так зрозуміло, що вони є ненапруженими;

б) ні, коефіцієнт напруженості роботи застосовується лише до робіт, що належать до критичного шляху;

в) так, коефіцієнт напруженості роботи обчислюють для робіт, що не належать до критичного шляху, тому що це необхідно для визначення найменш напружених дуг;

г) так, коефіцієнт напруженості обчислюють для всіх робіт.

9.7.10. Чи можна однозначно задати комплекс робіт за допомогою мережного графіка?

Виберіть правильне твердження:

а) так;

б) ні, треба ще знати матрицю інцидентності;

в) ні, комплекс робіт завжди необхідно задавати у вигляді таблиці, а мережний графік є тільки його ілюстрацією;

г) ні, мережний графік є тільки ілюстрацією комплексу робіт, а для його однозначного надання треба мережний графік перетворити на лінійну діаграму (упорядкувати).

9.8. Висновки до теми

Застосування методів мережного планування та управління в економіці дозволяє: сформувати план реалізації складного бізнес-проєкту; визначити резерви часу, матеріальних, фінансових, трудових та інформаційних ресурсів; реалізувати логістичний принципу "точно в термін" (Just In Time) із прогнозуванням і попередженням можливих зривів у перебігу реалізації проєкту; підвищувати ефективність менеджменту завдяки чіткому розподілу відповідальності між керівниками різного рівня й виконавцями.

Мережне планування дозволяє не тільки виконувати моделювання всього комплексу робіт, але й виявляти ті ділянки, від яких найбільшою мірою залежить виконання всього бізнес-проєкту у встановлені терміни. Цей метод враховує все різноманіття зв'язків між окремими роботами, дозволяє оцінити вплив відхилення від плану на подальший перебіг роботи і сприяє оптимізації процесу управління всім перебігом робіт.

Рекомендована література: [1; 2; 5 – 11; 17– 19; 21– 27; 32 – 34; 36; 40 – 47].

10. Моделі управління запасами

10.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення з основами теорії управління запасами та формування компетентностей щодо розв'язання проблеми оптимального управління запасами.

Професійні компетентності, що формують під час вивчення теми:

знання принципів класифікації витрат, що пов'язані зі створенням та зберіганням запасів;

вміння обчислювати основні параметри задачі оптимізації запасів:

вміння будувати модель задачі оптимізації запасів за різних умов постачальника;

навички використання моделі Вілсона;

здатність ідентифікувати моделі управління запасами;

навички використання методів визначення оптимальних запасів.

10.2. Термінологічний словник

Виробничі запаси – матеріальні ресурси, що є у споживанні, але ще не ввійшли до процесу виробничого перероблення.

Витрати виконання замовлення (витрати замовлення) – накладні витрати, пов'язані з оформленням замовлення. У промисловому виробництві такими витратами є витрати на переналаштування устаткування й підготовчі операції.

Витрати зберігання запасу S_1 – витрати, пов'язані з фізичним зберіганням продукції на складі, плюс можливі відсотки на капітал, вкладений у запаси. Зазвичай вони виражені в абсолютних одиницях або у відсотках від закупівельної ціни і пов'язані з певним проміжком часу.

$$S_1 = \frac{s \cdot \theta \cdot n}{2},$$

де s – витрати на зберігання одиниці продукції за одиницю часу;

θ – довжина інтервалу часу, за який витрачають запас продукції;

n – обсяг однієї партії продукції.

Витрати від формування запасу K_1 – витрати, пов'язані з постачанням продукції:

$$K_1 = k\frac{N}{n},$$

де k – витрати на постачання однієї партії продукції, які не залежать від обсягу партії;

N – загальна кількість споживання продукції за визначений час;

n – обсяг однієї партії продукції.

Детермінована модель управління запасами – це така модель, за якою функції інтенсивностей поповнення запасів, витрат та попиту на продукцію є невипадковими величинами.

Дефіцит – перевищення попиту над пропозицією.

Динамічна модель управління запасами – це модель, у якої параметри змінюються із часом.

Запаси – продукція виробничо-технічного призначення, споживчі й інші товари, що перебувають на різних стадіях виробництва й обігу, та очікують вступу в процес виробничого або особистого споживання.

Економічний розмір замовлення (формула Вілсона) – це оптимальний обсяг замовлення продукції, що дозволяє мінімізувати загальні змінні витрати, пов'язані із замовленням і зберіганням запасів:

$$q = \sqrt{\frac{2ky}{s}},$$

де q – оптимальний розмір замовлення чи партії постачання;

k – витрати на постачання однієї партії продукції, які не залежать від обсягу партії;

y – потреба в запасах продукції (інтенсивність витрат продукції);

s – витрати на зберігання одиниці продукції за одиницю часу.

Інтенсивність витрат продукції – обсяг витрат продукції за одиницю часу:

$$y = \frac{N}{\theta},$$

де N – загальна кількість споживання продукції за визначений час θ;

θ – інтервал часу, за який витрачають запас продукції.

Мета управління запасами – забезпечення неперервного виробництва та постачання економічно обґрунтованої кількості продукції в оптимальні терміни.

Модель Вілсона – модель управління запасами, яка описує ситуацію купівлі продукції в зовнішнього постачальника, у припущенні, що інтенсивність споживання (темп попиту або потреба) та час виконання замовлення є відомими та сталими величинами, замовлення виконують миттєво у вигляді однієї партії, витрати на виконання замовлення не залежать від розміру замовлення, витрати на зберігання запасу пропорційні його розміру, дефіциту не допускають.

Оптимальна кількість замовлень за період – це кількість замовлень, що визначають співвідношенням:

$$n^* = \frac{N}{q},$$

де N – загальна кількість споживання продукції за визначений час θ;

q – оптимальний розмір замовлення чи партії постачання.

Поточні запаси – основна, постійно змінна частина виробничих (товарних) запасів, яка забезпечує неперервність виробничого (торгівельного) процесу між наступними поставками.

Статична модель управління запасами – це модель, параметри якої не змінюються з часом.

Стохастична модель управління запасами – модель, за якої хоча б одна із функцій запасів, витрат та попиту на продукцію має випадковий характер.

Страховий запас – запас, що є необхідним для компенсації випадкових коливань попиту або пропозиції.

Сукупні витрати за період – сума витрат замовлення, витрат зберігання і втраченого прибутку. Іноді до них додають витрати на закупівлю продукції.

Термін виконання замовлення – час від моменту замовлення до моменту його виконання.

Теорія управління запасами – розділ дослідження операцій, який займається розробленням оптимальних стратегій підтримки економічно обґрунтованих рівнів виробничих (товарних) запасів.

Товарні запаси – готова продукція (збутова) у постачальників, на складах та базах (складська).

Точка відновлення запасу – рівень запасу, у разі досягнення якого роблять нове замовлення:

$$R = \frac{N \cdot l}{\theta},$$

де N – загальна кількість споживання продукції за визначений час θ;

l – час виконання замовлення.

Управління товарними запасами – складний комплекс заходів, спрямований на забезпечення максимально високого рівня обслуговування покупців за мінімізації поточних витрат, пов'язаних із утриманням запасів.

Утрачений прибуток (***витрати від дефіциту***, ***штраф за дефіцит***) D_1 – витрати, які пов'язані з незадоволеним попитом, тобто які виникають через відсутність продукції на складі:

$$D_1 = \frac{d \cdot \theta \cdot (n - m)^2}{2n},$$

де d – штраф за дефіцит за одиницю часу на кожну одиницю продукції;

θ – інтервал часу, за який витрачають запас продукції;

n – обсяг однієї партії продукції;

m – максимальний рівень запасу в момент постачання кожної партії продукції.

Функція витрат – критерій ефективності прийнятої стратегії управління запасами, який ураховує витрати на зберігання, вартість постачання, витрати на замовлення кожної нової партії, витрати на штрафи.

Час, за який витрачають партію продукції – це проміжок часу, що визначають співвідношенням:

$$T = \frac{n}{y},$$

де n – обсяг партії постачання;

y – потреба в запасах продукції (інтенсивність витрат продукції).

Час, за який витрачають оптимальну партію продукції – це проміжок часу, що визначають співвідношенням:

$$T = \frac{q}{y},$$

де q – оптимальний розмір замовлення чи партії постачання;

y – потреба в запасах продукції (інтенсивність витрат продукції).

Щільність збитків через незадоволений попит – це питомий штраф за дефіцит, що визначають співвідношенням:

$$\rho = \frac{d}{s+d},$$

де d – штраф за дефіцит за одиницю часу на кожну одиницю продукції;

s – витрати на зберігання одиниці продукції за одиницю часу.

10.3. Тренувальні вправи

10.3.1. Продаж телефонів. Мерчендайзер займається просуванням на ринок останньої моделі телефона Senior Citizens. Річний попит на цю модель оцінено в 400 одиниць. Ціна одного телефона становить 5 тис. грн, а річні витрати зберігання дорівнюють 10% від ціни самого телефона. Аналіз показав, що середні витрати замовлення становлять 0,5 тис. грн на замовлення. Час виконання замовлення – 8 днів. Щоденний попит на цю модель телефона становить 20 одиниць.

Визначте оптимальний обсяг замовлення, точку відновлення запасу, сукупні витрати, оптимальну кількість замовлень на рік, оптимальний час між двома замовленнями, якщо припустити, що кількість робочих днів на рік дорівнює 200.

Розв'язання.

Вихідні дані:

величина попиту $N = 400$ одиниць;

витрати замовлення $k = 0{,}5$ тис. грн;

щоденні витрати зберігання одного телефона визначають як $s = \frac{5 \cdot 0{,}1}{200} = 0{,}0025$ тис. грн;

ціна за один телефон $p = 5$ тис. грн;

час виконання замовлення $l = 8$ днів;

щоденний попит $y = \frac{400}{200} = 2$ одиниці;

кількість робочих днів θ = 200.

Використовуючи просту модель оптимального розміру замовлення, дістаємо (виберіть правильний варіант):

а) оптимальний розмір замовлення $q = 28$ одиниць;
точку відновлення $R = 14$ одиниць;
оптимальну кількість замовлень на рік $n^* = 14{,}29$;
сукупні витрати $S_1 + K_1 = 18{,}14$ тис. грн;
кількість днів між замовленнями $T = 14$;

б) оптимальний розмір замовлення $q = 28$ одиниць;
точку відновлення $R = 16$ одиниць;
оптимальну кількість замовлень на рік $n^* = 14{,}29$;
сукупні витрати $S_1 + K_1 = 14{,}14$ тис. грн;
кількість днів між замовленнями $T = 14$;

в) оптимальний розмір замовлення $q = 22$ одиниці;
точку відновлення $R = 16$ одиниць;
оптимальну кількість замовлень на рік $n^* = 14{,}29$;
сукупні витрати $S_1 + K_1 = 14{,}14$ тис. грн;
кількість днів між замовленнями $T = 21$.

Вибір "б" є правильним. Ось які для відповіді на це запитання потрібно виконати обчислення.

Оптимальний розмір замовлення становить:

$$q = \sqrt{\frac{2ky}{s}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 0{,}5 \cdot 2}{0{,}0025}} = 28 \text{ одиниць;}$$

точка відновлення

$$R = \frac{N \cdot l}{\theta} = \frac{400 \cdot 8}{200} = 16 \text{ одиниць;}$$

оптимальна кількість замовлень на рік

$$n^* = \frac{N}{q} = \frac{400}{28} = 14{,}29;$$

сукупні витрати

$$S_1+K_1=\frac{s\cdot\theta\cdot q}{2}+k\frac{N}{q}=\frac{0{,}0025\cdot 200\cdot 28}{2}+0{,}5\cdot\frac{400}{28}=14{,}14 \text{ тис. грн;}$$

кількість днів між замовленнями:

$$T=\frac{q}{y}=\frac{28}{2}=14.$$

10.3.2. Однопродуктова триетапна динамічна модель управління запасами. За умовами задачі передбачають, що попит, організаційні витрати, витрати на зберігання запасу можуть змінюватись від етапу до етапу. Рівень запасу контролюють періодично на початку етапу. Дефіциту не допускають. Відповідно до даних табл. 10.1 знайдіть оптимальний план закупівлі товару у випадку триетапної моделі управління запасами.

