МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ СЕМЕНА КУЗНЕЦЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

**Методичні рекомендації
до самостійної роботи за темою
"Диференціальні рівняння"
для студентів усіх спеціальностей
першого (бакалаврського) рівня**

**Харків
ХНЕУ ім. С. Кузнеця
2018**

УДК 517.9(072)
В95

Укладачі: А. В. Воронін
О. В. Гунько

Затверджено на засіданні кафедри вищої математики й економіко-математичних методів.
Протокол № 3 від 18.10.2017 р.

Самостійне електронне текстове мережеве видання

В95 **Вища** математика [Електронний ресурс] : методичні рекомендації до самостійної роботи за темою "Диференціальні рівняння" для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня / уклад. А. В. Воронін, О. В. Гунько. – Харків : ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2018. – 76 с.

Розроблено теоретичні та практичні питання теми "Диференціальні рівняння", які запропоновані для самостійної роботи студентів. Наведено приклади розв'язання диференціальних рівнянь згідно з програмою навчальної дисципліни.

Рекомендовано для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня.

УДК 517.9(072)

Вступ

Навчальна дисципліна "Вища математика" є базовою дисципліною природно-наукового циклу та складовою структурно-логічної схеми, що передбачена освітньо-професійною програмою підготовки бакалаврів для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня. Викладений матеріал цілком узгоджується з робочою програмою цієї дисципліни.

Самостійна робота студентів є таким видом діяльності навчання, головною метою якого є забезпечення засвоєння в повному обсязі навчальної програми шляхом свідомого закріплення поглиблення й систематизації набутих теоретичних знань, а також опанування навичок роботи з навчальною й науково-методичною літературою, вміння вільно орієнтуватися в інформаційному просторі.

Диференціальні та різницеві рівняння як розділ дисципліни належить до числа математичних дисциплін, які мають найбільш тісні зв'язки із практикою, яка є постачальником математичних моделей і методів кількісного аналізу в економічних дослідженнях. Методи, які вона пропонує, спроможні опрацьовувати та надавати якісну та кількісну інформацію про стан динамічних моделей, що описують поведінкові властивості технічних й економічних об'єктів.

Розділ "Диференціальні рівняння" відповідає темі 6 робочої програми, змістовому модулю І: "Елементи математичного аналізу".

Самостійна робота з дисципліни "Вища математика" передбачена навчальним планом підготовки студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня.

Основними завданнями вивчення даної навчальної дисципліни є надання студентам знань для засвоєння основних положень теорії диференціальних і різницевих рівнянь і застосування їх в економічних дослідженнях, а також отримання математичної підготовки для вивчення навчальних дисциплін з економіки.

Метою даних методичних рекомендацій є надання практичної допомоги студентам під час вивчення методів розв'язання диференціальних і різницевих рівнянь, таких як д. р. 1-го порядку із змінними, що розділяються, лінійні, однорідні, узагальнено однорідні, д. р. 2-го порядку з постійними коефіцієнтами, лінійні однорідні та неоднорідні різницеві рівняння, а також їх системи, які застосовуються під час розв'язання різноманітних задач в економічних дослідженнях. Крім того, це формування в студентів цілісної системи базових знань з теорії диференціальних і різницевих рівнянь, які необхідні для розв'язання задач спочатку в дипломній роботі, а потім, у майбутньому, теоретичних і практичних завдань у професійній діяльності економіста, набуття навичок математичного дослідження прикладних задач.

Основні компетентності, що закріплюються у процесі самостійної роботи наведені у табл. 1.

Таблиця 1

Основні компетентності, що закріплюються у процесі самостійної роботи

Теми	Закріплені в процесі самостійної роботи компетентності
Змістовий модуль 1. Елементи математичного аналізу	
Застосування диференціальних рівнянь у процесі дослідження динаміки економічних процесів та опрацювання різних моделей в економіці	Розрізняти типи диференціальних рівнянь і володіти методами їх розв'язання. Визначати типи неоднорідних диференціальних і різницевих рівнянь. Володіти методами побудови загального та частинного розв'язку диференціальних рівнянь. Визначати класичні моделі в економіці, що представлені у формі диференціальних рівнянь, лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами, поняття про різницеві рівняння та методи розв'язання однорідних та неоднорідних лінійних різницевих рівнянь зі сталими коефіцієнтами
	Здатність розв'язати: • диференціальні рівняння першого порядку: рівняння з відокремленими змінними, однорідні та лінійні диференціальні рівняння; • диференціальні рівнянь другого порядку, які припускають зниження порядку; • лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами; • системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами; • однорідні лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами; • неоднорідні лінійні різницеві рівняння зі сталими коефіцієнтами

Змістовий модуль 1
Елементи математичного аналізу

Тема 6. Диференціальні рівняння

6.1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Розв'язання диференціальних рівнянь 1-го порядку.

6.2. Диференціальні рівняння вищих порядків. Методи розв'язання диференціальних рівнянь 2-го порядку.

6.3. Застосування диференціальних рівнянь в економіці.

Питання для самостійного опрацювання

1. Звичайне диференціальне рівняння першого порядку, основні означення. Задача Коші.
2. Теорема існування та єдиності розв'язку диференціального рівняння першого порядку.
3. Частинний та загальний розв'язки.
4. Диференціальні рівняння першого порядку: зі змінними, що відокремлюються, лінійні, однорідні 1-го порядку, рівняння Бернуллі.
5. Диференціальні рівняння другого порядку, основні означення.
6. Диференціальні рівняння другого порядку, що припускають зниження порядку.
7. Лінійні диференціальні рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами.
8. Модель Харода.
9. Модель Філіпса.
10. Системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами.
11. Різницеві рівняння у моделюванні динаміки економічних систем у дискретному часі.
12. Різницеві рівняння першого та другого порядку.
13. Поняття про лінійні звичайні різницеві рівняння.
14. Властивості розв'язків лінійних різницевих рівнянь.
15. Застосування різницевих рівнянь в економічних дослідженнях.

Методичні рекомендації

1. Основні поняття теорії диференціальних рівнянь. Розв'язання диференціальних рівнянь 1-го порядку

1.1. Диференціальні рівняння (д. р.): основні визначення

• Звичайним диференціальним рівнянням *n*-го порядку називається рівність вигляду

$$F(x, y, y', ..., y^{(n)}) = 0, \tag{1.1}$$

яке пов'язує незалежну змінну x, залежну від неї змінну y і похідні $y'(x)$, $y''(x), ..., y^{(n)}$.

• Функція $y = \varphi(x)$ називається розв'язком рівняння (1.1), якщо після підстановки $\varphi(x)$ замість y, $\varphi'(x)$ замість $y', \ldots, \varphi^{(n)}(x)$ замість $y^{(n)}$ воно представляє собою тотожність.

Припустимо, що $y = \varphi(x)$ дійсна функція дійсного аргументу.

Диференціальні рівняння знаходять широке застосування в природознавстві й економіці.

Розглянемо два приклади.

Приклад 1. Нехай матеріальна точка рухається вздовж осі Ox зі швидкістю $f(x)$. Також відома абсциса точки x_0 в який-небудь момент часу t_0. Потрібно знайти закон руху цієї точки, тобто залежність абсциси x від часу t.

Очевидно, що потрібно розв'язати рівняння $\frac{dx(t)}{dt} = f(t)$, яке при $t = t_0$ приймає значення x_0. З інтегрального числення відомо, що такий розв'язок надається формулою $x(t) = x_0 + \int\limits_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$.

Приклад 2. Відомо, що швидкість розпаду радію прямо пропорційна кількості радію. Припустимо, що в момент часу t_0 початкова кількість радію R_0 г. Потрібно визначити кількість R радію у будь-який момент часу $\boldsymbol{t}$.

Розв'язання: Нехай коефіцієнт пропорційності позначається через $c, (c > 0)$, тоді необхідно знайти такий розв'язок диференціального рівняння $\frac{dR(t)}{dt} = -cR$, який при $t = t_0$ перетворюється в R_0.

Якщо застосувати до цього рівняння теорію д. р. 2-го порядку з постійними коефіцієнтами, то отримаємо функцію $R(t) = R_0 \cdot e^{-c\left(t-t_0\right)}$.

Нижче за допомогою середовища Mathcad побудовані деякі графіки рішень диференціального рівняння $\frac{dR(t)}{dt} = -cR$, які відповідають початковим умовам $R_0(0) = 80;\ R_0(0) = 40;\ R_0(0) = 10$ (рис. 1.1).

Розглянуті приклади показують, що диференціальне рівняння має нескінчену множину розв'язків (x_0 у першому завданні і R_0 у другому) – маємо нове рішення для кожної із сталих. Саме тому для визначення всіх параметрів рішення диференціального рівняння, що описує реальні процеси, задавалася ще початкова умова, тобто значення шуканої функції при якому-небудь певному значенні аргументу. При цьому одержували єдиний розв'язок.

$t0 := 0 \quad R0 := 70 \quad c := 2.5 \quad R1 := 40 \quad R2 := 10$

$R(t) := R0 \cdot e^{-c\cdot(t-t0)} \quad R1(t) := R1 \cdot e^{-c\cdot(t-t0)}$

$R2(t) := R2 \cdot e^{-c\cdot(t-t0)}$

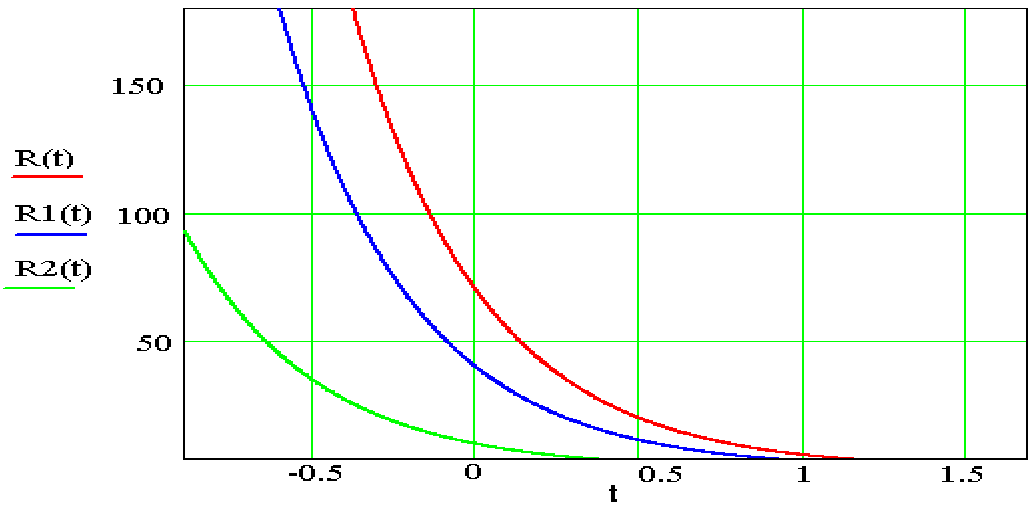

Рис. 1.1. **Графіки рішень д. р.** $\frac{dR(t)}{dt} = -cR$ **при початкових умовах**

$R_0(0) = 80;\ R_0(0) = 40;\ R_0(0) = 10$

У теорії диференціальних рівнянь розшук всіх рішень даного диференціального рівняння (інтегрування д. р.) і вивчення властивостей цих рішень.

• Рівняння

$$y^{(n)} = f(t, y, y', ..., y^{(n-1)}), \qquad (1.2)$$

де f визначена на підмножині Ω простору R^{n+1} і приймає дійсні значення, називається канонічним диференціальним рівнянням n-го порядку.

• Функція $y = \varphi(t) : t \in I = [a;b] \to R$ називається рішенням д. р. (1.2), якщо:

- існують кінцеві похідні $\varphi^{(j)}(t),\ j = \overline{0,n}$ при $t \in I$;
- n-вимірна точка $(t, \varphi, \varphi', ..., \varphi^{(n-1)}) \in R^{n+1}$ належить області визначення Ω функції f, коли аргумент t потрапляє в проміжок I має місце тотожність:

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), ..., \varphi^{(n-1)}(t)). \qquad (1.3)$$

У теорії звичайних диференціальних рівнянь розглядаються і загальні системи рівнянь. Важливе значення має теорема існування і єдиності розв'язку диференціального рівняння. Ця теорема формулюється і доводиться стосовно нормальних систем диференціальних рівнянь, що мають специфічний вигляд, а саме: коли усі похідні першого порядку $\dot{x}_1, \dot{x}_2, ..., \dot{x}_\mathrm{n}$ виражені через незалежну змінну t та залежні змінні $x_1, x_2, ..., x_\mathrm{n}$.

• Система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(t, x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_i = f_i(t, x_1, ..., x_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_n = f_n(t, x_1, ..., x_n) \end{cases} \qquad (1.4)$$

диференціальних рівнянь називається *нормальною*.

У цій системі t – незалежна змінна, $x_1,...,x_n$ – невідомі функції цієї змінної, а $f_i, \left(i=\overline{1,n}\right)$ – функції від $n+1$ змінних, задані на деякій відкритій множині D простори R^{n+1} розмірності $n+1$, у яких координатами точки є числа $t, x_1,..., x_n$. Надалі передбачатиметься, що функції від $n+1$ змінних, задані на деякій відкритій множині D, а також їх частинні похідні $\dfrac{\partial f_i(t, x_1,..., x_n)}{\partial x_j}$, $\left(i, j=\overline{1,n}\right)$ існують і безперервні на множині D.

Розв'язком системи рівнянь (1.4) називається система безперервних функцій

$$x_i = \varphi_i(t), i=\overline{1,n}, \tag{1.5}$$

які визначені на деякому інтервалі $r_1 < t < r_2$ і задовольняють системі (1.4). Інтервал $r_1 < t < r_2$ називається інтервалом визначення розв'язку (1.5) (випадки $r_1 = -\infty$ і $r_2 = +\infty$ не виключаються). Вважається, що система функцій (1.5) задовольняє системі рівнянь (1.4), якщо при підстановці в співвідношення (1.4) перетворюються на тотожність по t на всьому інтервалі $r_1 < t < r_2$. Для виконання цієї підстановки необхідно, щоб функції (1.5) мали похідні в кожній точці інтервалу, і щоб праві частини рівнянь (1.4) були визначені для всіх значень аргументів. Таким чином, точка з координатами $t, \varphi_1(t),..., \varphi_n(t)$ повинна належати множині D для всіх значень t на інтервалі $r_1 < t < r_2$.

Дамо формулювання теореми існування і єдиності для нормальної системи (1.4) (без доведення).

Теорема: нехай $\dot{x}_i = f_i\left(t, x_1,..., x_n\right), i=\overline{1,n}$ – нормальна система звичайних диференціальних рівнянь. Тут праві частини f_i визначені на деякій множині D, а функції f_i і $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}$ безперервні на D. Тоді для кожної точки

$$\left(t_0, x_{10}, x_{20},..., x_{n0}\right) \tag{1.6}$$

множини D існує розв'язок

$$x_i = \varphi_i(t), i=\overline{1,n}.$$

системи (1.4), визначене на деякому інтервалі, що містить точку t_0 і що задовольняє умовам:

$$\varphi_i(t_0) = x_{i0}, \quad \left(i = \overline{1,n}\right). \tag{1.7}$$

Якщо станеться, що існують якісь два розв'язки:

$$x_i = \xi_i(t) \text{ і } x_i = \eta_i(t) \quad \left(i = \overline{1,n}\right) \tag{1.8}$$

системи (1.4), що задовольняють умовам

$$\xi_i(t_0) = \eta_i(t_0) = x_{i0}, \quad \left(i = \overline{1,n}\right), \tag{1.9}$$

причому кожен розв'язок визначений на своєму власному інтервалі значень змінної t, що містить точку t_0, то розв'язки ці співпадають усюди, де вони обидва визначені.

Значення (1.6) називаються початковими, а співвідношення (1.7) – початковими умовами для цього рішення.

Завдання відшукання розв'язку системи (1.4), що задовольняє початковим умовам (1.8), називається *задачею Коші*.

Повернемося до канонічного диференціального рівняння n-го порядку (1.2). Нехай функції f і $\frac{\partial f}{\partial y^{(k)}}$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$, безперервні на множині D. Для заміни рівняння (1.2) нормальною системою рівнянь вводяться невідомі функції $x_1, \ldots, x_n$ незалежної змінної t за допомогою рівностей:

$$x_1 = y; x_2 = y'; \ldots; x_n = y^{(n-1)}. \tag{1.10}$$

Тоді рівняння (1.2) рівнозначні системі:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n; \\ \dot{x}_n = f(t, x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{cases}$$

Доведення цієї теореми можна знайти у [8].
З цього через теорему існування і єдиності витікає, що для кожної точки

$$(t_0, y_0, \dot{y}_0, ..., y_0^{(n-1)}) \in \mathrm{D} \qquad (1.11)$$

існує розв'язок $y = \psi(t)$ рівняння (1.2), що задовольняє початкові умови (1.11). Будь-які два розв'язки з початковими значеннями (1.11) співпадають на загальній частині їх області визначення.

1.2. Диференціальні рівняння 1-го порядку та методи їх розв'язання: рівняння із змінними, що розділяються, однорідні рівняння 1-го порядку, лінійні д. р., рівняння Бернуллі

Нехай $n = 1$. Рівняння (1.2) набуває вигляду $\dot{x} = f(t, x)$.

Теорема існування і єдиності розв'язку:

Нехай є диференціальне рівняння

$$\dot{x} = f(t, x), \qquad (1.12)$$

де функція $f(t, x)$ задана на деякій відкритій безлічі D площини P змінних t, x. Сама функція $f(t, x)$ і її частинна похідна $\frac{\partial f}{\partial x}$ є безперервними функціями на всій множині D.

Тоді:

1) для будь-якої точки (t_0, x_0) множини D знайдеться розв'язок $x = \varphi(t)$ рівняння (1.12), що задовольняє умові

$$\varphi(t_0) = x_0; \qquad (1.13)$$

2) якщо два розв'язки $x = \psi(t)$ і $x = \chi(t)$ рівняння (1.13) співпадають хоча б для одного значення $t = t_0$, тобто, якщо $\psi(t_0) = \chi(t_0)$, то ці розв'язки тотожно рівні для всіх тих значень змінного t, для яких вони обидва визначені.

Геометричний зміст теореми полягає в тому, що через кожну точку (t_0, x_0) множини D проходить одна й лише одна інтегральна крива рівняння (1.12).

Диференціальні рівняння із змінними, що розділяються:

$$\frac{dy}{dx} = f_1(x)\cdot f_2(y) \qquad (1.14)$$

або $$M_1(x)N_1(y)dy + M_2(x)N_2(y)dx = 0.$$

Теорема. Нехай при $a < x < b, \quad c < y < d$ функції $f_1(x)$ і $f_2(y)$ безперервні, причому $f_2(y) \neq 0$ ніде на $(c;d)$. Тоді через кожну точку (x_0, y_0) прямокутника Q: $a < x < b, \quad c < y < d$ проходить графік одного й лише одного розв'язку рівняння (1.14).

Метод інтегрування таких рівнянь полягає в розділенні змінних, тобто приведенні рівняння (1.14) до вигляду: $\frac{dy}{f_2(y)} = f_1(x)\cdot dx$.

А потім інтегруванням обох частин рівності (якщо це можливо) одержуємо загальне рішення рівняння в явному або неявному вигляді. Частинний розв'язок маємо, якщо задано початкову умову $y(x_0) = y_0$.

Приклад 3. Знайти загальне рішення д. р.:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos x}{\sin 2y}. \qquad (1.15)$$

Розв'язання: розділимо змінні: $\sin 2y \cdot dy = \cos x \cdot dx \Rightarrow$

$$\Rightarrow \int \sin 2y \cdot dy = \int \cos x \cdot dx \Rightarrow C - \frac{1}{2}\cos 2y = \sin x \Rightarrow \cos 2y = 2(C - \sin x) \Rightarrow$$

$\Rightarrow y = \frac{1}{2}\arccos\left[2(C - \sin x)\right]$ – загальний розв'язок д. р. (1.15).

