

## УДК 313.42

**Любчик Леонид Михайлович,**

Профессор, доктор технических наук,

Заведующий кафедрой компьютерной математики и анализа данных

Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»

[lyubchik.leonid@gmail.com](mailto:lyubchik.leonid@gmail.com)

[lyubchyk.leonid@ukr.net](mailto:lyubchyk.leonid@ukr.net)

**Гринберг Галина Леонидовна,**

Доцент, кандидат технических наук,

Доцент кафедры экономической кибернетики и маркетингового менеджмента национального технического университета «Харьковский политехнический институт»

Тел. 066 7483141 [glngrinberg@gmail.com](mailto:glngrinberg@gmail.com)

**Воронін А.В.** – кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри вищої математики й економіко-математичних методів Харківського національного економічного університету імені С. Кузнеця; 050-325-47-00. [Voronin61@ukr.net](mailto:Voronin61@ukr.net)

## КРИЗОВІ МОДЕЛІ ЕКОНОМІЧНОЇ ДИНАМІКИ

У теперішній час немає не достатку у прогнозах. Прогнозують усе – світові кліматичні зміни, новий політичний порядок, стабілізацію курсів долара та євро або заміну їх новітніми крипто валютами. Взагалі більшість прогнозів, у тому числі економічних, з'являються з урахуванням загальної ситуації на момент їх складання, в кращому випадку враховуються реалії останніх десятирічч. На початок третього тисячріччя яскраво відокремилась у якості найважливішої проблема сталого розвитку у загальносвітовому масштабі економічної системи. Прагнення до досягнення даної цілі актуалізує розробку адекватної прогностичної методології. Добре відомо, що традиційне соціально-економічне прогнозування реалізується на різних часових інтервалах - від короткострокових (до одного року), середньострокових (від одного року до п'яти) до довгострокових (від п'яти до п'ятидесяти років). Очевидно, якщо короткострокове прогнозування орієнтовано на досягнення локальних кон'юктурних цілей, а середньострокові прогнози застосовуються для розробки політики розвитку у найближчій перспективі, то довгострокові моделі призначені для вивчення глобального економічного зростання.

Якщо казати про застосування кейнсіанської теорії для прогнозування економічного зросту, то треба нагадати про те, що на протязі багатьох років відомі світові науковці цілеспрямовано запроваджували у свідомість світової спільноти тезу про можливість експоненційного зростання доходу і капіталу у нескінченій перспективі. Така закономірність впливає з відомої динамічної моделі Харода у формі диференціального рівняння першого порядку. Тому домінантою в управлінні макроекономікою до теперішнього часу є фактична підтримка однакових постійних темпів зростання доходу і капіталу. Таку аксіоматику заклали фундатори макроекономіки що, у свою чергу, гранично політизувала економічну науку. У цьому зв'язку доцільно навести вислів Кейнса про те, що ідеї економістів та політичних діячів, коли вони праві та коли вони помиляються, мають значно більше значення, ніж взагалі гадають.

У 2001 р. А.Меддісоном [1,2] були опубліковані дані з динаміки світового валового внутрішнього продукту (ВВП) за 1-1973 рр. нашої ери, які висвітлюють тенденцію зростання ВВП, як квадратично-гіперболічну залежність доходу від часових змін. У цій публікації також наведений момент часу, так званий «момент загострення», 23 липня 2005 року, символізуючий «економічний кінець всесвіту». Але, виходячи з усього, приблизно з 1970 року темп економічного розвитку став спадати. Тому і не виправдався алармістський прогноз на 2005 рік.

Вищевказаний факт квадратично-гіперболічного зростання доходу підтверджує належним чином неадекватність експоненційного зростання економіки, що спонукає до критичного аналізу існуючої макроекономічної теорії [3].

Модель теорії зростання економіки у трактуванні Л. Канторовича [4] визначається співвідношеннями:

$$Y(\tau) = C(\tau) + S(\tau); S(\tau) = I(\tau); S(\tau) = \mu Y(\tau) \quad (1)$$

;

$$d_{\tau}K(\tau) = I(\tau); K(\tau) = \nu Y(\tau),$$

де  $Y(\tau)$  – національний дохід;  $C(\tau)$ ,  $S(\tau)$  – обсяг накопичення;  $I(\tau)$  – дійсний обсяг інвестицій;  $K(\tau)$  – капітал.

