Воронин Анатолий Витальевич, к.т.н., доцент, Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеца, г. Харьков, Украина, Voronin61@ukr.net

Гунько Ольга Владимировна, к. ф.-м. н., доцент, Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеца, г. Харьков, Украина, Olha.Hunko@hneu.net

Афанасьева Лидия Михайловна, к.т. н., доцент, Харьковский национальный экономический университет имени Семена Кузнеца, г. Харьков, Украина.

Проблемы устойчивости макроэкономических моделей динамики

Аннотация

Настоящая работа посвящена проблематике стабилизации экономического роста с применением традиционных макроэкономических стратегий. Поставленная цель предусматривает широкоформатное использование аппарата качественной теории дискретной экономической динамики. Предложен комплекс экономико-математических моделей, учитывающих специфику макроэкономических балансов, выдержанных в духе неокейнсианства. Существенным является анализ эффекта последействия, обусловленного «динамической памятью» о всех прошлых значениях по отношению к настоящему моменту времени инвестиционной политики и структуре потребления. При составлении динамических моделей экономического роста валового внутреннего продукта получены функциональные уравнения специфического типа такие, как разностные уравнения Вольтерра. Соответственно, для каждого из исследуемых вышеуказанных функциональных уравнений получен ряд неравенств, определяющих области параметрической устойчивости состояния равновесия. Сформулированы в явном виде структурные ограничения на базовые параметры модели мультипликатора-акселератора, и выполнен экономический анализ полученных результатов. Указаны условия по применению рассмотренных в работе экономико-математических моделей для целей прогнозирования и управления макроэкономической политикой государства.

Ключевые слова: валовый внутренний продукт, макроэкономический баланс, эффект последействия, инвестиционная политика, параметрическая устойчивость состояния равновесия, модель мультипликатора-акселератора.
GEL классификация: C250

Voronin Anatoly V., Ph.D., Associate Professor, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkiv, Ukraine, Voronin61@ukr.net

Gunko Olga Vladimirovna, Ph.D. Sc., Associate Professor, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkiv, Ukraine, Olha.Hunko@hneu.net

Afanasyeva Lydia Mikhailovna, Ph.D. Sci., Associate Professor, Simon Kuznets Kharkiv National University of Economics, Kharkiv, Ukraine.

Stability of discrete models of macroeconomic dynamics

Annotation

This paper is devoted to the problems of stabilizing economic growth using traditional macroeconomic strategies. The goal envisages the wide-format use of the apparatus of the qualitative theory of discrete economic dynamics. A set of economic and mathematical models that take into account the specifics of macroeconomic balances in the spirit of neo-Keynesianism is proposed. It is essential to analyze the effect of the aftereffect caused by the "dynamic memory" of all past values in relation to the present point in time of the investment policy and the consumption structure. In compiling the required and dynamic models of the economic growth of the gross domestic product, functional equations of a specific type were obtained, such as Volterra difference equations. Accordingly, for each of the above functional equations studied, a number of inequalities were obtained that determine the regions of parametric stability of the equilibrium state. Structural restrictions on the basic parameters of the accelerator multiplier model are formulated explicitly, and an economic analysis of the results obtained is carried out. The conditions for the application of the economic and mathematical models considered in the work for forecasting and managing the macroeconomic policy of the state are indicated.
Keywords: gross domestic product, macroeconomic balance, aftereffect, investment policy, parametric stability of the equilibrium state, multiplier accelerator model.
GEL классификация: C250

Введение. Государственная экономическая стратегия, направленная на стабильный рост таких базовых показателей, как валовый внутренний продукт (ВВП), требует поднять на более качественный уровень всю систему мониторинга и управления макроэкономическими процессами. Для достижения поставленной цели необходимо полное использование всего арсенала качественных средств и методов при решении различных аналитических и прогнозных задач. Преодоление подобного рода проблем не представляется возможным без применения экономико-математических моделей моделей, описывающих с определенных позиций и на соответствующем уровне агрегирования как состояния, так и последовательности состояний государственной экономики.

Литературный обзор. Динамические макроэкономические модели позволяют изучить эволюцию общественного производства на базе естественного баланса между потреблением, инвестиционной политикой и государственными расходами. Учет фактора времени в дискретной форме (месяцы, кварталы, годы) предопределяет с математических позиций применение разностных уравнений и их разного рода модификаций для конструирования моделей динамики. При анализе поведенческих свойств макроэкономических моделей особую роль играют качественные свойства исследуемых траекторий (без знания самих кривых). Важнейшим из этих свойств является устойчивость равновесных состояний моделей. Данному вопросу в экономической литературе посвящен целый ряд работ [2,4,5,6,7,10].

Анализ перечисленных источников свидетельствует о наличии ряда дополнительных проблем устойчивого поведения динамических траекторий, связанных с усложнением гипотез о структуре потребления и инвестирования. Таким допущением, в частности, является фактор эффекта последействия для вышеуказанных составляющих макроэкономического баланса.