Побудуємо декілька частинних рішень, відповідних сталим $C = 0.8; 1; 0.6$ (рис. 1.2).

$$C1 := 0.8 \quad C2 := 1 \quad C3 := 0.6$$

$$f1(x) := 0.5\cdot \mathrm{acos}(2C1 - 2\sin(x))$$

$$f2(x) := 0.5\cdot \mathrm{acos}(2C2 - 2\sin(x))$$

$$f3(x) := 0.5\cdot \mathrm{acos}(2C3 - 2\sin(x))$$

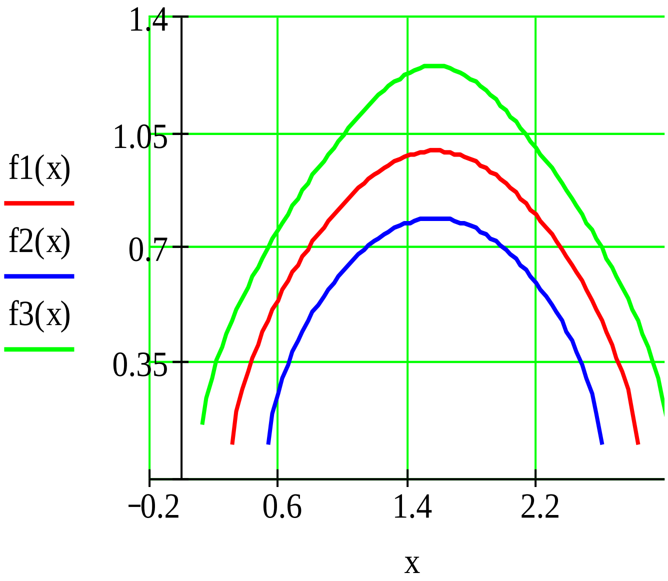

Рис. 1.2. **Частинні розв'язки, відповідні константам** $C = 0.8; 1; 0.6$

Приклад 4. Знайти криві, для яких площа трикутника, отриманого дотичною, ординатою точки дотику і віссю абсцис, є величина стала, яка дорівнює a^2 (рис. 1.3).

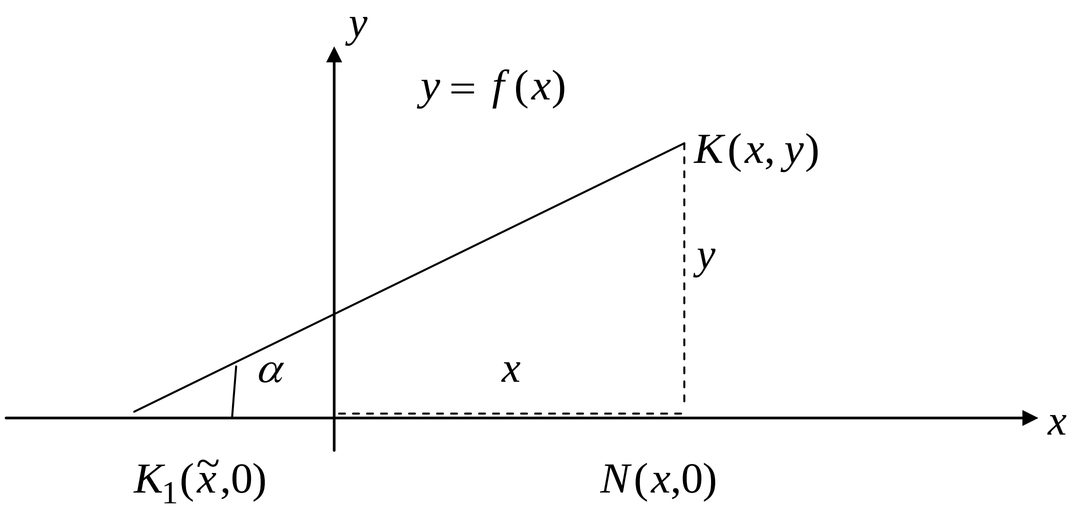

Рис. 1.3. **Трикутник, площа котрого дорівнює** a^2

Розв'язання: Нехай $(\tilde{x}, \tilde{y})$ – координати поточної точки на дотичній до кривої $y = f(x)$. Природно виразити площу трикутника ΔNKK_1 через x, y.

Знайдемо абсцису $\tilde{x}$ точки $K_1(\tilde{x}, 0)$ перетину дотичної $\tilde{y} - y = y'(x)(\tilde{x} - x)$ з віссю Ox. Для цього прирівняємо до 0 в її рівнянні ординату:

$\tilde{y}$: $\tilde{y} = 0 \Rightarrow -y = y'(x)(\tilde{x} - x) \Rightarrow y'x - y = y'\tilde{x} \Rightarrow \tilde{x} = \dfrac{y'x - y}{y'}$.

Перший катет $|NK| = y$, другий – $(x - \tilde{x}) = x - \dfrac{y'x - y}{y'} = \dfrac{y'x - y'x + y}{y'} = \dfrac{y}{y'}$.

За умовою завдання потрібно, щоб площа a^2 прямокутного трикутника ΔNKK_1 дорівнювала напівдобутку катетів:

$$a^2 = \frac{y(x - \tilde{x})}{2} \Rightarrow 2a^2 = y\frac{y}{y'} .$$

Маємо д. р. зі змінними, що розділяються: $2a^2 = \dfrac{y^2}{y'} \Rightarrow$

$$\Rightarrow y' = \frac{y^2}{2a^2} \Rightarrow \int \frac{dy}{y^2} = \int \frac{dx}{2a^2} \Rightarrow -y^{-1} = \frac{x}{2a^2} + C \Rightarrow \frac{1}{y} = -\left(\frac{x}{2a^2} + C\right).$$

А шукане сімейство кривих:

$$y = -\frac{1}{\left(\dfrac{x}{2a^2} + C\right)}. \qquad (1.16)$$

Побудуємо деякі криві сімейства функцій при $a = 3$ (рис. 1.4) Нехай $C = -4; -1; 0; 3; 8$.

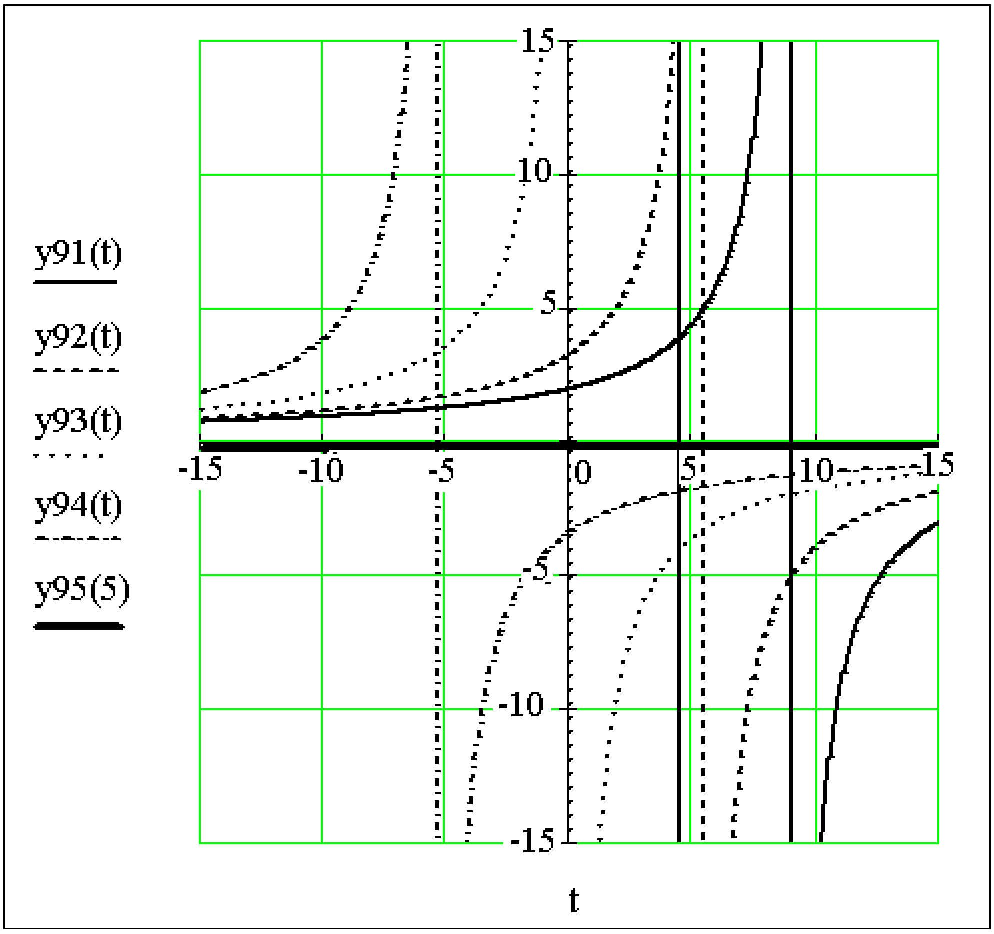

Рис. 1.4. **Частинні розв'язки, відповідні константам** $C = -0.5; -0.3; 0; 0.3; 5$

Однорідні рівняння 1-го порядку

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right). \tag{1.17}$$

Якщо функція $f(u)$ буде визначена при $a < u < b$, то вона буде визначена в кутках, утворених такими точками (x, y) для яких $a < \dfrac{y}{x} < b$. Області, складені цими двома кутами, ми позначатимемо G.

Теорема: Якщо функція $f(u)$ безперервна й $a < u < b$ усюди на цьому інтервалі $f(u) \neq u$, то через кожну точку $(x_0; y_0)$ з G проходить одна й лише одна інтегральна крива.

Доведення: покладемо $y(x) = u(x) \cdot x$. Тоді рівняння (1.17) перетвориться так: $u'(x) \cdot x + u = f(u)$.

Звідси одержуємо рівняння із змінними, що розділяються:

$$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x}, \tag{1.18}$$

до якого можна застосувати попередню теорему, що й доводить твердження.

З рівняння (1.18) знаходимо $\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{f(u)-u}$,

і отже
$$\ln|x|=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)+C, \tag{1.19}$$

де $\Phi(u)$ – деяка первісна $\frac{1}{f(u)-u}$.

Приклад 5. Представити картину сімейства інтегральних кривих для диференціального рівняння $y'=\frac{x+2y}{x}$.

Розв'язок: Приведемо рівняння до вигляду $y'=1+2\frac{y}{x}$, звідки витікає, що воно однорідне 1-го порядку. Заміною функції: $y(x)=u(x)\cdot x$ на $u(x)$ одержуємо д. р. $u'x+u=1+2u$: або $u'x=1+u$. Розділимо змінні й проінтегруємо обидві частини рівності:

$$\int\frac{du}{1+u}=\int\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad\ln|1+u|=\ln|x|+\ln|C|\quad\Rightarrow|1+u|=|Cx|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+u=\pm|Cx|\Rightarrow 1+\frac{y}{x}=\pm|Cx|\Rightarrow\frac{y}{x}=\pm|Cx|-1\Rightarrow y=x\cdot(\pm|Cx|-1).$$

Отже, рівняння сімейства кривих: $y=x\cdot(\pm|Cx|-1)$, де C – довільна константа (рис. 1.5, 1.6).

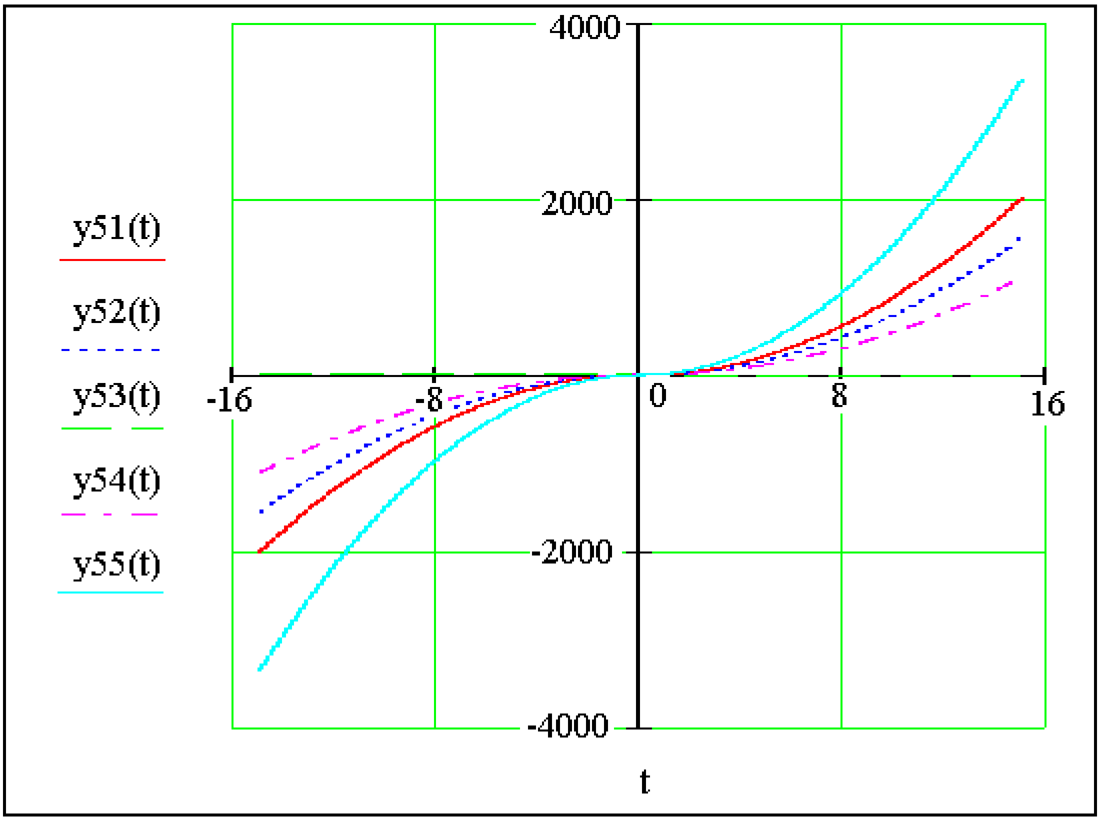

Рис. 1.5. **Сімейство** $y = x \cdot (|Cx| - 1)$

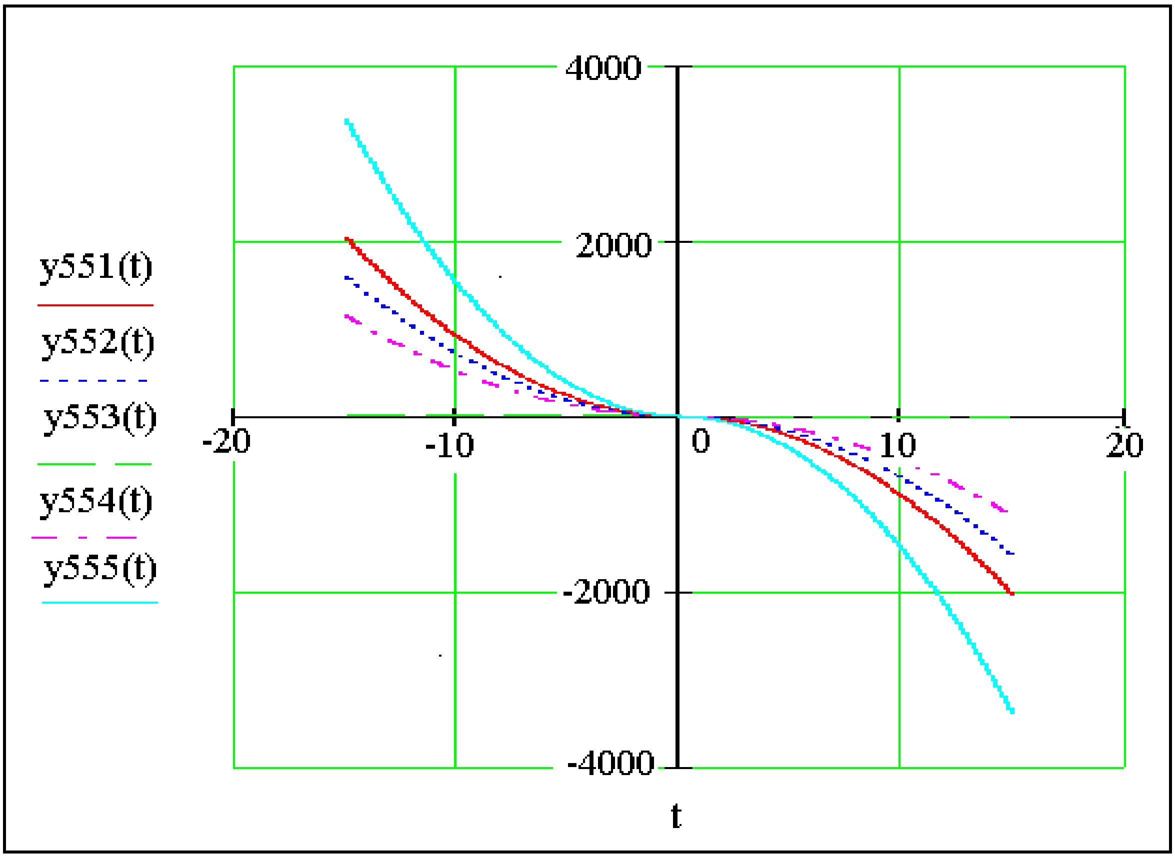

Рис. 1.6. **Сімейство** $y = x \cdot (-|Cx| - 1)$

Лінійні рівняння 1-го порядку

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x). \qquad (1.20)$$

За яких умов це рівняння має єдиний розв'язок?

Теорема про існування та єдиність розв'язку д. р.

Нехай функції $p(x)$ і $q(x)$ неперервні в інтервалі $a<x<b$. Тоді через кожну точку (x_0, y_0) смуги, визначеної нерівностями $a<x<b$; $-\infty<y<\infty$; проходить одна й лише одна інтегральна крива цього рівняння, визначена при всіх x на інтервалі $(a;b)$.

Перший метод.
Введемо представлення розв'язку д. р. (1.1) у вигляді добутку двох невідомих функцій:

$$y(x)=u(x)\cdot v(x). \qquad (1.21)$$

Тоді

$$y'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x).$$

Тепер д. р. (1.27) набуває вигляду:

$$u'v+uv'+p(x)uv=q(x) \qquad (1.22)$$

або $\left(u'+p(x)u\right)v+uv'=q(x)$.
Накладемо додаткову умову

$$u'+p(x)u=0 \qquad (1.23)$$

або $v'+p(x)v=0$ (об'єднуємо 2-ий та 3-ій доданки у рівнянні (1.22).
Кожне з цих рівнянь є д. р. 1-го порядку зі змінними, що розділяються.
Дійсно, рівняння (1.5) дає

$$\frac{u'}{u}=-p(x) \qquad (1.24)$$

або

$$\left(\ln u\right)'=-p(x)$$

$$\ln u=-\int p(\xi)d\xi+\ln u_0.$$

Отже, $$u(x)=u_0\cdot\exp(-\int p(\xi)d\xi), \tag{1.25}$$
де $u_0=u(0)$.

Враховуючи (1.22), отримаємо д. р.

$$v'=\frac{q}{u}, \tag{1.26}$$

де $q(x)$ задана функція, а $u(x)$ визначається формулою (1.25), в якій u_0 довільна стала. Оскільки треба знайти одну яку-небудь функцію $u(x)$, яка задовольняє умову (1.23), то можна покласти, наприклад, $u_0=1$.

Проінтегруємо (1.26):

$$v(x)=\int_0^x\frac{q(\xi)d\xi}{u(\xi)}+v_0.$$

За формулою $y(x)=u(x)v(x)=\exp(-\int p(\xi)d\xi)\cdot v(x)$ одержуємо розв'язок д. р. (1.20).

Приклад 6. Знайти всі рішення д. р.

$$(2x+1)y'=4x+2y. \tag{1.27}$$

Розв'язання: Нехай $2x+1\neq 0$. Тоді (1.34) прийме вигляд:

$$y'-\frac{2}{2x+1}y=\frac{4x}{2x+1}.$$

Виконаємо заміну (1.21) в цьому рівнянні:

$$u'v+v'u-\frac{2}{2x+1}uv=\frac{4x}{2x+1}\Rightarrow v\left(u'-\frac{2}{2x+1}u\right)+v'u=\frac{4x}{2x+1}. \tag{1.28}$$

Підберемо функцію $u(x)$ так, щоб $u'-\frac{2}{2x+1}u=0$.

$$u' = \frac{2}{2x+1}u \Rightarrow \int\frac{du}{u} = \int\frac{2dx}{2x+1} \Rightarrow \ln|u| = \ln|2x+1| \Rightarrow |u| = |2x+1|.$$

Обираючи один знак, маємо одну функцію, що занулює перший доданок в (1.28): $u(x) = |2x+1|$.

