МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

# Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ"

для студентів напряму підготовки 6.050101
"Комп'ютерні науки"
всіх форм навчання

Харків. Вид. ХНЕУ, 2013

Затверджено на засіданні кафедри економічної кібернетики.
Протокол № 3 від 25.08.2012 р.

**Укладачі:** Чернова Н. Л.
Панасенко О. В.
Чаговець Л. О.

М54 Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "Дослідження операцій та методи оптимізації" для студентів напряму підготовки 6.050101 "Комп'ютерні науки" всіх форм навчання / укл. Н. Л. Чернова, О. В. Панасенко, Л. О. Чаговець. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2013. – 40 с. (Укр. мов.)

Подано завдання та методичні рекомендації до їх розв'язання з теми "Задачі та моделі оптимального розподілу ресурсів" даної навчальної дисципліни. Наведено список рекомендованої літератури.

Рекомендовано для студентів напряму підготовки 6.050101 "Комп'ютерні науки".

# Вступ

Методи дослідження операцій та оптимізації широко застосовуються у ході перспективного і поточного планування, проектування різних об'єктів, управління виробничими і технологічними процесами, прогнозуванні розвитку окремих галузей народного господарства. Особливо часто до них звертаються при рішенні завдань розподілу трудових ресурсів і запасів, призначення термінів профілактичного ремонту устаткування, вибору засобів транспортування вантажів, складання графіка розкладів перевезень, розміщення нових виробництв і складів, збору інформації в автоматизованих системах управління і цілого ряду інших.

В основу теорії оптимального функціонування ринкової системи покладено принцип оптимальності. Тенденція до оптимуму об'єктивно властива економічним процесам у ринковій економіці. Розгляд питання про оптимальність функціонування економіки навіть в перебігу окремого проміжку часу диктує необхідність динамічного підходу. Цю вимогу можна сформулювати як принцип примату динамічного оптимуму над статичним. Принципові особливості динамічного оптимуму виражаються поняттям про майбутні наслідки економічного розвитку. Вони не можуть бути точно відомі. Це веде до необхідності побудови імовірнісних моделей економічних процесів, моделей ухвалення рішень в умовах невизначеності і ризику.

Слід зазначити, що багато завдань статичного характеру можна формулювати і вирішувати як завдання динамічного програмування. У той же час деякі завдання успішно вирішуються методами лінійного і нелінійного програмування. Динамічне програмування розуміють як обчислювальний метод для розв'язання задач оптимізації спеціальної структури з адитивною або мультиплікативними цільовими функціями.

У динамічному програмуванні застосування загального принципу оптимальності дає можливість побудувати функціональні рівняння. За цим рівнянням реалізують один з методів поетапного вирішення задачі або виявляють низку важливих особливостей процесу, які допоможуть вибрати оптимальний напрям його розвитку.

Далі подано завдання та методичні рекомендації за темою "Задачі та моделі оптимального розподілу ресурсів"

# Модуль 1. Детерміновані моделі та методи

## Тема 2. Задачі та моделі оптимального розподілу ресурсів

### Задачі для індивідуальної роботи

### Задача № 1

Знайти оптимальний розподіл коштів між підприємствами за умови, що прибуток f(x), отриманий від кожного підприємства, є функцією від вкладених у нього коштів x. Вкладення кратні $\Delta x$, а функції f(x) задані таблично (табл. 1).

Таблиця 1

**Вхідні дані**

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | 5 | 9 | 12 | 14 | 15 | 18 | 20 | 24 | 27 |
| $f_2(x)$ | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 19 | 21 | 22 | 25 |
| $f_3(x)$ | 6 | 10 | 13 | 15 | 16 | 18 | 21 | 22 | 25 |

$s_0 = 9$
n =3,
$\Delta x$=1.

### Задача № 2

Знайти оптимальний розподіл коштів між підприємствами за умови, що прибуток f(x), отриманий від кожного підприємства, є функцією від вкладених коштів x. Вкладення кратні $\Delta x$, а функції f(x) задані таблично (табл. 2).

Таблиця 2

**Вхідні дані**

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | 0,2 | 0,9 | 1,0 | 1,2 | 2,0 |
| $f_2(x)$ | 1,0 | 1,1 | 1,3 | 1,4 | 1,8 |
| $f_3(x)$ | 2,1 | 2,5 | 2,9 | 3,9 | 4,9 |
| $f_1(x)$ | 0 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 4,0 |

$s_0 = 5$
n =4,
$\Delta x$=1.

### Задача № 3

Знайти оптимальний розподіл коштів між підприємствами за умови, що прибуток f(x), отриманий від кожного підприємства, є функцією від вкладених у нього коштів x. Вкладення кратні $\Delta x$, а функції f(x) задані таблично (табл. 3).

Таблиця 3

**Вхідні дані**

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | 5 | 9 | 11 | 14 | 15 | 18 | 20 | 24 | 27 |
| $f_2(x)$ | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 19 | 21 | 22 | 25 |
| $f_3(x)$ | 6 | 10 | 13 | 15 | 15 | 18 | 21 | 22 | 25 |

$s_0 = 8$
n =3,
$\Delta x$=1.

### Задача № 4

Знайти оптимальний розподіл коштів між підприємствами за умови, що прибуток f(x), отриманий від кожного підприємства, є функцією від вкладених у нього коштів x. Вкладення кратні $\Delta x$, а функції f(x) задані таблично (табл. 4).

Таблиця 4

**Вхідні дані**

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_1(x)$ | 5 | 9 | 11 | 14 | 15 | 18 | 20 | 24 | 27 |
| $f_2(x)$ | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 19 | 21 | 22 | 25 |
| $f_3(x)$ | 6 | 10 | 13 | 15 | 15 | 18 | 21 | 22 | 25 |
| $f_4(x)$ | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 15 | 20 | 22 | 24 |

$s_0 = 9$
n =3,
$\Delta x$=1.

### Задача № 5

Знайти оптимальний розподіл коштів між підприємствами за умови, що прибуток f(x), отриманий від кожного підприємства, є функцією від вкладених коштів x. Вкладення кратні $\Delta x$, а функції f(x) задані таблично (табл. 5).

Таблиця 5

**Вхідні дані**

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $f_1(x)$ | 0,2 | 0,9 | 2,0 | 1,2 | 2,0 |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| $f_2(x)$ | 1,0 | 1,1 | 1,3 | 1,4 | 2,8 |
| $f_3(x)$ | 2,1 | 3,5 | 2,9 | 3,9 | 4,9 |
| $f_4(x)$ | 0 | 2,0 | 2,5 | 3,0 | 4,0 |

$s_0 = 6$

$n = 4$,

$\Delta x = 1$.

### Задача № 6

Знайти оптимальний розподіл коштів між підприємствами за умови, що прибуток f(x), отриманий від кожного підприємства, є функцією від вкладених коштів x. Вкладення кратні $\Delta x$, а функції f(x) задані таблично (табл. 6).

Таблиця 6

**Вхідні дані**

| X | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_2(x)$ | 7 | 9 | 11 | 13 | 16 | 19 | 21 | 22 | 25 |
| $f_3(x)$ | 6 | 10 | 13 | 15 | 16 | 18 | 21 | 22 | 25 |
| f4(x) | 3 | 5 | 7 | 11 | 13 | 15 | 20 | 22 | 24 |

$n = 3$,

$\Delta x = 1$.

$s_0 = 9$

### Задача № 7

Знайти оптимальний розподіл ресурсів $s_0$ між двома галузями виробництв I і II протягом n років, якщо дано функції доходів $f_1(x)$ і $f_2(x)$ для кожної галузі, функції повернення $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Після закінчення року тільки всі повернуті кошти перерозподіляються, дохід у виробництво не вкладається. $s_0$ = 40 000 од., n = 4; $f_1(x) = 0{,}4x$, $f_2(x) = 0{,}3x$; $\varphi_1(x) = 0{,}5x$; $\varphi_2(x) = 0{,}8x$.

### Задача № 8

Знайти оптимальний розподіл ресурсів $s_0$ між двома галузями виробництв I і II протягом n років, якщо дано функції доходів $f_1(x)$ і $f_2(x)$

для кожної галузі, функції повернення $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Після закінчення року тільки всі повернуті кошти перерозподіляються, дохід у виробництво не вкладається. $s_0$ = 10 000 од., $n = 4$; $f_1(x) = 0{,}1x^2$, $f_2(x) = 0{,}5x$; $\varphi_1(x) = 0{,}75x$; $\varphi_2(x) = 0{,}3x$.

### Задача № 9

Знайти оптимальний розподіл ресурсів $s_0$ між двома галузями виробництв I і II протягом n років, якщо дано функції доходів $f_1(x)$ і $f_2(x)$ для кожної галузі, функції повернення $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$. Після закінчення року тільки всі повернуті кошти перерозподіляються, дохід у виробництво не вкладається. $s_0$ = 40 000 од., $n = 4$; $f_1(x) = 0{,}4x$, $f_2(x) = 0{,}3x$; $\varphi_1(x) = 0{,}5x$; $\varphi_2(x) = 0{,}8x$. На початку кожного року додатково надходять кошти в розмірах $\Delta s$ = 10 000.

### Задача № 10

Підприємство випускає 4 види продукції. Протягом деякого часу цех, що випускає продукцію, потрібно реконструювати і асортимент повністю замінити. Реконструкції піддаються 3 цехи, її слід провести без зупинки виробництва. Одночасно проводити реконструкцію і замінювати продукцію не можна. Всі заплановані зміни виконати без погіршення показників виробничо-господарської діяльності заводу. В якості критерію оптимальності розглянути максимум приросту товарної продукції (варіанти – парні рядки) та мінімум витрат (варіанти – непарні рядки) за весь плановий період. Обидва критерія виражаються в деяких умовних одиницях вартості, які наведено в табл. 7, 8, рис. 1.

Таблиця 7

**Значення приросту товарної продукції**

| № варіанта | $a_1$ | $a_2$ | $a_3$ | $a_4$ | $a_5$ | $a_6$ | $a_7$ | $a_8$ | $a_9$ | $a_{10}$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ | $a_{14}$ | $a_{15}$ | $a_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
| 1 | 9 | 10 | 10 | 11 | 12 | 11 | 10 | 13 | 12 | 16 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 |
| 2 | 13 | 15 | 16 | 17 | 18 | 14 | 13 | 15 | 20 | 18 | 16 | 16 | 12 | 14 | 14 | 14 |
| 3 | 10 | 10 | 11 | 12 | 11 | 10 | 13 | 12 | 16 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 |
| 4 | 15 | 16 | 17 | 18 | 14 | 13 | 15 | 20 | 18 | 16 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 |