Метод исследования. В начале рассмотрим одну из самых простых моделей, представленной у Аллена [1] и считающейся одной из основополагающих в теории экономического цикла Самуэльсона-Хикса. Математическая модель описывает взаимодействие в целочисленные моменты времени $n = 0,1,2,...$ дохода Y_n, функции потребления C_n, объема инвестиций I_n и независимых расходов G_n. Этот традиционный в экономической теории баланс между сбережениями и инвестициями представлен в форме

$$Y_n = C_n + I_n + G_n \tag{1}$$

Допускаем, что функция потребления C_n зависит от значения дохода в предыдущий момент времени, то есть имеет место запаздывание на один вре-менной шаг

$$C_n = cY_{n-1},$$

где $c-$предельная склонность к сбережениям, $0 < c < 1$. Относительно инвес-тиций положим

$$I_n = v(Y_{n-1} - Y_{n-2}),$$

то есть объем инвестиций пропорционален изменению дохода между $n-2$ и $n-1$ промежутками времени. Здесь $v > 0$ коэффициент, характеризующий мощность акселератора. Независимые расходы G_n есть заданная функция в дискретном времени.

Из (1) и последующих утверждений имеем динамическую модель в виде рекуррентного уравнения второго порядка:

$$Y_n - (v + c)Y_{n-1} + vY_{n-2} = G_n \tag{2}$$

Неоднородное рекуррентное уравнение (2) с соответствующим мультипликаторным уравне-нием

$$\mu^2 - (v + c)\mu + v = 0 \tag{3}$$

имеет общее решение в форме

$$Y(n) = A_1 q(n) + A_2 q_2(n) + u(n), \tag{4}$$

где $q_1(n), q_2(n) -$ линейно-независимые решения однородного рекуррентного уравнения (2) при $G_n \equiv 0$;

$u(n)-$ частное решение неоднородного уравнения;

A_1, A_2 – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий $Y(0), Y(1)$. В зависимости от параметров мультипликаторного уравнения (3) будут иметь место три комбинации линейно независимых решений $q_1(n), q_2(n)$.

Частное решение $u(n)$ имеет вид:

$$u(n)=\sum_{k=0}^{n-1} R(n-1-k)G(k+2) \tag{5}$$

где весовая функция $R(n-1-k)$ явным образом зависит от соответствующих $q_1(n), q_2(n)$. Положим $c=1-s$, где $0<s<1$ есть предельная склонность к сбережениям. В таком случае мультипликаторного уравнения (3) получим выражение

$$\mu^2-(v+1-s)\mu+v=0 \tag{6}$$

Квадратное уравнение (6) не имеет отрицательных действительных кор-ней. При условии $0<v<\left(1-\sqrt{s}\right)^2$ линейно независимые решения представле-ны как $q_1(n)=\mu_1^n,\quad q_2(n)=\mu_2^n,\quad \mu_1,\mu_2>0$. Если справедливо соотношение $v=\left(1-\sqrt{s}\right)^2$, то $\mu_1=\mu_2=1-\sqrt{s}$ и, соответственно, $q_1(n)=\left(1-\sqrt{s}\right)^n,\ q_2(n)=n\left(1-\sqrt{s}\right)^n$. При выполнении неравенства $\left(1-\sqrt{s}\right)^2<v<1$ корни (6) будут комплексно-сопряженными, а $q_1(n), q_2(n)$ обретут тригонометрическую форму.

В конкретном случае $v=1$, что соответствует границе устойчивости решений (2), корни (6) запишутся так : $\mu_{1,2}=1-\dfrac{s}{2}\pm\sqrt{\left(1-\dfrac{s}{2}\right)^2-1}$.

Пусть $\varphi=\arccos(1-\dfrac{s}{2})$. Тогда имеем $\mu_{1,2}=\cos(\varphi)\pm i\cdot\sin(\varphi)$ и, следовательно, $q_1(n)=\cos(n\varphi),\quad q_2(n)=\sin(n\varphi)$. Для этого примера весовая функция или так называемая резольвента представляется в виде:

$$R(n-1-k)=\frac{\sin((n-1-k)\varphi)}{\sin\varphi} \tag{7}$$

В таком случае частное неоднородное решение (5) получим в виде:

$$u(n)=\frac{1}{\sin\varphi}\sum_{k=0}^{n-1}\sin((n-k-1)\varphi)G(k+2). \tag{8}$$

Полагаем, что независимые государственные расходы совершают колебания с некоторой амплитудой A и частотой φ вокруг постоянного уровня G_0, то есть

$$G(n) = G_0 + A\sin(n\varphi) \tag{9}$$

Вполне очевидно, что выражение (8) является сверткой двух числовых последовательностей. Поэтому для получения явного решения $u(n)$ представляется эффективным применение $Z-$ преобразования, то есть дискретного преобразования Лапласа [3].

Используя свойства $Z-$ преобразования [3], будем иметь:

$$u(z) = z \cdot R(z)G(z) \tag{10}$$

где $R(z) = \dfrac{z}{z^2 - 2\cos\varphi \cdot z + 1}$, $\quad G(z) = \dfrac{G_0 z}{z-1} + \dfrac{A\sin\varphi \cdot z}{z^2 - 2\cos\varphi \cdot z + 1}$.