Повернемося до рівняння (1.28): $v'|2x+1| = \dfrac{4x}{2x+1}$.

Нехай $2x+1 > 0$, тоді

$$v' = \frac{4x}{(2x+1)^2} \Rightarrow v(x) = 2\int\frac{2xdx}{(2x+1)^2} = 2\left[\int\frac{2x+1-1dx}{(2x+1)^2}\right] =$$

$$= 2\left[\int\frac{1dx}{(2x+1)}\right] - 2\left[\int\frac{1dx}{(2x+1)^2}\right] = \frac{2}{2}\ln|2x+1| + \frac{2}{2}\frac{1}{2x+1} + C.$$

Отже, $v(x) = \ln|2x+1| + \dfrac{1}{2x+1} + C$, остаточно з урахуванням (1.21) маємо:

$$y(x) = (2x+1)\left(\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C\right) = (2x+1)(\ln|2x+1| + C) + 1.$$

Тепер нехай $2x+1 < 0$, тоді $v' = -\dfrac{4x}{(2x+1)^2} \Rightarrow v(x) = -2\int\dfrac{2xdx}{(2x+1)^2} =$

$$= -\left(\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C\right);\ u(x) = -(2x+1).$$

Остаточно маємо:

$$y(x) = [-(2x+1)]\left[-\left(\ln|2x+1| + \frac{1}{2x+1} + C\right)\right] = (2x+1)(\ln|2x+1| + C) + 1.$$

Вигляд розв'язку однаковий, якщо $2x+1 \neq 0$ $(x \neq -\frac{1}{2})$.

Загальне рішення : $y(x) = (2x+1)(\ln|2x+1| + C) + 1.$

Нижче приведені графіки деяких інтегральних кривих, відповідних константам $C=-15;-5;-2;0;3;8;19$ (рис. 1.7).

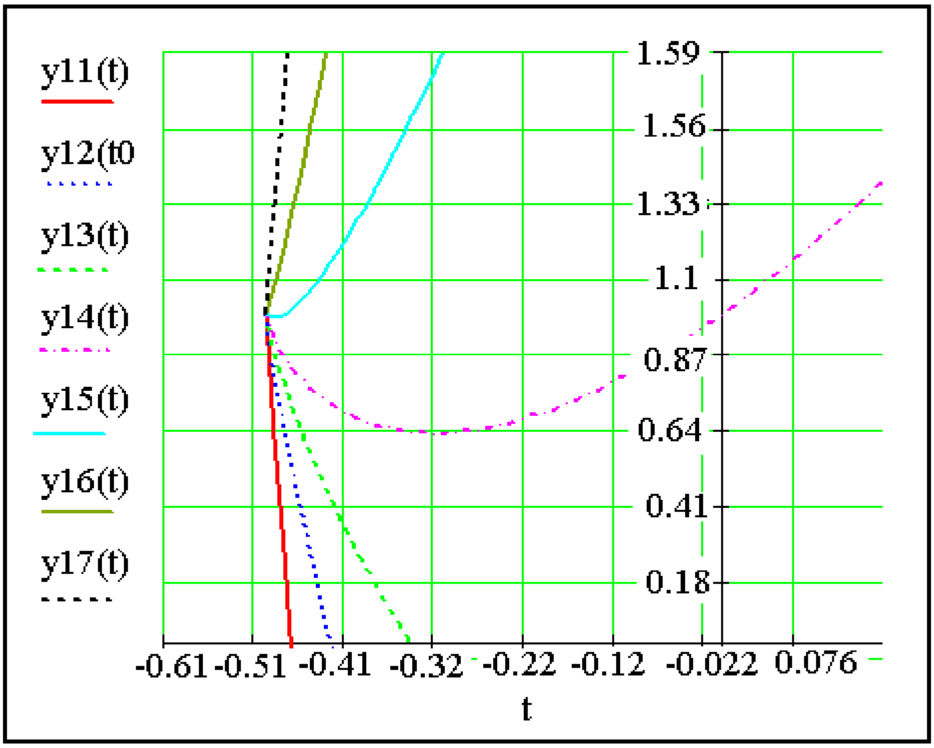

Рис. 1.7. **Сімейство інтегральних кривих, відповідних сталим** $C=-15;-5;-2;0;3;8;19$

Другий спосіб розв'язання лінійного рівняння: спочатку слід розв'язати рівняння

$$y'+p(x)y=0. \qquad (1.29)$$

Це робиться шляхом розділення змінних і в загальному розв'язку останнього замінити довільну постійну C на невідому функцію $C(x)$. Потім вираз для $y(x)$ підставити в рівняння (1.20) і знайти функцію $C(x)$. Приклад див. в п. "Рівняння Бернуллі".

Рівняння Бернуллі

$$y'+a(x)y=b(x)y^n \qquad (n\neq 1)$$

Для розв'язку треба обидві його частині розділити на y^n і зробити заміну $\frac{1}{y^{n-1}}=z$. Після чого виходить лінійне рівняння, яке можна розв'язати викладеними вище способами.

Приклад 7. Розв'язати рівняння:

$$xyy' = y^2 + x \tag{1.30}$$

Розділимо на xy: $y' - \frac{y}{x} = \frac{1}{y}$ – [рівняння Бернуллі при $n = -1$].

Помножимо рівняння на y та зробимо заміну змінної y на z: $\frac{1}{y^{-2}} = z$

Тоді маємо: $y^2 = z \Rightarrow 2yy' = z' \Rightarrow \ \Rightarrow yy' = \frac{z'}{2}$.

З урахуванням цих перетворень, рівняння прийме вигляд:

$$\frac{z'}{2} - \frac{z}{x} = 1, \tag{1.31}$$

− лінійне рівняння 1-го порядку щодо функції $z(x)$.

Вирішимо його 2-м способом: розв'яжемо спочатку д. р. з 0 у правій частині:

$$\frac{z'}{2} = \frac{z}{x} \Rightarrow \frac{dz}{z} = \frac{2dx}{x} \Rightarrow \int \frac{dz}{z} = \int \frac{2dx}{x} \Rightarrow \ln|z| = 2\ln|x| \Rightarrow \ln|z| = \ln\left(x^2\right) + \ln|C| \Rightarrow$$
$$\Rightarrow z(x) = Cx^2.$$

Нехай тепер довільна константа C невідома поки функція $C(x)$. Підставимо вираз $z(x) = C(x)x^2$ в рівняння (1.31) і знайдемо $C(x)$, розв'язавши його.

$$z = C(x)x^2 \Rightarrow z' = C'x^2 + C2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{z'}{2} - \frac{z}{x} = \frac{C'x^2 + C2x}{2} - \frac{Cx^2}{x} = \frac{C'x^2}{2} + C(x)x - C(x)x = \frac{C'x^2}{2} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{C'x^2}{2} = 1 \Rightarrow C' = \frac{2}{x^2} \Rightarrow C(x) = \int \frac{2}{x^2}\,dx = -\frac{2}{x} + D.$$

Отже, $z(x) = x^2\left(-\frac{2}{x} + D\right) = Dx^2 - 2x$, де $D-$ довільна константа.

Повертаючись до шуканої функції $y(x)$, маємо:

$$y^2 = z \Rightarrow y(x) = \sqrt{z(x)} = \sqrt{Dx^2 - 2x}. \qquad (1.32)$$

Нижче приведені графіки деяких інтегральних кривих (рис. 1.8).

$$C11 := -10 \qquad y1(t) := \left(C11 \cdot t^2 - 2 \cdot t\right)^{0.5}$$

$$C12 := -5 \qquad y2(t) := \left(C12 \cdot t^2 - 2 \cdot t\right)^{0.5}$$

$$C13 := -2 \qquad y3(t) := \left(C13 \cdot t^2 - 2 \cdot t\right)^{0.5}$$

$$C14 := 0 \qquad y4(t) := \left(C14 \cdot t^2 - 2 \cdot t\right)^{0.5}$$

$$C15 := 5 \qquad y5(t) := \left(C15 \cdot t^2 - 2 \cdot t\right)^{0.5}$$

$$C16 := 7 \qquad y6(t) := \left(C16 \cdot t^2 - 2 \cdot t\right)^{0.5}$$

$$C17 := 38 \qquad y7(t) := \left(C17 \cdot t^2 - 2 \cdot t\right)^{0.5}$$

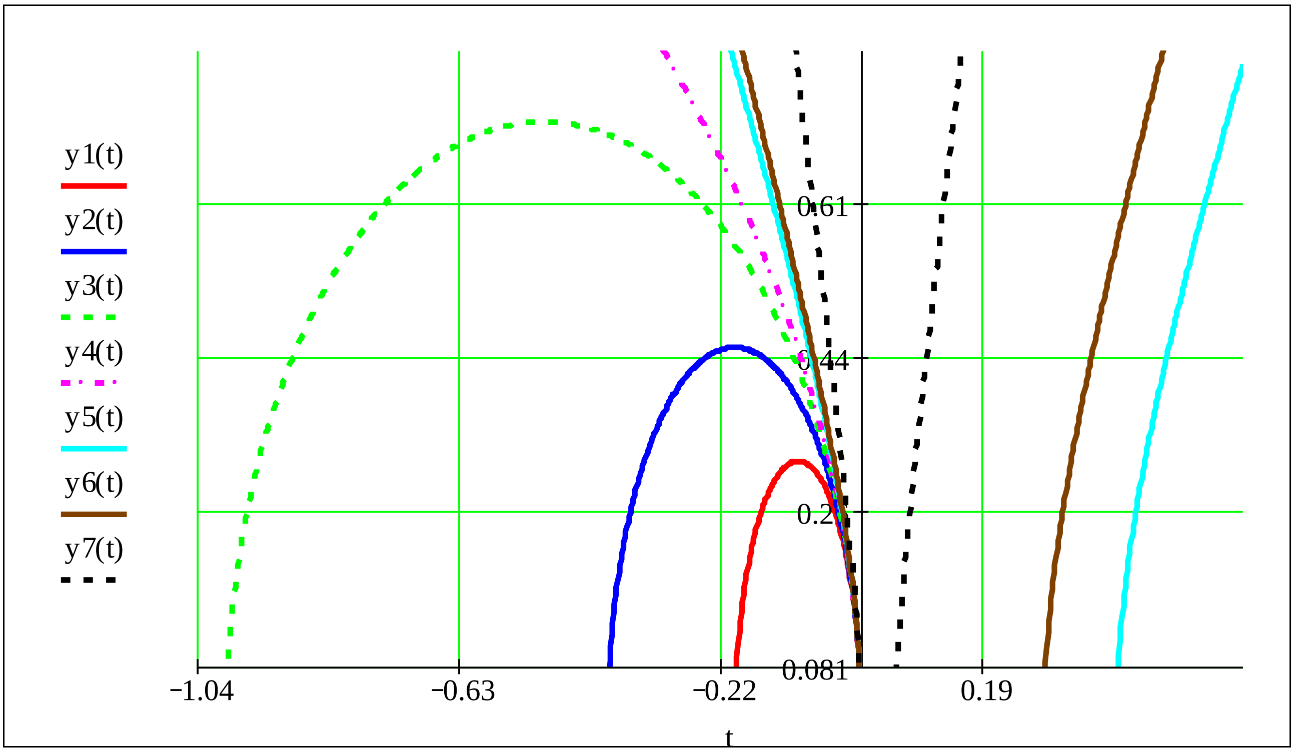

Рис. 1.8. **Інтегральні криві д. р.** $xyy' = y^2 + x$

Приклад. Розв'язати рівняння Бернуллі

$$y' + \frac{\sin x}{\cos x} y = y^2.$$

Розв'язання. Поділимо рівняння на y^2 та зробимо заміну: $\frac{1}{y} = z$. Тоді

$$y = \frac{1}{z} \Rightarrow y' = -\frac{z'}{z^2}.$$

Рівняння приймає вигляд: $-\frac{z'}{z^2} + \frac{\sin x}{\cos x}\frac{1}{z} = \frac{1}{z^2} \quad \Big| \cdot z^2$

$$-z' + \frac{\sin x}{\cos x} z = 1 \Rightarrow z' - \frac{\sin x}{\cos x} z = -1.$$

Отримали лінійне рівняння першого порядку відносно функції $z(x)$.

Заміна: $z(x) = u(x)v(x)$. Підставимо $z(x)$ в д. р. $z' - \frac{\sin x}{\cos x} z = -1.$

$$u'v + v'u - \frac{\sin x}{\cos x} uv = -1 \Rightarrow \left(u' - \frac{\sin x}{\cos x} u\right) v + v'u = -1.$$

Оберемо функцію $u(x)$ такою, щоб вираз у дужках дорівнював 0:

$u' - \frac{\sin x}{\cos x} u = 0$. Його розв'язок одержуємо наступними перетвореннями:

$$\frac{du}{dx} = \frac{\sin x}{\cos x} u \Rightarrow \frac{du}{u} = \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow \int \frac{du}{u} = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \Rightarrow \ln|u| = -\ln|\cos x| \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{\cos x}.$$

Повертаючись до рівняння $\left(u' - \frac{\sin x}{\cos x} u\right) v + v'u = -1$, маємо після підстановки $u = \frac{1}{\cos x}$ диференціальне рівняння відносно v:

$$v' \cdot \frac{1}{\cos x} = -1 \Rightarrow v' = -\cos x \Rightarrow v = -\int \cos x dx = -\sin x + C.$$

Таким чином, функцію $z(x) = u(x)v(x)$ ми вже знаємо:

$$z(x) = (C - \sin x)\frac{1}{\cos x}.$$

Далі: $\dfrac{1}{y(x)} = z(x) = (C - \sin x)\dfrac{1}{\cos x} \quad \Rightarrow y(x) = \dfrac{\cos x}{C - \sin x}.$

Побудуємо декілька інтегральних кривих (рис. 1.9).

$$c1 := 0.5 \qquad g1(x) := \frac{\cos(x)}{(c1 - \sin(x))^2} \qquad c2 := -0.5 \qquad g2(x) := \frac{\cos(x)}{(c2 - \sin(x))^2}$$

$$c3 := -1.23 \qquad g3(x) := \frac{\cos(x)}{(c3 - \sin(x))^2} \qquad c4 := 1.1 \qquad g4(x) := \frac{\cos(x)}{(c4 - \sin(x))^2}$$

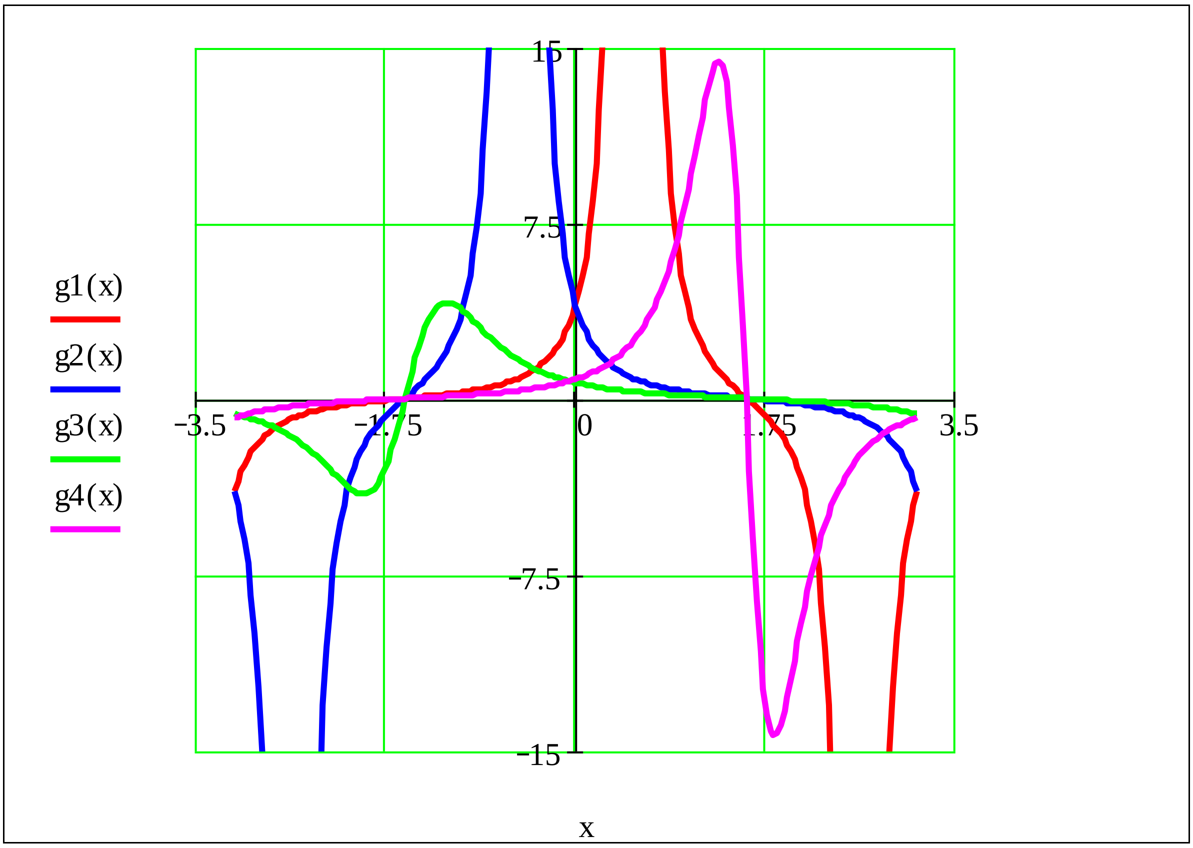

Рис. 1.9. **Інтегральні криві, відповідні значенням**
$C = 0.5; -0.5; -1.23; 1.1$

2. Диференціальні рівняння вищих порядків. Методи розв'язання диференціальних рівнянь 2-го порядку

Диференціальні рівняння 2-го порядку містять другу похідну від шуканої функції; його загальний вигляд такий:

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (2.1)$$

Якщо це рівняння залежить від шуканої функції та її похідних лінійно (залежність від x може бути будь-якою), тоді воно називається *лінійним*. Таким чином, лінійне рівняння 2-го порядку має загальний вигляд:

$$a(x)y'' + b(x)y' + c(x)y = f(x).$$

Розглянемо найбільш важливий окремий випадок, коли коефіцієнти біля шуканої функції та її похідних $a(x), b(x), c(x)$ є постійними. Таке рівняння зустрічається в завданнях про механічні й електричні коливання, в яких незалежна змінна в них є час t.

Рівняння 2-го порядку, що допускають зниження порядку

1. Рівняння, що не містять шуканої функції:

$$F(x, y', y'') = 0. \qquad (2.2)$$

Заміною $y'(x) = u(x)$ рівняння (2.2) зводиться до рівняння 1-го порядку відносно функції $u(x)$:

$$F(x, u, u') = 0.$$

Якщо це рівняння інтегрується в квадратурах, тоді, повернувшись до функції $y(x)$, дістанемо проміжний інтеграл рівняння (2.2) у вигляді: $y'(x) = \varphi(x, C_1, C_2)$.

Приклад 8. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy' = y''^2$. Заміною $y'(x) = u(x)$ ($y''(x) = u'(x)$) зведемо це рівняння до вигляду $xu = u'^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow u' = \pm\sqrt{xu} \Rightarrow \int \frac{du}{\sqrt{u}} = \pm\int \sqrt{x}dx \Rightarrow \frac{u^{1/2}}{1/2} = \frac{x^{3/2}}{3/2} + 2C \Rightarrow u = \left(\frac{\sqrt{x^3}}{3} + C\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{9}x^3 + \frac{2C}{3}\sqrt{x^3} + C^2;$$

$$y' = \frac{1}{9}x^3 + \frac{2C}{3}\sqrt{x^3} + C^2 \Rightarrow y = \frac{1}{36}x^4 + \frac{2C\cdot 2}{3\cdot 5}\sqrt{x^5} + C^2 x + D.$$

Отже, $y(x) = \frac{1}{36}x^3 + \frac{4C}{15}\sqrt{x^5} + C^2 x + D.$

Побудуємо декілька інтегральних кривих (середовище Mathcad).