Закінчення табл. 7

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5 | 10 | 11 | 12 | 11 | 10 | 13 | 12 | 16 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 |
| 6 | 16 | 17 | 18 | 14 | 13 | 15 | 20 | 18 | 16 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 |
| 7 | 11 | 12 | 11 | 10 | 13 | 12 | 16 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 |
| 8 | 17 | 18 | 14 | 13 | 15 | 20 | 18 | 16 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 | 12 |
| 9 | 12 | 11 | 10 | 13 | 12 | 16 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 | 13 |
| 10 | 18 | 14 | 13 | 15 | 20 | 18 | 16 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 | 12 | 19 |
| 11 | 11 | 10 | 13 | 12 | 16 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 | 13 | 10 |
| 12 | 14 | 13 | 15 | 20 | 18 | 16 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 | 12 | 19 | 16 |
| 13 | 10 | 13 | 12 | 16 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 | 13 | 10 | 12 |
| 14 | 13 | 15 | 20 | 18 | 16 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 | 12 | 19 | 16 | 13 |
| 15 | 12 | 16 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 | 13 | 10 | 12 | 13 | 14 |
| 16 | 15 | 20 | 18 | 16 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 | 12 | 19 | .16 | 13 | 18 |
| 17 | 16 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 | 13 | 10 | 12 | 13 | 14 | 12 |
| 18 | 20 | 18 | 16 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 | 12 | 19 | 16 | 13 | 18 | 18 |
| 19 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 | 13 | 10 | 12 | 13 | 14 | 12 | 15 |
| 20 | 18 | 16 | 16 | 12. | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 | 12 | 19 | 16 | 13 | 18 | 18 | 15 |
| 21 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 | 13 | 10 | 12 | 13 | 14 | 12 | 15 | 10 |
| 22 | 16 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 | 12 | 19 | 16 | 13 | 18 | 18 | 15 | 20 |
| 23 | 10 | Р | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 | 13 | 10 | 12 | 13 | 14 | 12 | 15 | 10 | 7 |
| 24 | 16 | 12 | 14 | 15 | 14 | 18 | 14 | 12 | 19 | 16 | 13 | 18 | 18 | 15 | 20 | 17 |
| 25 | 12 | 12 | 9 | 14 | 12 | 10 | П | 10 | 12 | 13 | 14 | 12 | 15 | 10 | 7 | 14 |

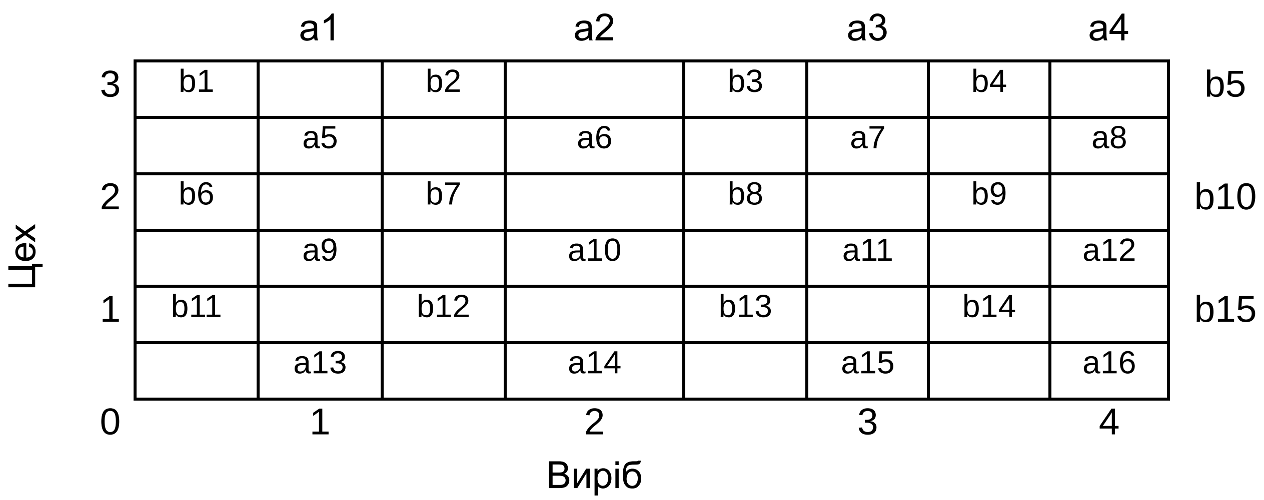


Рис. 1. **Вхідні дані**

Таблиця 8

**Значення вартості**

| № варіанта | $b_1$ | $b_2$ | $b_3$ | $b_4$ | $b_5$ | $b_6$ | $b_7$ | $b_8$ | $b_9$ | $b_{10}$ | $b_{11}$ | $b_{12}$ | $b_{13}$ | $b_{14}$ | $b_{15}$ | $b_{16}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 14 | 12 | 10 | 13 | 10 | 12 | 14 | 13 | 12 | 15 | 10 | 7 | 14 | 11 | 12 | 0 |
| 2 | 18 | 14 | 12 | 17 | 16 | 14 | 13 | 15 | 20 | 17 | 16 | 19 | 12 | 14 | 15 | 0 |
| 3 | 12 | 10 | 13 | 10 | 12 | 10 | 13 | 12 | 14 | 10 | 11 | 10 | 14 | 12 | 9 | 0 |
| 4 | 14 | 12 | 19 | 16 | 14 | 13 | 15 | 20 | 18 | 15 | 16 | 12 | 14 | 15 | 12 | 0 |
| 5 | 10 | 13 | 12 | 11 | 10 | 13 | 12 | 15 | 10 | 11 | 10 | 12 | 12 | 9 | 14 | 0 |
| 6 | 12 | 19 | 16 | 14 | 13 | 18 | 20 | 18 | 17 | 16 | 12 | 9 | 15 | 14 | 13 | 0 |
| 7 | 13 | 10 | 12 | 10 | 14 | 12 | 15 | 10 | 7 | 14 | 11 | 12 | 9 | 10 | 12 | 0 |
| 8 | 19 | 16 | 14 | 13 | 15 | 20 | 18 | 16 | 18 | 12 | 13 | 15 | 14 | 9 | 14 | 0 |
| 9 | 10 | 12 | 13 | 14 | 12 | 15 | 10 | 7 | 10 | 11 | 12 | 9 | 10 | 12 | 10 | 0 |
| 10 | 16 | 18 | 13 | 15 | 20 | 17 | 16 | 19 | 12 | 14 | 15 | 9 | 13 | 14 | 12 | 0 |
| 11 | 12 | 13 | 14 | 12 | 15 | 10 | 7 | 14 | 11 | 12 | 9 | 10 | 12 | 10 | 11 | 0 |
| 12 | 13 | 18 | 15 | 20 | 17 | 16 | 19 | 15 | 9 | 13 | 15 | 18 | 14 | 12 | 18 | 0 |
| 13 | 10 | 14 | 12 | 15 | 10 | 7 | 14 | 11 | 12 | 9 | 10 | 12 | 10 | 11 | 12 | 0 |
| 14 | 18 | 16 | 20 | 17 | 16 | 19 | 12 | 13 | 15 | 12 | 16 | 15 | 12 | 17 | 14 | 0 |
| 15 | 12 | 15 | 10 | 7 | 14 | 11 | 12 | 9 | 10 | 12 | 11 | 10 | 10 | 12 | 11 | 0 |
| 16 | 18 | 20 | 15 | 17 | 16 | 19 | 16 | 15 | 9 | 13 | 15 | 12 | 17 | 16 | 14 | 0 |
| 17 | 15 | 10 | 7 | 14 | 11 | 12 | 9 | 10 | 12 | 10 | 11 | 13 | 12 | 11 | 13 | 0 |
| 18 | 18 | 15 | 19 | 16 | 15 | 14 | 13 | 9 | 13 | 15 | 12 | 17 | 16 | 13 | 15 | 0 |
| 19 | 10 | 7 | 10 | 8 | 12 | 9 | 11 | 12 | 10 | 9 | 10 | 11 | 12 | 14 | 12 | 0 |
| 20 | 20 | 17 | 16 | 19 | 13 | 15 | 9 | 13 | 16 | 12 | 17 | 16 | 13 | 18 | 14 | 0 |
| 21 | 7 | 10 | 11 | 12 | 9 | 8 | 12 | 10 | 11 | 10 | 12 | 11 | 10 | 12 | 11 | 0 |
| 22 | 8 | 14 | 12 | 11 | 13 | 12 | 16 | 9 | 12 | 17 | 14 | 10 | 14 | 16 | 15 | 0 |
| 23 | 10 | 12 | 10 | 8 | 12 | 12 | 10 | 14 | 10 | 9 | 11 | 11 | 12 | 13 | 7 | 0 |
| 24 | 13 | 9 | 12 | 13 | 7 | 12 | 14 | 12 | 17 | 14 | 12 | 9 | 16 | 12 | 14 | 0 |
| 25 | 8 | 12 | 9 | 11 | 12 | 10 | 15 | 10 | 14 | 13 | 14 | 12 | 13 | 9 | 8 | 0 |

## Задача № 11

Скласти математичну модель, записати рівняння Беллмана і вирішити графічно завдання на визначення оптимальних термінів заміни обладнання.

Задано: первісну вартість устаткування $p_0$, його ліквідну вартість $\varphi(t)$, вартість утримання $r(t)$ протягом року обладнання віку t, n – термін експлуатації, в кінці якого устаткування продається. Критерій оптимальності – сумарні витрати на експлуатацію обладнання протягом n років з урахуванням початкової покупки і подальшого продажу.

$p_0 = 8\,000; \varphi(t) = p_0 2^{-t}; r(t) = 0{,}1 \cdot p_0 = (t+1); n = 5.$

## Задача № 12

Скласти математичну модель, записати рівняння Беллмана і вирішити графічно завдання на визначення оптимальних термінів заміни обладнання.

Задано: первісну вартість устаткування $p_0$, його ліквідну вартість $\varphi(t)$, вартість утримання $r(t)$ протягом року обладнання віку t, n – термін експлуатації, в кінці якого устаткування продається. Критерій оптимальності – сумарні витрати на експлуатацію обладнання протягом n років з урахуванням початкової покупки і подальшого продажу. $n = 5$. Вартість нового обладнання залежить від року покупки $p_k = 5\,000 + 500(k-1); (k = 1, 2, \ldots 5); \varphi(t) = p_k 2^{-t}; r_k(t) = 0{,}1 \cdot p_k (t+1).$

## Задача № 13

Скласти математичну модель, записати рівняння Беллмана і вирішити графічно завдання на визначення оптимальних термінів заміни обладнання. Задано: первісну вартість устаткування $p_0$, його ліквідну вартість $\varphi(t)$, вартість утримання $r(t)$ протягом року обладнання віку t, n – термін експлуатації, в кінці якого устаткування продається. Критерій оптимальності – сумарні витрати на експлуатацію обладнання протягом n років з урахуванням початкової покупки і подальшого продажу. $n = 5$. $p_0 = 8\,000; \varphi(t), r(t)$ задано таблично (табл. 8).

Таблиця 8

**Вхідні дані**

| *t* | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varphi(t)$ | - | 6000 | 5000 | 3000 | 1000 | 500 |
| $r(t)$ | 600 | 800 | 1100 | 1500 | 2000 | - |

## Задача № 14

Компанія планує визначити оптимальну політику заміни наявного в даний час трирічного механізму протягом наступних 4 років (n=4), тобто аж до початку п'ятого року. Табл. 9 містить дані, які відносяться до задачі. Механізм в експлуатації 6 років. Вартість нового механізму дорівнює 120 000 грн. Чи є доцільним заміна механізму або його продаж?

Таблиця 9

**Вхідні дані**

| Вік $t$ (грн) | Прибуток $r(t)$ (грн) | Вартість обслуговування $c(t)$ (грн) | Залишкова вартість *s(t)* (грн) |
|---|---|---|---|
| 0 | 20000 | 300 | – |
| 1 | 19000 | 600 | 80000 |
| 2 | 18500 | 1200 | 60000 |
| 3 | 15000 | 1400 | 50000 |
| 4 | 15500 | 1700 | 20000 |
| 5 | 14000 | 1800 | 10000 |
| 6 | 12200 | 2500 | 5000 |

## Задача № 15

Компанія планує визначити оптимальну політику заміни наявного в даний час трирічного механізму протягом наступних 4 років (n=4), тобто аж до початку п'ятого року. Табл. 10 містить дані, які відносяться до задачі. Механізм в експлуатації 6 років. Вартість нового механізму дорівнює 100 000 грн. Чи є доцільним заміна механізму або його продаж?