Из (10) следует алгебраическое выражение для $u(z)$:

$$u(z) = \frac{G_0 z^3}{(z-1)\left(z^2 - 2\cos\varphi \cdot z + 1\right)} + \frac{A \cdot \sin\varphi \cdot z^3}{\left(z^2 - 2\cos\varphi \cdot z + 1\right)}. \tag{11}$$

Обратное $Z-$преобразование для каждого из слагаемых дает [8]:

$$\frac{z^3}{(z-1)\left(z^2 - 2\cos\varphi \cdot z + 1\right)} \Rightarrow \frac{1}{2(1-\cos\varphi)} + \frac{1+2\cos\varphi}{2\sin\varphi}\sin(n\varphi) + \frac{1-2\cos\varphi}{2(1-\cos\varphi)}\cos(n\varphi),$$

$$\frac{z^3}{\left(z^2 - 2\cos\varphi \cdot z + 1\right)^2} \Rightarrow (K_1 + K_{01} \cdot n)\sin(n\varphi) + (1 + K_{02} \cdot n)\cos(n\varphi),$$

где $K_1 = \dfrac{\cos\varphi\left(3 - 2\cos^2\varphi\right)}{2\sin^3\varphi}$, $K_{01} = \dfrac{\cos\varphi}{\sin\varphi} = ctg\varphi$, $K_{02} = \dfrac{\left(1 - 2\cos^2\varphi\right)}{2\sin^2\varphi}$, $\cos\varphi = 1 - \dfrac{s}{2}$,

$\sin\varphi = \sqrt{1 - \left(1 - \dfrac{s}{2}\right)^2}$, $K_1 = \dfrac{3}{2}ctg\varphi - \dfrac{1}{2}ctg^3\varphi$, $\quad K_{02} = \dfrac{1}{2}\left(1 - ctg^2\varphi\right)$.

Обратное $Z-$преобразование с учетом необходимых тождественных преобразований запишется в виде:

$$u(n) = \frac{G_0}{2(1-\cos\varphi)} + \left[\frac{1+2\cos\varphi}{2\sin\varphi}G_0 + \left(\frac{3-2\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi} + n\right)A\cos\varphi\right]\sin(n\varphi) +$$

$$+\left[\frac{1-2\cos\varphi}{2(1-\cos\varphi)}G_0 + \left(1 + \left(\frac{1-2\cos^2\varphi}{2\sin^2\varphi}\right)\right)nA\sin\varphi\right]\cos(n\varphi) \tag{12}$$

Обозначим постоянное слагаемое в (12) как $Y^* = \dfrac{G_0}{2(1-\cos\varphi)}$ и выражая $cos\varphi$ через s, получим $Y^* = \dfrac{G_0}{s}$. Данный факт свидетельствует о наличии эффекта мультипликатора для равновесного значения дохода, что полностью соответствует макроэкономической теории [1].

В целом, частное решение (12) описывает поведение макроэкономического процесса (2) в условиях резонанса, обусловленного колебаниями независимых государственных расходов вокруг некоторого постоянного значения G_0. Если амплитуда A этих колебаний достаточно мала, то наблюдается медленный рост амплитуды колебаний национального дохода Y. На рис. 1а, 1б представлены переходные процессы для $u(n)$ в дискретном времени для различных значений предельной склонности к сбережению s.

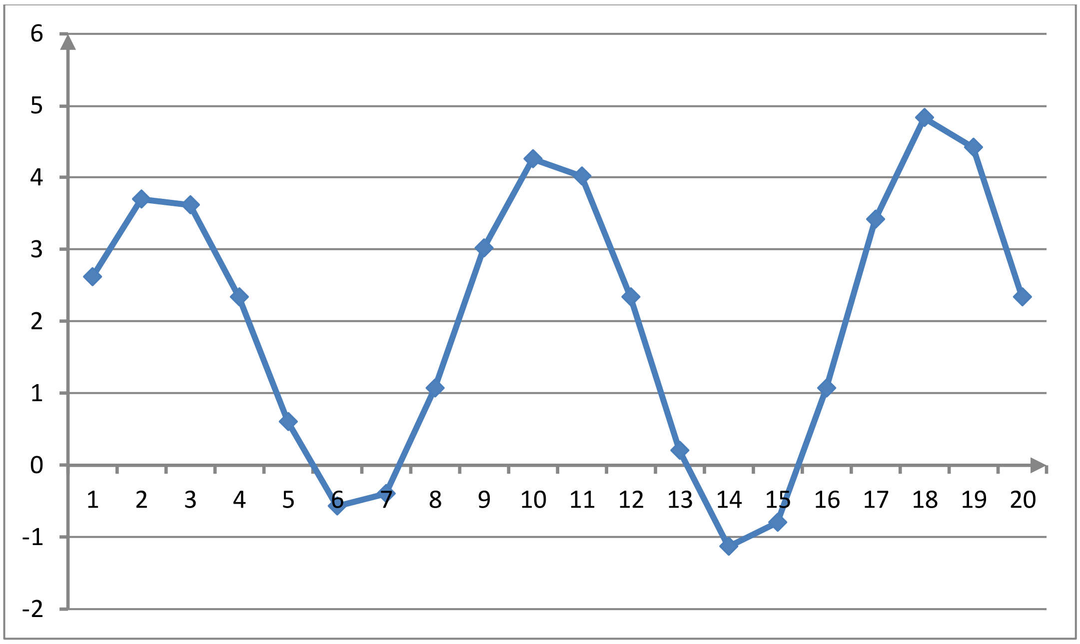

Рис. 1а. Дискретный резонанс при $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{4}, \quad s2 = 2-\sqrt{2}, \quad A = 0.1, \quad G_0 = 1$