Приклад 9. Знайти загальний розв'язок рівняння $xy'' + y' = 1 + x$. Заміною $y'(x) = p(x) \Rightarrow y''(x) = p'(x)$ зведемо це рівняння до вигляду (рис. 2.1):

$$d1 := -1 \qquad k1(x) := \frac{1}{36}\cdot x^3 + \frac{4\cdot d1}{15}\cdot x^{2.5} + d1^2\cdot x$$

$$d2 := -1.5 \qquad k2(x) := \frac{1}{36}\cdot x^3 + \frac{4\cdot d2}{15}\cdot x^{2.5} + d2^2\cdot x$$

$$d3 := -0.7 \qquad k3(x) := \frac{1}{36}\cdot x^3 + \frac{4\cdot d3}{15}\cdot x^{2.5} + d3^2\cdot x$$

$$d4 := 0.34 \qquad k4(x) := \frac{1}{36}\cdot x^3 + \frac{4\cdot d4}{15}\cdot x^{2.5} + d4^2\cdot x$$

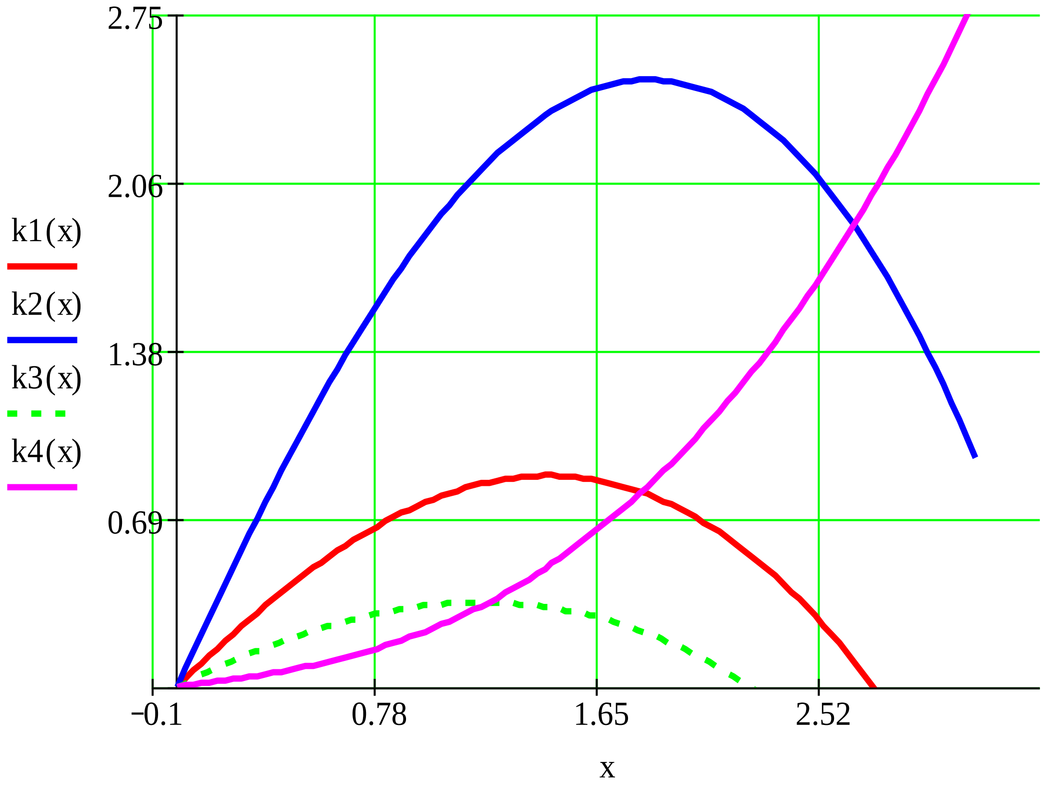

Рис. 2.1. **Інтегральні криві, відповідні сталим**
$C = -1.5; -1; -0.7; 0.34; \quad D = 0$

$$xp' + p = 1 + x \,|: x \qquad p' + \frac{p}{x} = \frac{1+x}{x} \Rightarrow$$

отримали лінійне рівняння першого порядку.

Заміна: $p(x) = u(x)v(x)$. Далі:

$$u'v + v'u + \frac{uv}{x} = \frac{1+x}{x} \Rightarrow \left(u' + \frac{u}{x}\right)v + v'u = \frac{1+x}{x}.$$

Оберемо u такою, щоб $u' + \frac{u}{x} = 0$. Розв'язок такого рівняння отримаємо, розділивши змінні: $\int \frac{du}{u} = -\int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln u = -\ln x \Rightarrow u = \frac{1}{x}$.

Повертаючись до рівняння $\left(u' + \frac{u}{x}\right)v + v'u = \frac{1+x}{x}$, після підстановки функції $u = \frac{1}{x}$ отримаємо: $\frac{v'}{x} = \frac{1+x}{x}$ або $v' = 1 + x$, отже, $v(x) = x + \frac{x^2}{2} + D$.

Остаточно, $p(x) = u(x)v(x) = \frac{1}{x}\left(x + \frac{x^2}{2} + D\right) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{D}{x}$.

$$p(x) = y'(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{D}{x} \Rightarrow y(x) = x + \frac{x^2}{4} + D\ln x + C,$$

де C, D – довільні сталі.

Побудуємо декілька інтегральних кривих (рис. 2.2) (середовище Mathcad).

$$d1 := 3 \qquad k1(x) := x + \frac{x^2}{4} + d1 \qquad d2 := 1.5 \qquad k2(x) := x + \frac{x^2}{4} + d2$$

$$d3 := 4 \qquad k3(x) := x + \frac{x^2}{4} + d3 \qquad d4 := 4.6 \qquad k4(x) := x + \frac{x^2}{4} + d4$$

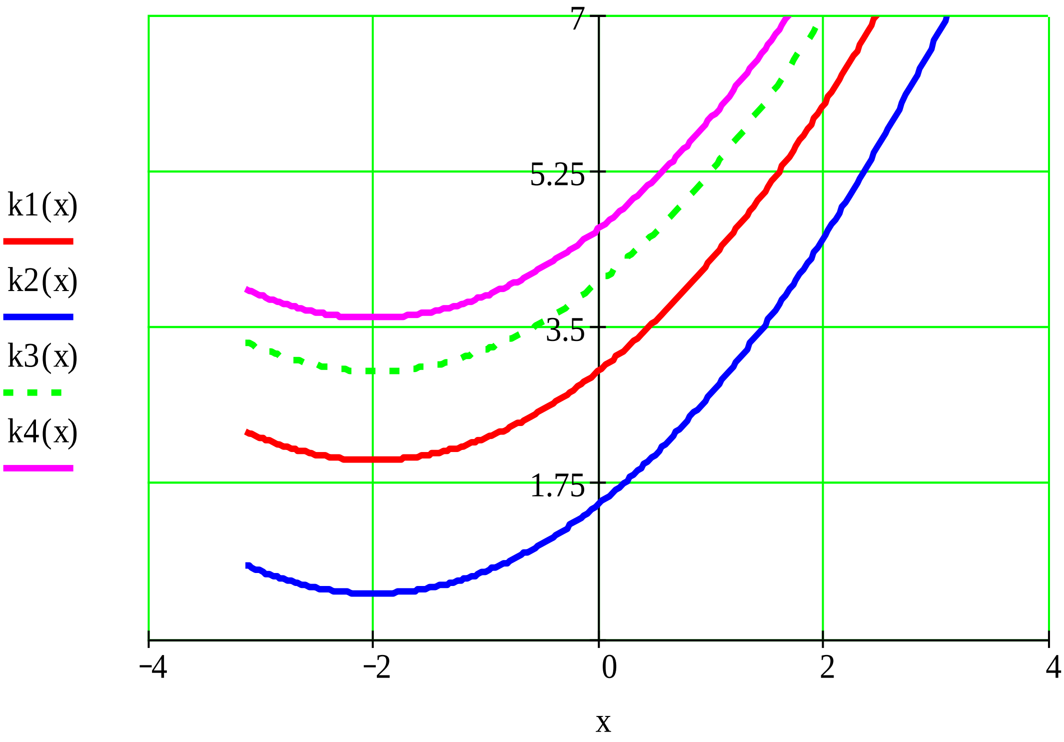

Рис. 2.2. **Інтегральні криві, відповідні сталим**
$D = 1.5;\ 3;\ 4;\ 4.6; \qquad C = 0$

2. Рівняння, що не містять незалежної змінної:

$$F(y, y', y'') = 0. \tag{2.3}$$

За допомогою заміни $y' = p(y)$ порядок рівняння (2.3) можна знизити на одиницю. Справді,

$$y' = p,\ y'' = \frac{d}{dx}(y') = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p'p.$$

Підставивши в рівняння (2.3), дістанемо рівняння 1-го порядку вигляду $F_1(y, p, p') = 0$. Якщо $\Phi_1(y, p, C_1, C_2) = 0$ – загальний інтеграл цього рівняння, тоді співвідношення $\Phi_1(y, p, C_1, C_2) = 0$ є проміжним інтегралом 1-го порядку рівняння (2.3) – диференціальне рівняння першого порядку інтегрованого типу.

Приклад 10. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$y'^2 - 1 = 2y \cdot y''. \tag{2.4}$$

Розв'язання. Заміною $y' = p, y'' = p'p$ зведемо рівняння (2.4) до вигляду:

$$p^2 - 1 = 2yp'p \Rightarrow 2p \cdot \frac{dp}{dy} = \frac{p^2 - 1}{y} \Rightarrow \int \frac{2p}{1+p^2} dp = \int \frac{dy}{y} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left|p^2 - 1\right| = \ln|y| + \ln|C| \quad \Rightarrow \left|p^2 - 1\right| = |Cy| \Rightarrow p^2 - 1 = Cy \Rightarrow p^2 = 1 + Cy;$$

$$y' = \pm\sqrt{1+Cy} \Rightarrow \int \frac{dy}{\pm\sqrt{1+Cy}} = \int dx \Rightarrow \frac{1}{C} \cdot \frac{\pm(1+Cy)^{1/2}}{1/2} = x + D \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \pm(1+Cy)^{1/2} = \frac{C}{2}(x+D) \Rightarrow 1 + Cy = \frac{C^2}{4}(x+D)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = \left[\frac{C^2}{4}(x+D)^2 - 1\right] \cdot \frac{1}{C}.$$

Відповідь: $y = \left[1 - \frac{C^2}{4}(x+D)^2\right] \cdot \frac{1}{C}$, де C, D – довільні сталі.

3. Рівняння, однорідні відносно y, y', y''.

Розглянемо рівняння

$$F(x, y, y', y'') = 0. \qquad (2.5)$$

У якому функція F є однорідною порядку m відносно y, y', y'', тобто:

$$F(x, ty, ty', ty'') = t^m F(x, y, y', y''), \quad (t > 0).$$

За допомогою заміни $y' = yu(x)$ порядок рівняння (2.5) можна понизити на одиницю. Справді, тоді $y'' = y'u + yu' = y(u^2 + u')$.

Підставивши в рівняння (2.5) і врахувавши однорідність функції F, дістанемо $y^m \cdot F(x, 1, u, u^2 + u')$. Скоротивши на $y^m \neq 0$, матимемо рівняння 1-го порядку відносно функції u. Якщо $u = \varphi(x, C_1, C_2)$ загальний розв'язок цього рівняння, тоді загальний розв'язок рівняння (2.5) матиме вигляд $y = C_n e^{\int \varphi(x, C_1, C_2) dx}$.

Приклад 11. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$\frac{y'}{x^2} - y''y = 0. \tag{2.6}$$

Розв'язання. Замінимо в д. р. $y(x)$ на $u(x)$ за формулою:

$y' = yu, y'' = y\left(u' + u^2\right).$

$$\frac{(yu)^2}{x^2} - y\left(u' + u^2\right)y = 0 \Rightarrow \frac{u^2}{x^2} - \left(u^2 + u'\right) = 0 \Rightarrow u^2 = x^2\left(u^2 + u'\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2 u' = u^2 - u^2 x^2 \Rightarrow x^2 u' = u^2\left(1 - x^2\right) \Rightarrow \int \frac{du}{u^2} = \int \frac{1 - x^2}{x^2} dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x} - x + C \Rightarrow -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x} - x + C \Rightarrow -\frac{1}{u} = \frac{-1 - x^2 + Cx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{u} = \frac{1 + x^2 - Cx}{x} \Rightarrow u = \frac{x}{x^2 - Cx + 1} \Rightarrow \frac{y'}{y} = \frac{x}{x^2 - Cx + 1}.$$

Обчислимо правий інтеграл: $\int \frac{xdx}{x^2 - Cx + 1}$.

Перетворимо знаменник $x^2 - Cx + 1 = x^2 - 2\frac{C}{2}x + \frac{C^2}{4} - \frac{C^2}{4} + 1 =$

$= \left(x - \frac{C}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{C^2}{4}\right) = t^2 + \left(1 - \frac{C^2}{4}\right)$, де $t = x - \frac{C}{2}$.

Тоді
$$\int \frac{xdx}{x^2 - Cx + 1} = \frac{1}{2}\int \frac{2tdt}{t^2 + \left(1 - \frac{C^2}{4}\right)} + \frac{C}{2}\int \frac{dt}{t^2 + \left(1 - \frac{C^2}{4}\right)} =$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|t^2 + 1 - \frac{C^2}{4}\right| + \frac{C}{2}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{4}}}\operatorname{arctg}\frac{t}{\sqrt{1 - \frac{C^2}{4}}} =$$

$$= \ln\sqrt{\left|x^2 - Cx + 1\right|} + \frac{C}{\sqrt{4 - C^2}}\operatorname{arctg}\frac{2\mathrm{x} - C}{\sqrt{4 - C^2}} = f(x).$$

Лівий інтеграл: $\int \frac{dy}{y} = \ln|y \cdot D|$. Тому $\ln|y \cdot D| = f(x) \Rightarrow e^{f(x)} = |y \cdot D| \Rightarrow$

$$\Rightarrow Dy = e^{f(x)} \Rightarrow y = \frac{1}{D} e^{f(x)} = \frac{1}{D} \times e^{\ln\sqrt{|x^2 - Cx + 1|} + \frac{C}{\sqrt{4-C^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x - C}{\sqrt{4-C^2}}}.$$

Відповідь: $y = \frac{1}{D} \times \sqrt{|x^2 - Cx + 1|} \times e^{\frac{C}{\sqrt{4-C^2}} \operatorname{arctg} \frac{2x - C}{\sqrt{4-C^2}}}$,

де C, D – довільні сталі.

4. Узагальнено-однорідні рівняння.

Рівняння (2.5) називають узагальнено-однорідним, якщо:

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', t^{k-2} y'') = t^m F(x, y, y', y''), \quad (t > 0)$$

для деяких k, m.

Розв'язання. За допомогою заміни $x = e^t, y = ue^{kt} (x = -e^t,$ при $x < 0, u = u(t))$, узагальнено-однорідне рівняння можна звести до рівняння, що явно не містить незалежної змінної t. Справді, за цієї заміни похідні $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}, i = 1,2$ перетворюються за такими формулами:

$$y' = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = \left(u' + kue^{kt}\right)e^{-t} = e^{(k-1)t}\left(u' + ku\right),$$
$$y'' = e^{(k-2)t}\left(u'' + (2k-1)u' + k(k-1)u\right),$$

де $u^{(i)} = \frac{d^i u}{dt^i}, i = 1,2.$

Підставивши в рівняння (2.5), дістанемо рівняння вигляду:

$$e^{mt} F_1(u, u', u'') = 0, \quad (t > 0),$$

яке після скорочення на e^{mt} явно не містить незалежної змінної t.

Приклад 12. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x^3 y'' + \left(xy' - y\right)^2 = 0.$$

Розв'язання. Перевіримо, чи є це рівняння узагальнено-однорідним. Знаходимо:

$$F(tx, t^k y, t^{k-1} y', t^{k-2} y'') = (tx)^3 t^{k-2} y'' + \left(tx \cdot t^{k-1} y' - t^k y\right)^2 =$$

$$= t^{k+1} x^3 y'' + \left(t^k xy' - t^k y\right)^2 = t^{k+1} x^3 y'' + t^{2\text{k}} \left(xy' - y\right)^2 = (k = 1)$$

$$t^2 \left(x^3 y'' + \left(xy' - y\right)^2 \right) = t^2 F(x, y, y', y'').$$

Звідки випливає, що $k = 1, m = 2$.

Виконаємо заміну $u = u(t) \quad x(t) = e^t, y(t) = u(t)e^t$, тоді

$$dx = e^t dt, \quad dy = \left[\frac{du}{dt} e^t + u(t) e^t \right] dt = \left(\frac{du}{dt} + u \right) e^t dt\,,$$

тому

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{du}{dt} + u = u' + u\,, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dx}\left(y'\right);$$

$$d\left(y'\right) = \frac{d}{dt}\left(y'(t)\right) dt = \left(\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{du}{dt} \right) dt = \left(u'' + u'\right) dt \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 u}{dx^2} = \frac{d\left(y'\right)}{dx} = \frac{\left(u'' + u'\right) dt}{e^t dt} = \left(u'' + u'\right) e^{-t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = e^{3t}\left(u'' + u'\right) e^{-t} + \left[e^t \left(u' + u\right) - u \cdot e^t \right]^2 = e^{2t}\left(u'' + u'\right) + e^{2t}\left(u'\right)^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u'' + u' + \left(u'\right)^2 = 0.$$

Вводимо нову невідому функцію $p(t)$ за формулою: $p(t) = u'(t)$. Тоді для $p(t)$ одержимо д. р.:

$$p' + p + p^2 = 0 \Rightarrow \frac{dp}{dt} = -\left(p + p^2\right) \Rightarrow \frac{dp}{p + p^2} = -dt\,.$$

$$\frac{1}{p+p^2}=\frac{1}{p(1+p)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{1+p}=\frac{A(1+p)+Bp}{p(1+p)}=\frac{A+(A+B)p}{p(1+p)}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=1, B=-1.$$

Д. р. приймає вигляд $\frac{dp}{p}-\frac{dp}{1+p}=-dt$. Після інтегрування маємо:

$$\ln p-\ln(p+1)=-t+C\Rightarrow\frac{p}{p+1}=e^{-t+C}=Ce^{-t}\Rightarrow p=(p+1)Ce^{-t}=$$

$$=pCe^{-t}+Ce^{-t}\Rightarrow p(1-Ce^{-t})=Ce^{-t}\Rightarrow p(t)=\frac{Ce^{-t}}{1-Ce^{-t}}=\frac{C}{e^t-C};$$

$$u'(t)=p(t)=\frac{C}{e^t-C}\Rightarrow u(t)=\int\frac{C}{e^t-C}dt=\int\frac{Ce^t}{(e^t-C)e^t}dt=$$

$$=\int\frac{C}{\left(e^t-C\right)e^t}d\left(e^t\right)=\left[z=e^t;\ dz=e^tdt\right]=\int\frac{Cdz}{(z-C)z}.$$

Розкладемо на елементарні дроби підінтегральну функцію $\frac{1}{z(z-C)}$:

$$\frac{1}{z(z-C)}=\frac{A}{z}+\frac{B}{z-C}\Rightarrow Az-AC+Bz=1\Rightarrow(A+B)z-AC=1.$$

Прирівняємо коефіцієнти при z^0, z^1:

$$\begin{cases}A+B=0 \quad \Rightarrow B=-A=\dfrac{1}{C};\\ -AC=1 \quad \Rightarrow A=-\dfrac{1}{C}.\end{cases}$$

Отже,

$$u(t)=C\int\left(-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-C}\right)\frac{1}{C}dz=-\ln|z|+\ln|z-C|+\ln|D|=\ln\left|\frac{D(z-C)}{z}\right|,$$

$$\begin{cases}y(t)=u(t)e^t=\ln\left|\dfrac{D(e^t-C)}{e^t}\right|e^t=\ln\left|D\left(e^t-C\right)\right|;\\ x(t)=e^t.\end{cases}$$

5. Рівняння з точними похідними.

Рівняння (2.5) називають рівнянням з точними похідними, якщо його ліва частина є точною похідною деякої функції:

$$\Phi_1(x,y,y',y''):F(x,y,y',y'')=\frac{d}{dx}\Phi_1(x,y,y',y'').$$

Співвідношення $\Phi_1(x,y,y',y'')=C_1$ є першим інтегралом рівняння з точними похідними. Якщо рівняння (2.5) не є рівнянням із точними похідними, тоді іноді можна дібрати таку функцію $\mu=\mu(x,y,y',y'')$ (інтегрувальний множник), після множення на який рівняння (2.5) стає рівнянням із точними похідними. У разі множення на інтегрувальний множник можуть з'явитися зайві розв'язки (розв'язки рівняння $\mu=0$), а також можлива втрата деяких розв'язків.

Приклад 13. Розв'язати рівняння $(y')^2x+yy'-xyy''=0$.