Таблиця 10

**Вхідні дані**

| Вік $t$ (грн) | Прибуток $r(t)$ (грн) | Вартість обслуговування $c(t)$ (грн) | Залишкова вартість *s(t)* (грн) |
|---|---|---|---|
| 0 | 30000 | 200 | – |
| 1 | 18000 | 500 | 80000 |
| 2 | 18500 | 1200 | 60000 |
| 3 | 17000 | 1500 | 40000 |
| 4 | 15500 | 1700 | 30000 |
| 5 | 15000 | 1500 | 10000 |
| 6 | 12200 | 2200 | 5000 |

## Задача № 16

Компанія планує визначити оптимальну політику заміни наявного в даний час трирічного механізму протягом наступних 4 років (n=4), тобто аж до початку п'ятого року. Табл. 11 містить дані, які відносяться до задачі. Механізм в експлуатації 6 років. Вартість нового механізму дорівнює 110 000 грн. Чи є доцільним заміна механізму або його продаж?

Таблиця 11

**Вхідні дані**

| Вік $t$ (грн) | Прибуток $r(t)$ (грн) | Вартість обслуговування $c(t)$ (грн) | Залишкова вартість *s(t)* (грн) |
|---|---|---|---|
| 0 | 25000 | 200 | – |
| 1 | 19000 | 500 | 80000 |
| 2 | 17500 | 1200 | 60000 |
| 3 | 17000 | 1500 | 60000 |
| 4 | 15500 | 1700 | 30000 |
| 5 | 14000 | 1800 | 20000 |
| 6 | 11200 | 2200 | 5000 |

## Задача № 17

Компанія планує визначити оптимальну політику заміни наявного в даний час трирічного механізму протягом наступних 4 років (n=4), тобто аж до початку п'ятого року. Табл. 12 містить дані, які відносяться до задачі. Механізм в експлуатації 6 років. Вартість нового механізму дорівнює 130 000 грн. Чи є доцільним заміна механізму або його продаж?

Таблиця 12

**Вхідні дані**

| Вік $t$ (грн) | Прибуток $r(t)$ (грн) | Вартість обслуговування $c(t)$ (грн) | Залишкова вартість *s(t)* (грн) |
|---|---|---|---|
| 0 | 50000 | 1200 | – |
| 1 | 29000 | 1600 | 80000 |
| 2 | 28500 | 2200 | 60000 |
| 3 | 27000 | 2500 | 50000 |
| 4 | 25500 | 2700 | 30000 |
| 5 | 14000 | 2800 | 10000 |
| 6 | 12200 | 2200 | 5000 |

## Задача № 18

Компанія планує визначити оптимальну політику заміни наявного в даний час трирічного механізму протягом наступних 4 років (n=4), тобто аж до початку п'ятого року. Табл. 13 містить дані, які відносяться до задачі. Механізм в експлуатації 6 років. Вартість нового механізму дорівнює 140 000 грн. Чи є доцільним заміна механізму або його продаж?

Таблиця 13

**Вхідні дані**

| Вік $t$ (грн) | Прибуток $r(t)$ (грн) | Вартість обслуговування $c(t)$ (грн) | Залишкова вартість $s(t)$ (грн) |
|---|---|---|---|
| 0 | 21000 | 100 | – |
| 1 | 19000 | 600 | 80000 |
| 2 | 17500 | 1500 | 60000 |
| 3 | 17000 | 1500 | 40000 |
| 4 | 16500 | 1600 | 30000 |
| 5 | 14000 | 1800 | 20000 |
| 6 | 12200 | 2200 | 5000 |

***Методичні рекомендації***

Динамічне програмування (ДП) – метод оптимізації, пристосований до операцій, в яких процес прийняття рішення може бути розбитий на етапи (кроки). Такі операції називаються багатокроковими. Початок розвитку ДП відноситься до 50-х років XX ст. У теорії динамічного програмування досліджується широке і важливе коло управлінських завдань. Особливістю їх є те, що процес прийняття рішень у них розпадається на ряд послідовних етапів. Природно, що багатоетапність асоціюється, насамперед, з розвитком процесу (системи) у часі. Тому динамічне програмування доцільно застосовувати до динамічних завдань, в яких має бути ухвалено не одноразове оптимальне рішення, а низка послідовних у часі рішень, які забезпечують оптимальність в цілому. Типові особливості багатоетапних задач, які розв'язують методом динамічного програмування, полягають у такому:

- Процес переходу виробничо-економічної системи з одного стану в інший повинен бути процесом з відсутністю післядії (марковським). Це означає, що якщо система знаходиться в певному стані $S^n \in S_n$, то подальший розвиток процесу залежить тільки від цього стану і не залежить від того, яким шляхом система приведена до цього стану.

- Процес триває певне число кроків N. На кожному кроці здійснюється вибір одного управління $u^n$, під впливом якого система переходить з одного стану $S^n$ в інше $S^{n+1}$: $S^n \rightarrow u^n \rightarrow S^{n+1}$. Оскільки процес марківський, то $u^n = u^n(S^n)$ залежить тільки від поточного стану.
- Кожен крок (вибір чергового рішення) пов'язаний з певним ефектом, який залежить від поточного стану і прийнятого рішення: $\varphi_n$ $(S^n , u^n)$.
- Загальний ефект (дохід) за N кроків складається з доходів на окремих кроках, тобто критерій оптимальності повинен бути адитивним (або зводиться до нього).

В основі загальної концепції методу динамічного програмування лежить принцип Беллмана: оптимальна стратегія володіє такою властивістю, що незалежно від того, яким чином система опинилася в розглянутому конкретному стані, наступні рішення повинні складати оптимальну стратегію, яка приводить до цього стану.

Під час числового пошуку оптимальних рівнянь часто виявляється, що процес має дуже багато етапів і безпосереднє обчислення функцій Беллмана в задачах неможливо. У деяких випадках вдається організувати обчислювальний процес таким чином, щоб зберегти лише агреговану інформацію, за якою можна відтворити потрібні значення функцій $F_n(.x)$. Такі підходи передбачені методом послідовного аналізу варіантів і методом переробки списку станів.

Більш загальні моделі динамічного програмування з випадковими переходами відомі як марківські і напівмарківські процеси вирішення. Вивчення асимптотичних властивостей процесів динамічного програмування призвело до певних стаціонарних режимів, до яких значною мірою наближається будь-яка оптимальна траєкторія. Ці стаціонарні режими відшукують у ході рішення спеціальної задачі лінійного програмування. Динамічне програмування для процесів з безперервним часом розглядається як граничний варіант дискретної схеми і дає результати, наближені до тих, які можуть бути отримані, виходячи з теорії оптимальних процесів.

Якщо моделі лінійного програмування можна використовувати в економіці для прийняття великомасштабних планових рішень у складних ситуаціях, то моделі ДП застосовуються при вирішенні завдань значно меншого масштабу. Методом динамічного програмування можуть бути вирішені такі завдання:

- задачі календарного виробничого планування виробництва і вирівнювання зайнятості в умовах мінливого попиту на продукцію;
- при розробці правил управління запасами, які встановлюють момент поповнення запасів і розмір поповнювати замовлення;
- завдання встановлення найкоротших шляхів між пунктами на транспортній сітці і т. п.
- планування виробничої програми за періодами року при мінімальних витратах на виробництво і утримання запасів;
- оптимальний розподіл коштів і ресурсів на розширення виробництва за умови максимального приросту випуску продукції;
- оптимальне планування заміни застарілого обладнання новим за умови отримання максимального прибутку, розробці довгострокових правил заміни вибуття з експлуатації основних фондів;
- календарне планування ремонту або заміни застарілого обладнання при мінімумі експлуатаційних витрат;
- оптимальне резервування складних технічних систем з мінімальними витратами на резервування, якщо забезпечена надійність системи.

У реально функціонуючих великих економічних системах щотижня потрібно приймати мікроекономічні рішення. В цілому динамічне програмування має свої переваги і недоліки. Метод дає можливість розширити клас задач за рахунок рішення задач з нелінійними функціями і обмеженнями, які враховують різні логічні умови цілочислових задач. Значення динамічного програмування полягає в можливості поетапного аналізу структури системи. Можливість застосування динамічного програмування обмежується низкою недоліків цього методу. Перша складність виникає при формуванні в його термінах задачі оптимізації досліджуваного процесу. Інша полягає в тому, що на відміну від лінійного програмування, де є універсальний алгоритм рішення задач – симплекс-метод, в динамічному програмуванні відсутній загальний алгоритм. Динамічне програмування дає тільки загальний напрям вирішення конкретного завдання, тому в кожному окремому випадку необхідно знаходити найбільш прийнятний метод оптимізації. Дослідження динамічного програмування має деякі складності при вирішенні завдань високої розмірності, яка визначається не тільки кількістю змінних станів і рівнянь, але і частотою їх варіювання. Крім того, задачі динамічного програмування найчастіше вирішують за допомогою числових, а не аналітичних методів.

Моделі ДП цінні тим, що дозволяють на основі стандартного підходу з мінімальним залучення людини приймати такі рішення. І якщо кожне окреме таке рішення малоістотно, то в сукупності ці рішення можуть мати великий вплив на прибуток.

У загальному випадку задача динамічного програмування може бути сформульована таким чином: певна фізична або економічна система в початковий момент часу $T_0$ знаходиться в стані $S_0$. Цей стан визначається n-мірним вектором параметрів системи. За період часу $T_k - T_0$ система має бути переведена в деякий кінцевий стан $S_k$, обумовлений відповідними значеннями вектора станів. Перехід здійснюється за кінцеве число кроків, на кожному з яких система переводиться в деякий проміжний стан $S_i$. При цьому необхідно забезпечити оптимальне значення критерію, яке оцінює якість управління, або процес переходу від $S_0$ до $S_n$. Перехід системи зі стану в стан характеризується набором послідовних станів $S_0$, $S_1$, $\ldots S_i, \ldots S_n$ називається траєкторією руху системи. Перехід системи забезпечується за допомогою ряду послідовних управляючих впливів або управлінь $u_i$. Сукупність управлінь $x_i$ позначимо через X. Тоді задача динамічного програмування полягає у виборі оптимального управління X, яке послідовно переводить систему зі стану в стан від $S_0$ до $S_n$ за умови, що критерій F(X) набуває екстремального значення

Реалізація моделей динамічного програмування має особливість: з усіх можливих станів системи фактично точно відомі два $S_0$ та $S_n$, а приймати рішення необхідно для кожного кроку. При цьому потрібно враховувати розвиток процесу до цього кроку і після нього, що породжує основні труднощі при виборі оптимального управління; невідомо, як реально буде розвиватися процес, відома тільки очікувана кінцева множина можливих поєднань характеристик системи, що відповідає кожному зі станів. Для останнього кроку точно відомо, до якого результату він повинен привести – перевести систему з одного з можливих станів в єдиний необхідний $S_n$. Тому на останньому кроці управління залежить тільки від стану системи після реалізації передостаннього k - 1 кроку, що дозволяє знайти варіант, який забезпечує максимальний ефект управління на останньому кроці, в якому б з станів не перебувала система перед останнім кроком.

Змінні $X_к$ задовольняють певні обмеження і в цьому сенсі є *допустимими (*$X_к$ може бути числом, точкою в n-мірному просторі, якісною ознакою).

Нехай X ($X_1$, $X_{2,\dots}$ $X_n$) – управління, що переводить систему S зі стану $S_0$ у стан $S_n$. Позначимо через $S_K$ стан системи після k-го кроку управління. Отримуємо послідовність станів $S_0$, $S_1$, $\dots S_n$, яку зобразимо колами (рис. 2).