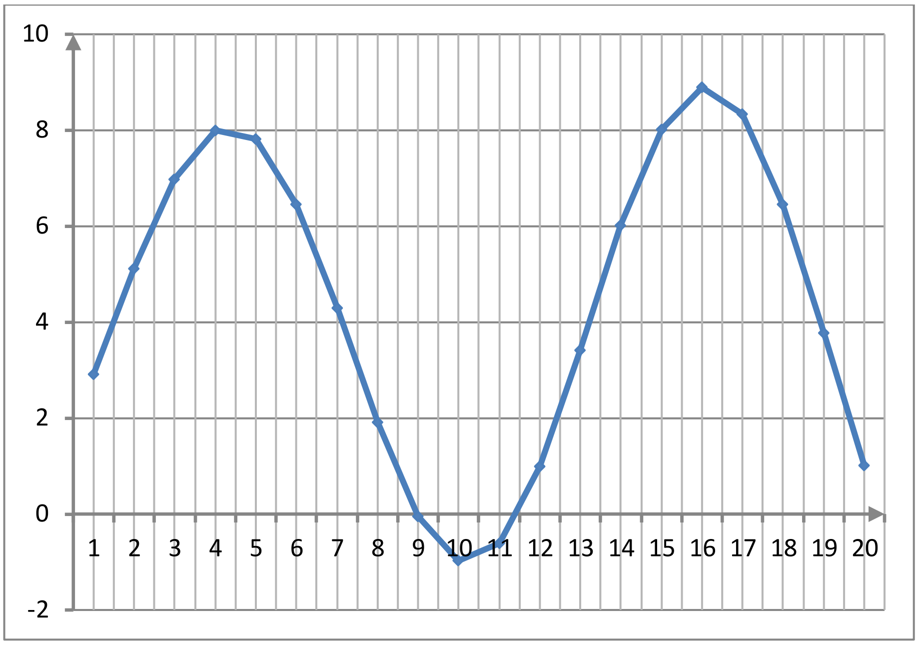

Рис. 1б. Дискретный резонанс при $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{6}, \quad s2 = 2 - \sqrt{3}, \quad A = 0.1, \quad G_0 = 1$

Рассмотренная нами ранее динамическая модель национального дохода, описываемая разностным уравнением (2), содержит только два временных запаздывания. Соответственно, свойства решений (2) полностью определены с помощью корней квадратного мультипликаторного уравнения (3). Иначе говоря, модель (2) генерирует процесс с двумя сосредоточенными запаздываниями.

Дальнейшее совершенствование модели динамики дохода предусматривает более реалистические предположения о наличии фактора запаздывания в исследуемом экономическом объекте. Одной из такого рода гипотез есть утверждение об имеющихся распределенных запаздываниях как на стороне потребления, так и в инвестиционной стратегии. Например, потребление имеет запаздывание на один период времени, а последствия инвестиционной политики проявляются через ряд временных промежутков, что, в свою очередь, коренным образом видоизменяет динамику дохода.

Предположим, что инвестиционная стратегия учитывает действие предыдущих m временных шагов, то есть

$$I_n = v \sum_{i=n-m}^{n-1} \xi_i \Delta Y(i).$$

Здесь ξ_i – весовые коэффициенты, учитывающие «вклад» каждого слагаемого в суммарный инвестиционный «портфель». Пусть все $\xi_i = \dfrac{1}{m}, \quad i = \overline{m, n-1}$, то есть имеет место равномерное распределение инвестиций на протяжении m временных интервалов. Не нарушая общности, допустим, что $G_n \equiv 0,$ и тогда разностное уравнение (2) запишется так:

$$y_n = c \cdot y_{n-1} + \frac{1}{m} \cdot v \cdot (y_{n-1} - y_{n-m-1}) \tag{13}$$

или

$$y_{n+1} - \left(c + \frac{v}{m}\right) \cdot y_n + \frac{v}{m} \cdot y_{n-m} = 0 \tag{14}$$

Разностное уравнение (14), так называемое трехчленное уравнение, имеет порядок $m+1$. Известно, что при условии $c + \frac{v}{m} = 1$ или $\frac{v}{m} = s$ все его решения будут колебательными, если

$$v > \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}$$

Для нескольких первых значений m нетрудно получить:

$$m = 1, \quad v > \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 0{,}25; \qquad m = 3, \quad v > \left(\frac{3}{4}\right)^4 = 0{,}316;$$

$$m = 2, \quad v > \left(\frac{2}{3}\right)^3 \approx 0{,}296; \qquad m = 4, \quad v > \left(\frac{4}{5}\right)^5 = 0{,}327.$$

Интересно заметить, что при больших m число v имеет предел $v^* = \frac{1}{e} \approx 0{,}368$.

Очевидно, что значение параметра $v^* > \left(\frac{m}{m+1}\right)^{m+1}$ является разделительным для осциллирующих и неосциллирующих динамических режимов. При данном v_0^* получим мультипликаторное уравнение:

$$\mu^{m+1} - \mu^m + \frac{m^m}{(m+1)^{m+1}} = 0 \tag{16}$$

Алгебраическое уравнение $m+1$ степени допускает следующую факторизацию:

$$\left(\mu - \frac{m}{m+1}\right)^2 \left(\mu^{m-1} + \frac{m-1}{m+1}\mu^{m-2} + \ldots + 2\frac{m^{m-3}}{(m+1)^{m-2}} + \frac{m^{m-2}}{(m+1)^{m-1}}\right) = 0 \tag{17}$$

Из (17) следует существование двухкратного корня $\mu_{1,2} = \frac{m}{m+1} < 1$. Согласно теореме Левина-Мэя [8], остальные $\mu_i (2 \le i \le m+1)$ по абсолютной величине меньше, чем $\frac{m}{m+1}$. Поэтому все решения разностного уравнения (15) монотонно стремятся к равновесному значению $Y^* = 0$. Если мы откажемся от предположения $v_0 = \left(\frac{m}{m+1} \right)^{m+1}$, то уравнение (15) преобразуется к форме:

$$y_{n+1} - y_n + s \cdot y_{n-m} = 0 \tag{18}$$

В таком случае справедливо условие леммы 3 из теоремы Левина-Мэя [8] о том, что все решения (18) асимптотически устойчивы по отношению к равновесию $Y^* = 0$, если

$$0 < s < 2\cos\left(\frac{m\pi}{2m+1} \right) \tag{19}$$

При $m = 1$ условие (19) имеет вид $0 < s < 1$. Это означает, что оно справедливо при любом значении предельной склонности к сбережению. Если $m = 2$, тогда (19) дает $0 < s < \cos\left(\frac{2\pi}{5} \right)$ или $0 < s < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Нетрудно заметить, что с увеличением m значение s становится малым, то есть $s << 1$.