Розв'язок: якщо $y'\neq 0$, поділимо рівняння на y'^2:

$$\frac{(y')^2x+yy'-xyy''}{y'^2}=0\Rightarrow\left(\frac{xy}{y'}\right)'=0\Rightarrow\frac{xy}{y'}=C_1$$ – є першим інтегралом д. р.

$$\frac{dy}{x}=\frac{xy}{C_1}\Rightarrow\int\frac{dy}{y}=\int\frac{xdx}{C_1}\Rightarrow\mathbf{ln}|y|=\frac{1}{C_1}\frac{x^2}{2}+C_2\Rightarrow|y|=e^{\frac{1}{C_1}\frac{x^2}{2}+C_2};$$

$$y=\pm e^{\frac{1}{C_1}\frac{x^2}{2}+C_2}.$$

Відповідь: $y=\pm e^{\frac{1}{C_1}\frac{x^2}{2}+C_2}$.

2.1. Лінійні диференціальні рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами

$$y''+ay'+by=f(x),$$

де a,b – дійсні числа, $f(x)$ – деяка функція.

Якщо $f(x)\equiv 0$, то д. р. називається однорідним 2-го порядку (ОДР).

Якщо $f(x) = e^{\alpha x}\left(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x\right)$, де $P_n(x), Q_n(x)$ – поліноми n-го ступеня, то д. р. називається неоднорідним 2-го порядку (НДР) зі спеціальною правою частиною.

Якщо $y_1(x), y_2(x)$ – рішення диференціального рівняння, відповідно, $\sum a_k y_1^{(k)} = f_1$, $\sum a_k y_2^{(k)} = f_2$, то диференціальне рівняння $\sum a_k y^{(k)} = f_1 + f_2$, згідно з цією властивістю, має загальний розв'язок неоднорідного д. р. (2), який дорівнює добутку довільного розв'язку однорідного д. р. $y'' + ay' + by = 0$ та частинного рішення неоднорідного д. р. $y'' + ay' + by = f(x)$.

Тому рішення неоднорідного д. р. складається з двох етапів.

1. Рішення ОДР: $y'' + ay' + by = 0$.

Будемо шукати рішення у вигляді $y = e^{\lambda x} \Rightarrow y' = \lambda e^{\lambda x} \Rightarrow y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}$.

Після їх підстановки в ОДР та скорочення на $e^{\lambda x}$ отримаємо характеристичне рівняння $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Існують три випадки:

1) $D = a^2 - 4b > 0 \Rightarrow \lambda_1 \neq \lambda_2 \in \Re$;

загальний розв'язок ОДР: $y_o(x) = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$.

2) $D = a^2 - 4b = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \in \Re$;

загальний розв'язок ОДР: $y_o(x) = \left(C_1 + C_2 x\right) e^{\lambda x}$.

3) $D = a^2 - 4b < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \gamma \pm i\delta$, де $i^2 = -1$;

загальний розв'язок ОДР: $y_o(x) = \left(C_1 \cos\delta x + C_2 \sin\delta x\right) e^{\gamma x}$,

де C_1, C_2 – довільні сталі.

2. Відшукання частинного розв'язку НДР $y'' + ay' + by = f(x)$.

Будемо розглядати квазіполіном $f(x) = e^{\alpha x}(P_n(x)\cos\beta x + Q_n(x)\sin\beta x)$. Тоді частинний розв'язок НДР можна відшукати у вигляді: $\bar{y}(x) = x^s e^{\alpha x}(M_n(x)\cos\beta x + N_n(x)\sin\beta x)$, де $M_n(x), N_n(x)$ – поліноми ступеня n з невідомими коефіцієнтами. Їх відшукання і складає суть цієї задачі, s – кількість співпадінь контрольного числа $\alpha + i\beta$ з коренями характеристичного рівняння $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$.

Приклад 14. Розв'язати д. р. $y'' + y' - 6y = xe^{-3x}$.

Розв'язання: 1) ОДР: $y'' + y' - 6y = 0 \Rightarrow \lambda^2 + \lambda - 6 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = -3; \lambda_2 = 2$.

Загальний розв'язок ОДР: $y_o(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x}$.

2) Контрольне число $\alpha + i\beta = -3 + i \cdot 0 = -3$ один раз співпадає з коренями характеристичного рівняння ОДР. Тому $s = 1$, частинний розв'язок НДР можна відшукати у вигляді: $\bar{y}(x) = xe^{-3x}((ax+b)\cos\beta x + (cx+d)\sin\beta x)$;

$\bar{y}(x) = xe^{-3x}((ax+b)\cos 0x + (cx+d)\sin 0x) = xe^{-3x}(ax+b) = e^{-3x}(ax^2 + bx)$;

$$\bar{y}'(x) = \left[e^{-3x}(ax^2+bx)\right]' = (2ax+b)e^{-3x} - 3e^{-3x}(ax^2+bx) =$$
$$= e^{-3x}\left[-3ax^2 + (2a-3b)x + b\right];$$

$$\bar{y}''(x) = \left[e^{-3x}(ax^2+bx)\right]'' = e^{-3x}\left[9ax^2 + (-12a+9b)x + (2a-6b)\right].$$

Підставимо в НДР $\bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}$:

$$e^{-3x}\left\{\left[9ax^2 + (-12a+9b)x + (2a-6b)\right] + \left[-3ax^2 + (2a-3b)x + b\right] - \right.$$
$$\left. - 6(ax^2+bx)\right\} = x \cdot e^{-3x}.$$

Скоротимо на e^{-3x}. Прирівнюємо коефіцієнти при x^2, x, x^0.

$$\begin{cases} x^2 : 9a - 3a - 6a = 0; \\ x^1 : 9b - 12a + 2a - 3b - 6b = 1; \\ x^0 : 2a - 6b + b = 0. \end{cases} \begin{cases} -10a = 1 \Rightarrow a = -\dfrac{1}{10} \\ 2a = 5b \Rightarrow b = \dfrac{2}{5}a = -\dfrac{2}{50} = -0{,}04 \end{cases}.$$

Отже, $\bar{y} = \left(-0{,}1x^2 - 0{,}04x\right)e^{-3x}$.

Загальний розв'язок НДР: $y_н(x) = C_1 e^{-3x} + C_2 e^{2x} - \left(0{,}1x^2 + 0{,}04x\right)e^{-3x}$.

Приклад 15. Розв'язати д. р. $y'' + 7y' = \sin 5x$.

Розв'язання: 1) ОДР: $y'' + 7y' = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 7\lambda = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0; \lambda_2 = -7$.

Загальний розв'язок ОДР: $y_o(x) = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-7x} = C_1 + C_2 e^{-7x}$.

2) Контрольне число $\alpha + i\beta = 0 + i \cdot 5 = 5i \neq 0, -7$ – не співпадає з коренями характеристичного рівняння ОДР. Тому $s = 0$, частинний розв'язок НДР можна відшукати у вигляді: $\bar{y}(x) = e^{0x}(F\cos 5x + D\sin 5x)$;

$\bar{y}(x) = (F\cos 5x + D\sin 5x)$;

$\bar{y}'(x) = (F\cos 5x + D\sin 5x)' = -5F\sin 5x + 5D\cos 5x;$

$\bar{y}''(x) = \left(-5F\sin 5x + 5D\cos 5x\right)' = -25F\cos 5x - 2D\sin 5x.$

Підставимо в НДР $\bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}$:

$\bar{y}'' - \bar{y}' = -25F\cos 5x - 25D\sin 5x - \left(-5F\sin 5x + 5D\cos 5x\right) =$

$= \cos 5x\left(-25F - 5D\right) + \sin 5x\left(-25D + 25F\right);$

$\cos 5x\left(-25F - 5D\right) + \sin 5x\left(-25D + 25F\right) = \sin 5x.$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\sin 5x, \cos 5x$:

$$\begin{cases}\cos 5x: -25F - 5D = 0;\\ \sin 5x: -25D + 25F = 1;\end{cases} \quad \begin{cases}D = -5F;\\ 125F + 25F = 1;\end{cases} \quad \begin{cases}D = \dfrac{-5}{150} = -\dfrac{1}{30};\\ F = \dfrac{1}{150};\end{cases}$$

$$\bar{y} = \frac{1}{150}\cos 5x - \frac{1}{30}\sin 5x.$$

Загальний розв'язок НДР: $y_{í}(x) = C_1 + C_2e^{-7x} + \dfrac{1}{150}\cos 5x - \dfrac{1}{30}\sin 5x.$

Приклад 16. Розв'язати д. р. $y'' + 2y' + y = e^{2x}\cos x$.

Розв'язання: 1)ОДР: $y'' + 2y' + y = 0 \Rightarrow (\lambda + 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -1$.

Загальний розв'язок ОДР: $y_o(x) = (C_1 + C_2x)e^{-x}.$

2) Контрольне число $\alpha + i\beta = 2 + i\cdot 1 = 2 + i \neq -1$ – не співпадає з коренями характеристичного рівняння ОДР. Тому $s = 0$, частинний розв'язок НДР можна відшукати у вигляді: $\bar{y}(x) = e^{2x}(F\cos x + D\sin x)$;

$\bar{y}'(x) = (F\cos 5x + D\sin 5x)' = \left(2D - F\right)\sin x + \left(2F + D\right)\cos x;$

$\bar{y}''(x) = \left(3D + F\right)\cos x + \left(D - 3F\right)\sin x.$

Підставимо в НДР $\bar{y}', \bar{y}'', \bar{y}$:

$\bar{y}'' + 2\bar{y}' + \bar{y} = \{\left[\left(3D + F\right)\cos x + \left(D - 3F\right)\sin x\right] +$

$+ 2\left[\left(2D - F\right)\sin x + \left(2F + D\right)\cos x\right] + (F\cos x + D\sin x)\}e^{2x} = e^{2x}\cos x.$

Прирівнюємо коефіцієнти при $\sin 5x, \cos 5x$:

$$\begin{cases}\cos x: 3D + F + 4F + 2D + F = 1;\\ \sin x: D - 3F + 4D - 2F + D = 0;\end{cases} \quad \begin{cases}5D = -6F + 1;\\ 6D = 5F;\end{cases}$$

$$\begin{cases} D = \dfrac{5}{6}F = \dfrac{5}{61}; \\ F = \dfrac{6}{61}; \end{cases} \qquad \bar{y}(x) = e^{2x}\left(\frac{6}{61}\cos x + \frac{5}{61}\sin\, x\right).$$

Загальний розв'язок НДР: $y_{\acute{\imath}}\,(x) = \left(C_1 + C_2 x\right)e^{-x} + e^{2x}\left(\dfrac{6}{61}\cos x + \dfrac{5}{61}\sin\, x\right).$

2.2. Системи диференціальних рівнянь

Системою диференціальних рівнянь називається сукупність декількох диференціальних рівнянь відносно декілька невідомих функцій $y_1(x), y_2(x), ..., y_n(x)$. Звичайно кількість рівнянь дорівнює кількості невідомих функцій. Найпростішими є системи лінійних диференціальних рівнянь зі сталими коефіцієнтами 1-го порядку. Такі системи диференціальних рівнянь, як правило можна привести до вигляду , коли в кожному рівнянні похідна знаходиться в лівій частині та без коефіцієнта:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + ... + a_{1n}y_n + f_1(t); \\ \quad .... \\ y_n' = a_{n1}y_1 + ... + a_{nn}y_n + f_n(t). \end{cases} \tag{2.7}$$

Вводимо вектори

$$y = [y_1, ..., y_n]^T,\ y' = [y_1', ..., y_n']^T,\ f = [f_1, ..., f_n]^T, \tag{2.8}$$

(T – транспонування) та матрицю:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & ... & a_{1n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1} & ... & a_{nn} \end{bmatrix}, \tag{2.9}$$

і записуємо систему д. р. (2.7) у матричній формі

$$y' = Ax + f\,. \tag{2.10}$$

Загальний розв'язок цієї системи дорівнює додатку загального розв'язку однорідної системи

$$y' = Ax, \tag{2.11}$$

та довільного частинного розв'язку неоднорідної системи (2.7).

Безпосередньо перевіряється, що однорідна система д. р. (2.11) має розв'язок

$$y(x) = Ce^{\lambda x}, \tag{2.12}$$

де λ – корінь алгебраїчного рівняння

$$\det(A - \lambda E) = 0, \tag{2.13}$$

а $C = [C_1, ..., C_n]^T$ – розв'язок виродженої однорідної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР):

$$(A - \lambda E)C = 0. \tag{2.14}$$

Алгебраїчне рівняння (2.13) має n коренів $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, тому загальний розв'язок однорідної системи можна представити у вигляді лінійної комбінації:

$$y(x) = A_1 C_1 e^{\lambda_1 x} + ... + A_n C_n e^{\lambda_n x},$$

де $A_1, ..., A_n$ – довільні сталі, які однозначно визначаються при завданні n початкових умов $y_1(0), ..., y_n(0)$.

Приклад 17. Дана двовимірна система д. р.:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + f_1(x); \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + f_n(x); \end{cases} \tag{2.15}$$

та початкові умови

$$y_1(0) = 0, y_2(0) = 1. \tag{2.16}$$

Розв'язуємо однорідну систему:

$$\begin{cases} y_1' = a_{11}y_1 + a_{12}y_2; \\ y_2' = a_{21}y_1 + a_{22}y_2. \end{cases} \tag{2.17}$$

Шукаємо розв'язок у вигляді:

$$y(x) = Ce^{\lambda x},\ y'(x) = C\lambda e^{\lambda x} \tag{2.18}$$

або

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} C_1 e^{\lambda x} \\ C_2 e^{\lambda x} \end{bmatrix}; y' = \begin{bmatrix} y_1' \\ y_2' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \lambda e^{\lambda x} = \begin{bmatrix} C_1 \lambda e^{\lambda x} \\ C_2 \lambda e^{\lambda x} \end{bmatrix}. \tag{2.19}$$

Запишемо (2.17) в матричній формі:

$$y' = Ay, \tag{2.20}$$

де

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

та підставимо (2.18) в (2.20):

$$C\lambda e^{\lambda x} = ACe^{\lambda x}. \qquad (2.22)$$

Скоротимо на $e^{\lambda x}$: $AC = \lambda C$

або

$$AC - \lambda C = 0. \qquad (2.23)$$

Представимо C у вигляді $C = EC$, $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ – одинична матриця, тоді (2.23) можна представити у вигляді:

$$0 = AC - \lambda EC = (A - \lambda E)C. \qquad (2.24)$$

Для того, щоб ця СЛАР мала ненульові розв'язки, потрібно, щоб визначник матриці системи (2.24) дорівнював нулю:

$$|A - \lambda E| = 0.$$

Нехай $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

Тоді $0 = |A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 + 1 = \lambda^2 - 2\lambda + 2$. (2.25)

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 2}}{2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i, \qquad (2.26)$$

тобто $\lambda_1 = 1 + i$; $\lambda_2 = 1 - i$. Обчислюємо вектори $C^{(1)}, C^{(2)}$:

$$0 = (A - \lambda_1 E)C^{(1)} = \begin{bmatrix} 1-\lambda_1 & -1 \\ 1 & 1-\lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\lambda_1)C_1 & -C_2 \\ C_1 & (1-\lambda_1)C_2 \end{bmatrix} \qquad (2.27)$$

або $\begin{cases} (1-\lambda_1)C_1 - C_2 = 0; \\ C_1 + (1-\lambda_1)C_2 = 0. \end{cases}$ (2.28)

Нехай $C_1 = \alpha$, де α довільне число, тоді із першого рівняння (2.28) отримаємо:

$$C_2 = (1-\lambda_1)C_1 = (1-\lambda_1)\alpha. \qquad (2.29)$$

Зауважимо, що при цих сталих C_1, C_2 друге рівняння системи (2.28) також задовольняється внаслідок (2.25):

$$C_1 + (1-\lambda_1)C_2 = \alpha + (1-\lambda_1)\alpha(1-\lambda_1) = \alpha\left[1 + (1-\lambda_1)^2\right] = 0.$$

Отже,

$$C^{(1)} = \begin{bmatrix} \alpha \\ (1-\lambda_1)\alpha \end{bmatrix} = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\lambda_1 \end{bmatrix}. \qquad (2.30)$$

Аналогічно одержуємо для другого кореня λ_2:

$$C^{(2)} = \begin{bmatrix} \beta \\ (1-\lambda_2)\beta \end{bmatrix} = \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\lambda_2 \end{bmatrix}. \tag{2.31}$$

Тоді загальний розв'язок однорідної системи д. р. (2.15)

$$y_0(x) = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\lambda_1 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 x} + \beta \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\lambda_2 \end{bmatrix} e^{\lambda_2 x},$$

де α, β – довільні числа.

Нехай $f_1(x) = 0,\ f_2(x) = 0$. Тоді $y(x) = y_0(x)$

$$\text{і } y(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} \\ \alpha(1-\lambda_1)e^{\lambda_1 x} + \beta(1-\lambda_2)e^{\lambda_2 x} \end{bmatrix}$$

або

$$\begin{cases} y_1(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x}; \\ y_2(x) = \alpha(1-\lambda_1)e^{\lambda_1 x} + \beta(1-\lambda_2)e^{\lambda_2 x}. \end{cases}.$$

Використовуючи початкові умови (2.16), одержимо два рівняння для α, β:

$$\begin{cases} 0 = \alpha + \beta & \Rightarrow \quad \beta = -\alpha \\ 1 = \alpha(1-\lambda_1) + \beta(1-\lambda_2) & \Rightarrow \quad 1 = \alpha(1-\lambda_1) - \alpha(1-\lambda_2) = \alpha(\lambda_2 - \lambda_1) \quad \Rightarrow \end{cases}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \Rightarrow \begin{cases} \beta = -\alpha = -\left(-\dfrac{1}{2i}\right) = \dfrac{1}{2i}; \\ \alpha = \dfrac{1}{1-i-(1+i)} = -\dfrac{1}{2i}. \end{cases}$$

Отже,

$$y_1(x) = \alpha e^{\lambda_1 x} + \beta e^{\lambda_2 x} = -\frac{1}{2i}e^{(1+i)x} + \frac{1}{2i}e^{(1-i)x} = \left(-\frac{1}{2i}e^{ix} + \frac{1}{2i}e^{-ix}\right)e^x =$$

$$= -e^x \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} = -e^x \sin x.$$

$$y_2(x) = \alpha(1-\lambda_1)e^{\lambda_1 x} + \beta(1-\lambda_2)e^{\lambda_2 x} = -\frac{1}{2i}(1-1-i)e^{(1+i)x} +$$

$$+ \frac{1}{2i}(1-1+i)e^{(1-i)x} = -\frac{1}{2i}(-i)e^x e^{ix} + \frac{1}{2i} i e^x e^{-ix} = e^x \frac{e^x + e^{-x}}{2} = e^x \cos x.$$

3. Застосування диференціальних рівнянь в економіці

3.1. Модель економічного зростання Харода

Балансове співвідношення для конструювання моделі економічного зростання є традиційна кейнсіанська тотожність, яку можна представити у загальному вигляді:

$$Y = C + I + A,$$

де Y – об'єм прибутку, $C-$ функція споживання, $I-$ об'єм інвестицій, $A-$ незалежні витрати. При цьому зазначено, що функція споживання пропорційна об'єму прибутку $C = cY$, інвестиційна функція залежить від швидкості зміни прибутку $I = v\dfrac{dY}{dt}$ (акселератор). Коефіцієнт $c\,(0 < c < 1)$ називають граничною схильністю до споживання, $v(v > 0)$ – параметр акселератора.

З урахуванням вище приведених передумов маємо вираз:

$$Y = cY + v\frac{dY}{dt} + A$$

або

$$\frac{dY}{dt} = \rho\left(Y - \frac{A}{s}\right). \qquad (3.1)$$

Рівняння (3.1) є диференціальним рівнянням першого порядку, розв'язком якого є динаміка об'єму прибутку. Тут $\rho = \dfrac{s}{v}$, де $s = 1 - c$ зображує граничну схильність до збережень. Розв'язок рівняння (3.1) залежить від припущень відносно явного вигляду функції незалежних витрат $A = A(t)$. Особливої уваги заслуговують два випадки.

Випадок 1. $A = const$. Незалежні витрати незмінні. Нехай $y = Y - \dfrac{\mathrm{A}}{\mathrm{s}}$ є відхилення прибутку від рівноважного рівня $\dfrac{A}{s}$ і $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dY}{dt}$.