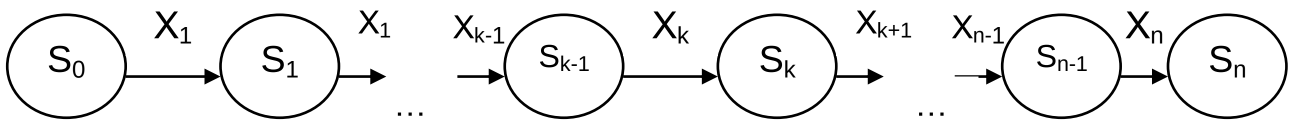


Рис. 2. **Послідовність станів**

Рішення задачі динамічного програмування починається з умовного планування останнього кроку. Оскільки стан системи перед останнім кроком невідомо, то для кожного з можливих станів знаходять відповідне управління, яке називається умовно оптимальним. Після визначення стану, системи перед останнім кроком з умовно оптимальних управлінь обирається одне безумовно оптимальне.

Показник ефективності розглянутої керованої операції – цільова функція – залежить від початкового стану і управління:

$$Z = F(S_0, X). \qquad (1)$$

Зробимо кілька припущень.

1. Стан $S_k$ системи в кінці k-го кроку залежить тільки від попереднього стану $S_{k-1}$ і управління на k кроці $X_k$ (і не залежить від попередніх станів і управлінь). Ця вимога називається "відсутністю післядії". Сформульоване положення записується у вигляді рівнянь:

$$s_k = \varphi_k(s_{k-1}, x_k), k = 1,2,\dots n, \qquad (2)$$

які називаються рівняннями станів.

2. Цільова функція (1) є адитивною від показника ефективності кожного кроку. Позначимо показник ефективності k-го кроку через

$$Z_k = f_k(s_{k-1}, x_k), k = 1,2,...n, \tag{3}$$

тоді

$$Z = \sum_{k=1}^{n} f_k(s_{k-1}, x_k). \tag{4}$$

Завдання покрокової оптимізації (задача ДП) формулюється так: визначити таке допустиме управління X, яке переводить систему S зі стану $s_0$ в стан s`, при якому цільова функція (4) набуває найбільше (найменше) значення.

Виділимо особливості моделі ДП:

1. Задача оптимізації інтерпретується як n-кроковий процес управління.

2. Цільова функція дорівнює сумі цільових функцій кожного кроку.

3. Вибір управління на k-му кроці залежить тільки від стану системи до цього кроку, не впливає на попередні кроки (немає зворотного зв'язку).

4. Стан $s_k$ після k-го кроку управління залежить тільки від попереднього стану управління (відсутність післядії).

5. На кожному кроці управління залежить від кінцевого числа керуючих змінних, а стан $s_k$ – від кінцевої кількості параметрів (сенс зауваження 5 стане ясним з розглянутих далі прикладів).

Слід згадати, що існують різні способи розв’язання подібних завдань, які застосовуються залежно від виду функцій, обмежень, розмірності і т. п. Розглянемо обчислювальну схему ДП, яка виявиться байдужою до способів завдання функцій і обмежень. Обчислювальна схема пов'язана з принципом оптимальності і використовує рекурентні співвідношення.

**Принцип оптимальності і рівняння Беллмана**. Принцип оптимальності вперше був сформульований Р. Беллманом у 1953 р. Який би не був стан системи в результаті якого-небудь числа кроків, на найближчому кроці потрібно вибирати керування так, щоб воно в сукупності з оптимальним управлінням на всіх наступних кроках призводило до оптимального виграшу на всіх залишилися кроках, включаючи цей.

Беллманом чітко були сформульовані і умови, за яких принцип є правильним. Основна вимога – процес управління має бути без зворотного зв'язку, тобто управління на даному кроці не має здійснювати впливу на попередні кроки. Принцип оптимальності стверджує, що для будь-якого процесу без зворотного зв'язку оптимальне управління таке, що є оптимальним для будь-якого підпроцесу щодо вхідних станів цього підпроцесу. Тому рішення на кожному кроці виявляється найкращим з точки зору управління в цілому. Якщо зобразити геометрично оптимальну траєкторію у вигляді ламаної лінії, то будь-яка частина цієї ламаної буде оптимальною траєкторією щодо початку і кінця.

**Рівняння Беллмана**. Замість вихідної задачі ДП з фіксованим числом кроків і початковим станом розглянемо послідовність завдань, вважаючи послідовно n = 1, 2, ... за різних s – однокрокову, двокрокову і т. д., використовуючи принцип оптимальності.

Введемо ряд нових позначень. Позначення в ДП несуть велике інформаційне навантаження, тому дуже важливо їх чітко засвоїти.

На кожному кроці будь-якого стану системи $s_{k-1}$ – рішення $x_k$ потрібно вибирати "з оглядкою", оскільки цей вибір впливає на наступний стан $s_k$ і подальший процес управління, який залежить від $s_k$. Це випливає з принципу оптимальності. Але є один крок, останній, який можна для будь-якого стану $s_{n-1}$ планувати локально-оптимально, виходячи тільки з міркувань цього кроку.

Розглянемо n-й крок: $s_{n-1}$ – стан системи до початку n-го кроку, $s_n = \hat{s}$ – кінцевий стан, $x_n$ – управління на n-му кроці, а $f_n(s_{n-1}, x_n)$ цільова функція (виграш) n-го кроку. Згідно з принципом оптимальності, $x_n$ потрібно вибирати так, щоб для будь-яких, станів $s_{n-1}$ отримати максимум цільової функції на цьому кроці.

Позначимо через $Z_n^*(s_{n-1})$ максимум цільової функції – показника ефективності n-го кроку за умови, що до на початок останнього кроку система S була в довільному стані $s_{n-1}$, а на останньому кроці управління було оптимальним.

$Z_n^*(s_{n-1})$ називається умовним максимумом-цільової функції на n-му кроці. Очевидно, що

$$Z_n^*(s_{n-1}) = \max_{\{x_n\}} f_n(s_{n-1}, x_n). \qquad (5)$$

Максимізація ведеться за всіма допустимими управліннями $X_n$. Рішення $X_n$, за якого досягається $Z_n^*(s_{n-1})$, також залежить від $s_{n-1}$ і є умовним оптимальним управлінням на n-му кроці. Воно позначається через $X_n^*(s_{n-1})$.

Обмежимося завданням максимізації цільової функції. Вирішивши одномірну задачу локальної оптимізації за рівнянням (12,5), знайдемо для всіх можливих станів $S_{n-1}$ дві функції: $Z_n^*(s_{n-1})$ та $X_n^*(s_{n-1})$. Розглянемо тепер двокрокову задачу: приєднаємо до n кроку (n-1)-й (рис. 2).

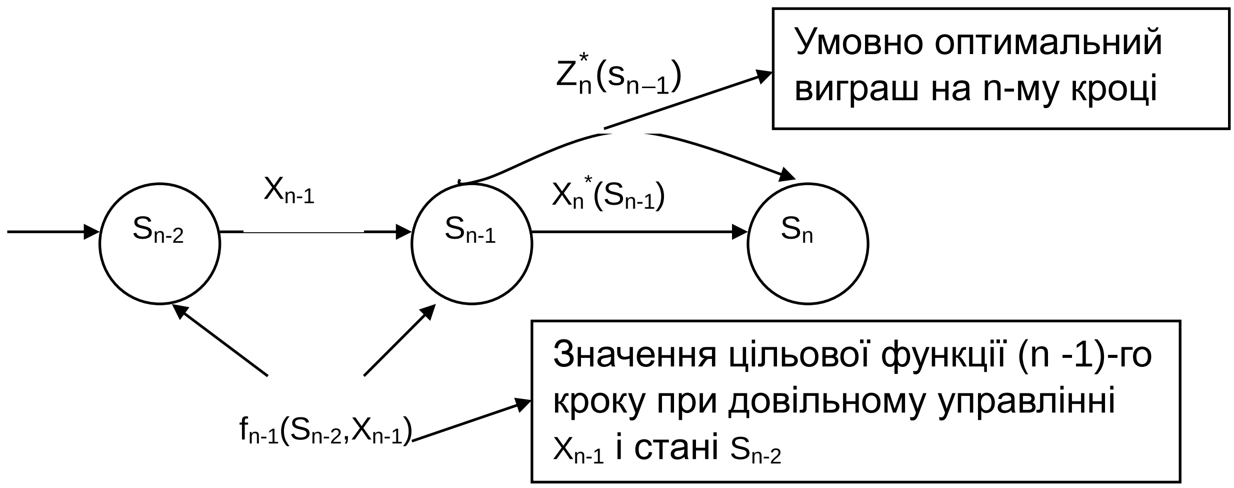


Рис. 2. **Умовно оптимальний виграш**

Для будь-яких станів $S_{n-2}$, довільних управлінь $X_{n-1}$ оптимальному управлінні на n-му кроці значення цільової функції на двох останніх кроках дорівнює:

$$f_{n-1}(s_{n-2}, x_{n-1}) + z_n^*(s_{n-1}). \qquad (6)$$

Згідно з принципом оптимальності для будь-яких $S_{n-2}$ рішення потрібно вибирати так, щоб воно разом з оптимальним управлінням на останньому (n-му) кроці призводило б до максимуму цільової функції на двох останніх кроках. Отже, потрібно знайти максимум виразу (6) за всіма припустимим управліннями $X_{n-1}$ . Максимум цієї суми залежить від $S_{n-2}$, позначається через $Z_n^*(s_{n-2})$ і називається умовним максимумом цільової функції при оптимальному управлінні на двох останніх кроках. Відповідне управління $X_{n-1}$ на (n-1)-му кроці позначається через $X_{n-1}^*(s_{n-2})$ і називається умовним оптимальним управлінням на (n-1)-му кроці.

$$Z_n^*(s_{n-2}) = \max_{\{x_n\}}( f_{n-1}(s_{n-2}, x_{n-1}) + Z_n^*(s_{n-1})). \qquad (7)$$

Слід звернути увагу на те, що вираз, що стоїть у фігурних дужках (7), залежить тільки від $S_{n-2}$ і $X_{n-1}$, так як $S_{n-1}$ можна знайти з рівняння станів (2) при k = n-1

$$s_{n-1} = \varphi_{n-1}(s_{n-2}, X_{n-1}). \qquad (8)$$

і підставити замість $S_{n-1}$ у функцію $Z_n^*(s_{n-1})$. У результаті максимізації тільки за однєю змінною $X_{n-1}$ згідно з рівнянням (7) знову отримуємо дві функції:

$$Z_{n-1}^*(s_{n-2}) \text{ та } X_{n-1}^*(s_{n-2}). \qquad (9)$$

Далі розглянемо трикрокове завдання: до двох останніх кроків приєднується (n-2)-й і т. д.

Позначимо через $Z_k^*(s_{k-1})$ умовний максимум цільової функції, отриманий при оптимальному управлінні на n-k+1 кроках, починаючи з k-го до кінця, за умови, що до початку k-го кроку система знаходилась у стані $s_{k-1}$. Фактично ця функція дорівнює

$$Z_k^*(s_{k-1}) = \max_{\{(x_n,\ldots x_n)\}} \sum_{i=k}^{n} f_i(s_{i-1}, x_i). \qquad (10)$$

Тоді

$$Z_{k+1}^*(s_k) = \max_{\{(x_{k+1},\ldots x_n)\}} \sum_{i=k+1}^{n} f_i(s_{i-1}, x_i). \qquad (11)$$

Цільова функція на останніх кроках (рис. 3) із довільним управлінням $X_k$ на k-му кроці і оптимальному управлінні на наступних n-k кроках дорівнює $f_k(s_{k-1}, X_k) + Z_{k+1}^*(s_k)$.