Розмірність усіх зазначених величин є грошові одиниці;  $d_{\tau} = d/d\tau$ ,  $\tau$  – часова змінна;  $\mu$  – гранична схильність до накопичення ( $0 < \mu < 1$ );  $\nu$  – коефіцієнт обігу капіталу ( $\nu \approx 10$ ). При цьому  $\nu$  характеризується як кількість років, за яку річний дохід «урівноважує» капітал. Диференціальне рівняння, що формально випливає з (1), і його розв'язок мають вигляд відповідно:

$$d_{\tau}K(\tau) = \sigma K(\tau), \sigma = \mu/\nu; \tag{2}$$

$$K(\tau) = K_0 e^{\sigma\tau}; I(\tau) = I_0 e^{\sigma\tau}; Y(\tau) = Y_0 e^{\sigma\tau},$$

де  $I_0 = \sigma K_0$ ;  $Y_0 = K_0/\nu$ ,  $K_0 = K(0)$ ;  $I_0 = I(0)$ ;  $Y_0 = Y(0)$ .

Оскільки в (1) використовуються фіксовані обсяги грошових потоків, тому ці співвідношення дискретні й можуть бути представлені у вигляді:

$$I_n = \mu Y_n; \tag{3}$$

$$d_{\tau}K_n = I_n; \tag{4}$$

$$K_n = \nu Y_n, n = 0, 1, 2, \dots; \tag{5}$$

де  $I_n = I(\tau_n)$ ;  $Y_n = Y(\tau_n)$ ;  $K_n = K(\tau_n)$ ,  $\tau_n = n$ ,  $n$  – дискретна часова змінна.

Але диференціювання дискретної змінної капіталу  $K(\tau)$  передбачає застосування математичної теорії узагальнених функцій [5]. Маємо

$$d_{\tau}K(\tau) = \sum_{j=0}^{n-1} I_j \delta(\tau - \tau_j), \delta(\tau) = \begin{cases} 0, & \tau \neq 0; \\ \infty, & \tau = 0, \end{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\eta) d\eta = 1,$$

тому замість (4) скористаємося виразом для формування капіталу, який має природне уявлення:

$$K_n = K_0 + \sum_{j=0}^{n-1} I_j, \quad (6)$$

де  $K_n = K(\tau_n)$ ;  $I_j = I(\tau_j)$ ,  $\tau_j = j$ .

З (3), (5), (6) випливає, що

$$\begin{aligned} K_1 &= K_0(1+\sigma); K_2 = K_0(1+\sigma)^2; \dots; \\ K_n &= K_0(1+\sigma)^n = K_0 e^{n \ln(1+\sigma)}; Y_n = (K_0/\nu) e^{n \ln(1+\sigma)}; I_n = \sigma K_0 e^{n \ln(1+\sigma)} \end{aligned} \quad (7)$$

за формулою геометричної прогресії

$$\sum_{n=1}^N I_n = \sigma K_0 e^{\ln(1+\sigma)} \frac{e^{N \ln(1+\sigma)} - 1}{e^{\ln(1+\sigma)} - 1}$$

і зіставлення цієї суми з капіталом  $N$ -го року  $K_N = K_n$ ,  $n = N$  показує, що рівність між ними досягається при значенні  $N$ , близькому до  $\sigma^{-1}$ . З іншого боку, збільшення капіталу за період часу від  $\tau = 1$  до  $\tau = N$  виявляється рівним капіталу  $K_N$ , який, однак, включає ще й початковий капітал  $K_0$ .