У такому разі (3.1) має вигляд: $\dfrac{dy}{dt} = \rho \mathrm{y}$, де $\rho = \dfrac{s}{v} > 0$. (3.2)

Враховуючі, що $\frac{d(ln\,y)}{dt}=\frac{1}{y}\frac{dY}{dt}$, рівняння (3.2) перетворюється на наступне:

$$\frac{d}{dt}(ln\,y)=\rho\,.$$

Таким чином, $ln\,y=\rho\,t+const$

або
$$y(t)=Be^{\rho t},$$
де $B-$ константа, залежна від початкового рівня прибутку $y_0\,(t=0)$. Вочевидь $B=y_0$. Тоді маємо розв'язок:

$$y(t)=y_0e^{\rho\,t}. \tag{3.3}$$

Формула (3.3) демонструє неперервне зростання за показниковою функцією прибутку або випуску продукції з незмінною відносною швидкістю (темпом) ρ. Звичайно гранична схильність до збережень S є малою величиною порівняно з коефіцієнтом акселератора v; у даному випадку ρ є дробом, який може бути дуже малим. Наприклад, якщо вибрати рік за одиницю часу, визначимо $s=0.05$ та $v=2.5$. Тоді $\rho=0.02$ і прибуток безперервно зростає зі середньорічним складним відсотком 2%. Цей приклад яскраво висвітлює дію акселератора. Навіть при незмінності незалежних витрат взаємодія мультиплікатора й акселератора генерує прогресуюче зростання випуску продукції (прибутку). Відносна швидкість (темп) зростання визначається структурними константами s та v. Вочевидь, що акселератор забезпечує галопуюче (нестійке) зростання економічних показників.

Випадок 2. $A=A_0e^{rt}$. Припустимо, що незалежні витрати є зростаючими за показниковою функцією. Відносна швидкість зростання $A(t)$ дорівнює $r>0$. У цьому випадку рівняння (3.1) отримає вигляд:

$$\frac{dY}{dt}=\rho\left(Y-\frac{A_0}{s}e^{rt}\right). \tag{3.4}$$

Будемо вважати, що $Y = Y_1 e^{rt}$ є розв'язком (3.4). Це є ознакою того, що відносна швидкість зростання Y дорівнює відносній швидкості зростання A. Інакше кажучи, прибуток і незалежні витрати змінюються з однаковим темпом. Підставляючи цей вираз у рівняння (3.4):

$$rY_1 e^{rt} = \rho\left(Y_1 e^{rt} - \frac{A_0}{s} e^{rt}\right).$$

Звідки випливає, вираз для Y_1: $Y_1 = \dfrac{A_0}{v(\rho - r)}$. (3.5)

Таким чином, прогресуюче зростання Y з відносною швидкістю r можливе за умови, що Y_1 має частинне значення, визначене структурними параметрами моделі.

Залишилось простежити динаміку Y за вільних початкових умов та присутності збурень $Y_0 \neq Y_1$. Припустимо, що $y = Y - Y_1 e^{rt}$ з початковою умовою $y_0 = Y_0 - Y_1$ при $t = 0$. Віднімемо рівняння (3.5) з (3.4) та зауважимо, що $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dY}{dt} - rY_1 e^{rt}$. Тоді:

$$\frac{dy}{dt} = \rho\, y,$$

з відомим розв'язком

$$y = y_0 e^{\rho t}.$$

Знайдений розв'язок схожий з формулою (3.3) для випадку з незмінними незалежними витратами. Різниця має зміст у тому, що y є відхилення прибутку від рівня, зростаючого за показниковою кривою, а не від незмінного рівня. Таким чином, розв'язок рівняння (3.4) зображує зростання по показниковій кривій, відхиленої від такого ж зростання прибутку. У розгорнутому вигляді розв'язок має бути:

$$Y = Y_1 e^{rt} + (Y_0 - Y_1) e^{\rho t}. \tag{3.6}$$

Необхідно уважніше проаналізувати зміст розв'язку (3.6). Вираз

$$Y = Y_1 e^{rt}$$

демонструє своєрідну "рівновагу" відносної швидкості зростання прибутку. Це означає збільшення випуску продукції з тією ж відносною швидкістю, що і швидкість зростання незалежних витрат. Якщо зростання випуску продукції починається з незалежного рівня Y_1, тоді її послідовне зростання відбувається за лінією "рівноваги". Це звичайний результат, тому що знайдена лінія рівноваги тотожна тій, що має місце під впливом динамічного мультиплікатора. Якщо початковий рівень прибутку неналежний $(Y_0 \neq Y_1)$, то в процесі динамічної еволюції здійснюється відхилення від лінії "рівноваги". Швидкість цієї розбіжності визначається параметром ρ. Цікаво співставити цей випадок з відповідним впливом динамічного мультиплікатора, який забезпечує постійне повернення до лінії рівноваги. Акселератор знову діє як дестабілізуючий елемент.

Треба зазначити, що в обох випадках прогресуюче зростання продукції з відносною швидкістю $\rho = \frac{s}{v}$ внутрішнє належний системі.

Це явище є результатом антидемпфіруючої дії акселератора під впливом стабілізуючого діяння мультиплікатора. Це і є так названий "гарантований" темп зростання Харрода; гарантований він тому, що є результатом неперервно діючого у часі рівності збережень й інвестицій. У моделі відсутні запізнювання. Аналогічно виключені непередбачені збереження та капіталовкладення, і тому немає ніяких розбіжностей між цими двома економічними величинами. Теорія Харрода не зображує коливального руху, тому її можна вважати частково динамічною.

3.2. Модель мультиплікатора Філіпса

Наступним кроком є виключення запізнювань у модель мультиплікатора-акселератора. Якщо в подальшому аналізі ми будемо користуватися неперервною формою (яка генерує диференціальні рівняння), то відповідне запізнювання матиме неперервний розподіл у показниковому вигляді.

Спочатку акселератор не береться до уваги й аналіз обмежується лише дією динамічного мультиплікатора з неперервним запізнюванням (по показниковій функції). Усі змінні є функціями неперервно змінюваного часу, так, наприклад, випуск продукції або прибуток $Y = Y(t)$. Усюди діє припущення про лінійні залежності поміж усіма змінними.

Запізнення попиту відсутнє. Заплановане споживання має бути $C = cY$, а незалежні витрати (на капіталовкладення та споживання) складуть A. Тоді загальний попит без запізнювання дорівнює:

$$D = C + A = cY + A.$$

Візьмемо A постійним і замість граничної схильності до споживання скористуємось граничною схильністю до збереження $s = 1 - c$. У цьому випадку сукупний попит без запізнювань буде:

$$D = (1 - s)Y + A. \tag{3.7}$$

Розглянемо тепер пропозицію. Тут вплив (реакція) випуску продукції на попит D не припускається миттєвим, а має неперервне запізнювання показникової форми. Нехай швидкість реакції буде λ або стала запізнювання $T = \frac{1}{\lambda}$. Тоді маємо:

$$\frac{dY}{dt} = -\lambda(Y - D). \tag{3.8}$$

Це рівняння відображує зміну випуску продукції у часі.

Із співвідношень (3.7) й (3.8) отримаємо диференціальне рівняння, яке описує динаміку випуску продукції:

$$\frac{dY}{dt} + \lambda sY = -\lambda A. \tag{3.9}$$

Розв'язком рівняння (3.9) знову є рівень рівноваги $Y = Y^* = \frac{A}{s}$, властивий статичному мультиплікатору. Нову змінну $y = Y - Y^*$ підставимо у рівняння (3.9), яке отримає вигляд:

$$\frac{dy}{dt} + \lambda sy = 0. \tag{3.10}$$

Розв'язок (3.10) є очевидним:

$$y = y_0 e^{-\lambda s t};$$

або

$$Y = Y^* + \left(Y_0 - Y^*\right)e^{-\lambda s t} \ . \qquad (3.11)$$

Припустимо, що заданий початковий рівень випуску продукції Y_0 в момент часу $t = 0$. Тоді рівняння (3.11) зображує його рух у часі як неухильне та прогресуюче наближення до рівноважного рівня $Y^* = \dfrac{A}{s}$. Рух здійснюється вздовж показникової кривої з коефіцієнтом згасання λs. Швидкості пристосування випуску продукції до змінених умов також дорівнює λs, що є комбінацією граничної схильності до збереження та швидкості реакції в запізнюванні випуску продукції. Один частинний випадок за особливих початкових умов був розглянутий Філіпсом.

Нехай діє припущення, що на початку процесу має місце рівновага. Вимірюємо Y від цього рівня рівноваги ($Y = 0, t = 0$), потім з'являється окремий зсув на боці попиту, представленому A, наприклад, завдяки зростанню незалежних капіталовкладень. Тоді новий рівень рівноваги буде $Y^* = \dfrac{A}{s}$. Рух Y до нового положення рівноваги описується рівнянням (3.9) з початковою умовою $Y = 0$ у момент часу $t = 0$. Це означає, що зосереджене в розв'язку (3.11) значення Y_0 дорівнює нулю. Наступне відповідно зі зсувом у попиті A, рух випуску продукції від одного рівня рівноваги $Y = 0$ до другого $Y = \dfrac{A}{s}$ буде відображений наступним чином:

$$Y = \frac{A}{s}\left(1 - e^{-\lambda s t}\right). \qquad (3.12)$$

Дійсно, за такої форми динамічного мультиплікатора еволюція Y зображується рухом з запізнюванням у вигляді показникової функції з декрементом λs.

Модель, щойно нами розглянута, включає тільки незалежні капіталовкладення, акселератора в неї немає. Додамо тепер акселератор зі запізнюванням у формі неперервної показникової функції з коефіцієнтом інвестицій v і швидкістю реакції χ. Відповідно, якщо I являє собою фактичні інвестиції в момент часу t, спричинені змінами у випуску продукції, то воно буде описане рівнянням:

$$\frac{dI}{dt}+\chi\cdot I=\chi v\cdot\frac{dY}{dt}. \tag{3.13}$$

Сукупний попит буде тепер $D=C+I+A$, де, як і раніше,

$$C=(1-s)Y+I+A. \tag{3.14}$$

Пропозиція також береться з неперервно розподіленим запізнюванням і швидкістю реагування:

$$\frac{dY}{dt}+\lambda Y=\lambda D. \tag{3.15}$$

Вирази (3.13) – (3.15) є рівняннями моделі. Ця система має два неперервно розподілених запізнювання: одне на боці пропозиції (реакція випуску продукції на попит зі швидкістю λ), друге з боку акселератора (інвестиції реагують на зміну у випуску продукції зі швидкістю реакції χ). Диференціальне рівняння відносно Y з'являється за допомогою включення D і I із виразів (3.13) – (3.15) Зробимо спочатку підстановку виразу (3.14) в (3.15):

$$\frac{dY}{dt}=-\lambda Y+\lambda((1-s)Y+I+A);$$

$$I=\frac{1}{\lambda}\frac{dY}{dt}+sY-A;$$

$$\frac{dI}{dt}=\frac{1}{\lambda}\frac{d^2Y}{dt^2}+s\frac{dY}{dt}.$$

Підставляємо у вираз (3.13):

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d^2Y}{dt^2}+s\frac{dY}{dt}=-\chi\left(\frac{1}{\lambda}\frac{dY}{dt}+sY-A\right)+\chi\cdot v\frac{dY}{dt}$$

або

$$\frac{1}{\lambda}\frac{d^2Y}{dt^2}+\left(s+\frac{\chi}{\lambda}-\chi v\right)\frac{dY}{dt}+\chi sY=\chi\cdot A.$$

Отримаємо диференціальне рівняння другого порядку відносно Y:

$$\frac{d^2Y}{dt^2}+a\frac{dY}{dt}+bY=\chi\cdot\lambda\cdot A, \tag{3.16}$$

де $a=\lambda s+\chi-\chi\lambda v, \quad b=\chi\lambda s$.

Рівноважний розв'язок рівняння (3.16), незмінний при усіх значеннях t, буде $Y=Y^*=\frac{A}{s}$. Рівень рівноваги, заданий статичним мультиплікатором, знову відповідає моделі. Нехай $y=Y-Y^*$. Тоді (3.16) буде мати наступний вигляд:

$$\frac{d^2y}{dt^2}+a\frac{dy}{dt}+by=0. \tag{3.17}$$

Розв'язок (3.17) відображає динамічну поведінку y та, відповідно, Y. У частинному випадку, коли параметр $a=0$ (це можливо, наприклад, якщо $v=\frac{\lambda s+\chi}{\chi\lambda}$) має місце коливальний рух навкруги $Y^*=\frac{A}{s}$ з періодом

$$T=\frac{2\pi}{\sqrt{b}}=\frac{2\pi}{\sqrt{\chi\lambda s}}$$

й амплітудою, визначеною початковими умовами $Y(0)$ та $\left.\frac{dY}{dt}\right|_{t=0}$.

Ці коливання не є згасними. У випадку, коли $a>0$, динаміка Y є стійкою, перехідний процес згасає поблизу рівня рівноваги Y^*.

За відповідних початкових умов диференціальне рівняння (3.16) являє собою рух випуску продукції від одного положення рівноваги до другого. Припускаємо, що перше положення рівноваги, яке досягнене при $Y=0$ до наступного положення рівноваги $Y^*=\frac{A}{s}$, визначається рівнянням (3.16).

Окрім цього, потрібно мати дві початкові умови. Перша з цих умов полягає в тому, що $Y=0$ у $t=0$. Друга умова – початкове значення $\frac{dY}{dt}$ в момент $t=0$, задане мультиплікатором, тому що акселератор ще не прийшов до дії. Це значення є $\frac{dY(0)}{dt}=\lambda A$.

Таким чином, можна стверджувати, що еволюційний шлях від одного положення рівноваги до другого відображається диференціальним рівнянням (3.16), підпорядкований умовам $Y=0$ та $\frac{dY}{dt}=\lambda A$ в момент часу $t=0$.

Вправи для самостійного розв'язання

Розв'язати диференціальні рівняння:

1. $\left(x+2x^3\right)dx+\left(y+2y^3\right)dy=0$; 2. $\frac{dx}{\sqrt{x}}+\frac{dy}{\sqrt{y}}=0$; 3. $y'=\frac{x-y}{x-2y}$;

4. $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}}=0$; 5. $y'=\frac{y-1}{x+1}$; 6. $(1-x)dy-ydx=0,\ M(0,1)$;

7. $y'=y\cos x,\ M(0,1)$; 8. $x(x+2y)dx+(x^2-y^2)dy=0$.

Знайти рішення у вигляді $y(x)=u(x)\cdot x$:

9. $y'=\frac{x+2y}{x}$; 10. $y'=\frac{y+\sqrt{y^2-4x^2}}{x}$;

11. $y'=\frac{y}{x},\quad y'=-\frac{y}{x},\quad y'=-\frac{x}{y},\quad y'=e^{\frac{y}{x}}-1$.

Розв'язати наступні лінійні рівняння:

12. $y'-y\sin x=\sin x\cos x$; 13. $y'+ay=e^{mx}$; 14. $xy'=ax+by$;

15. $ydx+2(x+y)dy=0$; 16. $(x-2xy-y^2)y'+y^2=0$.

Розв'язати наступні рівняння Бернуллі:

17. $y'+2xy=2x^3y^3$; 18. $xy'+y=y^2\ln x$;

19. $xy'+y=xy^2,\ \ x_0=0,\ \ y_0=0$.

Проінтегрувати наступні диференціальні рівняння й виділити інтегральні криві, які проходять через задану точку $M(x_0; y_0)$:

20. $yy'^2-(xy+1)y'+x=0,\ M(1;1)$; 21. $y'^2-4y=0, M\ (1;1)$;

22. $y^2(1+y^2)=a^2$; 23. $y'^3+1=0$; 24. $x=y'^3+1$.

25. $x^3-y'^3=xy'$; 26. $y^{\frac{2}{3}}+y'^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}, (a>0)$; (Виконати підстановку $y=tx$);

27. $2yy'=x(y'^2+4)$.

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Що називається диференціальним рівнянням (д. р.)?

2. Як визначити порядок диференціального рівняння?

3. Який вигляд має д. р., розв'язане відносно старшої похідної?

4. Що називається початковими умовами д. р. і як ставиться задача Коші?

5. Що є розв'язок д. р.?

6. Як формулюється теорема існування та єдиності розв'язку д. р.?

7. Скільки розв'язків має д. р.?

8. Скільки вільних параметрів має загальний розв'язок д. р. 5-го порядку?

9. Які ви знаєте способи розв'язку лінійного д. р. першого порядку?

10. Яка заміна в однорідному рівнянні приводить до його розв'язку?

11. Що називається характеристичним рівнянням лінійного д. р. 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

12. Який вигляд мають загальні розв'язки однорідного лінійного д. р. 2-го порядку у випадках:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$; 2) $\lambda_1 = \lambda_2$; 3) не існує дійсних розв'язків.

13. У якому вигляді відшукується загальний розв'язок лінійної однорідної системи д. р.?

3.3. Різницеві рівняння в моделюванні динаміки економічних систем у дискретному часі

У практичній діяльності найпростіші різницеві рівняння з'являються під час дослідження змінної $Y(n)$, яка є сумою, накопиченою за встановленим законом при цілочисельних значеннях аргумента $\mathrm{n} = 0, 1, 2, \ldots$, наприклад, $Y(n)$ зростає на кожному кроці у встановленому розмірі. Розглянемо як приклад процес зростання грошової суми Y_0, покладеної в банк, за умови начислення 100 ч складних відсотків на рік. Нехай начислення відсотків здійснюється один раз на рік і n означає кількість років з моменту розміщення вкладу $(\mathrm{n} = 0, 1, 2, \ldots,)$. Визначимо розмір вкладу упродовж n років як $Y(n)$. Тоді маємо:

$$Y(n) = (1 + r)Y(n - 1).$$

Якщо початкова сума дорівнює Y_0 маємо проблему пошуку розв'язку отриманого різницевого рівняння, підпорядкованого початковій умові $Y(0) = Y_0, \quad n = 0$.

Знайдене різницеве рівняння містить $Y(n)$ і значення цієї ж змінної на один рік раніше $Y(n-1)$ в даному випадку аргумент n явно непредставлений у різницевому рівнянні. Частинним розв'язком різницевого рівняння є функція, яка визначена при $(\mathrm{n} = 0,1,2,\ldots,)$ і задовольняє як самому рівнянню, так і початковим умовам.

Візьмемо інший варіант. Нехай тепер у кінці кожного року здійснюється вклад Y_0, тотожний початковій умові. Різницеве рівняння отримує форму:

$$Y(n) = (1 + r)Y(n - 1) + Y_0$$

з початковою умовою $Y = Y_0$ при $n = 0$.

Частинний розв'язок цього різницевого рівняння, який задовольняє початкову умову, є:

$$Y(n) = \frac{Y_0}{r}\left[(1 + r)^{n+1} - 1\right].$$

Якщо різницеве рівняння зображує загальний член ряду $u_0, u_1, u_2, \ldots$, то сума перших n членів цього ряду:

$$S(n) = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$$

буде задовольняти різницевому рівнянню. Член ряду за номером n (u_n) є те значення, яке треба додати до $S(n-1)$ для отримання $S(n)$:

$$S(n) - S(n-1) = u_n.$$

Якщо $u_n = f(n)$ для усіх $n = 0,1,2,\ldots$, то даний вираз є різницевим рівнянням для знаходження $S(n)$.

У загальному випадку різницеве рівняння утворює зв'язок між значеннями функції $Y = Y(n)$, розглянутої для ряду рівновіддалених значень аргумента:

$$x = x_n = x_0 + nh.$$

Не втрачаючи загальності, припустимо $x_0 = 0, h = 1$. У такому разі в подальшому розгляді будемо оперувати тільки з цілочисловою змінною. Визначимо поняття скінченної різниці.