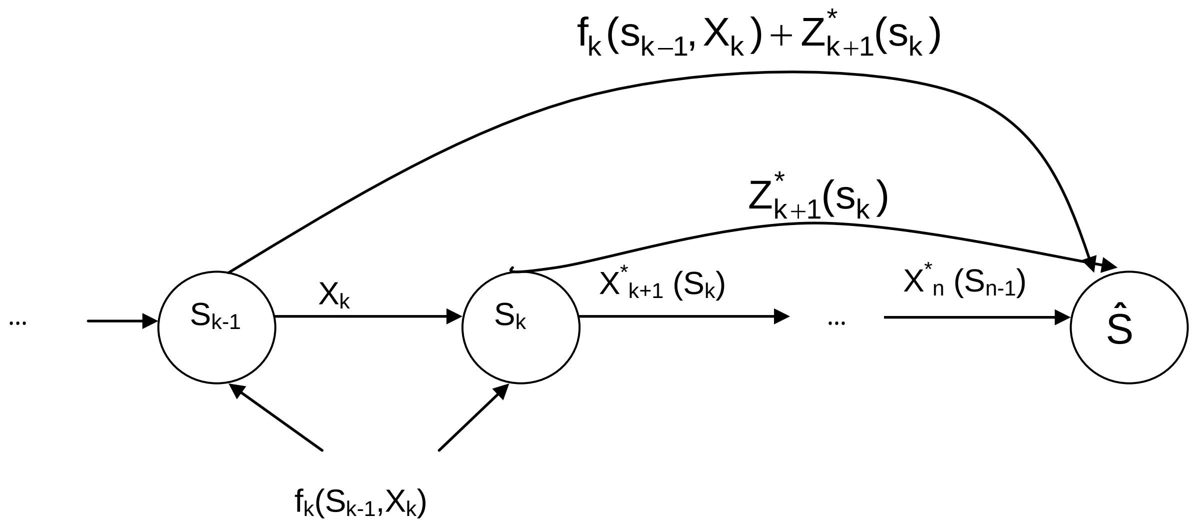


Рис. 3. **Цільова функція на останніх кроках**

Згідно з принципом оптимальності, $X_k$ вибирається з умови максимуму цієї суми, тобто:

$$Z^*_k(s_{k-1}) = \max_{\{x_k\}}( f_k(s_{k-1}, x_k) + Z^*_{k+1}(s_k)),$$
$$k = n-1, n-2, ... 2, 1. \tag{12}$$

Управління $X_k$ на k-му кроці, за якого досягається максимум в (8), позначається через $X^*_k(s_{k-1})$), і називається умовним оптимальним управлінням на k-му кроці (в праву частину рівняння (8) слід замість $s_k$ підставити вираз $s_k = \varphi_k(s_{k-1}, x_k), k = 1, 2, ... n,$, знайдене з рівнянь стану. Рівняння (8) називають рівняннями Беллмана. Це рекурентне співвідношення, що дозволяє знайти попереднє значення функції, знаючи наступні. Якщо з (5) знайти $Z^*_n(s_{n-1})$, то при k = n-1 з (8) можна визначити, розв'язавши завдання максимізації для всіх можливих значень $S_{n-2}$, вираз для $Z^*_{n-1}(s_{n-2})$ і відповідне $X^*_{n-1}(s_{n-2})$. Далі, знаючи $Z^*_{n-1}(s_{n-2})$, знаходимо, використовуючи (8) і (2), рівняння станів.

Процес розв'язання рівнянь (5) і (8) називається умовною оптимізацією. У результаті умовної оптимізації виходять дві послідовності:

$$Z^*_{n-1}(s_{n-1}), Z^*_{n-1}(s_{n-2}), ..., Z^*_2(s_1), Z^*_1(s_0) \tag{13}$$

умовні максимуми цільової функції на останньому, на двох останніх, на n кроках і умовні оптимальні управління на n-м, n-1-м, ..., 1-м кроках

$$X^*_n(s_{n-1}), X^*_{n-1}(s_{n-2}), ..., X^*_2(s_1), X^*_1(s_0) \tag{14}$$

Використовуючи ці послідовності, можна знайти рішення завдання ДП за даними n і $s_0$. За визначенням $Z_1^*(s_0)$ – умовний максимум цільової функції за n кроків за умови, що до початку 1-го кроку система була в стані $s_0$, тобто:

$$Z_{max} = Z_1^*(s_0).$$

Далі слід використовувати послідовність умовних оптимальних управлінь та рівняння станів (2). При фіксованому $s_0$ отримуємо $X_1^* = X_1^*(s_0)$. Далі з рівнянь (2) знаходимо $s_1^* = \varphi_1(s_0, x_1^*)$ і підставляємо цей вираз в послідовність умовних оптимальних управлінь:

$$X_2^* = X_2^*(s_1^*) \text{ і т. д. ланцюжком:}$$

$$X_1^* = X_1^*(s_0) \to s_1^* = \varphi_1(s_0, x_1^*) \to X_2^* = X_2^*(s_1^*) \to s_2^* = \varphi_2(s_1, x_2^*) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow s_2^* = \varphi_2(s_1^*, x_2^*) \Rightarrow X_3^* = X_3^*(s_2^*) \to \ldots \to s_{n-1}^* = \varphi_{n-1}(s_{n-2}^*, x_{n-1}^*) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X_n^* = X_n^*(s_{n-1}^*).$$

Отримуємо оптимальне рішення задачі ДП: $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots X_n^*)$.

Таким чином, будь-яку багатоетапну задачу можна вирішувати двома способами: шукати оптимальне рішення відразу або будувати його крок за кроком. Другий спосіб простіше. Його суть в поступовій, поетапній оптимізації, що особливо важливо в задачах, де ситуація змінюється в часі.

Таким чином, принципи підходу до вирішення задач ДП містять два припущення:

1. Оптимальне управління процесом на кожному кроці визначають на основі того стану, якого система досягла до початку цього кроку (принцип оптимальності Р. Беллмана).

2. Критерій, за допомогою якого визначається оптимальне управління на кожному кроці і для всього процесу в цілому, має властивість адитивності, тобто виграш або втрати на кожному кроці накопичуються на серії кроків підсумовуванням.

Незважаючи на достатню простоту ідей ДП, практична реалізація математичних моделей стикається зі значними труднощами. По-перше, не існує єдиного алгоритму реалізації різноманітних моделей. Способи вирішення завдань з різним вмістом різні, і практично завжди нові змістовні постановки задач вимагають розробки нових методів. По-друге, саме вирішення завдань ДП, як правило, досить громіздке. Обсяг і трудомісткість роботи різко зростають із збільшенням кількості кроків і можливих станів системи на кожному з них.

**Приклад № 1**. Нехай колектив займається заміною механізмів протягом N років. Чим довше механізм експлуатується, тим вище витрати на його обслуговування і нижче продуктивність. Якщо термін експлуатації досягає певного рівня, може виявитися більш вигідним замінити цей механізм. Таким чином, задача зводиться до визначення оптимального терміну експлуатації механізму. На початку кожного року приймається рішення або про експлуатацію організму ще один рік, або про його заміну новим. Позначимо

- r(t) – прибуток від експлуатації t-річного механізму за рік;
- c(t) – витрати на експлуатацію t-річного механізму за рік;
- s(t) – вартість продажу t-річного механізму за рік;
- I – вартість придбання нового механізму.

**Побудова математичної моделі задачі**. Запишемо основні елементи задачі динамічного програмування (етап і відповідає порядковому номеру року). Варіантами вирішення на і-му етапі є альтернативи:

- продовжити експлуатацію;
- замінити механізм на початку і-го року.

Стан на І-му етапі – термін експлуатації механізму до початку І-го року позначимо $f_i(t)$. Тоді запишемо основні елементи максимального прибутку, який можна отримати, починаючи з і-го року і до кінця за умови, що на початку і-го року є механізм року t. Тоді запишемо основний функціональний вираз динамічного програмування:

$$f_i(t) = \max\begin{cases} r(t) - c(t) + f_{i+t}(t+1) \\ r(0) + s(t) - I - c(0) + f_{i+1}(1), \end{cases}$$

де $f_{i+1}(.) \equiv 0$.

**Приклад № 2**. Підприємство випускає 5 видів продукції. З часом цех, що випускає продукцію, потрібно реконструювати і асортимент замінити. Реконструкції цеху слід провести без зупинки, а одночасно проводити реконструкцію і замінювати продукцію не можна. Усі заплановані зміни повинні бути виконані без погіршення показників виробничо-господарської діяльності підприємства. Більше того, бажано ці показники максимально поліпшити. У якості критерію оптимальності розглянути максимум приросту товарної продукції і мінімум витрат на весь плановий період.

**Побудова математичної моделі задачі**. Увесь процес переведення підприємства до нових умов роботи можна розглядати як багатокроковий. Кожен крок є або реконструкцію одного з цехів, або заміною одного виду продукції. Оскільки видів продукції п'ять і три цехи, маємо вісім кроків (етапів). Завдання полягає в ухваленні рішення на кожному кроці: проводити реконструкцію відповідного цеху або заміщати продукцію.

Рішення на кожному кроці є управлінням $U_i\,(i = 1,2,...8)$, сукупність яких забезпечує максимум приросту товарної продукції або мінімум витрат. Стан системи характеризується двома параметрами: реконструкція одного з цехів, заміна одного виду продукції. Процес є двовимірним і легко зображується на площині. Весь період розбиваємо на кроки: 5 кроків по осі абсцис – заміна продукції, 3 кроки по осі ординат – реконструкція цеху. Перетин осей на кожному з кроків відповідає одному з можливих станів системи.

На рис. 4 у колах зазначено можливі стану перед останнім (восьмим) кроком.