В качестве иллюстрации приведем явный вид решений разностного уравнения (15) для $m = 1,2,3$:

1) $m = 1$. Разностное уравнение имеет второй порядок $y_{n+2} - y_{n+1} + \frac{1}{4} \cdot y_n = 0$. Очевидно, что мультипликаторы $\mu_{1,2} = \frac{1}{2}$ и решение есть $y(n) = (C_1 + C_2 n)\left(\frac{1}{2} \right)^n$. Постоянные C_1, C_2 определяются с помощью начальных условий $y(0), y(1)$.

2) $m = 2$ Уравнение (15) преобразуется к виду разностного уравнения третьего порядка $y_{n+3} - y_{n+2} + \frac{4}{27} \cdot y_n = 0$ с соответствующим мультипликаторным уравнением $\mu^3 - \mu^2 + \frac{4}{27} = 0$. Структура решения разностного уравнения представлена как

$$y(n) = (C_1 + C_2 n)\left(\frac{2}{3} \right)^n + C_3 \left(-\frac{1}{3} \right)^n.$$

Здесь, как и ранее, C_1, C_2, C_3 зависят от начальных условий $y(0), y(1), y(2)$.

3) $m = 3$. В данном случае имеем рекуррентное уравнение четвертого порядка

$$y_{n+4} - y_{n+3} + \frac{27}{256} \cdot y_n = 0.$$

Мультипликаторное уравнение $\mu^4 - \mu^3 + \frac{27}{256} = 0$ допускает факторизацию

$$\left(\mu - \frac{3}{4}\right)^2 \mu^2 + \frac{1}{2}\mu + \frac{3}{16} = 0$$

и имеет корни $\mu_{1,2} = \frac{3}{4}, \quad \mu_{3,4} = \frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{4}$.

Решение рекуррентного уравнения запишется в форме

$$y(n) = (C_1 + C_2 n)\left(\frac{3}{4}\right)^n + \left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^n \left(C_3 \cos(n\varphi) + C_2 \sin(n\varphi)\right),$$

где $\varphi = -arctg\sqrt{2}$.

Постоянные C_1, C_2, C_3, C_4 зависят от начальных условий $y(0), y(1), y(2), y(3)$.

На рис. 2а, 2б, 2в представлены графические иллюстрации вышеприведенных решений.