Маємо невідповідність, яка повинна бути проаналізована:

–на відміну (1), моделі економічного зростання більш властива різницєва форма (3), (5) і (6), тому що підкреслює уявно особливий вигляд розв'язку при  $\tau \sim \sigma^{-1}$ ;

–невірним було б утотожнювати у (7)  $\ln(1+\sigma) \approx \sigma$ , оскільки величина  $\sigma$  є малою, що відповідає розв'язку у формі (2), що збігається з (2);

–надане перетворення уникає позначену особливість, відповідно узагальнюючи формулу розв'язку (7) на показові зростаючі функції  $K(\tau)$ ,  $I(\tau)$  і  $Y(\tau)$  за наявності необмеженого аргументу  $\tau$  в (2).

Треба відзначити, що рівень доходу за  $n$  років є наступним

$$Y_0 + \sum_{j=1}^n Y_j = \frac{1}{\mu} \left( I_0 + \sum_{j=1}^n I_j \right), \quad (8)$$

при цьому за умови  $\mu^{-1} > 1$  ця сума зростання з більшою швидкістю, ніж в (6). Зрозуміло, що має існувати відповідний рік  $n$ , залежний від  $\nu$ , коли вирази (6) і (8) повинні бути однаковими у межах точності даної дискретизації.

Таким чином, явна форма розв'язку (2) не є адекватною дійсній тенденції макроекономічної поведінки. Суть цього є хибне трактування співвідношення  $d_\tau K(\tau) = I(\tau)$  з (1). Саме тому, функції  $K(\tau)$  і  $I(\tau)$  є дискретними, тоді як похідна  $d_\tau K(\tau)$  є неперервною функцією.

Із цієї точки зору доцільні міркування В. Кеч і П. Теодореску [5] про правомірне застосування узагальнених функцій при складанні диференціальних рівнянь для моделювання макроекономічної динаміки. Беручи до уваги, що вони призначені для математичних викладок у процесі перетворень при розв'язку задач, наданих у термінах нескінченно малих змінних.

Для цього необхідно створити відповідний аналог дискретної моделі економічного зростання (3), (5) і (6) у категоріях безперервного аналізу. Таким чином, вираз (6) належне перетворюється з арифметичного в інтегральну форму накопичення капіталу:

$$K(\tau) = \int_{-T}^{\tau} I(\eta) d\eta = K_0 + K_R, \quad (9)$$

де  $T$  – період накопичення початкового капіталу  $K_0$ ;

$$K_R(\tau) = \int_0^{\tau} I(\eta) d\eta \quad (10)$$

– капітал, реалізований за період  $\tau > 0$ . Відповідно похідна

$$d_\tau K(\tau) = I(\tau) \quad (11)$$

має традиційний вигляд.

Функція  $I(\tau)$  в (9) являє собою стандартний вигляд обсягу інвестицій.

Тоді з необхідністю, маємо реалістичні рівності

$$Y(\tau) = C(\tau) + I(\tau); \quad (12)$$

$$I(\tau) = \mu Y(\tau) \quad (13)$$

(див. (1), (3)),  $Y(\tau)$  і  $C(\tau)$  – також обсяги потоків доходу й споживання, вимірювані аналогічно  $I(\tau)$  в грошовому еквіваленті. Прив'яжемо дану одиницю до одного року, вважаючи, що тепер часова змінна  $\tau$  може пробігати значення як завгодно малих змінних.

Але, з наведених раніше міркувань дохід  $Y(\tau)$  не може подібно (5) порівнюватися з капіталом  $K(\tau)$ . Поряд із цим, при  $\tau \rightarrow 0$  параметр  $\nu \rightarrow \infty$  і з'являється невизначеність.

Для уникнення невизначеності треба співвідносити з капіталом дохід, накопичений за період часу від 0 до  $\tau$

$$Y_R(\tau) = \int_0^{\tau} Y(\eta) d\eta.$$

Вираз (5) стає інтегральним, а саме

$$K(\tau) = \nu \int_{\tau}^{\tau+1} Y(\eta) d\eta, \quad \tau \geq 0;$$

–відношення  $K(\tau)/Y_R(\tau)$ , становить  $\nu$  при  $\tau=1$ ,  $\nu/2$  при  $\tau=2$ , ..., 1 при  $\tau=\nu$ .