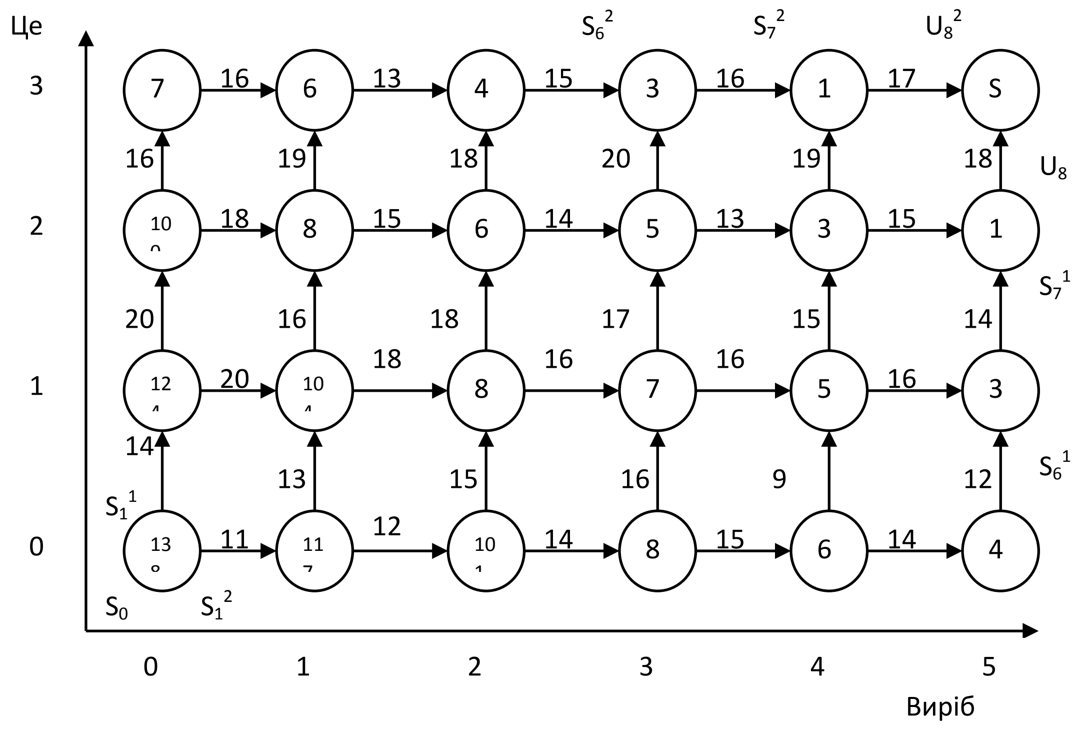


Рис. 4. **Вихідні дані, якщо критерій – максимальний приріст товарної продукції**

Стан $S_7^1$ – всі вироби замінені новими та реконструйовані тільки два цехи, стан $S_7^2$ – всі цехи реконструйовані і замінено чотири вироби з п'яти. Відповідно на прямих, що з'єднують ці два можливих стани зі станом $S_8$, вказано напрям: $U_8^1$ – реконструкція цеху № 3 і $U_8^2$ – заміна виробу № 5. Кожне з цих управлінь умовно оптимальне, оскільки інших варіантів переведення системи в стан $S_8$ не існує. Отже, останній крок умовно спланований. Дійсно, в якому б з двох можливих станів перед цим кроком не виявилася система, відомо, яке управління потрібно застосувати.

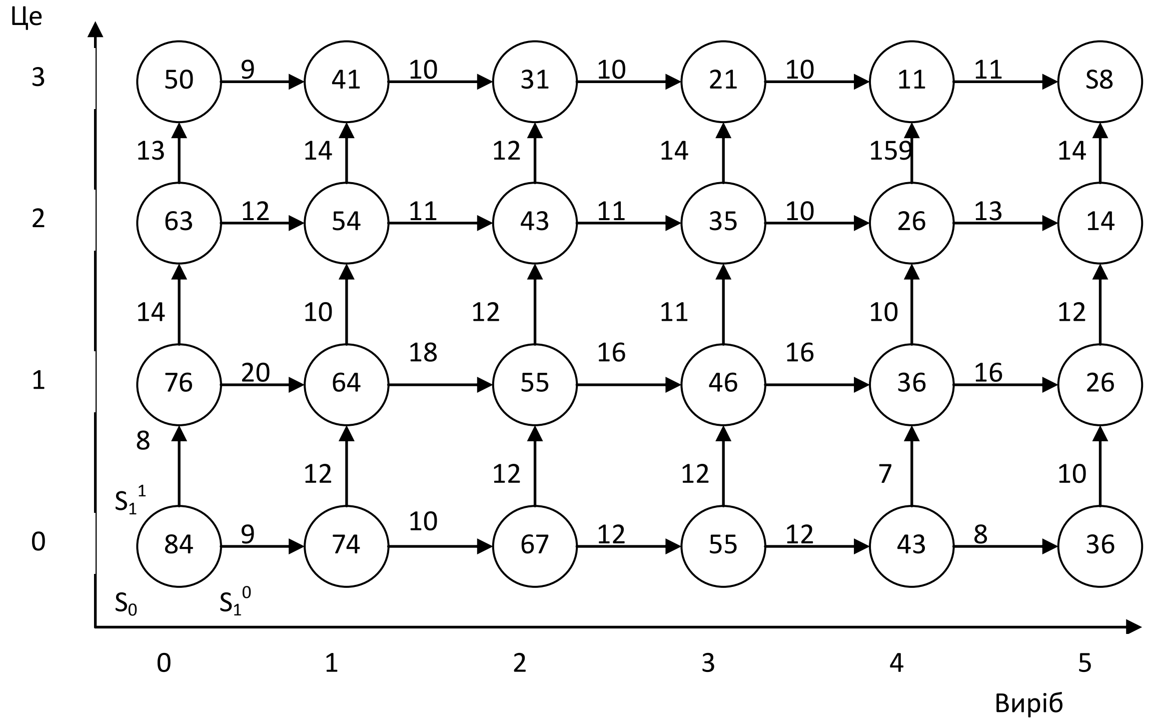


Рис. 5. **Вихідні дані, якщо критерій – мінімум витрат**

У колах на моделях вказується значення критерію оптимальності з наростаючим підсумком, причому у випадку декількох можливих шляхів у колі наводиться мінімальне значення для задач на мінімум і максимальне значення для задач на максимум. На останньому кроці від $S_7$ до $S_8$ можливо два управління $U_8^1$ і $U_8^2$. У першому випадку приріст товарної продукції складає $F_8^1$ = 18 ум. од., у другому $F_8^2$ = 17. Оскільки невідомо, в якому зі станів буде система перед останнім кроком і обидва вони можливі, обидва управління є умовно оптимальними. Перед передостаннім (сьомим) кроком система може знаходитися в одному з трьох станів $S_6^1$, $S_6^2$ і $S_6^3$ Систему зі стану $S_6^1$ шляхом управління $U_7^1$ можна перевести в стан $S_7^1$, и приріст товарної продукції на цьому етапі складе 14 одиниць, а всього за обидва кроки – 32 одиниці, що зазначено у відповідному колі. Якщо система перебуває в стані $S_6^2$, то сумарне значення критерію – 33 одиниці. Якщо система опиниться в стані $S_6^3$, то її можна перевести в один з двох станів: $S_7^1$ і $S_7^2$. Для вибору можливого шляху необхідно визначити сумарне значення критерію за цими напрямами і позначити стрілкою той шлях, який дає максимальне значення сумарного критерію. Управління, відповідні кожному з можливих шляхів переходу системи є умовно оптимальними. Продовжуючи розрахунки таким чином, знайдемо всі умовні але оптимальні управління від останнього до першого кроку. Перед першим кроком сумарні значення критерію виявилися рівними 124 і 117 кружків. тобто Перехід з станів $S_1^1$, $S_1^2$ можливий тільки з єдиного стану $S_0$. Тому управління, що забезпечує максимальний приріст продукції, буде безумовно оптимальним. Приріст товарної продукції при управліннях $U_1^1$ и $U_1^2$ відповідно складає 14 і 11 одиниць.

Отже, безумовно оптимальним буде управління $U_1^1$, при якому загальне значення критерію F = 138 ум. од. Тобто, переміщаючись у зворотному напрямі від стану 50 до стане 58 через умовно оптимальні управління, отримуємо оптимальну траєкторію, позначену додатковою стрілкою, і оптимальні управління.

**Аналіз оптимальної траєкторії**. Для отримання максимального приросту товарної продукції за плановий період необхідно:

на першому кроці реконструювати цех № 1;

на наступних трьох кроках послідовно замінити у виробництві продукцію № 1, 2, 3,

на п'ятому і шостому кроках виконати реконструкцію цехів № 2 і 3;

на останніх двох кроках замінити останні два види продукції.

Рішення задачі за критерієм мінімуму витрат наведено на рис. 2. У цьому випадку в колах подано значення мінімальних накопичених витрат.

Як видно, оптимальні траєкторії при критеріях різні. Мінімальні витрати дорівнюють 84 ум. од. Тобто для прийняття остаточного рішення можна зробити таке: по оптимальній траєкторії, отриманої за максимумом приросту товарної продукції, обчислити витрати, використовуючи вихідні дані рис. 2, і знайти відношення ефект/витрати (фондовіддача). Аналогічно для оптимальної траєкторії, отриманої за критерієм мінімумом витрат, використовуючи вихідні дані рис. 1, визначити приріст товарної продукції і знов знайти відносини ефект/витрати. Більш ефективним виявиться той варіант, у якого це відношення більше. Для розглянутого прикладу маємо:

максимальний приріст товарної продукції дорівнює 138 у. о.,

витрати при цьому – 93 ум. од. і фондовіддача – 1 484;

мінімальні витрати становлять 84 ум. од., приріст товарної продукції при таких витратах дорівнює 131 ум. од. тобто і фондовіддача – 1 559.

Отже, другий варіант має переваги, але остаточне рішення залишається за керівником підприємства.

**Приклад № 3.** До моделі динамічного програмування можна віднести й задачу розподілу капітальних вкладень або інших обмежених ресурсів. У ній необхідно з найбільшою ефективністю розподілити суму капітальних вкладень До між n об'єктами. Невідомі величини хі означають суму, яка виділяється і-му об'єкту. При цьому за кожним об'єктом відома залежність додаткового випуску продукції (прибуток) $p_i$ від суми виділених вкладень, тобто задані функції $p_i = f_i(x)$. Необхідно так розподілити капітальні вкладення, щоб максимізувати загальну величину приросту продукції. У цьому випадку мова йде про одноразовий розподіл і задача власне не є динамічною. Але її зручно вирішувати як багатоетапну задачу, в якій об'єкти вкладень розглядаються послідовно, тобто по одному на кожному етапі.

Запишемо постановку задачі в загальному виді. Нехай:

х – загальна величина капітальних вкладень;

$x^1$, $x - x^1$ – капітальні вкладення, які надані першому та другому підприємствам;

$g(x^1)$, $p(x - x^1)$ – ефект (прибуток) за визначений час, який отримують від реалізації капітальних вкладень на першому і другому підприємствах;

$F_i(x)$ – максимальний ефект від реалізації х капітальних вкладень на і-м етапі; i = 1, 2, …, n;

$ax^1$, $b(x - x^1)$ – відповідно величина $x^1$ та $x - x^1$ на початок наступного періоду ($0 \le a < 1$; $0 \le b < 1$).

Щодо розподілу ресурсів для максимізації будь-якого ефекту принцип оптимальності задачі динамічного програмування відображається таким основним функціональним рівнянням:

$$F_n(x) = \max\{\, g(x^1) + p\,(x - x^1) + F_{n-1}[\,a\,x^1 + b\,(x + x^1)]\,\}\ ;\ 0 \le x^1 \le 1.$$

Причому $F_1(x) = \max\{\, g(x^1) + p\,(x - x^1)\}\ ;\ 0 \le x^1 \le 1.$

На першому етапі розрахунків визначається $F_1$ (x), а потім, користуючись основним рівнянням, яке встановлює функціональний зв'язок між $F_n$ (x) та $F_{n-1}$ , – числові значення $F_i$ (x) , де i = 1, 2, …, n. Величина $F_i$ (x) численно дорівнює параметру $g_1$ (x), тобто $F_1$ (x)= $g_1$ (x)

Так, наприклад, компанія планує визначити оптимальну політику заміни наявного в даний час трирічного механізму протягом наступних 4 років (n=4), тобто аж до початку п'ятого року. Наведена таблиця містить відносяться до задачі дані. Потребує заміни механізм, який в експлуатації 6 років. Вартість нового механізму дорівнює 100 000 грн.

Таблиця 14

**Вхідні дані**

| Вік $t$ (грн) | Прибуток $r(t)$ (грн) | Вартість обслуговування $c(t)$ (грн) | Залишкова вартість *s(t)* (грн) |
|---|---|---|---|
| 0 | 20000 | 200 | – |
| 1 | 19000 | 600 | 80000 |
| 2 | 18500 | 1200 | 60000 |
| 3 | 17000 | 1500 | 50000 |
| 4 | 15500 | 1700 | 30000 |
| 5 | 14000 | 1800 | 10000 |
| 6 | 12200 | 2200 | 5000 |

Визначення допустимих значень віку механізму на кожному етапі є нетривіальним завданням. На рис. 6 представлена розглянута задача заміни обладнання у вигляді мережі. На початку першого року є механізм трирічного віку. Можна або замінити його (З), або експлуатувати (С) упродовж наступного року. Якщо механізм замінили, то на початку другого року його вік буде дорівнює одному року, в іншому випадку його вік буде 4 роки.