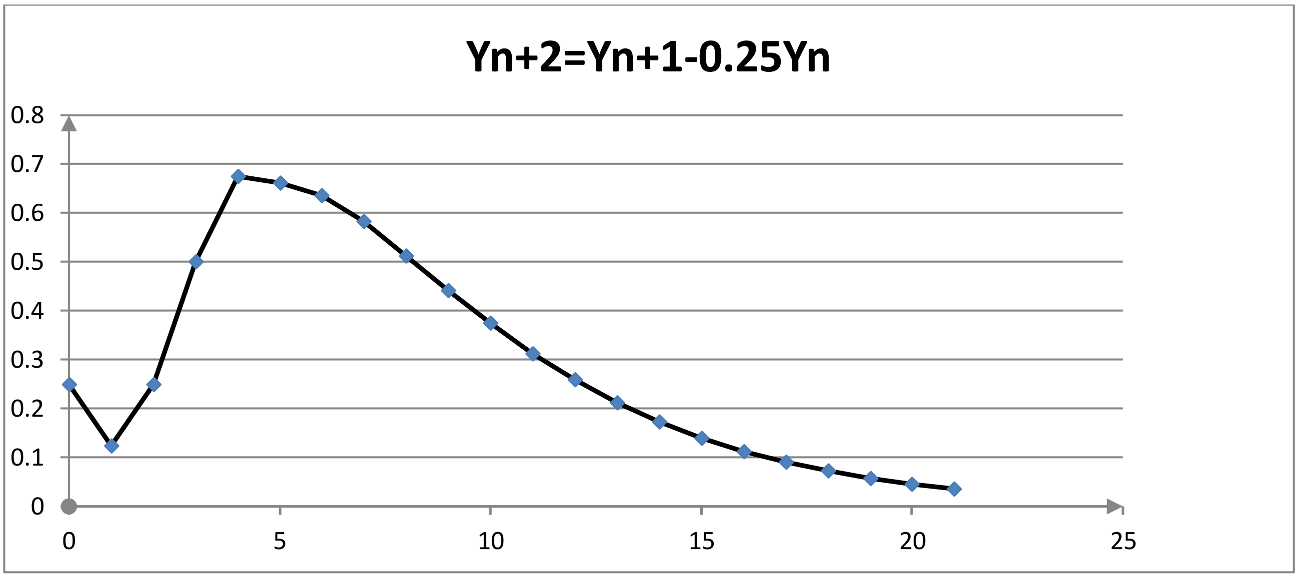

Рис. 2а. $m = 1, \quad Y_0 = 0.5, \quad Y_1 = 0.75$

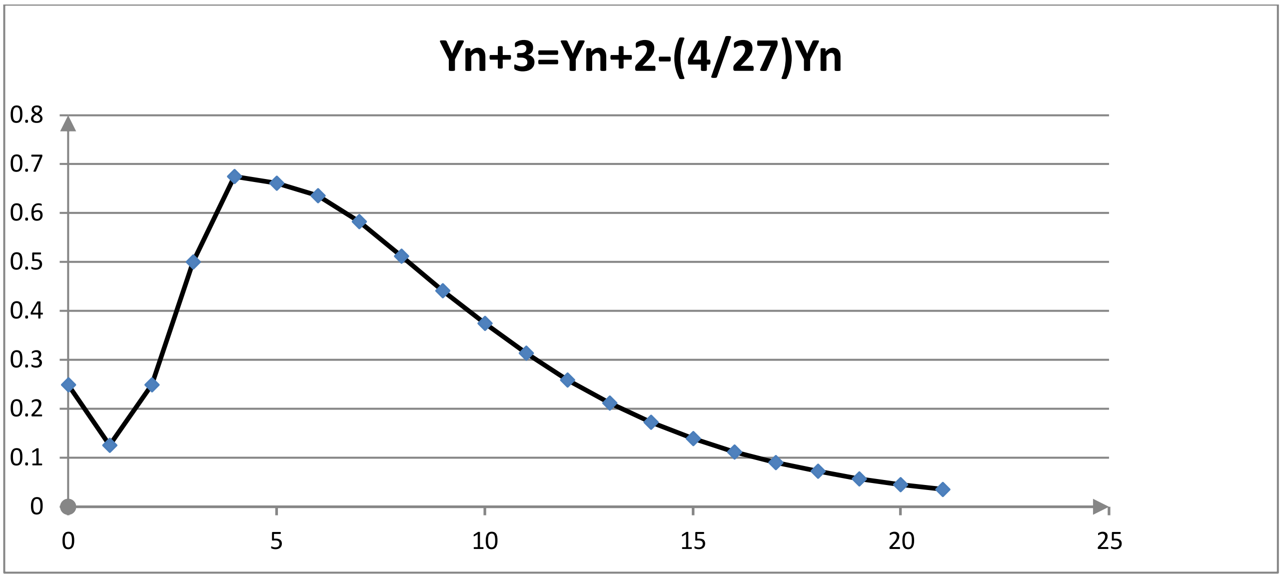

Рис. 2б. $m = 2, \quad Y_0 = 0.25, \quad Y_1 = 0.5, \quad Y_2 = 0.75$

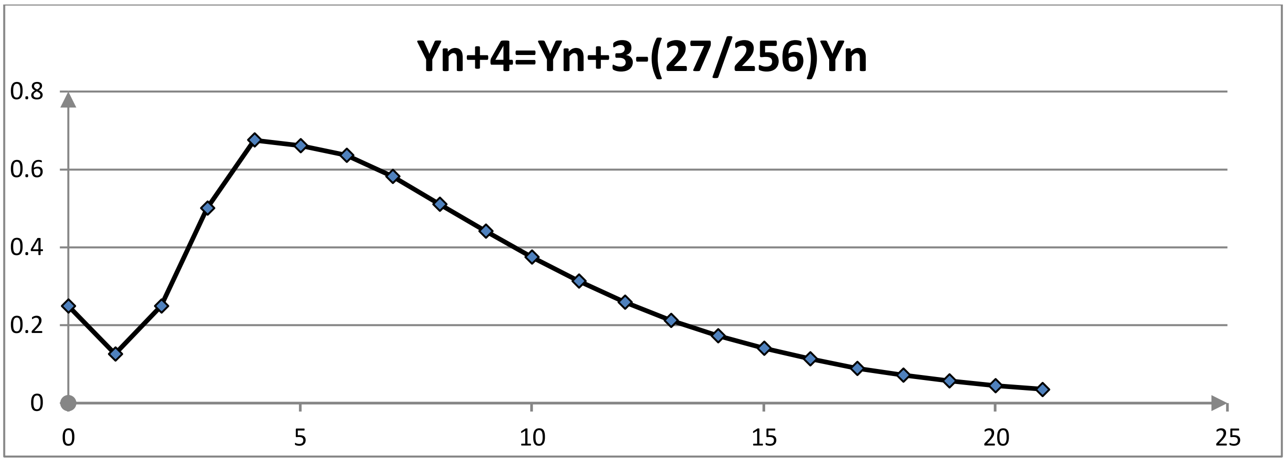

Рис. 2в. $m = 3, \quad Y_0 = 0.125, \quad Y_1 = 0.25, \quad Y_2 = 0.5, \quad Y_3 = 0.675$

Возвращаясь к уравнению (14), представляется целесообразным воспользоваться теоремой 5.3 из [8] об устойчивости соответствующего разностного трехчленного уравнения, полагая при этом $a = c + \frac{v}{m}$ и $b = \frac{v}{m}$. В таком случае можно утверждать, что нулевое решение (14) асимптотически устойчиво, если и только если $|a| < \frac{m+1}{m}$ и

1) $|a| - 1 < b < \left(a^2 + 1 - 2|a|\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}$ для m нечетных,

2) $|b - a| < 1 \quad и \quad |b| < \left(a^2 + 1 - 2|a|\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}}$ для m четных,