Визначення. *Скінченною різницею першого порядку* для функції $Y(n)$ є різниця:

$$\Delta y(n) = y(n+1) - y(n);$$
$$\Delta y(n+1) = y(n+2) - y(n+1);$$
$$\Delta y(n+2) = y(n+3) - y(n+2).$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Визначення. *Скінченною різницею другого порядку* для функції $Y(n)$ є різниця:

$$\Delta^2 \mathrm{y}(\mathrm{n}) = \Delta y(n+1) - \Delta y(n) = \mathrm{y}(\mathrm{n}+2) - 2y(n+1) - y(n);$$
$$\Delta^2 \mathrm{y}(\mathrm{n}+1) = \Delta y(n+2) - \Delta y(n+1) = \mathrm{y}(\mathrm{n}+3) - 2y(n+2) - y(n+1);$$
$$\Delta^2 \mathrm{y}(\mathrm{n}+2) = \Delta y(n+3) - \Delta y(n+2) = \mathrm{y}(\mathrm{n}+4) - 2y(n+3) - y(n+2).$$

Визначення. *Скінченною різницею довільного порядку* для функції $Y(n)$ є різниця:

$$\Delta^m y(n) = \Delta^{m-1} y(n+1) - \Delta^{m-1} y(n) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k C_m^k y(n+m-k),$$

де $C_m^k = \frac{m!}{k!(m-k)!}$ $\quad k = \overline{0,m}$.

Різницевим рівнянням є рівняння, що зв'язує незалежну змінну n, її функцію $Y(n)$ та різниці цієї функції $\Delta Y(n), \Delta^2 Y(n), \ldots, \Delta^m Y(n)$. Таке рівняння можна записати у загальному вигляді наступним чином:

$$\varphi\left[\Delta \mathrm{Y}(\mathrm{n}), \Delta^2 \mathrm{Y}(\mathrm{n}), \ldots, \Delta^m \mathrm{Y}(\mathrm{n})\right] = 0.$$

Порядком різницевого рівняння є порядок найбільшої різниці, що зображена в рівнянні. Наприклад, рівняння першого порядку має $\Delta Y(n)$, але не має різниць більшого порядку. Вищеозначене рівняння є рівнянням m-го порядку може бути зведено до рекурентної форми:

$$\Psi(n, Y(n), Y(n+1), \ldots, Y(n+m)) = 0.$$

Нехай задане різницеве рівняння першого порядку у формі:

$$\Delta Y(n) = Y(n) + n + 1.$$

З урахуванням того, що $\Delta y(n) = y(n+1) - y(n)$, отримаємо:

$$\Delta Y(n+1) = 2Y(n) + n + 1.$$

Наведемо ще кілька прикладів різницевих рівнянь, зображених у двох формах:

1) $y(n+1) - y(n) = \alpha^n$; $\qquad \Delta y(n) = \alpha^n$;

2) $y(n+1) - a \cdot y(n) = \alpha^n$; $\qquad \Delta y(n) - (a-1)y(n) = \alpha^n$;

3) $y(n+2) = y(n+1) - y(n)$; $\qquad \Delta^2 y(n) + \Delta y(n) + y(n) = 0.$

3.4. Лінійні різницеві рівняння 1-го порядку

Прикладом лінійного різницевого рівняння є неоднорідне рівняння першого порядку:

$$x_{n+1} = a_n x_n + b_n, \tag{3.18}$$

де a_n та b_n є заданими послідовностями дійсних чисел. Треба знайти послідовність x_n, яка буде розв'язком рівняння (3.18).

Розв'язком рівняння (3.18), що приймає для цілого n_0 значення x_{n_0}, є послідовність x_n, елементи якої визначені формулою:

$$x_n = x_{n_0}\prod_{k=n_0}^{n-1} a_k + \sum_{k=n_0}^{n-1}\left(b_k \prod_{j=k+1}^{n-1} a_j\right), \quad n \ge n_0. \qquad (3.19)$$

Якщо послідовність $a_n \equiv a = const$, то (3.19) перетворюється до вигляду $(n_0 = 0)$:

$$x_n = x_0 a^n + \sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} b_k\,. \qquad (3.20)$$

Якщо послідовність $a_n \equiv 1$ та $b_n \equiv b = const$, то рішення (3.20) є арифметичною прогресією. Якщо послідовність $b_n \equiv 0$, тоді рішення (3.20) є геометричною прогресією.

***Приклад 18*.** Знайти розв'язок однорідного різницевого рівняння $x_{n+1} = \frac{-1}{2} x_n$, для якого $x_5 = 2$.

Розв'язання. У даному випадку $a = -\frac{1}{2}$ і згідно з (3.19), і (3.20) загальний розв'язок рівняння буде $x_n = x_{n_0}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

Коли $n = 5$, $x_5 = x_{n_0}\left(-\frac{1}{2}\right)^5$. Маємо $x_{n_0} = x_5(-2)^5 = -2^6$.

Отримаємо загальний розв'язок: $x_n = -2^6 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1)^{n+1} 2^{6-n}$.

Приклад 19. Знайти розв'язок однорідного різницевого рівняння,

$$x_n = a \cdot x_{n-1} + b\,, \qquad (3.21)$$

для якого $a \ne 1$ та b задані сталі, $n_0 = 0$.

Згідно з формулою (3.20) маємо $x_n = x_0 a^n + b\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1}$. Вираз $\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-k-1} = \frac{a^n - 1}{a - 1}$ є сума геометричної прогресії. Отже, вираз для розв'язку наступний: $x_n = x_0 a^n + \frac{b(a^n - 1)}{a - 1}$ або після перетворень отримаємо:

$$x_n = Ca^n - \frac{b}{a-1}, \tag{3.22}$$

де $C = x_0 + \frac{b}{a-1}$.

Треба зауважити, що при $a = 1$ загальний розв'язок рівняння (3.21) має вигляд:

$$x_n = x_0 + nb. \tag{3.23}$$

***Приклад 20*.** Кожного місяця робітник вносить 1 000 гривень на свій рахунок накопичення з одержання прибутку $0{,}5\,\%$ за кожен місяць. Треба знайти розмір його накопичень:

а) одразу після n-го внеску;

б) одразу після 10-го внеску.

Розв'язання. Нехай x_n – значення рахунку відразу після n-го вкладу. Тоді перше, початкове значення рахунку буде $x_1 = 1\,000$.

Ми можемо виразити x_n через x_{n-1} таким чином:

$x_n = x_{n-1} + 0{,}005x_{n-1} + 1\,000$ або $x_n = 1{,}005x_{n-1} + 1\,000$.

Остання рівність є різницевим рівнянням з попереднього прикладу, де $a = 1{,}005$, $b = 1\,000$. Тоді:

$$x_n = Ca^n - \frac{b}{a-1} = C(1{,}005)^n - \frac{1\,000}{1{,}005 - 1},$$

$$x_n = C(1{,}005)^n - 200\ 000.$$

Якщо $n = 1$, то $x_n = C \cdot 1{,}005 - 200\ 000 = 1\,000.$

Вочевидь: $C = 200\,000$.

Отже, маємо розв'язок для випадку а) $x_n = 200\,000\left[(1{,}005)^n - 1\right]$.

У випадку б) отримаємо результат: $x_{10} = 200\,000\left[(1{,}005)^{10} - 1\right] = 10228$.

3.5. Лінійні однорідні різницеві рівняння 2-го порядку

Лінійне однорідне різницеве рівняння 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами має вигляд:

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = 0. \qquad (3.24)$$

Вочевидь, що рівняння (3.24) завжди має нульовий розв'язок $x_n = 0$.
Нетривіальний розв'язок (3.24) будемо шукати у вигляді $x_n = \lambda^n$, де $\lambda \neq 0$.
Після підстановки в рівняння (3.24) маємо:
$\lambda^{n+2} + a_1\lambda^{n+1} + a_2\lambda^n = 0$, що рівнозначно:

$$\lambda^2 + a_1\lambda + a_2 = 0. \qquad (3.25)$$

Рівняння (3.25) називають мультиплікаторним (характеристичним) рівнянням, спряженим з різницевим рівнянням (3.24). Його розв'язок залежить від коренів квадратного рівняння (3.25). Існують три можливі випадки:

1. Мультиплікаторне рівняння (3.25) має два різних дійсних кореня:

$$\lambda_{1,2} = -\frac{a_1}{2} \pm \sqrt{\frac{a_1^2}{4} - a_2}, \; a_1^2 > 4a_2.$$

Розв'язок має вигляд:

$$x_n = C_1\lambda_1^n + C_2\lambda_2^n, \qquad (3.26)$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Приклад 21. Різницеве рівняння $x_{n+2} + 5x_{n+1} + 6x_n = 0$.

Квадратне рівняння (3.25) в даному випадку є $\lambda^2 + 5\lambda + 6a_2 = 0$ і має корені $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -3$. Загальний розв'язок можна подати у формі:

$$x_n = C_1(-2)^n + C_2(-3)^n,$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

2. Мультиплікаторне рівняння (3.25) має двократний корінь:

$$\lambda_1 = \lambda_2 = a_{\frac{1}{2}}; \; a_1^2 = 4a_2.$$

Таким чином, розв'язок отримає вираз:

$$x_n = (C_1 + C_2 n)\lambda^n. \tag{3.27}$$

Приклад 22. Знайти розв'язок рівняння:

$$x_{n+2} - 10x_{n+1} + 25x_n = 0.$$

Відповідає характеристичне рівняння $\lambda^2 - 10\lambda + 25 = (\lambda - 5)^2 = 0$.

Маємо корені: $\lambda_1 = \lambda_2 = 5$.

Згідно зі загальною формою (3.27) отримаємо розв'язок:

$x_n = (C_1 + C_2 n)5^n$.

Мультиплікаторне рівняння (3.25) не має дійсних коренів, що відповідає умові $a_1^2 < 4a_2$.

Розв'язок (3.24) буде знайдений у такий спосіб:

$$x_n = r^n (C_1 \cos n\varphi + C_2 \sin n\varphi), \tag{3.28}$$

де $r = \sqrt{a_2}$, $\quad \varphi = arctg\left(-\dfrac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{a_1}\right)$.

Приклад 23. Знайдемо загальний розв'язок рівняння:

$$x_{n+2} + 2x_{n+1} + 2x_n = 0.$$

Розв'язання. Мультиплікаторне рівняння $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ не має дійсних коренів. Для застосування формули (3.28) знайдемо параметри r та φ. Вочевидь, $r = \sqrt{a_2} = \sqrt{2}$

і $\varphi = arctg\left(-\dfrac{\sqrt{4a_2 - a_1^2}}{a_1}\right) = arctg(-1) = \dfrac{3\pi}{4}$.

Загальний розв'язок різницевого рівняння подати у вигляді:

$$x_n = C_1 2^{\frac{n}{2}} \cos n\frac{3\pi}{4} + C_2 2^{\frac{n}{2}} \sin n\frac{3\pi}{4}.$$

Приклад 24. Знайдемо частинний розв'язок різницевого рівняння:

$$x_{n+2}+4x_n=0,\ x_0=1, x_1=2.$$

Мультиплікаторне рівняння $\lambda^2+4=0$ не дає дійсних коренів. Параметри r і φ дорівнюють: $r=2$ та $\varphi=\frac{\pi}{2}$.

Загальний розв'язок має форму:

$$x_n=C_1 2^n\cos\frac{\pi n}{2}+C_2 2^n\sin\frac{\pi n}{2}.$$

З початкових умов маємо: $x_0=C_1, x_1=2C_2$.

Таким чином, $C_1=1, C_2=1$.

Частинний розв'язок набуває вигляду:

$$x_n=2^n\left(\cos\frac{\pi n}{2}+\sin\frac{\pi n}{2}\right).$$

Приклад 25. Знайдемо частинний розв'язок різницевого рівняння:

$$x_{n+2}-x_{n+1}-x_n=0,\ x_0=0, x_1=1.$$

Мультиплікаторне рівняння $\lambda^2-\lambda-1=0$ має дійсні корені $\lambda_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$.

Загальний розв'язок є:

$$x_n=C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Початкові умови дають наступні рівняння:

$$x_0=C_1+C_2,\qquad x_1=\frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2,$$

які визначають систему двох рівнянь:

$$C_1+C_2=0,\qquad \frac{1-\sqrt{5}}{2}C_1+\frac{1+\sqrt{5}}{2}C_2=1.$$

Знаходимо $C_1=-\frac{1}{\sqrt{5}}, C_2=\frac{1}{\sqrt{5}}$ і дістаємо частинний розв'язок:

$$x_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(C_1\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n+C_2\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n\right),\ (n=0,1,2,...).$$

При різних значеннях $n=0,1,2,...$ маємо послідовність $x_0=0, x_1=1,$ $x_2=1, x_3=2$, $x_4=3, x_5=5,$ $x_6=8, ...$.

Елементи даної послідовності є числами Фібоначчі (Леонардо Пізанський).

Приклад 26. Знайдемо частинний розв'язок різницевого рівняння $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=0$, $x_0=1, x_1=4.$

Мультиплікаторне рівняння має форму повного квадрату $(\lambda-2)^2=0$, $\lambda_{1,2}=2$. Загальний розв'язок має вигляд: $x_n=(C_1+C_2n)2^n$.

За допомогою початкових значень x_0, x_1 знайдемо довільні сталі C_1, C_2:

$x_0=C_1=1, x_1=2(C_1+C_2)=4.$

Звідси, $C_1=1, C_2=1$.

Частинний розв'язок є таким: $x_n=(1+n)2^n$.

Вправи до самостійного розв'язування

1) Знайти загальний розв'язок різницевих рівнянь:

1. $x_{n+2}+5x_{n+1}+4x_n=0$;
2. $x_{n+2}+7x_{n+1}+6x_n=0$;
3. $x_{n+2}+2\sqrt{3}x_{n+1}+3x_n=0$;
4. $x_{n+2}+x_{n+1}+x_n=0$;
5. $x_{n+2}+8x_{n+1}+16x_n=0$;
6. $x_{n+2}+x_{n+1}-2x_n=0$;
7. $x_{n+2}+4x_{n+1}+5x_n=0$;
8. $x_{n+2}+x_{n+1}+\frac{1}{4}x_n=0$;
9. $x_{n+2}+6x_{n+1}+13x_n=0$;
10. $x_{n+2}-6x_{n+1}+9x_n=0$.

2) Знайти частинний розв'язок із заданими початковими умовами:

1. $x_{n+2}+5x_{n+1}+4x_n=0$, $x_0=1, x_1=3$;
2. $x_{n+2}+9x_{n+1}+8x_n=0$, $x_0=0, x_1=4$;
3. $x_{n+2}-10x_{n+1}+25x_n=0$, $x_0=1, x_1=5$;
4. $x_{n+2}-2x_{n+1}+2x_n=0$, $x_0=2, x_1=4$;
5. $x_{n+2}-4x_{n+1}+3x_n=0$, $x_0=1, x_1=3$;
6. $x_{n+2}-8x_{n+1}+17x_n=0$, $x_0=2, x_1=3$;
7. $x_{n+2}+\frac{1}{2}x_{n+1}+\frac{1}{16}x_n=0$, $x_0=\frac{1}{4}, x_1=\frac{1}{2}$.

3.6. Лінійні неоднорідні різницеві рівняння 2-го порядку

Загальний розв'язок лінійного неоднорідного різницевого рівняння є з суми загального різницевого рівняння та частинного розв'язку неоднорідного різницевого рівняння. Використаємо метод варіації довільних сталих для відшукання частинного розв'язку різницевого рівняння другого порядку:

$$x_{n+2} + a_1 x_{n+1} + a_2 x_n = f(n), \tag{3.29}$$

де $f(n)$ – задана послідовність дійсних чисел.

Однорідне рівняння має загальний розв'язок:

$$x_n = C_1\varphi_1(n) + C_2\varphi_2(n).$$

Явний вигляд $\varphi_1(n), \varphi_2(n)$ залежить від коренів відповідного мультиплікаторного рівняння і наведений у попередньому розділі.

Довільні сталі в загальному розв'язку однорідного різницевого рівняння беруться за нові невідомі. Тоді розв'язок неоднорідного різницевого рівняння шукаємо у вигляді:

$$x_n = C_{1,n}\varphi_1(n) + C_{2,n}\varphi_2(n).$$

Замінимо n на $n+1$:

$$x_{n+1} = C_{1,n+1}\varphi_1(n+1) + C_{2,n+1}\varphi_2(n+1) = \left(C_{1,n+1} - C_{1,n}\right)\varphi_1(n+1) +$$

$$+\left(C_{2,n+1} - C_{2,n}\right)\varphi_2(n+1) + C_{1,n}\,\varphi_1(n+1) + C_{2,n}\,\varphi_2(n+1).$$

Спрощуючи вищеозначений вираз, оберемо:

$$\left(C_{1,n+1} - C_{1,n}\right)\varphi_1(n+1) + \left(C_{2,n+1} - C_{2,n}\right)\varphi_2(n+1) = 0.$$

Аналогічно маємо:

$$x_{n+2} = \left(C_{1,n+1} - C_{1,n}\right)\varphi_1(n+2) + \left(C_{2,n+1} - C_{2,n}\right)\varphi_2(n+2) +$$

$$+ C_{1,n}\,\varphi_1(n+2) + C_{2,n}\,\varphi_2(n+2).$$

Підставляючи x_n, x_{n+1}, x_{n+2} в неоднорідне різницеве рівняння (3.29), дістаємо рівняння:

$$\left(C_{1,n+1} - C_{1,n}\right)\cdot\varphi_1(n+2) + \left(C_{2,n+1} - C_{2,n}\right)\cdot\varphi_2(n+2) = f(n).$$

Таким чином, маємо систему рівнянь для $C_{1,n+1} - C_{1,n}$ та $C_{2,n+1} - C_{2,n}$.

$\varphi_1(n+2)\left(C_{1,n+1}-C_{1,n}\right)+\varphi_2(n+2)\left(C_{2,n+1}-C_{2,n}\right)=f(n)$;
$\varphi_1(n+2)\left(C_{1,n+1}-C_{1,n}\right)+\varphi_2(n+2)\left(C_{2,n+1}-C_{2,n}\right)=f(n)$.

З цієї системи одержуємо розв'язок:

$$C_{1,n+1}-C_{1,n}=\frac{\varphi_2(n+1)f(n)}{\varphi_1(n+2)\varphi_2(n+1)-\varphi_1(n+1)\varphi_2(n+2)};$$

$$C_{2,n+1}-C_{2,n}=\frac{\varphi_1(n+1)f(n)}{\varphi_1(n+2)\varphi_2(n+1)-\varphi_1(n+1)\varphi_2(n+2)}.$$

Розв'язавши ці різницеві рівняння, маємо:

$$C_{1,n}=C_1+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi_2(k+1)f(k)}{\varphi_1(k+2)\varphi_2(k+1)-\varphi_1(k+1)\varphi_2(k+2)};$$

$$C_{2,n}=C_2-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\varphi_1(k+1)f(k)}{\varphi_1(k+2)\varphi_2(k+1)-\varphi_1(k+1)\varphi_2(k+2)},$$

де C_1, C_2 – довільні сталі.

Загальний розв'язок неоднорідного рівняння другого порядку має вираз:

$$x_n=C_1\varphi_1(n)+C_2\varphi_2(n)+u(n),$$

де

$$u(n)=\sum_{k=0}^{n-1}R(n-1,k)f(k),$$

$$R(n-1,k)=\frac{\varphi_1(n)\varphi_2(k+1)-\varphi_1(k+1)\varphi_2(n)}{\varphi_1(k+2)\varphi_2(k+1)-\varphi_1(k+1)\varphi_2(k+2)}$$

є частинним розв'язком лінійного неоднорідного різницевого рівняння.

Лінійне різницеве рівняння другого порядку зі сталими коефіцієнтами в залежності від коренів мультиплікаторного рівняння має три комбінації лінійно незалежних розв'язків: $\varphi_1(n), \varphi_2(n)$.

1. Мультиплікаторне рівняння $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ має два дійсних корені $\lambda_1\neq\lambda_2$. У цьому випадку $\varphi_1(n)=\lambda_1^n$, $\varphi_2(n)=\lambda_2^n$.

Функція $R(n-1,k)=\dfrac{\lambda_1^{n-k-1}-\lambda_2^{n-k-1}}{\lambda_1-\lambda_2}$.

Частинний розв'язок: $u(n)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\lambda_1^{n-k-1}-\lambda_2^{n-k-1}}{\lambda_1-\lambda_2}f(k)$.

Загальний розв'язок має вигляд:

$$x_n=\lambda_1^n+\lambda_2^n+\sum_{k=0}^{n}\frac{\lambda_1^{n-k-1}-\lambda_2^{n-k-1}}{\lambda_1-\lambda_2}\cdot f(k).$$

2. Мультиплікаторне рівняння $\lambda^2+a_1\lambda+a_2=0$ має двократний корінь $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$. У цьому випадку $\varphi_1(n)=\lambda^n,\ \varphi_2(n)=n\lambda^n$ легко з'ясувати, що функція $R(n-1,k)$ має вигляд:

$$R(n-1,k)=\frac{\lambda^{n-k-1}(n-k-1)}{\lambda}.$$

Частинний розв'язок:

$$u(n)=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{n-k-1}(n-k-1)f(k).$$

Загальний розв'язок:

$$x_n=(C_1+nC_2)\lambda^n+\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{n-1}\lambda^{n-k-1}(n-k-1)f(k).$$

3. Не існує дійсних коренів мультиплікаторного рівняння.