–посилаючись до цієї ж пропорції, отримаємо  $2\nu$  при  $\tau=1/2$ ,  $3\nu$  при  $\tau=1/3$ , ...,  $\nu/\tau$  для довільного моменту часу  $\tau$  й відповідно при  $\tau \rightarrow 0$  виникає особливість, яка повинна узгоджуватися з тим, що  $K_0 = \nu Y_0$ .

Підсумовуючи, можна вважати

$$K(\tau) = \frac{\nu}{\tau} \int_0^{\tau} Y(\eta) d\eta; \quad (14)$$

де особливість при  $\tau = 0$  зникає за правилом Лопітала. Співвідношення (11) – (14) являють собою модель економічного зростання в безперервній інтерпретації.

Підставляючи  $Y(\tau)$  з (13) в (14) з використанням (11), отримаємо

$$K(\tau) = \frac{K_0}{1 - \sigma\tau}, \quad (15)$$

звідки

$$I(\tau) = \frac{I_0}{(1 - \sigma\tau)^2}; Y(\tau) = \frac{Y_0}{(1 - \sigma\tau)^2}. \quad (16)$$

Цей розв'язок відповідає задачі Коші:

$$\begin{aligned} d_\tau K(\tau) - \frac{\sigma}{1 - \sigma\tau} K(\tau) &= 0, K(0) = K_0 \\ d_\tau I(\tau) - \frac{2\sigma}{1 - \sigma\tau} I(\tau) &= 0, I(0) = \sigma K_0; Y(\tau) = \frac{1}{\mu} I(\tau) \end{aligned} \quad (17)$$

Таким чином, наведена модель містить у собі вищезначену особливість різницевого розв'язку при  $\tau = N \sim \sigma^{-1}$ .

Як можна пояснити критичність виразів (15), (16) при  $\tau = \sigma^{-1}$ ? Зауважимо у цьому зв'язку, що на місці  $\tau^{-1}$  в (14) можна надати функцію  $f(\tau)$ , яка задовольняє умовам  $d_\tau f(0) = 1$  і  $f(\nu) = \nu$ :

$$K(\tau) = \frac{\nu}{f(\tau)} \int_0^\tau Y(\eta) d\eta; \quad (18)$$

відповідно замість (15)

$$K(\tau) = \frac{K_0}{1 - \sigma f(\tau)}.$$

Також можемо вважати, що  $\mu$  залежить від змінної  $\tau$ . Тоді дохід (12) розподіляється між інвестиціями й споживанням у різні моменти часу нерівномірно. Очевидно, що капітал визначається за допомогою розв'язку задачі Коші, що впливає зі співвідношень (11), (13) і (14):

$$d_{\tau}K(\tau) - \frac{\mu(\tau)}{\nu - \tau\mu(\tau)}K(\tau) = 0, K(0) = K_0. \quad (19)$$

Але внаслідок (13), при  $\tau = \sigma^{-1}$  величина капіталу в (14) становить

$$K(\sigma^{-1}) = \int_0^{\sigma^{-1}} I(\eta) d\eta.$$

Маємо збіг із  $K_R(\sigma^{-1})$  із (10). Відповідно отримуємо, що

$$K(\sigma^{-1}) = K_R(\sigma^{-1}),$$

і, згідно (9), у розглянутий момент часу  $K_0 = 0$ .

Початковий сумарний дохід  $Y_R(\tau)$  досягає при  $\tau = \nu$  величини, рівної капіталу  $K(\nu)$ . Наступне зростання доходу приводить до того, що вже сумарний обсяг вкладених інвестицій досягає при  $\tau = \sigma^{-1}$  величини, рівної капіталу  $K(\sigma^{-1})$ . При цьому початковий капітал  $K_0$  перетікає у дохід  $Y_R(\tau)$  і вирази (15), (16) обертаються в невизначеність. Тому й задача Коші (17) при  $K_0 = 0$  втрачає зміст. Подібна ситуація можна визначити як кризову з позицій класичних теорій економічного зростання з урахуванням обмеженого часового періоду – так званого «горизонту прогнозу».