Таблиця 10.1

Зміна попиту та витрат

Номер етапа	Попит, одиниць	Організаційні витрати, грош. од.	Витрати на зберігання, грош. од.
1	3	3	1
2	2	7	3
3	4	6	2

Початковий запас дорівнює одиниці. Витрати на закупівлю становлять 10 грош. од. для перших трьох одиниць придбаної продукції і 20 грош. од. для кожної додаткової одиниці.

Розв'язання.

Позначимо:

i – номер етапу планування запасів;

x_i – величина запасу на кінець i-го етапу;

u_i – кількість продукції, що замовляють на i-му етапі;

g_i – попит на i-му етапі;

h_i – витрати на зберігання одиниці запасу на i-му етапі;

k_i – організаційні витрати на i-му етапі;

$s_i(u_i)$ – витрати на придбання товару на i-му етапі;

$Z_i(u_i)$ – сумарні витрати системи управління запасами, що пов'язані із придбанням продукції на i-му етапі.

Сумарні витрати складаються з організаційних витрат і витрат на закупівлю продукції:

$$Z_i(u_i) = k_i + s_i(u_i).$$

Загальні витрати на зберігання товарів на i-му етапі пропорційні до величини запасу на кінець i-го етапу та дорівнюють $h_i x_i$.

Запас на кінець i-го етапу дорівнює запасу на початку i-го етапу, до якого слід додати замовлення на i-му етапі та вираховувати попит, який уже задовольнили на i-му етапі:

$$x_i = x_{i-1} + u_i - g_i.$$

Тоді рекурентні рівняння Р. Беллмана матимуть вигляд (виберіть правильний варіант):

а) $F_i(x_i) = min[F_{i-1}(x_{i-1}) + h_i x_i + Z_i(u_i)],\ F(0) = 0;$

б) $F_i(x_i) = min[F_{i-1}(x_{i-1}) + h_i x_i - Z_i(u_i)];$

в) $F_i(x_i) = min[F_{i-1}(x_{i-1}) - h_i x_i + Z_i(u_i)],\ F(0) = 0.$

Вибір "а" є правильним.

Замовлення на першому етапі u_1 має задовольнити хоча б попит на першому етапі з урахуванням початкового запасу $x_0 = 1$ і не може бути більшим від сумарного попиту за всі етапи мінус запас на початку першого етапу, тому (виберіть правильний варіант):

а) $3 \le u_1 \le 4;$

б) $2 \le u_1 \le 6;$

в) $2 \le u_1 \le 4.$

Вибір "б" є правильним, оскільки за означених умов маємо таке співвідношення:

$$g_1 - x_0 \le u_1 \le \sum_{i=1}^{3} g_i - x_0 .$$

Отже,

$$3 - 1 \le u_1 \le 3 + 2 + 4 - 1;$$

$$2 \le u_1 \le 6.$$

Значення величин замовлення для етапів із другого до третього може змінюватися від нуля, якщо запас на початку етапу достатній для задоволення попиту, до величини сумарного попиту на всіх етапах, починаючи з відповідного етапу, тому (виберіть правильний варіант):

а) $0 \le u_2 \le 3; 0 \le u_3 \le 2;$

б) $0 \le u_2 \le 6; 0 \le u_3 \le 2;$

в) $0 \le u_2 \le 6; 0 \le u_3 \le 4.$

Вибір "в" є правильним, оскільки за означених умов маємо таке співвідношення:

$$0 \le u_k \le \sum_{i=k}^{3} g_i ;\ \ k = 2,3.$$

Отже,

$$0 \le u_2 \le 6; \quad 0 \le u_3 \le 4.$$

За умовою задачі витрати на придбання продукції на i-му етапі становлять:

$$s_i(u_i) = \begin{cases} 10u_i, 0 \le u_i \le 3; \\ 30 + 20(u_i - 3), u_i > 3. \end{cases}$$

Обчислимо витрати на придбання.

Перший етап.

Потрібно визначити сумарні витрати системи управління запасами, пов'язані з придбанням продукції на 1-му етапі – $Z_1(u_1) = k_1 + s_1(u_1)$, величину запасу на кінець 1-го етапу – $x_1 = x_0 + u_1 - g_1$, загальні витрати на зберігання запасу продукції на 1-му етапі ($h_1 x_1$) для кожного значення кількості продукції (u_1), що замовляють на 1-му етапі, а також значення рекурентних рівнянь Р. Беллмана – $F_1(x_1)$.

Спробуйте обчислити самостійно. Обчислили? Тепер порівняємо наші результати. Для проведення розрахунків маємо такі дані: $g_1 = 3$.

Отже,

$$g_1 - x_0 \le u_1 \le \sum_{i=1}^{3} g_i - x_0;$$

$$3 - 1 \le u_1 \le 3 + 2 + 4 - 1;$$

$$2 \le u_1 \le 6.$$

Оскільки

$$x_1 = x_0 + u_1 - g_1,$$

то

$$1 + 2 - 3 \le x_1 \le 1 + 6 - 3.$$

Отже,

$$0 \le x_1 \le 4.$$

Результати записуємо в табл. 10.2.

Таблиця 10.2

Обчислення витрат на першому етапі

u_1	$Z_1(u_1) = k_1 + s_1(u_1)$	x_1	$h_1 x_1$	$F_1(x_1)$
2	3 + 2 · 10 = 23	0	0	23
3	3 + 3 · 10 = 33	1	1	34
4	3 + 3 · 10 + 20 · 1 = 53	2	2	55
5	3 + 3 · 10 + 20 · 2 = 73	3	3	76
6	3 + 3 · 10 + 20 · 3 = 93	4	4	97

Звідси робимо висновок, що на першому етапі слід замовити (виберіть правильний варіант):

а) 2 одиниці продукції;

б) 3 одиниці продукції;

в) 4 одиниці продукції.

Вибір "а" є правильним, на першому етапі слід замовити саме дві одиниці продукції, оскільки за рекурентним рівнянням Р. Беллмана маємо: $min\{F_1(x_1)\} = 23$.

Другий етап.

Потрібно визначити сумарні витрати системи управління запасами, пов'язані з придбанням продукції на 2-му етапі – $Z_2(u_2) = k_2 + s_2(u_2)$, величину запасу на кінець 2-го етапу – $x_2 = x_1 + u_2 - g_2$, загальні витрати на зберігання запасу продукції на 2-му етапі ($h_2 x_2$) для кожного значення кількості продукції (u_2), що замовляють на 2-му етапі, а також значення рекурентних рівнянь Р. Беллмана – $F_2(x_2)$.

Обчислили? Тепер порівняємо наші результати.

Для проведення розрахунків маємо такі дані: $g_2 = 2$.

Отже, $0 \le u_2 \le \sum_{i=2}^{3} g_i$; $0 \le u_2 \le 6$.

Оскільки $x_2 = x_1 + u_2 - g_2$, то $0 \le x_2 \le 4$.

Результати записуємо в табл. 10.3.

Таблиця 10.3

Обчислення витрат на другому етапі

u_2	$Z_2(u_2) = k_2 + s_2(u_2)$	x_2	$h_2 x_2$	$F_2(x_2)$
0	7	–	–	–
1	7 + 1 · 10 = 17	–	–	–
2	7 + 2 · 10 = 27	0	0	50
3	7 + 3 · 10 = 37	1	3	63
4	7 +3 · 10 + 20 · 1 = 57	2	6	86
5	7 + 3 · 10 + 20 · 2 = 77	3	9	109
6	7 + 3 · 10 + 20 · 3 = 97	4	12	132

За даними табл. 10.3 та з урахуванням попиту третього етапу можна визначити, що на другому етапі слід замовити (виберіть правильний варіант):

а) 2 одиниці продукції,

б) 3 одиниці продукції.

Вибір "б" є правильним.

Так, слід замовити саме дві одиниці продукції, оскільки за рекурентним рівнянням Р. Беллмана маємо: $min\{F_2(x_2)\} = 50$.

Однак, у такому разі буде відсутнім запас, а за умовою задачі попит на третьому етапі дорівнює 4. Крім того витрати на закупівлю більш ніж трьох одиниць продукції вдвічі більш ніж витрати за кожну одиницю у кількості до трьох.

Тому доцільним буде замовити на другому етапі три одиниці продукції та прийняти $F_2(x_2) = 63$.

Третій етап.

Потрібно визначити сумарні витрати системи управління запасами, пов'язані з придбанням продукції на 3-му етапі – $Z_3(u_3) = k_3 + s_3(u_3)$, величину запасу на кінець 3-го етапу – x_3, загальні витрати на зберігання запасу продукції на 3-му етапі (h_3x_3) для кожного значення кількості продукції (u_3), що замовляється на 3-му етапі, а також значення рекурентних рівнянь Р. Беллмана – $F_3(x_3)$.

Обчислили?

Тепер порівняємо наші результати.

Для третього етапу маємо:

$$g_3 = 4;$$

$$0 \le u_k \le \sum_{i=k}^{3} g_i; \quad k = 3;$$

$$0 \le u_3 \le 4.$$

Оскільки третій етап є останнім етапом, тобто закінченням господарської діяльності, то не варто залишати запас. Тому $x_3 = 0$.

Тепер записуємо остаточний результат (табл. 10.4).

Таблиця 10.4

Обчислення витрат на третьому етапі

u_3	$Z_3(u_3) = k_3 + s_3(u_3)$	x_3	$h_3 x_3$	$F_3(x_3)$
0	6	–	–	–
1	6 + 1 · 10 = 16	–	–	–
2	6 + 2 · 10 = 26	–	–	–
3	6 + 3 · 10 = 36	0	0	36
4	6 + 3·10 + 20·1 = 56	1	2	58

За даними табл.10.4 можна визначити, що на третьому етапі слід замовити (виберіть правильний варіант):

а) 2 одиниці продукції,

б) 3 одиниці продукції.

Вибір "б" є правильним.

Оскільки за даними табл. 10.4 маємо $min\{F_3(x_3)\} = 36$, то робимо висновок, що на третьому етапі слід замовити три одиниці продукції.

Отже, оптимальним у випадку триетапної моделі управління запасами є такий план:

1 етап – дві одиниці продукції;

2 етап – три одиниці продукції;

3 етап – три одиниці продукції.

10.4. Виконання розрахунків у MS Excel

Завдання. Підприємство, що виробляє генератори, сформувало портфель замовлень на поточний рік (табл. 10.5). Постачання матеріалів, які необхідні для виробництва продукції, виконують щоквартально, постачання готової продукції замовникам також виконують наприкінці відповідного кварталу. Протягом року можливими є неритмічність роботи підприємства та коливання цін на матеріали. Для можливості враховування цього у табл. 10.5 також наведено виробничі потужності підприємства та питомі витрати на виробництво одного генератора протягом року.

Крім того, табл. 10.5 містить вартість зберігання одного генератора на складі підприємства протягом одного кварталу.

Таблиця 10.5

Дані щодо виробництва генераторів за кварталами

Показники	I квартал	II квартал	III квартал	IV квартал
Обсяг замовлення, шт.	58	36	34	59
Виробничі потужності, шт.	60	62	64	66
Питомі витрати, млн грн	28	27	27,8	29
Вартість зберігання 1 генератора, тис. грн	300	300	300	300

Вихідний запас генераторів на початок року становив 15 одиниць. Перехідний запас на період, який є наступним за плановим, має становити не менше ніж 7 генераторів. Вартість зберігання готової продукції залежить від кількості генераторів, що обчислюють як середнє між залишками на початок та на кінець звітного періоду, яким у даному випадку є квартал.

Необхідно скласти щоквартальний план виробництва генераторів протягом одного року таким чином, щоб забезпечити своєчасне виконання замовлення, при цьому загальні витрати на виробництво і зберігання генераторів протягом усього року, на який здійснюється планування, повинні бути найменшими.

Розв'язання.

Проведемо формалізацію задачі.

Позначимо через $\mathbf{X} = \left(x_t\right)_{1\times 4}$ річний план виробництва, елементами якого є незалежні змінні x_t $(t = \overline{1,4})$, що визначають кількість генераторів, які виробляють щокварталу.

Оскільки дані, що наведено в табл. 10.5, представлені поквартально, то параметри задачі є сталими протягом кожного окремого кварталу. Отже, доцільно поділити рік, для якого виконують планування, на квартали.

Введемо залежні змінні $I_t (t = \overline{1,4})$, які відповідають запасам, що утворюються наприкінці кварталу як надлишок готової продукції відносно замовлення.