Такий підхід використовується на початку кожного року, починаючи з другого по четвертий. Якщо однорічний механізм замінюється на початку другого або третього року, то замінив його механізм до початку

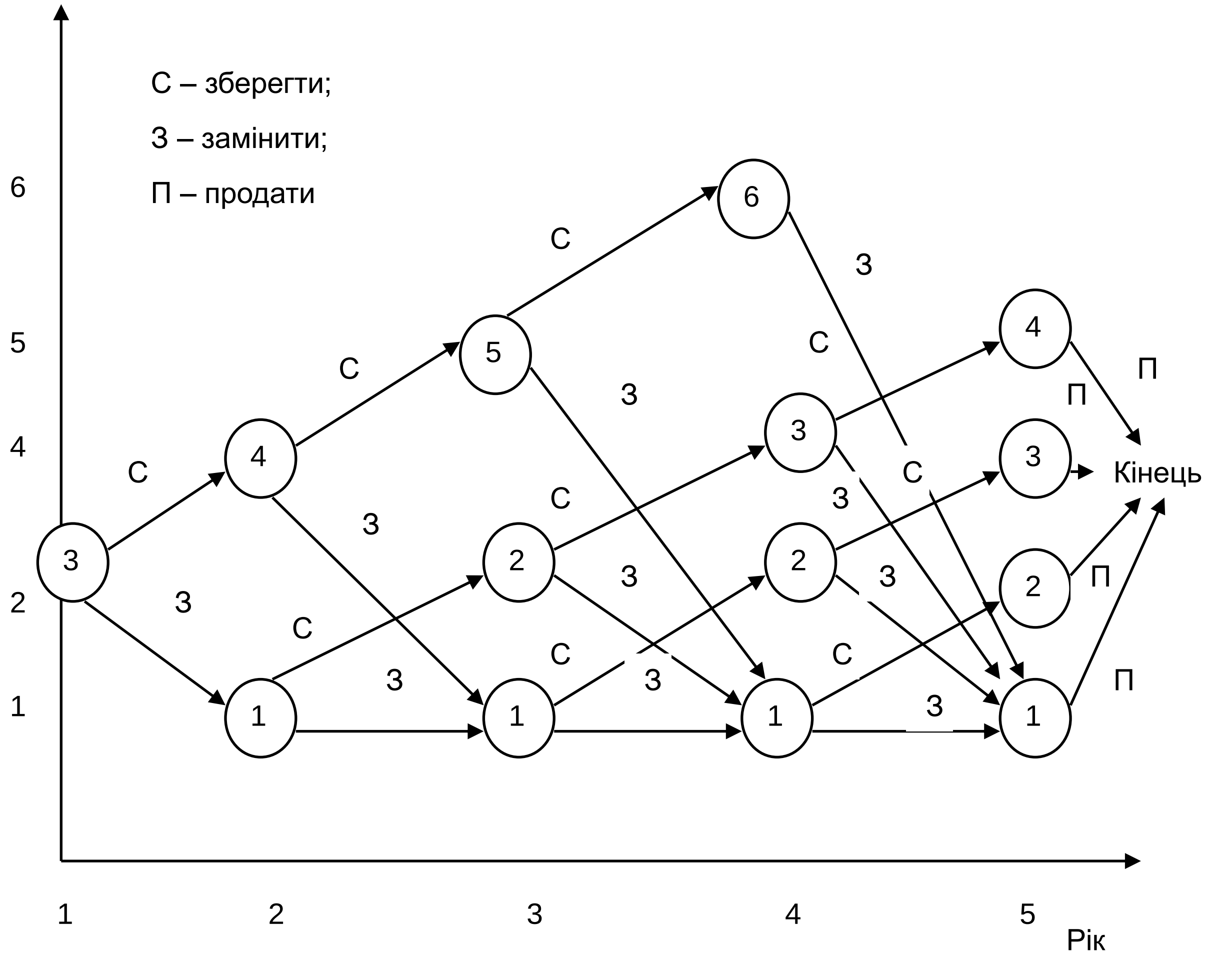


Рис. 6. **Задача заміни обладнання у вигляді мережі**

наступного року також буде однорічним. До того ж, на початку 4-го року 6-річний механізм обов'язково має бути замінений, якщо він ще експлуатується, в кінці 4-го року всі механізми продаються (П) в обов'язковому порядку.

На схемі мережі також видно, що на початку другого року можливі тільки механізми з терміном експлуатації 1 або 4 роки. На початку третього року механізм може мати вік 1, 2 або 5 років, а на початку четвертого – 1, 2, 3 або 6 років.

Рішення цієї задачі еквівалентне знаходженню маршруту максимальної довжини (тобто дає максимальну прибуток) від початку першого року до кінця четвертого в мережі, показаній на рис. 6. При вирішенні цього завдання використовуємо табличну форму запису (числові дані в таблиці кратні тисячам грн).

Таблиця 15

## Розрахунок за кроками

| Етап 4 | | | | |
|---|---|---|---|---|
| t | С | З | Оптимум | |
| | $r(t)$+s(t+1)-$c(t)$ | $r(0)$+s(t)+s(1)-$c(0)$-I | $f_4(t)$ | Рішення |
| 1 | 19,0+60-0,6=78,4 | 20+80+80-0,2-100=79,8 | 79,8 | З |
| 2 | 18,5+50-1,2=67,3 | 20+60+80-0,2-100=59,8 | 67,3 | С |
| 3 | 17,2+30-1,5=45,7 | 20+50+80-0,2-100=49,8 | 49,8 | З |
| 6 | Необхідна заміна | 20+5+80-0,2-100=4,8 | 4,8 | З |
| Етап 3 | | | | |
| t | С | З | Оптимум | |
| | $r(t)$-$c(t)$+$f_4(t+1)$ | $r(0)$+s(t)-$c(0)$-I+$f_4(1)$ | $f_3(t)$ | Рішення |
| 1 | 19,0-0,6+67,3=85,7 | 20+80-0,2-100+79,8=79,6 | 85,7 | С |
| 2 | 18,5-1,2+49,8=67,1 | 20+60-0,2-100+79,8=59,6 | 67,1 | С |
| 3 | 14,0+1,8-4,8=17,0 | 20+10-0,2-100+79,8=9,6 | 17,0 | С |
| Етап 2 | | | | |
| t | С | З | Оптимум | |
| | $r(t)$-$c(t)$+$f_3(t+1)$ | $r(0)$+s(t)-$c(0)$-I+$f_3(1)$ | $f_2(t)$ | Рішення |
| 1 | 19,0-0,6+67,1=85,5 | 20+80-0,2-100+85,7=85,5 | 85,5 | С або З |
| 4 | 19,0-0,6+67,3=85,7 | 20+80-0,2-100+79,8=79,6 | 85,7 | З |
| Етап 1 | | | | |
| t | С | З | Оптимум | |
| | $r(t)$-$c(t)$+$f_2(t+1)$ | $r(0)$+s(t)-$c(0)$-I+$f_2(1)$ | $f_1(t)$ | Рішення |
| 1 | 17,2-1,5+35,5=51,2 | 20+50-0,2-100+85,5=55,3 | 55,3 | З |

На початку першого року оптимальним рішенням при *t* = 3 є заміна механізму. Отже, новий механізм до початку другого року буде перебувати в експлуатації 1 рік. При *t* = 1 на початку другого року оптимальним рішенням буде або використання, або заміна механізму. Якщо він замінюється, то новий до початку третього року буде перебувати в експлуатації 1 рік, інакше механізм буде мати вік 2 роки. Описаний процес продовжується до тих пір, поки не буде визначено оптимальне рішення для четвертого року.

Отже, починаючи з першого року експлуатації механізму, альтернативними оптимальними стратегіями щодо заміни механізму будуть (З, С, С, З) і (З, З, С, С). Загальний прибуток складе 55 300 грн.

**Приклад № 5**. На початку з n років необхідно інвестувати суми P1, P2, … , Pn. Є можливість покласти капітал у 2 банки. Перший банк виплачує річний складний процент $r_1$, другий – $r_2$. Для заохочення депозитів обидва банки виплачують новим інвесторам гроші у вигляді відсотка від загальної суми. Преміальні змінюються від року до року, і для *i*-го року дорівнюють $q_{i1}$ і $q_{i2}$ в першому та другому банках відповідно. Вони виплачуються в кінці року, протягом якого зроблено внесок, і можуть бути інвестовані в один з двох банків на наступний рік. Це означає, що лише зазначені відсотки і нові гроші можуть бути інвестовані в один з двох банків. Розміщений в банку внесок повинен знаходитися там до кінця розглянутого періоду. Необхідно розробити стратегію інвестицій на наступні n років.

Елементи моделі динамічного програмування такі.

1. Етап і подано порядковим номером року і, і= 1,2,..., n.

2. Варіантами рішення на і-му етапі (для і-го року) є суми $I_i$ та $\bar{I}_i$, інвестицій в перший та другий банк відповідно.

3. Станами $x_i$ на і-м етапі є сума коштів на початок і-го року, які можуть бути інвестовані.

Зазначимо, що за визначенням $\bar{I}_i = x_i - I_i$.. Відповідно

$$x_i = P_i + q_{i-1} I_{i-1} + q_{i-1}(x_{i-1,2} - I_{i-1}) =$$
$$= P_i + (q_{i-1,1} - q_{i-1,2}) I_{i-1} + q_{i-1,2} x_{i-1},$$

де $i = 2,3,\dots,n, x_1 = P_1$.

Сума коштів $x_i$, які можуть бути інвестовані, містить лише нові кошти та преміальні відсотки за інвестиції, зроблені протягом $(i-1)$-го року. Нехай $f_i(x_i)$ – оптимальна сума інвестицій для інтервалу від $i$-го до *n*-го року за умови, що на початок $i$-го року є кошти $x_i$. Далі позначимо через $s_i$ – накопичену суму до кінця n-го року за умови, що $I_i$ та ($x_i$-$I_i$) – обсяг інвестицій протягом $i$-го року в перший та другий банк відповідно. Позначив $\alpha_i = (1 + r_i)$, i = 1,2, можна сформулювати задачу в такому вигляді.

Максимізувати $z = s_1 + s_2 + \dots + s_n$, де

$$s_i = l_i\alpha_1^{n+1-i} + (x_i - l_i)\alpha_2^{n+1-i} = (\alpha_1^{n+1-i} - \alpha_2^{n+1-i})l_i + \alpha_2^{n+1-i}x_i, i = 1,2,...n-1,$$
$$s_n = (\alpha_1 + q_{n1} - \alpha_2 - q_{n2}l_n) + (\alpha_2 + q_{n2}).$$

Оскільки преміальні за n-*й* рік є часткою накопиченої суми від інвестицій, у вирази для $s_n$ додано $q_{n1}$ и $q_{n2}$.

Таким чином, у цьому випадку рекурентне рівняння для зворотного прогону в алгоритмі динамічного програмування має вигляд:

$$f_i(x_i) = \max_{0 \le l_i \le x_i}\{s_i + f_{i+1}(x_{i+1})\}, i = 1,2,...,n-1,$$

де $x_{i+1}$ виражають через $x_i$ відповідно до наведеної формули, а $f_{n+1}(x_{n+l}) \equiv 0$.