У зазначеному сенсі врахуємо умови зростання використовуваних функцій, що впливають із (15), (16):

$$K(\nu) = K_0 / (1 - \mu); I(\nu) = I_0 / (1 - \mu)^2; Y(\nu) = Y_0 / (1 - \mu)^2;$$

так при  $\mu = 0,5$  виходить  $K(\nu) = 2K_0; I(\nu) = 4I_0; Y(\nu) = 4Y_0$ .

Таким чином, практично контролюючи наближення, зокрема, доходу  $Y(\tau)$  до  $Y_0 / (1 - \mu)^2$ , можна фіксувати значення  $\nu$ , що є досить важливим для визначення моменту кризи, коли  $\tau = \nu / \mu$ .



Якщо використати замість (14) загальну залежність (18), установлену по факту на інтервалі, наприклад,  $\tau \in [0, \nu]$ , функція  $f(\tau)$  може бути продовжена до критичного моменту часу  $\tau_k$ , коли  $f(\tau_k) = \sigma^{-1}$ . Тому можна вважати, що ми маємо можливість визначати момент настання кризи («момент загострення»), у контексті прогнозованого розвитку економічної ситуації. Її визначають як функцію  $f(\tau)$ , так і розв'язок задачі (19).

Наведені аргументи дозволяють прийняти, наприклад,  $K(\nu)$  у якості  $K_0$  для наступного етапу розвитку економіки. Відповідний процес організаційних перетворень можна уявити як взаємозалежність  $\nu$  з амортизацією капіталу  $K_0$ . Відзначимо, що амортизацію неважко врахувати, використовуючи в (9) і (14) на місці функції  $K(\tau)$  вираження виду  $(1 - \alpha\tau)K(\tau)$ ,  $\alpha > 0$ . Визначення  $K(\tau)$  зводиться в цьому випадку до розв'язку задачі Коші:

$$d_{\tau}K(\tau) - \frac{\alpha + \sigma - 2\alpha\sigma\tau}{1 - (\alpha + \sigma)\tau + \alpha\sigma\tau^2} K(\tau) = 0, \quad K(0) = K_0.$$

Треба зазначити, що модель (11) – (14) не враховує накопичування інвестицій з перетворенням їх у капітал, оскільки в (9) вони просто підсумовуються. Нехай

$$K(\tau) = \int_{-T}^{\tau} (1 + \rho\eta)I(\eta)d\eta,$$

де  $\rho > 0$  – константа. Тому замість (11) отримаємо

$$d_{\tau}K(\tau) = (1 + \rho\tau)I(\tau) = \mu(1 + \rho\tau)Y(\tau).$$

Підставляючи із цього виразу  $Y(\tau)$  в (14) маємо диференціальне рівняння

$$d_{\tau}K(\tau) - \frac{\sigma(1 + \rho\tau)}{1 - \sigma\tau - \sigma\rho\tau^2} K(\tau) = 0,$$

розв'язок якого

$$K(\tau) = K_0 \left[ 1 + \left( \frac{\sigma + \kappa}{\sigma - \kappa} \right)^{\frac{\sigma}{2\kappa}} \right]^{-1} \times$$

$$\times \left[ \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma\tau - \sigma\tau^2}} + \left( \frac{2\sigma\rho\tau + \sigma + \kappa}{2\sigma\rho\tau + \sigma - \kappa} \right)^{\frac{\sigma}{2\kappa}} \right], \kappa = \sqrt{4\sigma\rho + \sigma^2}$$

обертається в невизначеність при

$$\tau = -\frac{1}{2\rho} + \sqrt{\frac{1}{4\rho^2} + \frac{1}{\sigma\rho}}$$

і, зі збільшенням  $\rho$  настання кризи наближається.

Вертаючись до моделі (1) помітимо, що завжди її розглядали в кінцево-різницевій постановці [6, 7]. Розв'язок (2), що виник у результаті сполучення безперервного й дискретного аналізу, є помилковим. Це поєднання є типовим для ряду найбільш відомих праць у галузі макроекономічного моделювання [8 – 10].