За вихідними умовами щодо питомих витрат на виробництво генераторів c_t $(t = \overline{1,4})$ та їх зберігання h_t $(t = \overline{1,4})$, які наведено в табл. 10.5, записуємо критерій ефективності, яким у цій задачі є загальні витрати підприємства протягом поточного року на виготовлення генераторів та їх зберігання:

$$
\begin{aligned}
Z(\mathbf{X}) = 28x_1 + 27x_2 + 27{,}8x_3 + 29x_4 + \\
+ 0{,}3 \cdot (I_0 + I_1) \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot (I_1 + I_2) \cdot 0{,}5 + \\
+ 0{,}3 \cdot (I_2 + I_3) \cdot 0{,}5 + 0{,}3 \cdot (I_3 + I_4) \cdot 0{,}5 \quad \rightarrow \quad \min .
\end{aligned}
$$

Зверніть увагу, що за даними, які наведено в табл. 10.5, питомі витрати на виробництво генераторів вимірюються у млн грн, а вартість їх зберігання – у тис. грн. Під час побудови цільової функції необхідно ці показники звести до однієї вимірності. У цьому випадку загальні витрати на виготовлення та зберігання генераторів наведено в млн грн. Цей вираз можна спростити шляхом елементарних перетворень, але для обчислень за допомогою MS Excel такий запис є зручнішим.

Основна система обмежень враховує такі співвідношення. Обсяг випуску продукції підприємства може змінюватися лише в межах його виробничих потужностей. Надлишки продукції наприкінці поточного кварталу дорівнюють різниці між обсягом продукції, що виготовлена в поточному кварталі з урахуванням залишків продукції наприкінці кварталу, який безпосередньо передує поточному, і обсягом постачання в поточному кварталі. Перехідний запас на період, який є наступним за періодом планування, становить не менше ніж 7 генераторів. Отже, основна система обмежень має вигляд:

$$
\begin{cases}
x_1 \le 60; \\
x_2 \le 62; \\
x_3 \le 64; \\
x_4 \le 66; \\
I_1 = 15 + x_1 - 58; \\
I_2 = I_1 + x_2 - 36; \\
I_3 = I_2 + x_3 - 34; \\
I_4 = I_3 + x_4 - 59; \; I_4 \ge 7.
\end{cases}
$$

Математична модель задачі містить також обмеження на знак, оскільки як основні, так і залежні змінні не можуть бути від'ємними:

$$\begin{cases} x_t \geq 0, & t = \overline{1, 4}; \\ I_t \geq 0, & t = \overline{0, 4}. \end{cases}$$

Ми дістали математичну модель задачі планування виробництва, яка є задачею динамічного програмування.

Для її розв'язання застосуємо надбудову **Solver** MS Excel.

На робочому аркуші книги MS Excel побудуємо таблицю, яка відповідає умовам задачі (рис. 10.1).

G14 fx =СУММ(C14:F14)

Лист Microsoft Excel *

	A	B	C	D	E	F	G
1	Задача управління запасами						
2		Питомі витрати:	1-й квартал	2-й квартал	3-й квартал	4-й квартал	
3	Вартість виробництва, млн грн		28	27	27,8	29	
4	Вартість зберігання, млн грн		0,3	0,3	0,3	0,3	
5							
6	Вироблено за планом		50	50	50	50	
7	Потужність виробництва		60	62	64	66	
8	Замовлення		58	36	34	59	
9	Запас на початок періоду		15	7	21	37	
10	Запас на кінець періоду		7	21	37	28	7
11							
12	Виробничі витрати, млн грн		1400	1350	1390	1450	
13	Витрати на зберігання, млн грн		3,3	4,2	8,7	9,75	
14		Усього	1403,3	1354,2	1398,7	1459,75	5615,95
15							

Рис. 10.1. **Вихідні дані задачі динамічного програмування**

Для кожного кварталу виділяємо окремий стовпчик: **C**, **D**, **E** та **F**.

У комірках **C3:F3** записуємо питомі витрати на виробництво генератора відповідно до номера періоду, а в комірках **C4:F4** – питомі витрати на його зберігання. Для матриці плану виробництва виділяємо комірки **C6:F6**. Припустимо, що первинний план виробництва для кожного кварталу становить 50 генераторів (за такого обсягу виробництва надлишки продукції за кожним кварталом не матимуть від'ємних значень). Комірки **C7:F7** містять інформацію про потужність виробництва.

Інформація про обсяги замовлень за кожним кварталом міститься в комірках **C8:F8**. Інформацію щодо запасів на початок періоду записуємо у комірках **C9:F9**. За умовою задачі початковий запас першого кварталу (комірка **C9**) дорівнює 15 генераторам, а для комірок **D9:F9** запас обчислюють. Відповідно, для комірки **D9** маємо: **=C9+C6+C8**.

Запаси на кінець кожного планового періоду обчислюємо в комірках **C10:F10**. Зрозуміло, що вони дорівнюють запасам на початок наступного періоду. Тому для комірки **C10** маємо: **=C9+C6+C8**. А також у комірці **G10** вказуємо нижню межу запасу, що за вихідними умовами задачі відповідає кінцю всього періоду планування, тобто кінцю 4-го кварталу.

У комірках **C12:F12** виведено виробничі витрати, що відповідають витратам на виробництво генераторів протягом кварталу і визначаються як добуток питомих витрат на відповідну їм кількість генераторів. Так, для комірки **C12** маємо формулу **=C3*C6**. Витрати на зберігання (комірки **C13:F13**) визначають як середні витрати на зберігання генераторів протягом кварталу.

Наприклад, для комірки **C13** маємо формулу **=C4*(C8+C10)/2**.

У рядку "Усього" (комірки **C14:F14**) обчислюємо загальні витрати на виробництво і зберігання генераторів як суму відповідних витрат, тобто даних за комірками у дванадцятому та тринадцятому рядках. Значення комірки **G14** знаходимо як суму значень за комірками **C14:F14,** для цього застосовуємо формулу **=СУММ(C14:F14)**. Отже, ця комірка містить значення загальних витрат підприємства протягом року, для якого виконували планування. Це і є значення цільової функції задачі динамічного програмування.

Усі вихідні дані щодо математичної моделі задачі введено, тепер можна виконувати пошук оптимального плану. Для цього за допомогою послідовності команд **Данные** $\Rightarrow$ **Поиск решения** переходимо в діалогове вікно надбудови **Solver** і заповнюємо його поля. Так, цільову функцію, яку досліджують на мінімум, записано в комірці **G14**.

Керовані змінні містяться у комірках **C6:F6**. Їхні значення визначають відповідно до обмежень: **$C$10:$F$10>=0** (запаси на кінець періоду мають бути невід'ємними); **$C$6:$F$6<=$C$7:$F$7** (обсяг виробництва не має перевищувати виробничих потужностей); **$C$6:$F$6>=0** (обсяг виробництва має бути невід'ємними); **$F$10>=$G$10** (запас на кінець періоду планування, тобто кінцевий запас 4-го кварталу має бути не меншим за планове значення).

Хоча ця задача передбачає оптимізацію на чотирьох етапах, однак ми розглядаємо її не поетапно, окремими періодами, а як одноетапну задачу лінійного програмування. Отже, для пошуку її оптимального плану застосовуємо симплекс-метод (що зазначаємо в полі **Выберите метод решения**).

На рис. 10.2 наведено діалогове вікно **Параметры поиска решения**, поля якого заповнено відповідно до умов задачі. Оскільки всі обмеження математичної моделі враховано, натискаємо кнопку **Найти решение**.

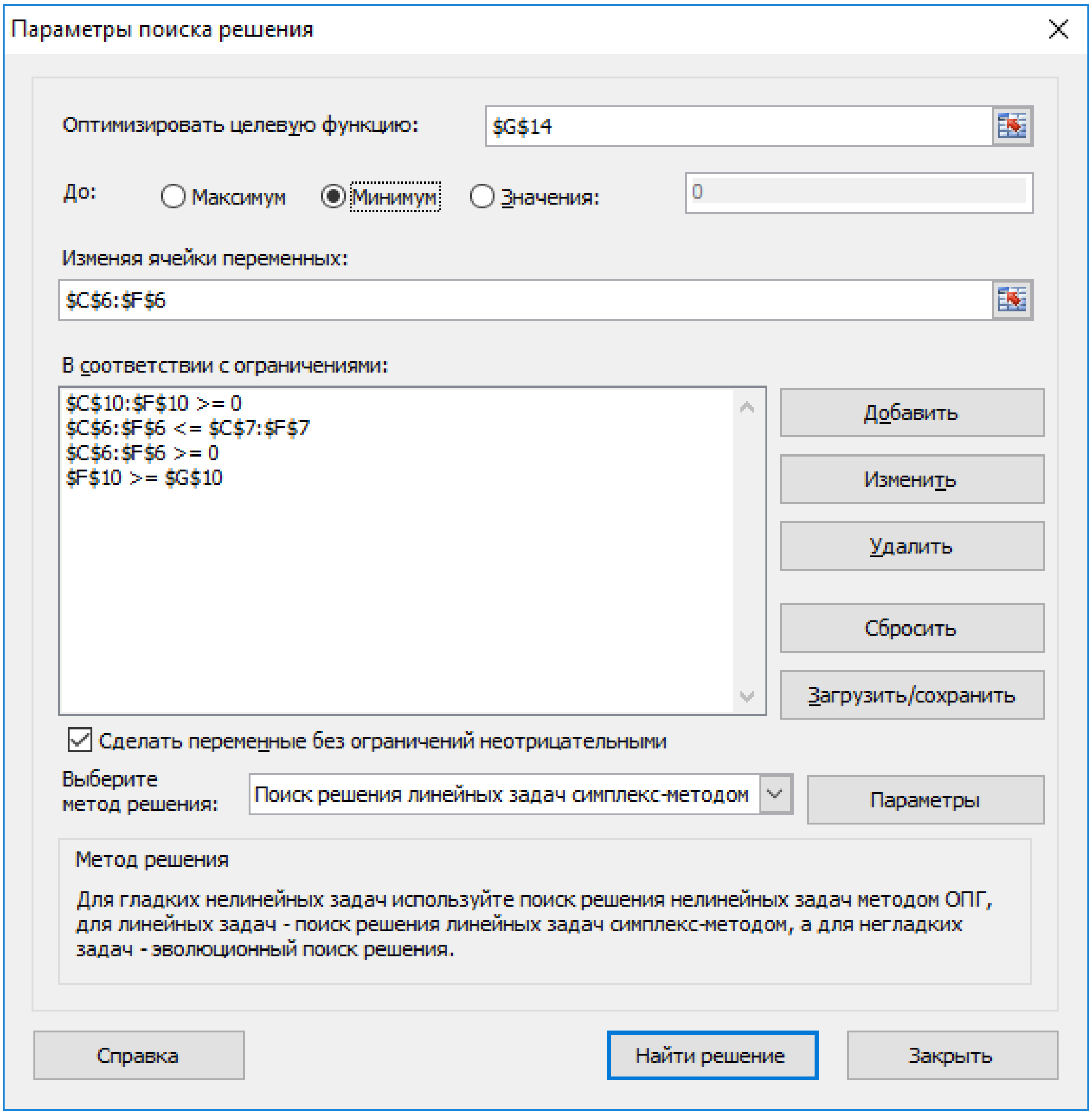

Рис. 10.2. **Діалогове вікно *Параметры поиска решения***

Результат розв'язання задачі управління запасами наведено на рис. 10.3.