Розв'язками лінійного рівняння другого порядку є

$$\varphi_1(n)=r^n\cos n\varphi,\ \varphi_2(n)=r^n\sin n\varphi.$$

Функція $R(n-1,k)$ з'являється у формі:

$$R(n-1,k)=\frac{1}{r\sin\varphi}\cdot r^{n-k-1}\sin((n-k-1)\varphi).$$

Частинний розв'язок має вигляд:

$$u(n)=\frac{1}{r\sin\varphi}\sum_{k=0}^{n-1}r^{n-k-1}\sin((n-k-1)\varphi)f(k).$$

Загальний розв'язок:

$$x_n=r^n(C_1\cos n\varphi+C_2\sin n\varphi)+\frac{1}{r\sin\varphi}\sum_{k=0}^{n-1}r^{n-k-1}\sin((n-k-1)\varphi)f(k).$$

Вочевидь, що в усіх трьох випадках $R(n-1,k)=R(n-k-1)$ і відповідні частинні розв'язки є згортками двох послідовностей.

Процедура обчислення згортки двох послідовностей може бути досить складним завданням для довільно заданої послідовності $f(n)$. Тому, для деяких типових послідовностей $f(n)$ доцільним є застосування методу невизначених коефіцієнтів. Загального принципу визначення структури розв'язку не існує, але в деяких частинних випадках можливо використовувати вказівки, які наведені в табл. 2.

Таблиця 2

Частинні розв'язки різницевих рівнянь

Вільний член $f(n)$	Частинний розв'язок u_n
a^n	$A \cdot a^n$
n^k	$A_0 + A_1 n + ... + A_k n^k$
$a^n n^k$	$\left(A_0 + A_1 n + ... + A_k n^k\right) a^n$
$\sin \beta n, \cos \beta n$	$A \sin(\beta n) + B \cos(\beta n)$

Приклад 27. Знайти загальний розв'язок рівняння

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = 3^n .$$

Розв'язання. Мультиплікаторне рівняння відповідного однорідного різницевого рівняння є $\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$. Його корні будуть $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -3$. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння шукаємо у вигляді:

$$u_n = A \cdot 3^n .$$

Підставляючи в початкове різницеве рівняння, маємо:

$$A \cdot 3^{n+2} + A \cdot 3^{n+1} - 6A \cdot 3^n = 3^n .$$

Отримаємо $A = \frac{1}{6}$. Загальний розв'язок є таким:

$$x_n = C_1 2^n + C_2 (-3)^n + \frac{1}{6} 3^n .$$

Приклад 28. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = a^n ,$$

де $a \neq 1$ деяка стала, будемо шукати у вигляді $u_n = A \cdot a^n$. Підстановка у різницеве рівняння дає $A = \dfrac{1}{(a-2)(a+3)}$.

Ця умова дозволяє обчислити A тільки тоді, коли $a \neq 2$ і $a \neq 3$. Інакше кажучи, a повинно відрізнятися від коренів мультиплікаторного рівняння. У випадку, коли a співпадає з якимсь із коренів мультиплікаторного рівняння, частинний розв'язок треба шукати у вигляді:

$$u_n = A \cdot n \cdot a^n.$$

Після підстановки у різницеве рівняння маємо:

$$A = \frac{1}{(n+2)a^2 + (n+1)a - 6n}.$$

Якщо $a = \lambda_1 = 2$, то $A = \dfrac{1}{10}$ або $u_n = \dfrac{n}{10} \cdot 2^n$. Загальний розв'язок: $x_n = C_1 + \dfrac{n}{10} \cdot 2^n + C_2(-3)^n$. В іншому випадку $a = \lambda_2 = -3$. Тоді: $A = \dfrac{1}{15}$ та частинний розв'язок $u_n = \dfrac{n}{15} \cdot (-3)^n$, а загальний розв'язок задається формулою: $x_n = C_1 \cdot 2^n + \left(C_2 + \dfrac{n}{15} \right)(-3)^n$.

Приклад 29. Частинний розв'язок неоднорідного рівняння:

$$x_{n+2} + x_{n+1} - 6x_n = \sin \frac{n\pi}{2},$$

де $a \neq 1$ деяка стала, будемо шукати у вигляді:

$$u_n = A \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2} \right) + B \cos\left(\frac{n\pi}{2} \right).$$

Після підстановки u_n у різницеве рівняння та виконання необхідних дій, маємо:

$$(7A + B + 1)\sin \frac{n\pi}{2} - (A - 7B)\cos \frac{n\pi}{2} = 0.$$

Звідки витікає, що коефіцієнти при обох тригонометричних функціях повинні дорівнювати нулю, тощо

$$\begin{cases} 7A + B = -1, \\ A - 7B = 0. \end{cases}$$

З цієї системи алгебраїчних рівнянь отримаємо значення A та B:

$$A = -\frac{7}{50}, B = -\frac{1}{50}.$$

Таким чином, частинний розв'язок буде:

$$u_n = -\frac{7}{50} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{50}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

Загальний розв'язок має форму:

$$x_n = C_1 \cdot 2^n + C_2(-3)^n - \frac{7}{50} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) - \frac{1}{50}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right).$$

***Приклад 30*.** Знайти частинний розв'язок неоднорідного рівняння $x_{n+2} - 2a \cdot x_{n+1} + a^2 x_n = 2 \cdot a^n$, де $a \neq 1$ – деяка стала.

У даному випадку двократний корінь мультиплікаторного рівняння $\lambda_1 = \lambda_2 = a$ співпадає з показником ступеня правої частини. У такому разі частинний розв'язок шукаємо у формі $u_n = A \cdot n^2 \cdot a^n$.

Підставляючи u_n у дане різницеве рівняння, маємо:

$$A\left[(n+2)^2 a^{n+2} - 2a(n+1)^2 a^{n+1} + a^2 n^2 a^n\right] = 2a^n .$$

Звідси отримаємо $A = \frac{1}{a^2}$. Частинний розв'язок набуває вигляду: $u_n = n^2 \cdot a^{n-2}$.

Вправи до самостійного розв'язування

1) Знайти загальний розв'язок різницевих рівнянь:

1. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 6x_n = 2n + 3$;
2. $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 12x_n = e^n$;
3. $x_{n+2} - 5x_{n+1} + 4x_n = n^2 + 2n^3$;
4. $x_{n+2} + 8x_{n+1} + 7x_n = n2^n$;
5. $x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)$;
6. $x_{n+2} - 3x_{n+1} + 2x_n = 2 \cdot 3^n$;
7. $x_{n+2} + x_{n+1} + x_n = 5^n$;
8. $x_{n+2} + 4x_{n+1} + 4x_n = 5 \cdot (-2)^n$;
9. $x_{n+2} + 6x_{n+1} + 3x_n = n - 1$;
10. $x_{n+2} - 6x_{n+1} + 9x_n = 3^{n+1}$.

2) Знайти частинний розв'язок із заданими початковими умовами:

1. $x_{n+2}+5x_{n+1}+6x_n=(-3)^n$;

2. $x_{n+2}-4x_n=2^n$;

3. $x_{n+2}-4x_{n+1}+4x_n=4\cdot 2^n$;

4. $x_{n+2}+2x_{n+1}+3x_n=9n+5n^2$;

5. $x_{n+2}+10x_{n+1}+9x_n=3^{2n}$;

6. $x_{n+2}+5x_{n+1}+4x_n=\sin\dfrac{n\pi}{3}$;

7. $x_{n+2}+7x_{n+1}-8x_n=\cos\dfrac{n\pi}{2}$;

8. $x_{n+2}-4x_{n+1}+5x_n=n^3$;

9. $x_{n+2}-\dfrac{5}{4}x_{n+1}+\dfrac{1}{4}x_n=4^{-n}$;

10. $x_{n+2}+6x_{n+1}+8x_n=(-2)^n+(-4)^n$.

3.7. Властивості розв'язків лінійних різницевих рівнянь

Головні властивості розв'язків лінійного однорідного різницевого рівняння

$$x_{n+k}=a_1(n)x_{n+k-1}+a_2(n)x_{n+k-2}+...+a_k(n)x_n \tag{3.30}$$

виражають наступні теореми:

Теорема 1. Якщо $a_k(n)\neq 0$ для усіх натуральних n, то рівняння (3.30) із заданими початковими умовами $x_0, x_1, ..., x_k$ має єдиний розв'язок, тобто одну послідовність x_n, перші елементи якої задані, а елементи відлічені від x_{k+1} задовольняють рівнянню (3.30).

Теорема 2. Якщо послідовність x_n' та x_n'' є розв'язками рівняння (3.30), то й послідовність x_n така, що для кожного натурального n

$$x_n=C'x_n'+C''x_n'',$$

де C' та C'' довільні сталі, буде розв'язком рівняння (3.30). Треба також зазначити, що теорема 2 досить легко узагальнюється на довільну скінченну кількість рішень.

Далі введемо поняття лінійної залежності та незалежності послідовностей. Розглянемо m послідовностей $x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m$. Будемо стверджувати, що ці послідовності лінійно залежні, якщо існують такі сталі $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$, не всі одночасно рівні нулю, що для кожного натурального n лінійна комбінація цих послідовностей задовольняє умові $\alpha_1 x_n^1 + \alpha_2 x_n^2 + ... + \alpha_m x_n^m = 0$. У протилежному випадку розглянуті послідовності є лінійно незалежними.

Приклад 31. Послідовності 2^n та $n \cdot 2^n$ лінійно незалежні.
Дійсно, рівності $\alpha_1 2^n + \alpha_2 \cdot n \cdot 2^n = 0$ або $(\alpha_1 + \alpha_2 \cdot n) \cdot 2^n = 0$.
можливі для кожного n тільки, якщо $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$.

Для того, щоб визначити чи є задані послідовності лінійно залежними або незалежними, скористаємося властивостями матриці Казораті. Матрицею Казораті для послідовностей $x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m$ будемо іменувати матрицю:

$$K_n = \begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & ... & x_n^m \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & ... & x_{n+1}^m \\ ... & ... & ... & ... \\ x_{n+m-1}^1 & x_{n+m-1}^2 & ... & x_{n+m-1}^m \end{pmatrix}.$$

Визначник матриці Казораті $\det K_n = C_n$ назвемо визначником Казораті.

Лема. Якщо послідовності $x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m$ лінійно залежні, то визначник Казораті дорівнює нулю, тоді навпаки, якщо визначник Казораті дорівнює нулю, тоді умова залежності виконана щонайменш для $n, n+1, ..., n+m-1$.

***Приклад 32*.** Визначник Казораті для послідовностей попереднього прикладу не буде дорівнювати нулю.

$$C_n = \begin{vmatrix} 2^n & n \cdot 2^n \\ 2^{n+1} & (n+1)2^{n+1} \end{vmatrix} = 2^{2n} \cdot \begin{vmatrix} 1 & n \\ 2 & 2(n+1) \end{vmatrix} = 2^{2n+1} \neq 0.$$

і відповідні послідовності мають бути лінійно незалежними.

Множину K лінійно незалежних розв'язків рівняння (3.30) будемо називати фундаментальною системою розв'язків цього рівняння. Лінійну комбінацію фундаментальної системи розв'язків вважаємо загальним розв'язком різницевого рівняння (3.30).

Теорема 3. Якщо послідовності $x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m$ утворюють фундаментальну систему рішень лінійного однорідного рівняння (3.30) порядку k, то кожне рішення цього рівняння буде послідовністю, елементи якої можна надати у вигляді:

$$x_n = C_1 x_n^1 + C_2 x_n^2 + ... + C_k x_n^k,$$

де $C_1, C_2 ..., C_k$ – довільні сталі.

3.8. Системи лінійних різницевих рівнянь

Система лінійних різницевих рівнянь має зображення:

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = a_{11} x_n^1 + a_{12} x_n^2 + ... + a_{1l} x_n^l + b_n^1, \\ x_{n+1}^2 = a_{21} x_n^1 + a_{22} x_n^2 + ... + a_{2l} x_n^l + b_n^2, \\ .... \\ x_{n+1}^1 = a_{l1} x_n^1 + a_{l2} x_n^2 + ... + a_{ll} x_n^l + b_n^l. \end{cases} \tag{3.31}$$

Систему лінійних різницевих рівнянь будемо називати однорідною, якщо для кожного натурального n є $b_n^1 = b_n^2 = ... = b_n^l = 0$. В іншому випадку систему різницевих рівнянь будемо називати неоднорідною. Однорідна система зі сталими коефіцієнтами є автономною системою.

Теорема. Лінійне різницеве рівняння:

$$x_{n+k} = a_n^1 x_{n+k-1} + a_n^2 x_{n+k-2} + ... + a_n^k x_n + b_n$$

рівнозначне системі лінійних різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} x_{n+1}^1 = x_n^2, \\ x_{n+1}^2 = x_n^3, \\ .... \\ x_{n+1}^{k-1} = x_n^k \\ x_{n+1}^k = a_n^1 x_n^k + a_n^2 x_n^{k-1} + ... + a_n^k x_n^1 + b_n. \end{cases}$$

Для доведення вищеозначеної теореми достатньо визначити $x_n^1 = x_n,\ x_n^2 = x_{n+1}, ..., x_n^k = x_{n+k-1}$.

Це підтверджує, що кожне лінійне різницеве рівняння довільного порядку можна перетворити на рівносильну систему лінійних різницевих рівнянь першого порядку. І, навпаки, систему (3.31) інколи легко перетворити на єдине різницеве рівняння вищого порядку.

Приклад 33. Маємо систему двох різницевих рівнянь:

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n \\ y_{n+1} = x_n. \end{cases}$$

З першого рівняння вочевидь $x_{n+2} = y_{n+1}$. Тоді, з урахуванням рівняння $x_{n+2} = x_n$, загальний розв'язок двох рівнянь: $\begin{cases} x_n = C_1 + C_2(-1)^n; \\ y_n = C_1 - C_2(-1)^n. \end{cases}$

3.9. Застосування різницевих рівнянь в економічних дослідженнях

Розглянемо найбільш відому модель економічної динаміки: павутинну модель ринкового ціноутворення.

Нехай ринок якогось відокремленого товару визначається функціями попиту $D = D(p)$та пропозиції $S(p)$, де p – ціна одиниці товару. Для існування рівноваги ціна повинна бути такою, щоб була виконана рівність:

$$D(p) = S(p). \tag{3.32}$$

Рівноважна ціна p^* повинна задовольняти рівнянню (3.32), яке взагалі може мати множину розв'язків. Динамічна модель може бути розбудована за наявності фактору запізнювання в часі на боці попиту або пропозиції.

Найпростіша модель у дискретному аналізі включає постійне запізнювання або відставання пропозиції на один часовий інтервал:

$$D_t = D(p_t), \qquad S_t = S(p_{t-1}).$$

Таке явище трапляється, коли для появи на ринку розглянутого товару повинно мати суттєвий період часу, обраний за інтервал. Дія моделі дуже проста: якщо за наявною ціною p_{t-1}минулого періоду часу об'єм пропозиції на ринку в даному періоді буде $S(p_{t-1})$, то ціна p_t

повинна стати такою, щоб був реалізований увесь об'єм запропонованого товару:

$$D(p_t) = S(p_{t-1}). \tag{3.33}$$

Нехай функції попиту $D(p_t)$ та пропозиції $S(p_{t-1})$ є лінійними функціями ціни:

$$D(p_t) = d_0 + d_1 p_t,$$

$$S(p_{t-1}) = S_0 + S_1 p_{t-1},$$

де d_0, d_1, S_0, S_1 – сталі коефіцієнти.

Тоді з балансового рівняння (3.33) легко отримати різницеве рівняння для динаміки ціни товару:

$$d_0 + d_1 p_t = S_0 + S_1 p_{t-1}$$

або

$$p_t = \frac{S_1}{d_1} p_{t-1} + \frac{S_0 - d_0}{d_1}. \tag{3.34}$$

Рівняння (3.34) має рішення при $S_1 \neq d_1$,

$$p_t = C\left(\frac{S_1}{d_1}\right)^t + \frac{d_0 - S_0}{S_1 - d_1} = C\left(\frac{S_1}{d_1}\right)^t + p^*,$$

де $C = p_0 + \dfrac{d_0 - S_0}{S_1 - d_1}, \quad p^* = \dfrac{d_0 - S_0}{S_1 - d_1}.$

Якщо функція попиту є спадаючою функцією ціни ($d_1 < 0$), що буває типовим для реальних функцій попиту, то p_t має коливальний характер розв'язку.

Контрольні запитання для самодіагностики

1. Що називається оператором зсуву S?

2. За якою формулою можна визначити додатню ступінь S_k оператора зсуву?

3. Яке рівняння називається різницевим к-го порядку?

4. Яка існує рівносильна форма різницевого рівняння?

5. Що є розв'язком різницевого рівняння?

6. Як виглядають початкові умови для різницевого рівняння?

7. За якою формулою можна одержати розв'язок неоднорідного лінійного різницевого рівняння 1-го порядку?

8. Навести приклад однорідного різницевого рівняння і його розв'язку.

9. Дайте визначення лінійного різницевого рівняння 2-го порядку.

10. Яке рівняння називається мультиплікаторним?

11. Який вигляд мають загальні розв'язки однорідного лінійного різницевого рівняння у випадках:

1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$; 2) $\lambda_1 = \lambda_2$; 3) не існує дійсних розв'язків.

12. Дайте визначення частинного розв'язку різницевого рівняння. Наведіть приклад.

13. Що називається визначником Казораті?

14. За якою формулою можна знайти загальний розв'язок неоднорідного лінійного різницевого рівняння 2-го порядку?

15. У випадку $R(n-1,k) = R(n-k-1)$ який вигляд має частинний розв'язок?

16. Який вигляд має загальний розв'язок лінійного р. р. 2-го порядку зі сталими коефіцієнтами?

Рекомендована література

1. Бобровски Д. Введение в теорию динамических систем с дискретным временем / Д. Бобровски. – Москва ; Ижевск : НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика" ; Институт компьютерных исследований, 2006. – 360 с.

2. Валєєв К. Г. Математичний практикум / К. Г. Валєєв, І. А. Джалладова. – Київ, 2004. – 682 с.

3. Гельфонд А. О. Исчисление конечных разностей / А. О. Гельфонд. – Москва : Наука, 1967. – 400 с.

4. Гордин В. А. Дифференциальные и разностные уравнения / В. А. Гордин. – Москва : Изд. дом Высшей школы экономики, 2016. – 532 с.

5. Колемаев В. А. Математическая экономика / В. А. Колемаев. – Москва : Юнити, 2002. – 384 с.

6. Кривошея С. А. Диференціальні та інтегральні рівняння / С. А. Кривошея, М. О. Перестюк, В. М. Бурим. – Київ, 2004. – 407 с.

7. Миролюбов А. А. Линейные однородные разностные уравнения / А. А. Миролюбов, М. А. Солдатов. – Москва : Наука,1981. – 208 с.

8. Понтрягин Л. С. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Л. С. Понтрягин. – Москва : Наука, 1970. – 450 с.

9. Прасолов В. А. Математические методы экономической динамики / В. А. Прасолов. – Санкт-Петербург : Издательство "Лань", 2008. – 352 с.

10. Роменко В. К. Разностные уравнения / В. К. Роменко. – Москва : БИ-НОМ ; Лаборатория знаний. 2006. – 112 с.

Зміст

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

ВИЩА МАТЕМАТИКА

Методичні рекомендації до самостійної роботи за темою "Диференціальні рівняння"

для студентів усіх спеціальностей першого (бакалаврського) рівня

Самостійне електронне текстове мережеве видання

Укладачі: **Воронін** Анатолій Віталійович
Гунько Ольга Володимирівна

Відповідальний за видання *Л. М. Малярець*

Редактор *О. І. Черненко*

Коректор *В. Ю. Труш*

План 2018 р. Поз. № 32 ЕВ. Обсяг 76 с.

Видавець і виготовлювач – ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, просп. Науки, 9-А

Свідоцтво про внесення суб'єкта видавничої справи до Державного реєстру
ДК № 4853 від 20.02.2015 р.