Модель розвитку економіки Харрода – Домара представлена Р. Алленом у вигляді [9]:

$$Y(t) = C(t) + I(t); C(t) = (1 - \mu)Y(t); I(t) = v_* d_t Y(t), \quad (20)$$

де  $Y(t)$ ,  $C(t)$  і  $I(t)$  – інтенсивності потоків відповідно доходу, споживання й інвестицій; постійна  $0 < \mu < 1$ ; постійна  $v_* > 0$  має розмірність часу;  $t$  – розмірний час. Диференціальне рівняння задачі і його розв'язок мають вигляд відповідно:

$$d_t Y(t) = (\mu / v_*) Y(t); Y(t) = Y_0 e^{\mu t / v_*}, Y_0 = Y(0). \quad (21)$$

У силу відомої залежності

$$d_t K(t) = I(t) \quad (22)$$

останнє співвідношення (6.20) еквівалентно наступному:

$$d_t K(t) = v_* d_t Y(t),$$

$$\text{або } K(t) = v_* Y(t) + K_0 - v_* Y_0, K_0 = K(0). \quad (23)$$

Крім функцій  $Y(t)$  і  $I(t)$ , приходимо до рівняння

$$d_t K(t) - (\mu/v_*)K(t) = \mu Y_0 - (\mu/v_*)K_0, \quad (24)$$

розв'язок якого має вигляд

$$K(t) = (K_0 - v_* Y_0)(e^{\mu t/v_*} - 1)$$

і, отже,  $K_0 = 0$ , або ж в (23)  $K_0 = v_* Y_0$ .

У першому із цих випадків виходить, що початковий капітал  $K_0$  відсутній, тоді як інвестиції  $I_0 = I(0)$  й дохід  $Y_0$  існують, що не відповідає дійсності.

У другому – рівняння (24) стає однорідним і його розв'язок аналогічний (21):

$$K(t) = v_* Y(t), \quad (25)$$

що впливає також з (23). Однак така залежність суперечить використанню поняття нескінченно малої величини. Дійсно, інтенсивність доходу при  $t = t_i$  визначається в такий спосіб:

$$Y(t_i) = \frac{1}{t_*} \int_{t_i - 0,5t_*}^{t_i + 0,5t_*} Y(\eta) d\eta,$$

де  $t_*$  – малий проміжок часу. Відповідно з (25), капітал

$$K(t_i) = v \int_{t_i - 0,5t_*}^{t_i + 0,5t_*} Y(\eta) d\eta, \quad v = \frac{v_*}{t_*}; \quad (26)$$

інакше кажучи,  $K(t_i)$  являє собою величину доходу, усереднену на інтервалі  $t_*$  й, мабуть, при  $t_* \rightarrow 0$  безрозмірний параметр  $v \rightarrow \infty$ .

Між цим, відповідно унікає відмінність між поняттями доходу й інтенсивності доходу в точці  $t = t_i$ . Вважаємо, що на підставі (26) співвідношення (25) може розглядатися лише для кінцевої довжини  $t_*$  й, отже, має суто дискретний характер. При цьому використання, поряд з  $v$ , безрозмірного часу  $\tau = t/t_*$  переводить співвідношення (20) – (22) і (25) у модель [4], яка некоректна.

**Висновки.** Вивчена коректність моделі економічного зростання у диференціальній формі. Встановлена неадекватність експоненціального

зростання економіки. Отриманий альтернативний результат у вигляді гіперболічного зростання значущих економічних показників. Виявлено невідповідність пропорційного зростання капіталу і доходу. Висунуті міркування для ідентифікації моменту появи кризисних явищ. Зроблені відповідні корегування моделей економічного зростання. Узагальнено підхід до використання балансових рівнянь для моделювання економічної динаміки, з метою одержання прогнозних оцінок.