G14 =СУММ(C14:F14)

Лист Microsoft Excel

	A / B	C	D	E	F	G	H
1	**Задача управління запасами**						
2	Питомі витрати:	1-й квартал	2-й квартал	3-й квартал	4-й квартал		
3	Вартість виробництва, млн грн	28	27	27,8	29		
4	Вартість зберігання, млн грн	0,3	0,3	0,3	0,3		
5							
6	Вироблено за планом	53	62	64	0		
7	Потужність виробництва	60	62	64	66		
8	Замовлення	58	36	34	59		
9	Запас на початок періоду	15	10	36	66		
10	Запас на кінець періоду	10	36	66	7	7	
11							
12	Виробничі витрати, млн грн	1484	1674	1779,2	0		
13	Витрати на зберігання, млн грн	3,75	6,9	15,3	10,95		
14	Усього	1487,75	1680,9	1794,5	10,95	**4974,1**	
15							

Рис. 10.3. **Розв'язок задачі управління запасами**

Оптимальним є такий щоквартальний план виробництва:

$$\mathbf{X}^* = \begin{pmatrix} 53 & 62 & 64 & 0 \end{pmatrix}.$$

За цим планом замовлення будуть своєчасно виконані, перехідний запас на майбутній період складатиме 7 генераторів (що відповідає нижній межі необхідного запасу), а загальні витрати на виробництво та зберігання готової продукції будуть найменшими і становитимуть:

$$\min Z(\mathbf{X}) = Z(\mathbf{X}^*) = 4\,974{,}10 \text{ млн грн.}$$

До речі, якщо виконувати оптимізацію чотирьох статичних моделей за цими самими вихідними умовами, то дістанемо інший план виробництва, за яким цільова функція матиме значення 5 038,50 млн грн, тобто на 64,4 млн грн більше, ніж у разі оптимізації цієї задачі як задачі динамічного програмування.

10.5. Запитання для самоперевірки

10.5.1. Що таке запаси? Що є причиною появи запасів?

10.5.2. Які є види запасів? Яка основна роль запасів?

10.5.3. Що таке управління запасами?

10.5.4. Які змінні містить математична модель управління запасами і в чому полягає економічний сенс цих змінних?

10.5.5. Які є моделі управління запасами?

10.5.6. У задачах оптимізації поставок у якому вигляді подають критерій ефективності?

10.5.7. За якою формулою розв'язують задачу про визначення обсягу оптимальної партії?

10.5.8. Наведіть класифікацію витрат, пов'язаних зі створенням та зберіганням запасів.

10.5.9. Які елементи включають витрати на підготовку одиниці продукції?

10.5.10. Запишіть формулу Вілсона.

10.5.11. Які є допущення моделі Вілсона?

10.5.12. Чи співпадають розв'язки задачі управління запасами в разі застосуванні різних методів побудови її математичної моделі?

10.5.13. Що називають точкою відновлення і як її знайти?

10.5.14. Опишіть модель оптимального розміру замовлення з дефіцитом.

10.5.15. Як пов'язані оптимальні розміри замовлення для задач з дефіцитом і без дефіциту за однакових параметрів?

10.6. Практичні завдання

10.6.1. Фірма, що випускає електричні прилади, у середньому може виробляти 150 приладів на день. Денний попит на прилади приблизно 40 шт. Фіксовані витрати виробництва становлять 100 грн, витрати на зберігання – 8 грн за прилад на рік. У році 250 робочих днів.

Визначте:

оптимальний розмір виробничого замовлення;

витрати на зберігання;

сукупні витрати за рік.

10.6.2. Магазин замовляє виробникові гастрономічну продукцію, щоденний попит на яку становить 100 кг. Термін виконання замовлення 7 днів. Вартість доставки партії продукції 900 грн. Зберігання 1 кг продукції коштує 2 грн на день.

Визначте:

економічно обґрунтований розмір партії замовлення продукції;

оптимальну періодичність оформлення замовлень;

щоденні витрати на зберігання продукції відповідно до оптимальної стратегії поповнення запасів;

оптимальну стратегію управління запасами продукції за умови скорочення часу на виконання замовлення на 2 дні.

10.6.3. Станція технічного обслуговування виконує заміну автомобільного мастила. Роздрібна ціна закупівлі мастила становить 30 грн за 1 л. Оптова ціна закупівлі (більше 1 000 л) менша на 5 грн за 1 л.

За один день на станції обслуговують приблизно 160 автомашин, для кожної з яких потрібно в середньому 5 л мастила. Щоденні витрати на зберігання мастила на складі становлять 50 коп. за 1 л. Оформлення замовлення та доставляння партії мастил коштує 200 грн. Термін виконання замовлення – 2 дні.

Необхідно визначити оптимальну стратегію поповнення запасів мастила для станції технічного обслуговування.

10.6.4. Фірма може сама виробляти комплектування або замовляти їх іншій фірмі. Кожний запуск власного виробництва коштує фірмі 20 грн. Потужність виробництва не більше 100 деталей на день. Вартість замовлення іншій фірмі дорівнює 15 грн. Збереження кожної деталі на складі незалежно від способу постачання 0,02 грн у день. Необхідний для фірми обсяг комплектування оцінюють у 260 тис. одиниць на рік.

Визначте, що вигідніше для фірми – самій виробляти комплектування чи замовляти за умови бездефіцитного виробництва протягом року.

10.6.5. Продукцію споживають з інтенсивністю 30 одиниць за день. Вартість зберігання одиниці продукції становить 5 грн за день. Вартість доставляння партії продукції дорівнює 1 000 грн. Якщо розмір партії продукції не перевищує 500 одиниць, тоді вартість одиниці продукції 100 грн, інакше – на 20 грн дешевше.

Визначте оптимальну стратегію управління запасами продукції, за умови що термін виконання замовлення на її постачання дорівнює 20 днів.

10.6.6. Щоденний попит на певний продукт дорівнює 400 одиниць. Витрати на придбання кожної партії цього продукту не залежать від її обсягу і дорівнюють 200 грн, а витрати на зберігання одиниці продукції – 0,1 грн за добу.

Визначте оптимальний обсяг партії та інтервал часу між постачаннями цих партій, якщо дефіцит є недопустимим.

10.6.7. Початковий запас певного виду продукції дорівнює 750 одиниць. Виробнича лінія щодня потребує 150 одиниць продукції, яка надходить зі складу безперервно й рівномірно. Щойно на складі виникає ситуація дефіциту продукції, зі складу іншого підприємства надходить запас у кількості 750 одиниць.

Побудуйте графік зміни запасу протягом 15 днів.

10.6.8. Розв'яжіть задачу управління виробництвом товарів та запасами на складах (табл. 10.6).

Таблиця 10.6

Вихідні дані

Характеристика	Номер етапу, t			
	1	2	3	4
Запас на складі на кінець етапу, S_t	S_1	S_2	S_3	S_4 =0
Виробництво товарів, x_t	x_1	x_2	x_3	x_4
Попит на етапі, P_t	3	1	3	2

Витрати на виробництво товарів $CV_t = N(1+0{,}2x_t),\ N=3$.

Витрати на зберігання товарів на складах $CZ_t = 0{,}3+0{,}2S_t$.

Обмеження щодо виробництва $x_{t\le 4}$.

Обмеження щодо кількості місць на складах $S_{t-1}+x_t-P_t \le 3$.

10.7. Тестові завдання

10.7.1. Предметом теорії управління запасами є розроблення методики:

а) функціонування постачальників;

б) функціонування споживачів;

в) організації постачання продукції;
г) організації виробництва продукції.

10.7.2. Попит на запас – це:
а) обсяг постачання продукції;
б) потреба у продукції на період постачання;
в) потреба у продукції на один місяць;
г) потреба у продукції на один рік.

10.7.3. Поповнення запасів – це:
а) проміжок часу між постачаннями продукції;
б) період постачання всього обсягу продукції;
в) період постачання однієї партії продукції;
г) період виконання замовлення на постачання всієї продукції.

10.7.4. Установіть відповідність між поняттями та їх описом:

1. Стохастичні	а) моделі управління запасами, у яких параметри не змінюються в часі
2. Динамічні	б) моделі управління запасами, у яких параметри мають випадковий характер
3. Статичні	в) моделі управління запасами, у яких параметри змінюються в часі
4. Детерміновані	г) моделі управління запасами, у яких параметри однозначно можна визначити в часі

10.7.5. Вартість постачання однієї партії продукції залежить від:
а) суми разових витрат, які не залежать від обсягу постачання;
б) витрат, які обумовлені обсягом постачання;
в) суми разових витрат і витрат, обумовлених обсягом постачання;
г) витрат на зберігання однієї партії продукції.

10.7.6. Штраф за дефіцит – це штраф за:
а) одиницю продукції в дефіциті за одиницю часу;
б) наднормативне зберігання одиниці продукції за одиницю часу;
в) наднормативне зберігання всього обсягу продукції;
г) весь обсяг продукції в дефіциті.

10.7.7. Страховий запас дорівнює:
а) обсягу одного постачання продукції;
б) половині обсягу одного постачання продукції;
в) математичному сподіванню обсягу запасу;
г) обсягу запасу для безперебійного функціонування підприємства.

10.7.8. Сумарні витрати на управління запасами, включаючи вартість постачання та вартість зберігання запасів, у моделі управління запасами Вілсона (d – інтенсивність попиту; s – вартість зберігання одиниці продукції; Cd – вартість постачання однієї партії; q – обсяг замовлення) визначають за формулою:

а) $L = \frac{Cd \cdot d}{q} + \frac{s \cdot q}{d}$;

б) $L = \frac{Cd \cdot d}{q} + \frac{s \cdot q}{2}$;

в) $L = \frac{Cd}{q} + \frac{s \cdot q}{2}$;

г) $L = \frac{Cd \cdot q}{q} + \frac{s \cdot q}{2}$.

10.7.9. У задачах управління запасами повне і своєчасне забезпечення попиту в межах кожного періоду можна записати за допомогою балансового рівняння (X_i – кількість продукції, яку перевозять в i-й період, $i = \overline{1,n}$; V_i – залишок продукції на кінець i-го періоду; D_i – попит на продукцію в i-му періоді):

а) $V_i = V_i + X_i - D_i$;

б) $V_i = V_{i-1} + X_{i-1} - D_i$;

в) $V_i = V_{i-1} - X_i + D_i$;

г) $V_i = V_{i-1} + X_i - D_i$.

10.7.10. Визначте сумарні річні витрати в основній моделі управління запасами, якщо відомі: інтенсивність попиту $d = 100$; вартість зберігання одиниці продукції $s = 2$; вартість постачання однієї партії $Cd = 4$.

Виберіть правильну відповідь:

а) 25;

б) 35;

в) 30;

г) 40.

10.7.11. У детермінованій моделі управління запасами оптимальний розмір замовлення (виберіть правильну відповідь):

а) прямо пропорційний величині попиту на продукцію за період, обернено пропорційний питомим витратам зберігання за період;

б) прямо пропорційний величині попиту на продукт за період вартості замовлення, обернено пропорційний питомим витратам зберігання за період;

в) прямо пропорційний величині попиту на продукт за період питомим витратам зберігання за період, обернено пропорційний вартості замовлення.

10.7.12. Для визначення оптимального розміру замовлення в моделі з виробництвом необхідно знати (виберіть правильну відповідь):

а) величину попиту, витрати на замовлення і темп виробництва;

б) витрати від дефіциту, величину попиту і витрати на зберігання;

в) витрати на замовлення, темп виробництва і втрачений прибуток.

10.7.13. Для визначення оптимального розміру замовлення в моделі з дефіцитом необхідно знати (виберіть правильну відповідь):

а) час виконання замовлення;

б) темп виробництва;

в) ціну продукту;

г) розмір знижок;

д) витрати замовлення.

10.7.14. Зменшення розміру замовлення в моделі управління запасами спричинить такий результат (виберіть правильну відповідь):

а) збільшення кількості втрачених продажів та витрат на зберігання;

б) зменшення кількості втрачених продажів і збільшення витрат на зберігання;

в) зменшення витрат на зберігання, але зростання витрат на замовлення;

г) зменшення витрат на зберігання та замовлення;

д) збільшення витрат на зберігання, але зменшення витрат на замовлення.

10.7.15. Для визначення оптимального розміру замовлення в моделі з ціновими знижками необхідно знати(виберіть правильну відповідь):

а) величину попиту, витрати на замовлення і темп виробництва;

б) витрати від дефіциту, величину попиту і витрати на зберігання;

в) витрати на замовлення, величину попиту і втрачений прибуток;

г) витрати на зберігання, витрати на замовлення і ціну продукції;

д) витрати на зберігання і розмір знижок.

10.7.16. Модель є стохастичною, якщо (виберіть правильну відповідь):

а) функції поповнення запасів і витрат не випадкові величини;

б) функція поповнення запасів змінюється в часі;

в) хоча б одна із функцій поповнення запасів і витрат є випадковою;

г) функція витрат змінюється в часі;

д) функція поповнення запасів лінійно зростає.

10.7.17. Продукцію споживають з інтенсивністю 250 одиниць за день. Вартість збереження 10 одиниць продукції становить 2 грн за день. Вартість доставляння партії продукції дорівнює 361 грн.