где φ есть решение трансцендентного уравнения

$$\sin(m+1)\theta = |a| \cdot \sin(m\theta), \quad 0 < \varphi < \frac{\pi}{m+1}.$$

Первое условия $|a|-1<b$ преобразуется к виду $c+\frac{v}{m}-1<\frac{v}{m}$ или $c<1$, что всегда справедливо. Второе условие $|b-a|<1$ дает выражение $\left|\frac{v}{m}-c-\frac{v}{m}\right|<1$ или $c<1$. Поэтому как для четных так и для нечетных m должно выполняться неравенство

$$|a|-1<b<\left(a^2+1-2|a|\cos\varphi\right)^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

Предположим, что инвестиционная стратегия «хранит в себе» информацию обо всех предыдущих решениях о капиталовложениях, то есть

$$I_n=v\sum_{i=0}^{n-2}\varphi(n,i)\Delta Y(i) \tag{21}$$

В этом случае рекуррентное уравнение (2) примет форму:

$$Y_{n+1}=cY_n+v\sum_{k=0}^{n-1}\varphi(n,k)\Delta Y(k) \tag{22}$$

Далее будем считать, $\varphi(n,k)=\varphi(n-k)$ (23)

Допущение (23) позволяет применить к уравнению (22) дискретное преобразование Лапласа. С учетом всех необходимых свойств Z-преобразования имеем:

$$zY(z)-zY_0=cY(z)+v\left(\frac{z-1}{z}\right)\Phi(z)Y(z)+zG(z)$$ или

$$\left(z-c-vY_0\left(\frac{z-1}{z}\right)\Phi(z)\right)Y(z)=z\left(G(z)+Y_0\right) \tag{24}$$

Пусть $g(z)=z-c-v\cdot B(z)$, где $B(z)=\frac{z-1}{z}\Phi(z)$.

О поведении решений уравнения (24) будем судить по виду нулей $g(z)$, то есть если все $|z_i|<1$, то $Y(n)$ асимптотически устойчиво.

Из теоремы [9] следует явный критерий устойчивости решений уравнения (22):

$$c+v\left|\sum_{n=0}^{\infty}B(n)\right|<1 \tag{25}$$

Неравенство (25) запишем иначе:

$$v\left|\sum_{n=0}^{\infty} B(n)\right| < s, \qquad (26)$$

где $B(n)-$ обратное Z-преобразование для $B(z)$.

В качестве примера возьмем $\Phi(n) = (1-\beta)\beta^n, \quad \beta < 1$. Это означает, что учет вклада более ранних инвестиционных решений убывает в геометрической прогрессии со знаменателем β. Очевидно, что Z-преобразование даёт $\Phi(z) = \dfrac{(1-\beta)z}{z-\beta}$,. Следовательно, $B(z) = \dfrac{(1-\beta)(z-1)}{z-\beta}$, и соответственно, $B(n) = (1-\beta)(\beta^n - \beta^{n-1})$. Нетрудно показать, что $\left|\sum_{n=0}^{\infty} B(n)\right| = 1-\beta$. Тогда из (26) получаем

$$v < \frac{s}{1-\beta} \qquad (27)$$

Условия устойчивости (27) явным образом демонстрирует связь между мощностью акселератора v и предельной склонностью к сбережению s посредством динамического мультипликатора β.

В последующей версии модели (1) условимся, что обе стратегии потребления и инвестирования будут иметь распределенные во времени зависимости. Не нарушая общности, положим что удельный вес прошлых значений дохода будет уменьшаться в геометрической прогрессии с разными знаменателями, то есть

$$C_n = c\sum_{i=0}^{n-1}(1-\alpha)\alpha^{n-i-1}Y(i), \qquad I_n = v(1-\beta)\sum_{i=0}^{n-2} \beta^{n-i-2}\Delta Y(i) \qquad (28)$$

где $0 < \alpha, \quad \beta < 1$.

Тогда базовое уравнение (1) с учётом временного сдвига на единицу примет вид:

$$Y_{n+1} = c(1-\alpha)\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i}Y(i) + v(1-\beta)\sum_{i=0}^{n-1} \beta^{n-i-1}\Delta Y(i) + G_{n+1}. \qquad (29)$$

После выделения слагаемого с Y_n получим:

$$Y_{n+1} = c(1-\alpha)Y_n + c(1-\alpha)\alpha\sum_{i=0}^{n-1} \alpha^{n-i-1}Y(i) + v(1-\beta)\sum_{i=0}^{n-1} \beta^{n-i-1}\Delta Y(i) \qquad (30)$$

Считая $Y_0 = G_0$ Z-преобразование (30) даёт:

$$\left(z - c(1-\alpha) - \frac{c(1-\alpha)\alpha}{z-\alpha} - \frac{v(1-\beta)(z-1)}{z-\beta}\right)Y(z) = zG(z) \tag{31}$$

Воспользуемся все той же теоремой из [8] для выяснения устойчивости решений (30), полагая $B(z) = \dfrac{c(1-\alpha)\alpha}{z-\alpha} + \dfrac{v(1-\beta)(z-1)}{z-\beta}$.

Обратное Z-преобразование запишется так: $B(n) = c(1-\alpha)\alpha^n + v\left(\dfrac{\beta-1}{\beta}\right)(1-\beta)^n$.

Несложно определить, что $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n-1} B(k) = c + v\left(\dfrac{\beta-1}{\beta}\right)$.