### Список використаних джерел

1. Теоретические проблемы экономического роста / Малярец Л.М., Воронин А.В., Гунько О.В. // УСиМ. – 2016. – №1. С. 50-55.
2. Акаев А.А., Коротаев А.В., Малинецкий Г.Г. Прогноз и моделирование кризиса сов и мировой динамики. – М.: Изд-во ЛКИ, 2010 – 352 с.
3. Математичні методи в сучасних економічних дослідженнях: Монографія / Л.М. Малярець, О.Г. Тижненко, О.О. Егоршин; за заг. Ред. докт.екон. наук, професора Малярець Л.М. – Х.: Вид. ХНЕУ, 2011. – 272 с.
4. Канторович Л.В., Горстко А.Б. Оптимальные решения в экономике. – М.: Наука, 1972. – 229 с.
5. Кеч В., Теодореску П. Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 518 с.
6. Харрод Р. К теории экономической динамики. Новые выводы экономической теории и их применение в экономической политике /Классики Кейн-сианства. – М.: Экономика, 1997. – Т.1. – С. 39-194.
7. Теория капитала и экономического роста /Под ред. С.С.Дзарасова. – М.: Изд-во Московск. ун-та, 2004. – 397 с.
8. Самуэльсон П.А. Основания экономического анализа. – СПб: Экономическая школа, 2002. – 604 с.
9. Аллен Р. Математическая экономия. – М.: Изд-во иностр. лит., 1963. – 667 с.
10. Бергстром А. Построение и применение экономических моделей. – М.: Прогресс, 1970. – 176 с.

### Анотация

Автори поставили перед собою завдання проаналізувати процедури побудови диференціальних рівнянь, які використовуються для моделювання

макроекономічних процесів. Результати виявилися значною мірою несподіваними, оскільки виявився цілий ряд протирічч. У ході досліджень, присвячених пошуку шляхів їх подолання, сформувалися альтернативні концепції математичного моделювання економічної динаміки. На початку статті установа некоректність відомої моделі економічного зростання Харрода, з якої випливає можливість макроекономічного зростання на необмеженому інтервалі часу. Згадана некоректність обумовлена застосуванням апарата безперервного аналізу до співвідношень, які свідомо дискретні. Дослідження різницевої моделі Харрода приводить до висновку про те, що на певному відрізку часу в розв'язку виникає протиріччя. У категоріях безперервного аналізу сформульована коректна модель Харрода, яка свідчить про неминучість виникнення економічної кризи. Ця модель базується на інтегральній залежності капіталу від інтенсивності доходу й надає конструктивні можливості для попередження кризи. У першу чергу, за допомогою апріорної оцінки відповідного моменту часу показане, зокрема, що активізація економіки наближає настання кризи. Слід підкреслити, що дана криза й відзначена вище особливість різницевого розв'язку узгодяться за часом.

Ключові слова: міжнародна торгівля, біфуркація, хаос, баланс, ресурс, динаміка, стійкість, рівновага.

#### Аннотація

Авторы поставили перед собой задачу проанализировать процедуры построения дифференциальных уравнений, используемых для моделирования макроэкономических процессов. Результаты оказались в значительной мере неожиданными, поскольку возник целый ряд противоречий. В ходе исследований, посвященных поиску путей их преодоления, сформировались альтернативные концепции математического моделирования экономической динамики. В начале статьи установлена некорректность известной модели экономического роста Харрода, из которой следует возможность макроэкономического роста на неограниченном интервале времени. Упомянутая некорректность обусловлена применением аппарата непрерывного анализа к соотношениям, которые заведомо дискретные. Исследование разностной модели Харрода приводит к выводу о том, что на определенном отрезке времени в решении возникает противоречие. В категориях непрерывного анализа сформулирована корректная модель Харрода,

которая свидетельствует о неизбежности возникновения экономического кризиса. Эта модель базируется на интегральной зависимости капитала от интенсивности дохода и предоставляет конструктивные возможности для предупреждения кризиса. В первую очередь, с помощью априорной оценки соответствующего момента времени показано, в частности, что активизация экономики приближает наступление кризиса. Следует подчеркнуть, что данный кризис и отмеченная выше особенность разностного решения согласуются по времени.

Ключевые слова: международная торговля, бифуркация, хаос, баланс, ресурс, динамика, устойчивость, равновесие.