Визначте економічно обґрунтований розмір партії замовлення продукції (виберіть правильну відповідь):

а) 900 од.;

б) 850 од.;

в) 950 од.

10.8. Висновки до теми

Основне призначення запасів полягає в підвищенні рівня якості забезпечення матеріальними ресурсами різного роду споживачів, в підвищенні надійності роботи економічних систем різної природи. Запаси зменшують залежність споживача від перебоїв із постачальниками, виробничого процесу – від нерівномірності споживання, роблять економічну систему стійкішою, забезпечують необхідні умови для створення безперервності розширеного відтворення.

Управління запасами полягає в пошуку такої стратегії поповнення та витрат запасів продукції, за якою функція витрат на зберігання та замовлення набуває мінімального значення. Оптимальне управління матеріальними запасами передбачає їх поточне та перспективне планування.

Рекомендована література: [1; 2; 4 – 11; 13 – 15; 18; 19; 21 – 27; 31– 36; 39; 40 – 47].

11. Моделі систем масового обслуговування

11.1. Мета та компетентності

Метою вивчення теми є ознайомлення з основами теорії систем масового обслуговування та формування компетентностей щодо розрахунків параметрів систем масового обслуговування (СМО).

Професійні компетентності, що формують під час вивчення теми:

знання основних понять теорії СМО;

знання класифікації СМО;

розуміння характеристик елементів СМО;

навички визначення оптимальної кількості каналів обслуговування;

навички обчислення основних параметрів СМО.

11.2. Термінологічний словник

Абсолютна пропускна спроможність СМО – середня кількість заявок, що обслуговуються за одиницю часу.

Багатоканальна СМО – СМО з декількома каналами обслуговування.

Відкрита СМО – СМО, у якої потік заявок необмежений.

Вихідний потік вимог – вимоги, які залишають обслуговчу систему.

Вхідний потік вимог – запити на задоволення будь-якої потреби.

Інтенсивність навантаження – це характеристика системи масового обслуговування, що визначають співвідношенням:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu},$$

де λ – інтенсивність потоку заявок;

μ – інтенсивність потоку обслуговування.

Інтенсивність потоку заявок – середня кількість заявок за одиницю часу:

$$\lambda = 1/\tau,$$

де τ – середній проміжок часу між двома послідовними заявками.

Інтенсивність потоку обслуговування – середня кількість заявок, що обслуговують за одиницю часу:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}},$$

де $t_{обсл}$ – середній час обслуговування.

Інтенсивність руху черги – середня кількість заявок, що приходять на обслуговування за одиницю часу:

$$\nu = \frac{1}{t_{оч}},$$

де $t_{оч}$ – середній час очікування в черзі.

Канал обслуговування – обслуговчий пристрій.

Обслуговування – процес виконання роботи із задоволення вимог, що надійшли.

Одноканальна СМО – СМО з одним каналом обслуговування.

Однофазна СМО – СМО з однорідними каналами обслуговування, які виконують одну й ту саму операцію.

Ординарний потік подій – такий потік подій, коли ймовірність виникнення за достатньо малий проміжок часу більш ніж однієї події є достатньо малою порівняно з імовірністю настання однієї події за цей проміжок часу.

Потік – це послідовність подій, які виникають одна за одною у випадковий момент часу.

Потік без післядії – потій подій, коли для будь-якої пари проміжків часу, які не перетинаються, кількість подій за один із цих проміжків не залежить від кількості подій за інший проміжок часу.

Пуассонівський потік – це потік подій, який має властивість ординарності та відсутності післядії.

Регулярний потік подій – потік подій, у якому події настають через визначені проміжки часу.

СМО з відмовами – системи, у яких у разі зайнятості всіх каналів заявка не стає в чергу й залишає систему без обслуговування.

СМО з необмеженим очікуванням – системи, у яких заявка стає в чергу, якщо в момент її надходження всі канали були зайняті.

СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги – системи, у яких заявка, що надійшла в систему і знайшла всі канали й обмежену чергу зайнятими, залишає систему необслуженою.

Стаціонарний потік подій – потік подій, коли ймовірність появи будь-якої кількості подій за певний час залежить лише від тривалості цього часу та не залежить від моменту початку.

Теорія масового обслуговування – розділ дослідження операцій, який розглядає різноманітні процеси обслуговування, вивчає статистичні закономірності надходження вимог і на цій основі розробляє такі характеристики СМО, за якими витрати часу на очікування були найменшими.

Упорядкована СМО – СМО, у якої заявки обслуговують у порядку їх надходження.

***Характеристики СМО з відмовами* – це такі характеристики:**

час обслуговування однієї заявки $t_{обсл}$;

імовірність простою каналів обслуговування, коли заявок немає ($k=0$):

$$P_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1};$$

імовірність відмови в обслуговуванні, коли заявка знайде всі канали зайнятими ($k=n$):

$$P_{відм} = P_n = \frac{P_0 \rho^n}{n!};$$

імовірність обслуговування: $P_{обсл} = 1 - P_{відм}$;

середня кількість каналів, зайнятих обслуговуванням: $n_з = \rho \cdot P_{обсл}$;

частка каналів, зайнятих обслуговуванням: $k_з = \dfrac{n_з}{n}$;

абсолютна пропускна спроможність СМО: $A = \lambda \cdot P_{обсл}$.

Характеристики СМО з необмеженим очікуванням – це такі характеристики:

відсутність відмови в обслуговуванні: $P_{відм} = 0$ і $P_{обсл} = 1$;

імовірність простою каналів, коли немає заявок ($k=0$):

$$P_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}\right)^{-1}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)},\quad \text{де } \frac{\rho}{n}<1;$$

імовірність зайнятості каналів обслуговуванням k заявок:

$$P_k=\frac{P_0\rho^k}{k!},\quad 1\le k\le n;$$

імовірність зайнятості всіх каналів обслуговуванням: $P_n=\dfrac{P_0\rho^n}{n!}$;

імовірність того, що заявка опиниться в черзі: $P_{оч}=\dfrac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}P_0$;

середня кількість заявок у черзі: $L_{оч}=\dfrac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2}P_0$;

середній час очікування заявки у черзі: $t_{оч}=\dfrac{L_{оч}}{\lambda}$;

середній час перебування заявки в СМО: $t_{СМО}=t_{оч}+t_{обсл}$;

середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів: $n_з=\rho$;

середня кількість вільних каналів: $n_в=n-n_з$;

коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування: $k_з=\dfrac{n_з}{n}$;

середня кількість заявок в СМО: $z=L_{оч}+n_з$.

Характеристики СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги – це такі характеристики:

імовірність простою каналів обслуговування, тобто заявок немає ($k=0$):

$$P_0=\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{\rho^k}{k!}+\frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left(1-\left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right)\right)^{-1};$$

імовірність відмови в обслуговуванні: $P_{відм} = \dfrac{P_0 \cdot \rho^{n+m}}{n! \cdot n^m}$;

імовірність обслуговування: $P_{обсл} = 1 - P_{відм}$;

абсолютна пропускна спроможність: $A = \lambda \cdot P_{обсл}$;

середня кількість зайнятих каналів: $n_з = \dfrac{A}{\mu}$;

середня кількість заявок у черзі:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1 - (\rho/n)^m (m + 1 - m\rho/n)}{(1 - \rho/n)^2} \cdot P_0;$$

середній час очікування обслуговування: $t_{оч} = \dfrac{L_{оч}}{\lambda}$;

середня кількість заявок у системі: $z = L_{оч} + n_з$;

середній час перебування в системі: $t_{СМО} = \dfrac{z}{\lambda}$.

11.3. Тренувальні вправи

11.3.1. СМО з відмовами. У відділі технічного контролю (ВТК) цеху працюють три контролери. Якщо деталь надходить до ВТК, коли всі контролери зайняті обслуговуванням деталей, що надійшли раніше, то вона проходить неперевіреною. Середня кількість деталей, що надходять до ВТК протягом години, дорівнює 24, середній час, який витрачає контролер на обслуговування однієї деталі, дорівнює 5 хвилин.

Обчисліть основні характеристики СМО. Визначте ймовірність того, що деталь пройде ВТК необслуженою, наскільки завантажені контролери і скільки їх необхідно поставити, щоб $P_{обсл} \geq 0{,}95$.

Розв'язання.

За умовою задачі потік заявок має такі характеристики:

інтенсивність потоку $\lambda = 24$ деталей/год, або $\lambda = 0{,}4$ деталей/хв,

середній час обслуговування $t_{обсл} = 5$ хв, тоді інтенсивність потоку обслуговування $\mu = \dfrac{1}{t_{обсл}} = 0{,}2,$

інтенсивність навантаження $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu} = 2$.

Обчислимо основні характеристики СМО.

Виберіть правильне:

а) імовірність простою каналів обслуговування $P_0 = 0{,}21$;

імовірність відмови в обслуговуванні $P_{відм} = 0{,}16$;

імовірність обслуговування $P_{обсл} = 0{,}84$;

середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів $n_з = 1{,}58$;

частка каналів, зайнятих обслуговуванням $k_з = 0{,}526$;

абсолютна пропускна спроможність $A = 0{,}316$;

б) імовірність простою каналів обслуговування $P_0 = 0{,}1587$;

імовірність відмови в обслуговуванні $P_{відм} = 0{,}21$;

імовірність обслуговування $P_{обсл} = 0{,}79$;

середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів $n_з = 1{,}58$;

частка каналів, зайнятих обслуговуванням $k_з = 0{,}526$;

абсолютна пропускна спроможність $A = 0{,}316$;

в) імовірність простою каналів обслуговування $P_0 = 0{,}1587$;

імовірність відмови в обслуговуванні $P_{відм} = 0{,}42$;

імовірність обслуговування $P_{обсл} = 0{,}58$;

середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів $n_з = 2{,}38$;

частка каналів, зайнятих обслуговуванням $k_з = 0{,}526$;

абсолютна пропускна спроможність $A = 0{,}42$.

Вибір "б" є правильним.

Давайте разом переглянемо алгоритм обчислення.

Імовірність простою каналів обслуговування визначають за формулою:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{\rho^k}{k!}}.$$

Тому

$$P_0 = \frac{1}{\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!}} = 0{,}1587.$$

Імовірність відмови в обслуговуванні визначають за формулою:

$$P_{відм} = P_n = \frac{P_0 \rho^n}{n!}.$$

Тому

$$P_{відм} = \frac{0{,}1587 \cdot 2^3}{3!} = 0{,}21.$$

Імовірність обслуговування визначають за формулою:

$$P_{обсл} = 1 - P_{відм}.$$

Тому

$$P_{обсл} = 1 - 0{,}21 = 0{,}79.$$

Середню кількість зайнятих обслуговуванням каналів визначають за формулою:

$$n_з = \rho \cdot P_{обсл}.$$

Тому

$$n_з = 2 \cdot 0{,}79 = 1{,}58.$$

Знаходимо частку каналів, зайнятих обслуговуванням:

$$k_з = \frac{n_з}{n} = \frac{1{,}58}{3} = 0{,}526.$$

Абсолютну пропускну спроможність визначають за формулою:

$$A = \lambda \cdot P_{обсл}.$$

Тому

$$A = 0{,}4 \cdot 0{,}79 = 0{,}316.$$

Отже, обчислено основні характеристики СМО і визначено, що з імовірністю 21 % за $n=3$ деталь пройде ВТК без обслуговування, водночас контролери будуть зайняті обслуговуванням на 53 %.

Проводимо аналогічні розрахунки для $n = 4$.

Дістанемо (виберіть правильну відповідь):

а) $P_0 = 0{,}14, \quad P_{відм} = 0{,}093, \quad P_{обсл} = 0{,}907$;

б) $P_0 = 0{,}24, \quad P_{відм} = 0{,}08, \quad P_{обсл} = 0{,}92$;

в) $P_0 = 0{,}18, \quad P_{відм} = 0{,}073, \quad P_{обсл} = 0{,}927$.

Вибір "а" є правильним.

Оскільки $P_{обсл} = 0{,}907 \le 0{,}95$, то проводимо розрахунки для $n=5$.