Припустимо, є необхідність інвестувати 4 000 грн зараз і 2 000 грн на початку кожного року, від другого до четвертого, рахуючи від поточного року. Перший банк виплачує річний складний відсоток 8 % і преміальні протягом наступних чотирьох років у розмірі 1,8 %, 1,7 %, 2,1 % і 2,5 % відповідно. Річний складний відсоток, запропонований іншим банком, на 0,2 % нижче, ніж пропонує перший банк, але його преміальні на 0,5 % вище. Завдання полягає в максимізації накопиченого капіталу до кінця четвертого року.

Використовуючи введені позначення, маємо таке:

$$P_1 = 4000, P_2 = P_3 = P_4 = 2000,$$
$$\alpha_1 = (1 + 0{,}08) = 1{,}08,$$
$$\alpha_2 = (1 + 0{,}078) = 1{,}078,$$
$$q_{11} = 0{,}018, q_{21} = 0{,}017, q_{31} = 0{,}021, q_{41} = 0{,}025,$$
$$q_{12} = 0{,}023, q_{22} = 0{,}022, q_{32} = 0{,}026, q_{42} = 0{,}030.$$

Етап 4

$$f_4(x_4) = \max_{0 \le l_4 \le x_4}\{s_4\},$$

де

$$s_4(\alpha_1 + q_{41} - \alpha_2 - q_{42})l_4 + (\alpha_2 + q_{42})x_4 = -0{,}0031 \cdot l_4 + 1{,}108x_4.$$

Функція $s_4$ є лінійною за $I_4$ в області $0<I_4<x_4$ і, відповідно, її максимум досягається за $I_4=0$ через від'ємний коефіцієнт при $I_4$. Відповідно, оптимальне рішення для етапу 4 може бути подано таким чином.

| Стан | Оптимальне рішення | |
|---|---|---|
| | $f_4(x_4)$ | $I_4$* |
| $x_4$ | $1.108x_4$ | 0 |

Етап 3

$$f_3(x_3)=\max_{0\le I_3\le x_3}\{s_3+f_4(x_4)\},$$

де

$$s_3=(1{,}08^2-1{,}078^2)\cdot I_3+1{,}078^2x_3=0{,}00432I_3+1{,}1621x_3,$$
$$x_4=2000-0{,}005I_3+0{,}026x_3.$$

Отже,

$$f_3(x_3)=\max_{0\le I_3\le x_3}\{0{,}00432I_3+1{,}1621x_3+1{,}108(2000-0{,}005I_3+0{,}026x_3\}=$$
$$=\max_{0\le I_3\le x_3}\{2216-0{,}00122I_3+1{,}1909x_3\}.$$

| Стан | Оптимальне рішення | |
|---|---|---|
| | $f_3(x_3)$ | $I_3$* |
| $x_3$ | $2216+1.1909x_3$ | 0 |

Етап 2

$$f_2(x_2)=\max_{0\le I_2\le x_2}\{s_2+f_3(x_3)\},$$

де

$$s_2=(1{,}08^3-1{,}078^3)\cdot I_2+1{,}078^3x_2=0{,}006985I_2+1{,}25273x_2,$$
$$x_3=2000-0{,}005I_2+0{,}022x_2.$$

Отже,

$$f_2(x_2) = \max_{0 \le l_2 \le x_2} \{0{,}006985 l_2 + 1{,}25273 x_2 + 2216 +$$
$$+ 1{,}909(2000 - 0{,}005 l_2 + 0{,}022 x_2)\} =$$
$$= \max_{0 \le l_3 \le x_3} \{4597{,}8 - 0{,}0010305 l_2 + 1{,}27893 x_2\}.$$

| Стан | Оптимальне рішення | |
|---|---|---|
| | $f_2(x_2)$ | $l_2$* |
| $x_2$ | 4597.8+1.27996$x_2$ | $x_2$ |

Етап 1

$$f_1(x_1) = \max_{0 \le l_1 \le x_1} \{s_1 + f_2(x_2)\},$$

де

$$s_1 = (1{,}08^4 - 1{,}078^4) \cdot l_1 + 1{,}078^3 x_1 = 0{,}01005 l_1 + 1{,}3504 x_1,$$
$$x_2 = 2000 - 0{,}005 l_1 + 0{,}023 x_1.$$

Отже,

$$f_1(x_1) = \max_{0 \le l_1 \le x_1} \{0{,}01005 l_1 + 1{,}078 x_1 + 1{,}909(2000 - 0{,}005 l_1 + 0{,}023 x_1)\} =$$
$$= \max_{0 \le l_1 \le x_1} \{7157{,}1 - 0{,}00365 l_1 + 1{,}37894 x_1\}.$$

| Стан | Оптимальне рішення | |
|---|---|---|
| | $f_1(x_1)$ | $l_1$* |
| $x_1 = 4000$ | 7157,7+1,3849$x_1$ | 4000 |

При розрахунках у зворотному напрямі отримуємо таке:

$$x_2 = 2000 - 0{,}005 \cdot 4000 + 0{,}023 \cdot 4000 = 2072,$$
$$x_3 = 2000 - 0{,}005 \cdot 2072 + 0{,}022 \cdot 2072 = 2035{,}22,$$
$$x_2 = 2000 - 0{,}005 \cdot 2035{,}22 + 0{,}026 \cdot 2035{,}22 = 2052{,}92.$$

Отже, оптимальне рішення буде записано таким чином (табл. 16).

Таблиця 16

**Результат оптимізації**

| Оптимальне рішення | Рішення, яке ухвалює інвестор |
|---|---|
| $I_1^*= x_1$ | Інвестувати $x_1$ =4000 в перший банк |
| $I_2^*= x_2$ | Інвестувати $x_2$ =2072 в перший банк |
| $I_3^*=0$ | Інвестувати $x_3$ =2035,22 в другий банк |
| $I_4^*=0$ | Інвестувати $x_4$ =2052,92 в другий банк |

$$W= S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 12740,36$$

**Приклад № 6**. **Задача про найм робочої сили**. Під час виконання деяких проектів число робітників, необхідних для виконання будь-якого проекту, регулюється шляхом їх найму і звільнення. Оскільки як найм, так і звільнення робітників пов'язані з додатковими витратами, необхідно визначити, яким чином повинна регулюватися чисельність робітників у період реалізації проекту.

Припустимо, що проект буде виконуватися протягом n тижнів і мінімальна потреба в робочій силі протягом $i$-го тижня складе $b_i$ робітників. За ідеальних умов хотілось би протягом $i$-го тижня мати точно $b_i$ робітників. Проте залежно від вартісних показників може бути більш вигідним відхилення чисельності робочої сили як в один, так і в інший бік від мінімальних потреб. Якщо $x_i$ – кількість робітників протягом $i$-го тижня, то можливі витрати двох видів:

1) $C_1(x_i - b_i)$ – витрати, пов'язані з необхідністю утримувати надлишок $x_i$ - $b_i$ робочої сили,

2) $C_2(x_i - x_{i-1})$ – витрати, пов'язані з необхідністю додаткового найму $x_i - x_{i-1}$ робітників.

Елементи моделі динамічного програмування визначається таким чином.

1. Етап $i$ подається порядковим номером тижня $i, i = 1,2,..., n$.

2. Варіантами рішення на $i$-му етапі є значення $x_i$ – кількість робітників протягом $i$-го тижня.

3. Стан на $i$-му етапі є $x_{i-1}$ – кількість робітників протягом $(i-1)$-го тижня (етапу).

Рекурентне рівняння динамічного програмування є таким:

$$f_i(x_{i-1}) = \min_{x_i \geq b_i} \{C_1(x_1 - b_i) + C_2(x_i - x_{i-1}) + f_{i+1}(x_i)\}, i = 1,2,...,n.$$

Обчислення починаються з етапу n при $x_n = b_n$ та закінчуються на етапі 1.

## Рекомендована література


Алексєєв О. Г. Комплексне застосування методів дискретної оптимізації / Алексєєв О. Г. – М. : Наука, 1987. – 248 с.

Вагнер В. Основи дослідження операцій / Вагнер В. – В 3-х томах. – Т. 3. – М. : "Мир", 1973. – 501 с.

Вентцель Е. С. Дослідження операцій / Вентцель Е. С. – М. : Радянське радіо, 1972. – 552 с.

Забродский В. А. Конспект лекций по курсу "Экономическая кибернетика" / Забродский В. А., Клебанова Т. С., Милов А. В. – Х. : ХГЭУ, 2000. – 84 с.

Клебанова Т. С. Методы прогнозирования : учебн. пособ. / Клебанова Т. С., Иванов В. В., Дубровина Н. А. – Х. : ХГЭУ, 2002. – 372 с.

Методы исследования операций : учебн. пособ. / Клебанова Т. С., Забродский В. А., Раевнева Е. В. и др. – Х. : ХГЭУ, 1999. – 160 с.

Моделирование экономики : учебн. пособ. / Клебанова Т. С., Забродский В. А., Полякова О. Ю. и др. – Х. : ХГЭУ, 2001. – 140 с.

Перехов Л. Л. Економіко-математичні методи й моделі в плануванні й керуванні / Перехов Л. Л., Куценко В. А., Сиднев С. П. – К. : Вища школа, 1984. – 231 с.

Хемди А. Таха Введение в исследование операций / Хемди А. Таха. – М. : Издательский дом "Вильямс", 2005. – 912 с.

Шелобаев С. И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе : учебн. пособ. для вузов / Шелобаев С. И. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2001. – 367 с.

Шикин Е. В. Исследование операций / Шикин Е. В., Шикина Г. Е. – М. : ТК Велби, Изд. Проспект, 2006. – 280 с.

Исследование операций: В 2-х томах / под ред. Дж. Моудера, С. Элмаграби. – М. : Мир, 1981. – Т. 1. – 712 с.

Нелінійні моделі та аналіз складних систем : навч. посібн. : в 2 ч. Ч 1 / М. Є. Рогоза, С. К. Рамазанов, Е. К. Мусаєва. – Полтава : РВВ ПУЕТ, 2011. – 300 с.

Экономико-математические методы и модели в планировании и управлении / Терехов Л. Л., Куценко В. А., Сиднев С. П. – К. : Вища школа, 1984. – 231 с.

Коршунов Ю. М. Математические основы кібернетики / Коршунов Ю. М. М. : Энергия, 1980. – 422 с.

Валтер Я. Стохастические модели в экономике / Валтер Я. – М. : Статистика, 1976. – 231 с.

Дынкин Е. Б. Управляемые марковские процессы и их приложения / Дынкин Е. Б., Юшкевич А. А. – М. : Наука, 1975. – 334 с.

Кобиляцький Л. С. Управління проектами / Кобиляцький Л. С. – К. : Наукова думка, 2002. – 198 с.

Штойер Р. Многокритериальная оптимизация / Штойер Р. — М. : Радио и связь, 1992. – 124 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

# Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЙ ТА МЕТОДИ ОПТИМІЗАЦІЇ"

**для студентів напряму підготовки 6.050101 "Комп’ютерні науки" всіх форм навчання**


Укладачі: **Чернова** Наталя Леонідівна
**Панасенко** Оксана Володимирівна
**Чаговець** Любов Олексіївна



Відповідальний за випуск **Клебанова Т. С.**

Редактор **Бутенко В. О.**

Коректор **Мартовицька-Максимова В. А.**

План 2013 р. Поз. № 97.
Підп. до друку Формат 60x90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 2,5. Обл.-вид. арк. 3,13. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

*Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб’єктів видавничої справи*
***Дк № 481 від 13.06.2001 р.***