Любчик Леонид Михайлович,  
Профессор, доктор технических наук,  
Заведующий кафедрой компьютерной математики и анализа данных  
Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»  
Тел. 097 9840439, 099 078 6751  
[lyubchik.leonid@gmail.com](mailto:lyubchik.leonid@gmail.com)  
[lyubchyk.leonid@ukr.net](mailto:lyubchyk.leonid@ukr.net)

Lyubchyk Leonid Mikhailovich,  
Professor, Doctor of Technical Sciences (Dr Sc Eng.),  
Head of Department of Computer Mathematics and Data Analysis  
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"  
Tel. 097 9840439, 099 078 6751  
[lyubchik.leonid@gmail.com](mailto:lyubchik.leonid@gmail.com)  
[lyubchyk.leonid@ukr.net](mailto:lyubchyk.leonid@ukr.net)

Гринберг Галина Леонидовна,  
Доцент, кандидат технических наук,  
Доцент кафедры экономической кибернетики и маркетингового менеджмента  
Национального технического университета «Харьковский политехнический институт»  
Тел. 066 7483141  
[glngrinberg@gmail.com](mailto:glngrinberg@gmail.com)  
Grinberg Galina Leonidovna,  
Associate professor, candidate of technical sciences,  
Associate Professor, Department of Economic Cybernetics and Marketing Management  
National Technical University "Kharkiv Polytechnic Institute"

Любчик Л.М., Гринберг Г.Л., Воронин А.В. Кризові моделі економічної динаміки. БІЗНЕС-ІНФОРМ., №5, 2019. С. 92-96.

Основне завдання дослідження полягає в аналізі процедури побудови диференціальних рівнянь, які використовуються для моделювання макроекономічних процесів. Досліджено коректність моделі економічного зростання у диференціальній формі. Встановлено неадекватність експоненціального зростання економіки. Отримано альтернативний результат у вигляді гіперболічного зростання значущих економічних показників. Виявлено невідповідність пропорційного зростання капіталу і доходу. Висунуто міркування для ідентифікації моменту появи кризових явищ. Зроблено відповідні корегування моделей економічного зростання. Узагальнено підхід до використання балансових рівнянь для моделювання економічної динаміки з метою одержання прогнозних оцінок.

Ключові слова: міжнародна торгівля, біфуркація, хаос, баланс, ресурс, динаміка, стійкість, рівновага

Любчик Л.М., Гринберг Г.Л., Воронин А.В. Кризисные модели экономической динамики. БИЗНЕС-ИНФОРМ., №5, 2019. С. 92-96.

Основная задача исследования заключается в анализе процедуры построения дифференциальных уравнений, используемых для моделирования макроэкономических процессов. Исследована корректность модели экономического роста в дифференциальной форме. Установлена неадекватность экспоненциального роста экономики. Получен альтернативный результат в виде гиперболического роста значимых экономических показателей. Выявлено несоответствие пропорционального роста капитала и дохода. Выдвинуты рассуждения для идентификации момента появления кризисных явлений. Сделаны соответствующие корректировки моделей экономического роста. Обзор подход к использованию балансовых уравнений для моделирования экономической динамики с целью получения прогнозных оценок.

Ключевые слова: международная торговля, бифуркация, хаос, баланс, ресурс, динамика, устойчивость, равновесие.

Lyubchik L.M., Greenberg G.L., Voronin A.V. Crisis models of economic dynamics. BUSINESS-INFORM., № 5, 2019. p. 92-96.

The main task of the study is to analyze the procedure for constructing differential equations that are used to model macroeconomic processes. The correctness of the model of economic growth in the differential form is explored. The inadequacy of exponential growth of the economy is established. An alternative result is obtained in the form of hyperbolic growth of significant economic indicators.

The discrepancy between proportional growth of capital and income is revealed. The reason for identifying the moment of occurrence of crisis phenomena is put forward.

Correcting the models of economic growth has been made. A generalized approach to the use of balance equations for modeling economic dynamics in order to obtain predictive estimates.

Key words: international trade, bifurcation, chaos, balance, resource, dynamics, stability, equilibrium