Матимемо (виберіть правильну відповідь):

а) $P_0 = 0{,}137, \quad P_{відм} = 0{,}035, \quad P_{обсл} = 0{,}965$;

б) $P_0 = 0{,}173, \quad P_{відм} = 0{,}05, \quad P_{обсл} = 0{,}95$;

в) $P_0 = 0{,}187, \quad P_{відм} = 0{,}02, \quad P_{обсл} = 0{,}98$.

Вибір "а" є правильним, отже, ми дістали, що $P_{обсл} = 0{,}965 \ge 0{,}95$.

Тобто, щоб забезпечити ймовірність обслуговування більшою за 95 %, необхідно не менше як п'ять контролерів.

11.3.2. СМО з необмеженим очікуванням. Ощадкаса має трьох контролерів-касирів ($n=3$) для обслуговування вкладників. Потік вкладників надходить в ощадкасу з інтенсивністю $\lambda = 30$ людин на годину. Середня тривалість обслуговування контролером-касиром одного вкладника дорівнює $t_{обсл} = 3$хв.

Визначте характеристики ощадкаси як об'єкту СМО.

Розв'язання.

Розглядатимемо ощадкасу як СМО з необмеженим очікуванням.

Інтенсивність потоку обслуговування дорівнює:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = \frac{1}{3}.$$

Тоді маємо таку інтенсивність навантаження:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{30/60}{1/3} = 1{,}5.$$

Обчислимо основні характеристики СМО.

Виберіть правильне:

а) імовірність простою контролерів-касирів $P_0 = 0{,}210$;

імовірність застати всіх контролерів зайнятими $P_n = 0{,}210$;

імовірність черги $P_{оч} = 0{,}118$;

середня кількість заявок у черзі $L_{оч} = 0{,}236$;

середній час очікування заявки в черзі $t_{оч} = 0{,}472$ хв;

середній час перебування заявки в СМО $t_{СМО} = 2{,}472$ хв;

середня кількість вільних каналів $n_в = 1{,}5$;

коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування $k_з = 0{,}5$;

середня кількість відвідувачів в ощадкасі $z = 2{,}736$ осіб;

б) імовірність простою контролерів-касирів $P_0 = 0{,}210$;

імовірність застати всіх контролерів зайнятими $P_n = 0{,}118$;

імовірність черги $P_{оч} = 0{,}210$;

середня кількість заявок у черзі $L_{оч} = 0{,}226$;

середній час очікування заявки в черзі $t_{оч} = 0{,}472$ хв;

середній час перебування заявки в СМО $t_{СМО} = 3{,}472$ хв;

середня кількість вільних каналів $n_в = 2{,}5$;

коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування $k_з = 0{,}5$;

середня кількість відвідувачів в ощадкасі $z = 2{,}736$ осіб;

в) імовірність простою контролерів-касирів $P_0 = 0{,}210$;

імовірність застати всіх контролерів зайнятими $P_n = 0{,}118$;

імовірність черги $P_{оч} = 0{,}118$;

середня кількість заявок у черзі $L_{оч} = 0{,}236$;

середній час очікування заявки в черзі $t_{оч} = 0{,}472$ хв;

середній час перебування заявки в СМО $t_{СМО} = 3{,}472$ хв;

середня кількість вільних каналів $n_в = 1{,}5$;

коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування $k_з = 0{,}5$;

середня кількість відвідувачів в ощадкасі $z = 1{,}736$ осіб;

Вибір "в" є правильним.

Тепер перевіримо правильність обчислень разом.

Імовірність простою контролерів-касирів протягом робочого дня обчислюють за формулою:

$$P_0 = \frac{1}{\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} + \frac{\rho^{n+1}}{n!\left(n-\rho\right)}.$$

Тому

$$P_0 = \frac{1}{\frac{1{,}5^0}{0!} + \frac{1{,}5^1}{1!} + \frac{1{,}5^2}{2!} + \frac{1{,}5^3}{3!}} + \frac{1{,}5^4}{3!(3-1{,}5)} = 0{,}210.$$

Імовірність того, що всі контролери-касири зайняті, обчислюють за формулою:

$$P_n = \frac{P_0 \rho^n}{n!}.$$

Тому

$$P_n = \frac{1{,}5^3}{3!} \cdot 0{,}21 = 0{,}118.$$

Імовірність черги визначають за формулою:

$$P_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)} P_0 .$$

Тому

$$P_{оч} = \frac{1,5^4}{3!(3-1,5)} \cdot 0,21 = 0,118 .$$

Середню кількість заявок в черзі обчислюють за формулою:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{(n-1)!(n-\rho)^2} P_0 .$$

Тоді

$$L_{оч} = \frac{1,5^4}{(3-1)!(3-1,5)^2} \cdot 0,21 = 0,236 .$$

Середній час очікування заявки в черзі обчислюють за формулою:

$$t_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda},$$

становить:

$$t_{оч} = \frac{0,236}{0,5} = 0,472 \text{ хв.}$$

Середній час перебування заявки в СМО обчислюють за формулою:

$$t_{СМО} = t_{оч} + t_{обсл},$$

становить:

$$t_{СМО} = 0,472 + 3 = 3,472 \text{ хв.}$$

Середня кількість вільних каналів згідно з формулою:

$$n_в = n - n_з = n - \rho$$

дорівнює:

$$n_в = 3 - 1{,}5 = 1{,}5.$$

Коефіцієнт зайнятості каналів обслуговування згідно з формулою:

$$k_з = \frac{n_з}{n}$$

становить:

$$k_з = \frac{1{,}5}{3} = 0{,}5.$$

Середня кількість відвідувачів в ощадкасі згідно з формулою:

$$z = L_{оч} + n_з$$

становить:

$$z = 0{,}235 + 1{,}5 = 1{,}736 \text{ осіб.}$$

Таким чином, імовірність простою контролерів-касирів становить 21 % робочого часу; імовірність того, що відвідувачу доведеться очікувати в черзі, дорівнює 11,8 %; середня кількість відвідувачів в черзі становить 0,236 осіб; середній час, протягом якого відвідувачі очікуватимуть на обслуговування, дорівнює 0,472 хв.

11.3.3. СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги. До овочевого магазину надходять ранні овочі із приміських теплиць. Автомобілі з вантажем прибувають у різний час з інтенсивністю $\lambda = 6$ машин на день. Підсобні приміщення й устаткування для підготовки овочів до продажу дають змогу одночасно обробляти і зберігати товар, привезений двома автомашинами ($m = 2$). У магазині працюють три фасувальники ($n = 3$), кожен із яких у середньому обробляє товар з однієї машини протягом $t_{обсл} = 4$ год. Тривалість робочого дня за умови позмінної роботи складає 12 год.

Обчисліть основні характеристики СМО. Визначте, якою має бути ємність підсобних приміщень для того, щоб імовірність повного оброблення товарів була $P_{обсл} \geq 0{,}97$.

Розв'язання.

Визначимо інтенсивність завантаження фасувальників:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = 1 \cdot 12 / 4 = 3,$$

тобто 3 автомобілі на день.

Тоді інтенсивність навантаження становить:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{6}{3} = 2.$$

Обчислимо основні характеристики СМО. Нагадаємо, що це СМО з очікуванням і з обмеженою довжиною черги.

Виберіть правильне:

а) імовірність простою фасувальників, що пов'язана з відсутністю машин (заявок) $P_0 = 0{,}128$;

імовірність відмови в обслуговуванні $P_{відм} = 0{,}025$;

імовірність обслуговування $P_{обсл} = 0{,}975$;

б) імовірність простою фасувальників за відсутності машин (заявок) $P_0 = 0{,}128$;

імовірність відмови в обслуговуванні $P_{відм} = 0{,}055$;

імовірність обслуговування $P_{обсл} = 0{,}945$;

в) імовірність простою фасувальників за відсутності машин (заявок) $P_0 = 0{,}128$;

імовірність відмови в обслуговуванні $P_{відм} = 0{,}075$;

імовірність обслуговування $P_{обсл} = 0{,}925$.

Вибір "в" є правильним.

А тепер перевіримо правильність обчислень.

Імовірність простою фасувальників за відсутності машин (заявок) обчислюємо за формулою:

$$P_0 = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} + \frac{\rho^{n+1}}{n!(n-\rho)}\left[1 - \left(\frac{\rho}{n}\right)^m\right]}$$

і дістаємо:

$$P_0 = \frac{1}{\frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{3!(3-2)}\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]} = 0{,}128.$$

Імовірність відмови в обслуговуванні обчислюємо за формулою:

$$P_{відм} = \frac{P_0 \cdot \rho^{n+m}}{n!\, n^m}$$

і дістаємо:

$$P_{відм} = \frac{0{,}128 \cdot 2^{3+2}}{3!3^2} = 0{,}075.$$

Імовірність обслуговування обчислюємо за формулою:

$$P_{обсл} = 1 - P_{відм}$$

і дістаємо:

$$P_{обсл} = 1 - 0{,}075 = 0{,}925.$$

Оскільки $P_{обсл} = 0{,}925 \le 0{,}97$, робимо обчислення для $m = 3$.

Після цього маємо такий результат (виберіть правильний варіант):

а) $P_0 = 0{,}122, \quad P_{відм} = 0{,}048, \quad P_{обсл} = 0{,}952$;

б) $P_0 = 0{,}122, \quad P_{відм} = 0{,}084, \quad P_{обсл} = 0{,}916$;

в) $P_0 = 0{,}212, \quad P_{відм} = 0{,}068, \quad P_{обсл} = 0{,}932$.

Вибір "а" є правильним.

Оскільки $P_{обсл} = 0{,}952 \le 0{,}97$, приймаємо $m = 4$.

Для цього випадку виберіть правильний варіант:

а) $P_0 = 0{,}12, \quad P_{відм} = 0{,}018, \quad P_{обсл} = 0{,}982$;

б) $P_0 = 0{,}12, \quad P_{відм} = 0{,}028, \quad P_{обсл} = 0{,}972$;

в) $P_0 = 0{,}22, \quad P_{відм} = 0{,}008, \quad P_{обсл} = 0{,}992$.

Вибір "б" є правильним.

Таким чином, ємність підсобних приміщень магазину має бути такою, щоб уміщувати товар, привезений 4 автомашинами, водночас імовірність повного оброблення товару становитиме $P_{обсл} = 0{,}972$.

Для того щоб досягти заданої ймовірності обслуговування, можна йти не тільки шляхом збільшення площі підсобних приміщень, але і збільшувати кількість фасувальників, проводячи послідовно обчислення СМО для $n = 4,\ 5$ і т. д.

Задачу можна також розв'язати, збільшуючи ємність підсобних приміщень, кількість фасувальників, зменшуючи час оброблення товарів.

Знайдемо решту параметрів СМО для випадку, який ми щойно розраховували, за $P_0 = 0{,}12, \quad P_{відм} = 0{,}028, \quad P_{обсл} = 0{,}972$.

Виберіть правильне щодо значення параметрів СМО:

а) абсолютна пропускна спроможність: $A = 6{,}832$ машин за день;

середня кількість каналів, що зайняті обслуговуванням, тобто кількість фасувальників: $n_з = 1{,}944$ осіб;

середня кількість заявок у черзі $L_{оч} = 0{,}548$;

середній час очікування обслуговування $t_{оч} = 0{,}09$ днів;

середня кількість машин у магазині $z = 3{,}492$ машин;

середній час перебування машини в магазині $t_{СМО} = 0{,}415$ днів;

б) абсолютна пропускна спроможність $A = 5{,}832$ машин за день;

кількість каналів, що зайняті обслуговуванням, тобто кількість фасувальників: $n_з = 1{,}944$ осіб;

середня кількість заявок у черзі $L_{оч} = 0{,}548$;

середній час очікування обслуговування $t_{оч} = 0{,}09$ днів;

середня кількість машин у магазині $z = 2{,}492$ машин;

середній час перебування машини в магазині $t_{СМО} = 0{,}415$ днів;

в) абсолютна пропускна спроможність $A = 5{,}832$ машин за день;

кількість каналів, що зайняті обслуговуванням, тобто кількість фасувальників: $n_з = 1{,}914$ осіб;

середня кількість заявок у черзі $L_{оч} = 0{,}548$;

середній час очікування обслуговування $t_{оч} = 0{,}07$ днів;

середня кількість машин у магазині $z = 2{,}402$ машин;

середній час перебування машини в магазині $t_{СМО} = 0{,}415$ днів.

Вибір "б" є правильним.

Порівняємо тепер наші розрахунки.

