JEL – G17

МОДЕЛЬ ФІНАНСОВОЇ ПІРАМІДИ

Гунько Ольга Володимирівна[1],
[1] ХНЕУ ім.. Семена Кузнеця/кафедра ВМ й ЕММ, Харків, Україна

Анотація – **Розглянута математична модель фінансової піраміди з позицій дискретного аналізу динамічних систем . Наданий зв'язок між традиційною фінансовою моделлю та класичним дискретним логістичним відображенням. Досліджені усі можливі типи еволюції процесу такі, як періодичні траєкторії , біфуркації подвоєння періоду та хаосу.**

Ключові слова – **фінансова піраміда, швидкість обігу грошей, логістичне відображення, біфуркація, хаос.**

Така модель може наслідувати дві цілі: перша дає опис динаміки окремої фінансової схеми, а друга демонструє вплив фінансової піраміди на фінансову ситуацію у цілому.

Проблема ускладнюється тим, фінансовий «пузир» є явищем взагалі нестаціонарним. Він з'являється, розвивається, зникає (лопається) та знову з'являється. Тому при розгляді цієї схеми у макромасштабі важливо знати узагальнені характеристики вищеозначених «пузирів». [4]

Розглянемо базову модель окремого «пузира» на прикладі побудови та краху фінансової піраміди.

Нехай існує обмежена кількість людей, які мають у сумі грошову масу М та готових вкласти цей фінансовий ресурс у піраміду заради отримання у майбутньому великих відсотків. Гроші, які вже вкладені у піраміду позначимо *m*. Нові вкладники заохочуються у цю фінансову програму не раптом, а тільки після того, як першим вкладникам обіцяні відсотки дійсно виплачені та інформація про цей факт вже встигла розповсюдитися.Тому процес залучення нових агентів йде нерівномірно, а хвилями. Найбільші притоки вкладників відбудуться у дискретні моменти часу: $t_1, t_2, \ldots, t_n$ по мірі зростання величини *m* Звідсиля випливає, що найпростіша базова модель повинна бути дискретною, тобто формуватися у вигляді дискретного відображення за допомогою різницевого або рекурентного рівняння.

Приріст грошової маси за рахунок залучення нових вкладників є пропорційним кількості вже залучених людей і , відповідно, вже отриманому ресурсу *m*. Крім цього,

$$m_{n+1} = \beta(M - m_n) \cdot m_n - \alpha \cdot m_n \qquad (1)$$

Тут індекс n є нумератором дискретних моментів часу, $\alpha -$ відсоток по вкладу за інтервал між послідовними моментами часу, $\alpha -$ параметр, який відповідає за швидкість залучення фінансових ресурсів. Якщо вести нову змінну

$$y_n = \frac{\beta}{\beta M - \alpha} \cdot m_n,$$

то отримуємо іншу форму рекурентного рівняння (1) :

$$y_{n+1} = \lambda \cdot y_n \cdot (1 - y_n), \qquad (2)$$

де $\lambda = \beta \cdot M - \alpha$.

Рівняння (2) є добре відомим логістичним відображенням [1] з найбільш цікавими властивостями, якщо безвимірний параметр λ знаходиться у інтервалі:

$$0 < \lambda \le 4.$$

Якщо $0 < \lambda \le 1,$ то існує тільки один стан рівноваги $y_1^* = 0$, який є стійким. Обмеження на параметри моделі (1) мають вигляд:

$$\alpha < \beta M \leq 1 + \alpha .$$

При зростанні параметру λ від 1 до 3 тривіальний рівноважний стан

$$y_1^* = 0$$

втрачає стійкість, а інша точка

$$y_2^* = \frac{\lambda}{\lambda - 1},$$

навпаки, є стійкою. Це відбудеться, якщо

$$\alpha + 1 < \beta M \leq \alpha + 3 .$$

У випадку, коли має місце нерівність

$$3 < \lambda \leq 3.569\ldots \text{ або } \alpha + 3 < \beta M \leq \alpha + 3{,}569$$

навколо іншого рівноважного стану утворюються цикли періоду 2,4,8,…, має місце так звана «біфуркація подвоєння періоду». Якщо $3{,}569 < \lambda \leq 4$, то мають місце цикли довільного періоду ы настаэ хаотичний режим.[2,3]

$$\text{При } \lambda = 4 \text{ або } \beta M = \alpha + 4$$

існує аналітичний розв'язок рекурентного рівняння (2):

$$y_n = \sin^2(2^n \cdot \arcsin\sqrt{y_0}),$$

Вищенаданий теоретичний аналіз властивостей рівнянь (1),(2) наявним чином демонструє складну динаміку поведінку модельного механізму фінансової піраміди. Але у дійсності β (і, в свою чергу, λ) не є завжди сталим та може залежити від часової змінної. Спочатку швидкість залучення β мала настільки, що

$\beta M < \alpha$ і піраміда має деякий час збитки. Потім ця швидкість зрос-тає так, що у максимумі розквіту піраміди

$$\beta M > \alpha + 3{,}569\ldots$$

При цьому усі параметри суттєво флуктують. По мірі вичерпування грошей m, швидкість залучення спадає, і коли $\beta M < \alpha + 1$, виникає банкрутство піраміди – «пузир» лопається. У виграшному стані опиняються люди, які першими зробили свої внески та встигли вчасно їх забрати. Більша частина вкладників залишаються у програші , тому що засновники та організатори піраміди у момент краху нездатні виконати свої фінансові зобов'язання. Але, вони можуть отримати свою вигоду, якщо вкладники погоджуються на дисконтування боргових зобов'язань. Крім того, існують і інші засоби уникнути боргів та залишитися у виграші. У розрахунку на це і будується піраміди.

Після краху чергової піраміди гроші M повертаються у реальний сектор, але на місці попереднього з'являється новий «пузир». Цей сценарій нагадує «переміщуючий шар» та грає цю роль у динаміці світової фінансової системи. Важливо відмітити, що флуктуації базових параметрів порушують регулярність досліджуваних процесів. У фазовому просторі цій стан є хаотичною областю типу «дивного ат трактору». У економіці це проявляється у вигляді хаотичної поведінки фондового ринку.

Література

1. Бобровски Д. Введение в теорію динамических систем с дискретным временем / Бобровски Д. – М: 2006. – 284 с.
2. Воронин А.В. Гунько О.В. Хаос на рынке труда ..Инфраструктура рынка. – Вып.6. – 2017, с.254-257.
3. Магницкий Н.А., Сидоров С.В. Новые методы хаотической динамики. – М. : Едитория УРСС. 2004.—320 с.
4. Чернавский Д.С. Синергетика и информация. – М.: Едиториал УРСС, 2004. – 288 с.

Authors

Гунько Ольга Володимирівна, Olha-Hunko@hneu.net, ХНЕУ ім.. Семена КУзнеця (e-mail).

Рукопис получена 16 апреле 2021.