Тогда условия устойчивости запишется так:

$$\left|c + v\left(\frac{\beta-1}{\beta}\right)\right| < 1 - c(1-\alpha) \tag{32}$$

Условия (32) равносильны двойному неравенству:

$$c(1-\alpha) - 1 < c - \frac{1-\beta}{\beta}v < 1 - c(1-\alpha)$$

или $$c(2-\alpha) - 1 < \frac{1-\beta}{\beta}v < 1 + \alpha c \tag{33}$$

Очевидно, что неравенство (33) задаёт ограничение на мощность инвестиционного акселератора v. Следует помнить, что условие (33) является до-статочным, но отнюдь не необходимым для асимптотической устойчивости решений уравнения (29).

Рассмотрим несколько иной подход к вопросу об устойчивости равновесного решения (29). Из уравнения (31) получим:

$$Y(z) = \frac{z(z-\alpha)(z-\beta)}{z^3 + p_1 z^2 + p_2 z + p_3}G(z) \tag{34}$$

где $p_1 = -(\alpha + \beta + c(1-\alpha) + v(1-\beta))$, $p_2 = (\alpha\beta + c(1-\alpha)\beta + v(1-\beta)(1+\alpha))$,

$p_3 = -v\alpha(1-\beta)$.

Необходимые и достаточные условия устойчивости решений (29) определяются соотношениями между коэффициентами знаменателя (34) p_1, p_2, p_3 [8].

$$|p_1 + p_3| < 1 + p_2, \qquad |p_2 - p_1 p_3| < 1 - p_3^2, \tag{35}$$

Первое неравенства из (35) выполняется при любых значениях параметров α, β, c, ν, а второе дает квадратичное неравенство по параметру $\nu_0 = \nu(1-\beta)$

$$\left|\beta(\alpha + c(1-\alpha)) + \left(1 - \alpha\beta + (1-c)\left(\alpha - \alpha^2\right)\right)\nu_0 - \alpha\nu_0^2\right| < 1 - \alpha^2\nu_0^2. \qquad (36)$$

Ситуация существенно упрощается, если предположить, что $\alpha = \beta$. Это означает, что инвестиции и потребление учитывают прошлые значения дохода с одинаковой скоростью. Тогда, вместо соотношения (34), получим:

$$Y(z) = \frac{z(z-\alpha)}{z^2 + q_1 z + q_2} G(z), \qquad (37)$$

где $q_1 = -(\alpha + c(1-\alpha)), \quad q_2 = \nu(1-\alpha)$.

Из критерия Шура-Кона [8] следует:

$$|q_1| < 1 + q_2 < 2 \qquad (38)$$

Согласно (38), получаем $\nu(1-\alpha) < 1$ или $\nu < \dfrac{1}{1-\alpha}$. (39)

Важно заметить, что неравенство (39) справедливо при любом значении предельной склонности к потреблению, то есть не зависит от c.

Заключение.

В настоящей работе рассмотрены несколько дискретных математических моделей экономического роста. В основном тексте статьи приведены содержательные предпосылки о введении распределённых запаздываний на стороне потребления и инвестиций. Это, в свою очередь, генерирует рекуррентные или разностные уравнения с определенной спецификой. Для каждого из исследуемых функциональных уравнений получены соответствующие неравенства, определяющие области параметрической устойчивости. Данные теоретические постулаты имеют ясную экономическую интерпретацию, так как определяют структурные ограничения на числовые значения коэффициента мультипликатора и мощности акселератора, что позволяет прогнозировать на качественном уровне макроэкономическую политику государства.

Список литературных источников.

1. Аллен Р. (1963). Математическая экономия. - М. Изд-во иностр. лит. 688. [Allen R. (1963). Matematicheskaja jekonomija. - M. Izd-vo inostr. lit.688].

2. Барро Р., Х. Сала-и-Мартин. (2010). Экономический рост М.: БИНОМ. Лаборатория знаний. 824. Barro R., H. Sala-i-Martin. (2010). Jekonomicheskij rost M.: BINOM. Laboratorija znanij. 824.

3. Макаров И., Менский Б. (1978). Таблица обратных преобразований Лапласа и обратных Z - преобразований: Дробно-рациональные изображения. – М.:Высш. Школа,. 247.

[Makarov I., Menskij B. (1978). Tablica obratnyh preobrazovanij Laplasa i obratnyh Z -preobrazovanij: Drobno-racional'nye izobrazhenija. – M.:Vyssh. Shkola,. 247.]

4. Прасолов А.В. (2008). Математические методы экономической динамики. СПб.: «Лань». [Prasolov A.V. (2008). Matematicheskie metody jekonomicheskoj dinamiki. SPb.: «Lan'»].

5. Пу Т. (2000). Нелинейная экономическая динамика. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика». [Pu T. (2000). Nelinejnaja jekonomicheskaja dinamika. Moskva-Izhevsk: NIC «Reguljarnaja i haoticheskaja dinamika»].

6. Barro R. (1991). Economic Growth in a Cross Section of Countries. Quarterly Journal of Economics, 106(5), 407-443.

7. Duczynsti P. (2001). Capital Mobility in Neoclassical Models of Growth. American Economic Review, 90(6), 687-694.

8. Elaydi S. (2005). An Introduction To Difference Equations. Springer, New York, 540.

9. Elaydi S. (1993). Stability of Volterra difference equations of convolution type. Proceeding of The Special Program at Nankai Institute of Mathematics. Word Scientific, Singapore. 66-73.

10. Hancen R., Gory D. and Prescott. (2002). Maltus to Solow. American Economic Review, 92(9), 1205-1217.