Абсолютну пропускну спроможність обчислюємо за формулою:

$$A = \lambda \cdot P_{обсл}$$

і дістаємо:

$$A = 0{,}972 \cdot 6 = 5{,}832 \text{ машин за день.}$$

Середню кількість працівників, що зайняті обслуговуванням, тобто кількість фасувальників, обчислюємо за формулою:

$$n_з = \frac{A}{\mu}$$

і дістаємо:

$$n_з = \frac{5{,}832}{3} = 1{,}944 \text{ осіб.}$$

Середню кількість заявок у черзі обчислюємо за формулою:

$$L_{оч} = \frac{\rho^{n+1}}{n \cdot n!} \cdot \frac{1-(\rho/n)^m (m+1-m\rho/n)}{(1-\rho/n)^2} \cdot P_0$$

і дістаємо:

$$L_{оч} = \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{1-(2/3)^4 (4+1-4 \cdot 2/3)}{(1-2/3)^2} \cdot 0{,}12 = 0{,}548.$$

Середній час очікування у черзі обчислюємо за формулою:

$$t_{оч} = \frac{L_{оч}}{\lambda}$$

і дістаємо:

$$t_{оч} = \frac{0{,}548}{6} = 0{,}09 \text{ днів.}$$

Середню кількість машин у магазині обчислюємо за формулою:

$$z = L_{оч} + n_з$$

і дістаємо:

$$z = 0{,}548 + 1{,}944 = 2{,}492 \text{ машин.}$$

Середній час перебування машини у магазині обчислюємо за формулою:

$$t_{СМО} = \frac{z}{\lambda}$$

і дістаємо:

$$t_{СМО} = \frac{2{,}492}{6} = 0{,}415 \text{ днів.}$$

Отже, розв'язання закінчено.

11.4. Виконання розрахунків у MS Excel

Завдання. У відділі технічного контролю (ВТК) працюють три контролери. Якщо деталь надходить у ВТК, коли всі контролери зайняті перевіркою деталей, що надійшли раніше, то вона проходить ВТК без перевірки. Середня кількість деталей, що надходять до ВТК протягом години, дорівнює 24, середній термін, протягом якого один контролер здійснює перевірку однієї деталі, дорівнює 5 хвилин.

Необхідно: знайти ймовірність того, що деталь пройде ВТК без перевірки; визначити, наскільки завантажені контролери і, якщо це необхідно, скільки їх потрібно, щоб $P_{обсл} \geq 0{,}95$.

Розв'язання.

Виконаємо формалізацію задачі. По-перше, слід зазначити, що це задача про систему масового обслуговування з відмовами. За умовою задачі маємо, що $\lambda = 24$ деталей/год, або $\lambda = 0{,}4$деталей/хв, $t_{обсл} = 5$ хв. Звідси інтенсивність потоку обслуговування становить:

$$\mu = \frac{1}{t_{обсл}} = 1/5 = 0{,}2\,,$$

а інтенсивність завантаження дорівнює:

$$\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{0,4}{0,2} = 2 .$$

Обчислимо характеристики сталого режиму СМО з відмовами для випадку, коли кількість контролерів відповідає умовам задачі ($n = 3$). Для цього на робочому аркуші книги MS Excel записуємо розв'язок у такому вигляді (рис. 11.1).

За розрахунками маємо, що ймовірність того, що в тому випадку, коли кількість контролерів дорівнює трьом, деталь пройде через ВТК без перевірки, становить 21 %, водночас всі контролери будуть зайняті перевіркою на 53 %.

Оскільки за $n = 3$ маємо ймовірність того, що деталь потрапить на перевірку, є нижчою за норму ($P_{обсл} = 0,79 \leq 0,95$), то продовжуємо розрахунки для більшої кількості контролерів.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1		**Характеристики сталого режиму СМО з відмовами**							
2									
3	**λ =**	**0,4**							
4	**μ =**	**0,2**							
5	**t =**	**5**							
6	**ρ =**	**2**						**n = 3**	
7	**Імовірність простою каналів обслуговування**							**0,158**	
8	**Імовірність відмови в обслуговуванні**							**0,21**	
9	**Імовірність обслуговування**							**0,79**	**< 0,95**
10	**Середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів**							**1,58**	
11	**Частка каналів, зайнятих обслуговуванням**							**0,53**	
12	**Абсолютна пропускна спроможність**							**0,32**	

Рис. 11.1. **Характеристики СМО з відмовами за *n* = 3**

Аналогічно виконуємо розрахунки для випадку, коли кількість контролерів було збільшено до чотирьох (рис. 11.2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1		Характеристики сталого режиму СМО з відмовами									
2											
3	λ =	0,4									
4	μ =	0,2									
5	t =	5									
6	ρ =	2						n = 3		n = 4	
7	Імовірність простою каналів обслуговування							0,158		0,14	
8	Імовірність відмови в обслуговуванні							0,21		0,095	
9	Імовірність обслуговування							0,79	< 0,95	0,905	< 0,95
10	Середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів							1,58		1,81	
11	Частка каналів, зайнятих обслуговуванням							0,53		0,45	
12	Абсолютна пропускна спроможність							0,32		0,36	

Рис. 11.2. **Характеристики СМО з відмовами для *n* = 4**

Отже, для $n = 4$ ми теж маємо, що ймовірність того, що деталь потрапить на перевірку, є нижчою за норму: $P_{обсл} = 0{,}905 \leq 0{,}95$, тому продовжуємо ітерації.

Проводимо розрахунки, збільшивши кількість контролерів до п'яти. (рис. 11.3).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1		Характеристики сталого режиму СМО з відмовами											
2													
3	λ =	0,4											
4	μ =	0,2											
5	t =	5											
6	ρ =	2						n = 3		n = 4		n = 5	
7	Імовірність простою каналів обслуговування							0,158		0,14		0,14	
8	Імовірність відмови в обслуговуванні							0,21		0,095		0,037	
9	Імовірність обслуговування							0,79	< 0,95	0,905	< 0,95	0,963	> 0,95
10	Середня кількість зайнятих обслуговуванням каналів							1,58		1,81		1,93	
11	Частка каналів, зайнятих обслуговуванням							0,53		0,45		0,39	
12	Абсолютна пропускна спроможність							0,32		0,36		0,39	

Рис. 11.3. **Характеристики СМО з відмовами для *n* = 5**

Для випадку $n = 5$розрахунки дали такі результати: $P_0 = 0{,}137$, $P_{відм} = 0{,}037$ та $P_{обсл} = 0{,}963 \geq 0{,}95$.

Звідси випливає, що для забезпечення ймовірності перевірки більш ніж 95 % деталей необхідно, щоб у ВТК працювало не менше як п'ять контролерів.

11.5. Запитання для самоперевірки

11.5.1. Наведіть основні поняття, які застосовують у теорії систем масового обслуговування.

11.5.2. Назвіть принципи, за якими здійснюють класифікацію систем масового обслуговування.

11.5.3. Наведіть принципи, що визначають дисципліну черги.

11.5.4. Які характеристики має простий потік заявок?

11.5.5. Який закон розподілу ймовірностей використовують у теорії масового обслуговування для характеристики простого потоку заявок, що надходять на вхід системи?

11.5.6. Яку кількість заявок у популяції передбачають у теорії масового обслуговування?

11.5.7. Що вважають основною характеристикою якості систем масового обслуговування?

11.5.8. Якими основними параметрами визначають конфігурацію системи масового обслуговування?

11.5.9. Який закон розподілу ймовірності зазвичай використовують у теорії масового обслуговування для опису часу, що витрачають на обслуговування заявок?

11.5.10. Відповідно до теорії масового обслуговування, як можна охарактеризувати кількість заявок, що одночасно перебувають у черзі?

11.6. Практичні завдання

11.6.1. Контроль готової продукції фірми виконують 5 контролерів. Якщо виріб надходить на контроль, коли всі контролери зайняті перевіркою готових виробів, то він залишається неперевіреним. Середня кількість виробів, що випускає фірма, становить 25 виробів за годину. Середній час на перевірку одного виробу – 5 хв.

Обчисліть основні характеристики СМО. Визначте ймовірність того, що виріб пройде перевірку, наскільки завантажені контролери і скільки їх має бути, щоб $P_{обсл} \geq 0{,}96$.

11.6.2. Прибуткова каса міського району з часом роботи 8 годин на день проводить приймання від населення комунальних послуг і різних платежів у середньому від 280 осіб на день. У прибутковій касі працюють 4 оператори-касири. Середня тривалість обслуговування одного клієнта становить 4 хв.

Визначте характеристики роботи прибуткової каси як об'єкта СМО.

11.6.3. На АЗС встановлено 4 колонки для видавання бензину. Біля станції є майданчик на дві машини для очікування заправляння. На станцію прибуває в середньому 20 маш./год. Середній час заправляння однієї машини – 3,5 хв.

Обчисліть основні характеристики СМО. Визначте ймовірність відмови і середню довжину черги.

11.6.4. Унаслідок статистичних досліджень було встановлено, що в магазині самообслуговування потік покупців можна розглядати як найпростіший з інтенсивністю $\lambda = 0{,}1$ (покупець на хвилину). У цьому магазині є тільки один касовий апарат.

Визначте характеристики СМО за умови, що чергу обмежено контролером біля входу у зал самообслуговування: $m = 5$ покупців.

11.6.5. Унаслідок спостережень встановлено, що інтенсивність потоку телефонних дзвінків до кол-центру для повідомлення показників лічильників електроенергії становить $\lambda = 1{,}2$ звернень на хвилину, середня тривалість розмови (обслуговування заявки) $t_{обс} = 2{,}5$ хв і всі потоки подій (викликів і обслуговування) мають характер найпростіших пуассонівських потоків.

Визначте граничну (відносну та абсолютну) пропускну спроможність СМО, імовірність відмови, а також повну кількість обслужених і необслужених (які дістали відмову) заявок за 1 годину роботи СМО.

11.7. Тестові завдання

11.7.1. Є різні принципи, які визначають дисципліну черги. Чи може існувати такий принцип: "Останнім прийшов – першим обслуговують"?

Виберіть правильну відповідь:

а) ні, таке неможливо, у черзі завжди дії принцип: "Першим прийшов – першим обслуговують";

б) таке можливо тільки у випадку, коли перший і останній – це одна й та сама особа, тобто черги немає;

в) реалізація такого принципу можлива, але це може мати місце в екстремальних умовах.

11.7.2. За характером випадкового процесу, що відбувається в системі масового обслуговування, більшість СМО можна вважати марківськими. Виберіть правильну відповідь:

а) така модель є достатньо поширеною завдяки своїй простоті й наочності, однак у реальних задачах такий підхід не застосовують;

б) так, це достатньо часто реалізується в реальних економічних задачах, застосування такого наближення дозволяє дістати результати, що адекватно описують СМО;

в) таку модель достатньо часто застосовують, але тільки для здобуття попередніх результатів щодо оптимізації СМО.

11.7.3. Основним критерієм ефективності функціонування систем масового обслуговування вважають:

1) час перебування в черзі;

2) імовірність негайного обслуговування заявки, що надійшла;

3) імовірність відмови в обслуговуванні заявки, що надійшла;

4) інтенсивність потоку заявок.

Виберіть правильну відповідь:

а) лише показник (1);

б) або показник (2), або показник (3), що залежить від постановки задачі;

в) і показник (2), і показник (3) одночасно;

г) або показники (1) та (3), або показники (2) та (4);

д) усі чотири показники.

11.7.4. У чому полягає різниця між принципами FIFO (first-in-first-out) і LIFO (last-in-first-out)?

Виберіть правильну відповідь:

а) під час обліку запасів однорідного товару, який було придбано в різний час за різною ціною, доводиться визначати, що обслуговувати першим і фізично (на складі), і на папері (в бухгалтерських книгах); за методом FIFO першим видають найстаріший товар з тих, що надійшов, а за методом LIFO – найновіший товар;

б) принцип FIFO описує прямий перебіг оптимізації СМО, а принцип LIFO – зворотний перебіг;

в) і принцип FIFO, і принцип LIFO застосовують для оптимізації тієї самої СМО, і те, який з них треба обрати, визначають кількістю заявок у черзі.

11.7.5. За нормою робочого часу на ткацькій фабриці одна робітниця може одночасно обслуговувати тридцять ткацьких верстатів, забезпечуючи своєчасний їх запуск після розриву нитки. Як можна охарактеризувати модель такої системи масового обслуговування?

Виберіть правильну відповідь:

а) як багатоканальну однофазову з обмеженою довжиною черги;

б) як одноканальну однофазову з необмеженою довжиною черги;

а) як одноканальну багатофазову з обмеженою довжиною черги;

г) як одноканальну однофазову модель, що має обмежену довжину черги;

д) як багатоканальну однофазову модель з необмеженою довжиною черги.

11.7.6. У теорії масового обслуговування для опису простого потоку заявок, що надходять на вхід системи, використовують розподіл імовірностей:

а) нормальний;

б) експоненціальний;

в) пуассонівський;

г) біноміальний.

11.7.7. У теорії масового обслуговування передбачають, що кількість заявок у черзі є:

а) фіксованою або змінною;

б) обмеженою або необмеженою;

в) відомою або невідомою;

г) випадковою або детермінованою.

11.7.8. Двома основними параметрами, які визначають конфігурацію системи масового обслуговування, є:

а) темп надходження і темп обслуговування;

б) довжина черги і правило обслуговування;

в) розподіл часу між заявками і розподіл часу обслуговування;

г) кількість каналів і кількість фаз обслуговування.

11.7.9. У теорії масового обслуговування для опису часу, що витрачають на обслуговування заявок, зазвичай використовують розподіл ймовірностей:

а) нормальний;

б) експоненціальний;

в) пуассонівський;

г) біноміальний.

11.7.10. Ремонт комп'ютерів, що вийшли з ладу, виконують три фахівці, які працюють одночасно й незалежно один від одного.

Модель такої СМО можна охарактеризувати як:

а) багатоканальну модель, що має обмежену довжину черги;

б) одноканальну з необмеженою довжиною черги;

в) одноканальну з обмеженою довжиною черги;

г) багатоканальну модель, що має необмежену довжину черги.

11.8. Висновки до теми

Мета вивчення систем масового обслуговування полягає в тому, щоб узяти під контроль деякі характеристики цих системи, встановити залежність між кількістю одиниць, які виконують обслуговування, і якістю обслуговування. Якість обслуговування тим вища, чим більша кількість обслуговчих одиниць. Водночас економічно невигідно мати зайві обслуговчі одиниці.

У промисловості СМО застосовують для постачання сировини, матеріалів, комплектування на склад і видавання його зі складу; оброблення широкої номенклатури деталей на одному і тому самому устаткуванні; організації налагодження й ремонту устаткування; визначення оптимальної чисельності обслуговчих відділів та служб підприємств і т. д.

Залежно від характеру формування черги заявок системи масового обслуговування поділяють на такі групи:

системи з відмовами, у яких заявка не стає в чергу й залишає систему без обслуговування, якщо всі канали обслуговування зайняті;

системи з необмеженими очікуваннями, у яких заявка стає в чергу, якщо в момент її надходження всі канали були зайняті;

системи змішаного типу з очікуванням і обмеженою довжиною черги: заявка дістає відмову, якщо надходить тоді, коли всі місця в черзі зайняті, заявку, що потрапила в чергу, обслуговують обов'язково.

Рекомендована література: [1; 2; 5 – 11; 13 – 16; 18 – 27; 32 – 34; 36; 40 – 47].

Рекомендована література

1. Акулич И. Л. Математическое программирование в примерах и задачах : учеб. пособ. для студентов эконом. спец. вузов / И. Л. Акулич. – Москва : Высшая школа, 1986. – 320 с.

2. Афанасьєв М. Ю. Исследование операций в экономике : модели, задачи, решения : учеб. пособ. / М. Ю. Афанасьєв, Б. П. Суворов. – Москва : ИНФРА-М, 2003. – 444 с.

3. Базара М. Нелинейное программирование. Теория и алгоритмы / М. Базара, К. Шетти. – Москва : Мир, 1982. – 583 с.

4. Бродецкий Г. Л. Управление запасами / Г. Л. Бродецкий. – Москва : Эсмо, 2008. – 352 с.

5. Вітлінський В. В. Математичне програмування : навч.-метод. посібник для самост. вивч. дисц. / В. В. Вітлінський, С. І. Наконечний, Т. О. Терещенко. – Вид. 2-ге. – Київ : КНЕУ, 2006. – 248 с.

6. Дослідження операцій та методи оптимізації [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до практичних завдань для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. Л. М. Малярець, О. В. Мартинова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2019. – 85 с.

7. Єгоршин О. О. Математичне програмування : підручник / О. О. Єгоршин, Л. М. Малярець. – Харків : ВД "ІНЖЕК", 2006. – 438 с.

8. Железнякова Е. Ю. Методичні рекомендації до виконання індивідуальних завдань з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів усіх галузей знань денної форми навчання / Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2010. – 80 с.

9. Зайченко Ю. П. Дослідження операцій : підручник / Ю. П. Зайченко. – Київ : ВД "Слово", 2006. – 816 с.

10. Збірник вправ з навчальної дисципліни "Економіко-математичне моделювання" для студентів усіх галузей знань усіх форм навчання / уклад. Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2009. – 88 с.

11. Исследование операций в экономике : учеб. пособ. для вузов / под ред. Н. Ш. Кремера. – Москва : ЮНИТИ-ДАНА, 2002. – 407 с.

12. Исследование операций и методы оптимизации [Электронный ресурс] : методические рекомендации к практическим заданиям по разделу "Динамическое программирование" для иностранных студентов

всех специальностей первого (бакалаврского) уровня / сост. А. К. Шевченко, А. В. Жуков. – Харьков : ХНЭУ им. С. Кузнеца, 2019. – 44 с.

13. Интрилигатор М. Математические методы оптимизации и экономическая теория / М. Интрилигатор. – Москва : Айрис-пресс, 2002. – 553 с.

14. Каплан А. В. Решение экономических задач на компьютере / А. В. Каплан, В. Е. Каплан, М. В. Мащенко и др. – Москва : ДМК Пресс ; СПб. : Питер, 2004. – 600 с.

15. Карагодова О. О. Дослідження операцій : навч. посіб. / О. О. Карагодова, В. Р. Кігель, В. Д. Рожок. – Київ : ЦУЛ, 2007. – 256 с.

16. Карташевский В. Г. Основы теории массового обслуживания : учебник для вузов / В. Г. Карташевский. – Москва : Горячая линия. – Телеком, 2013. – 130 с.

17. Касьянов В. Н. Графы в программировании : обработка, визуализация и применение / В. Н. Касьянов, В. А. Евстигнеев. – СПб. : БХВ Петербург, 2003. – 1 104 с.

18. Кузнецов Ю. Н. Математическое программирование : учеб. пособ. / Ю. Н. Кузнецов, В. И. Кузубов, А. Б. Волощенко. – 2-е изд., пераб. и доп. – Москва : Высшая школа, 1980. – 300 с.

19. Лебедєва І. Л. Лабораторний практикум з оптимізаційних методів і моделей навчальної дисципліни "Економіко-математичні методи та модель" : навч.-практ. посіб. / І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2012. – 216 с.

20. Ложковський А. Г. Теорія масового обслуговування в телекому-нікаціях / А. Г. Ложковський. – Одеса : ОНАЗ ім. О. С. Попова, 2010. – 112 с.

21. Малярець Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації : метод. рекомендації і завдання до виконання контрольних робіт для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / Л. М. Малярець, О. В. Мінєнкова. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 44 с.

22. Малярець Л. М. Дослідження операцій та методи оптимізації : практикум у 2-х ч. Частина 1 / Л. М. Малярець, І. Л. Лебедєва, Л. О. Норік. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2017. – 164 с.

23. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи і моделі : навч. посіб. / Л. М. Малярець. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. – 412 с.

24. Малярець Л. М. Економіко-математичні методи і моделі : навч.-практ. посіб. / Л. М. Малярець, Е. Ю. Железнякова, Є. Ю. Місюра. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – 320 с.

25. Малярець Л. М. Сучасні оптимізаційні методи в середовищі MatLab : навч. посіб. / Малярець Л. М., Рєзнік Є. В., Сінкевич Б. В. – Харків : Вид. ХНЕУ, 2011. – Ч. 1. – 360 с.; ч. 2. – 356 с.

26. Мур Дж. Экономическое моделирование в Microsoft Excel / Дж. Мур, Л. Р. Уэдерфорд; пер. с англ. – 6-е изд. – Москва : ИД "Вильямс", 2004. – 1 024 с.

27. Наконечний С. І. Математичне програмування : навч. посіб. / С. І. Наконечний, С. С. Савіна. – Київ : КНЕУ, 2005. – 452 с.

28. Невежин В. П. Теория игр. Примеры и задачи : учеб. пособ. / В. П. Невежин. – Москва : ФОРУМ; ИНФРА-М, 2014. – 128 с.

29. Оре О. Графы и их применение / О. Оре. – Москва : КомКнига, 2006. – 172 с.

30. Печерский С. Л. Теория игр для экономистов. Вводный курс : учеб. пособие / С. Л. Печерский. – СПб. : Изд-во Европейского ун-та в Санкт-Петербурге, 2001. – 342 с.

31. Стерлигова А. Н. Управление запасами в цепях поставок : Учебник. – Мосва : ИНФРА-М, 2008. – 430 с.

32. Стеценко І. В. Моделювання систем : навч. посіб. / І. В. Стеценко. – Черкаси : ЧДТУ, 2010. – 399 с.

33. Таха Х. А. Введение в исследование операций / Х. А. Таха ; пер. с англ. – 7-е изд. – Москва : ИД "Вильямс", 2005. – 912 с.

34. Экономико-математические методы и модели : учеб. пособ. / под общ. ред. А. В. Кузнецова. – Минск : БГЭУ, 1999. – 413 с.

35. Управление проектами : учеб. пособ. / Ю. И. Бурименко, Н. С. Бобровничая, Л. В. Галан и др. – Одесса : ОНАС им. А. С. Попова, 2013. – 212 с.

36. Федоренко І. К. Дослідження операцій в економіці : підручник / І. К. Федоренко, О. І. Черняк. – Київ : Знання, 2007. – 558 с.

37. Химмельблау Д. Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельблау. – Москва : Мир, 1975. – 535 с.

38. Шиян А. А. Теорія ігор: основи та застосування в економіці та менеджменті / А. А. Шиян. – Вінниця : ВНТУ, 2009. – 164 с.

39. Шрайбфедер Дж. Эффективное управление запасами / Дж. Шрайбфедер ; пер. с англ. – 2-е изд. – Москва : Альпина Бизнес Букс, 2006. – 304 с.

Інформаційні ресурси

40. Дослідження операцій та методи оптимізації : опорний конспект [Електронний ресурс] – Режим доступу : https://pns.hneu.edu.ua/course/view.php?id=2190#section-2.

41. Классификация экономико-математических методов [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://900igr.net/prezentatsii/ekonomika/ekonomicheskij-analiz/027-klassifikatsija-ekonomiko-matematicheskikh-metodov.html.

42. Короткий курс лекцій з дисципліни "Економіко-математичні методи і прикладні моделі" [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://studme.com.ua/158407209254/ekonomika/ekonomiko-matematicheskie_metody_i_prikladnye_modeli.htm.

43. Методичні рекомендації до виконання завдань для самостійної роботи [Електронний ресурс]. – Режим доступу : https://pns.hneu.edu.ua/course/view.php?id=2190#section-2.

44. Савчук В. П. Оптимізація фондового портфеля [Електронний ресурс]. – Режим доступу : http://www.management.com.ua/finance/ fin013.html.

45. Электронный учебник "Экономико-математические методы" [Электронный ресурс]. – Режим доступа : http://www.math.mrsu.ru/text/courses/method/nelineinoe_programmirovanie.htm.

46. LP Training [Electronic resource]. – Access mode : http://www.eudoxus.com/lp-training.

47. Mathematical Programming [Electronic resource]. – Access mode : http://web.mit.edu/15.053/www/AMP-Chapter-01.pdf.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Малярець Людмила Михайлівна
Лебедєва Ірина Леонідівна
Норік Лариса Олексіївна

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ

Практикум

У 2-х частинах

Частина 2

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Відповідальний редактор *М. М. Оленич*

Редактор *О. С. Новицька*

Коректор *О. С. Новицька*

План 2019 р. Поз. № 4-ЕНП. Обсяг 161 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.