МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ,
МОЛОДІ ТА СПОРТУ УКРАЇНИ

ХАРКІВСЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ ЕКОНОМІЧНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА"

для студентів напряму підготовки
6.030502 "Економічна кібернетика"
денної форми навчання

Харків. Вид. ХНЕУ, 2013

Затверджено на засіданні кафедри економічної кібернетики.
Протокол № 3 від 04.10.2012 р.

Укладачі: Панасенко О. В.
Прокопович С. В.
Смірнова А. Ю.

М54 Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "Фінансова математика" для студентів напряму підготовки 6.030502 "Економічна кібернетика" денної форми навчання / укл. О. В. Панасенко, С. В. Прокопович, А. Ю. Смірнова. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2013. – 64 с. (Укр. мов.)

Розглянуто основні питання оцінки й аналізу фінансових процесів та систем на основі застосування методів і моделей фінансової математики. Подано практичні завдання з навчальної дисципліни та методичні рекомендації до їх виконання.

Рекомендовано для студентів напряму підготовки 6.030502 "Економічна кібернетика" денної форми навчання.

Вступ

Фінанси охоплюють всі стадії відтворювального процесу: виробництво, обмін, розподіл, споживання, а також можуть надавати регулюючу дію на всі його складові. Фінанси володіють потенційною властивістю направляти і регулювати економічні процеси, прискорюючи або уповільнюючи їх.

Сучасні ринкові умови потребують від суб'єктів господарювання вміння оцінювати всі можливі варіанти фінансових наслідків при здійсненні будь-якої комерційної операції та практично використовувати методи фінансово-економічного аналізу при здійсненні кредитних, інвестиційних та інших комерційних операцій. Математичний апарат сучасного фінансово-економічного аналізу складається з методів і моделей фінансової математики, які дозволяють описувати на кількісному та якісному рівнях явища й процеси фінансової сфери економічного життя суспільства.

Основна особливість фінансової математики полягає в тому, що будь-яким обчисленням передує якісний аналіз об'єкта, який полягає в перекладі властивостей об'єкта в числові показники, необхідні для здійснення розрахунків. Самі обчислення також тісно переплітаються з властивостями: розрахунки не мають сенсу, якщо вони не відповідають реальним процесам, які пов'язані з вкладенням засобів і протікають навколо різних фінансових інструментів. Більш того, якісний аналіз необхідний і надалі, коли потрібно зіставити результати розрахунків і реальний стан об'єктів.

Фінансова математика є базовим компонентом технічного аналізу, який дозволяє виявляти і досліджувати взаємозв'язки між вартісними і часовими характеристиками фінансових операцій, на підставі чого вирішувати фінансові задачі різного типу, що стоять перед інвестором.

Метою вивчення навчальної дисципліни "Фінансова математика" є формування системи знань з методології та практичного здійснення фінансових розрахунків і операцій та використання моделей фінансової математики.

Об'єктом вивчення навчальної дисципліни є процеси управління фінансовими операціями.

Предметом вивчення навчальної дисципліни є сукупність методів розробки та реалізації фінансових рішень.

Практичне завдання № 1. Фінансові розрахунки з використанням простих та складних відсотків

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навиків нарахування простих і складних відсотків.

Початкові дані. Депозитний внесок у сумі 1 тис. грн розміщений в банку на 10 років під 10 % річних.

Необхідно

1. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків один раз на рік, складних відсотків один раз на рік, щокварталу, щомісячно.
2. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих і складних відсотків, якщо передбачена зміна процентної ставки: перші п'ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %.
3. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих і складних відсотків з урахуванням щорічного рівня інфляції 7 % і 15 %.
4. Побудувати графіки зростання вартості внеску.

Методичні рекомендації

1. Постійні ставки. Під *нарощеною сумою* позики (депозиту, інших видів виданих у борг або інвестованих грошей) розуміють первинну її суму з нарахованими відсотками до кінця терміну нарахування. Нарощена сума визначається множенням первинної суми боргу на *множник нарощування,* який показує, в скільки разів нарощена сума більше первинної. Розрахункова формула залежить від виду процентної ставки і умов нарощування.

До нарощування за простими відсотками зазвичай вдаються при видачі короткострокових позик (на строк до 1 року) або у випадках, коли відсотки не приєднуються до суми боргу, а періодично виплачуються.

Для запису формул нарощування простих та складних відсотків приймемо позначення:

S – нарощена сума, тобто сума в кінці терміну (майбутня вартість внеску);

P – первинна сума внеску;

I – відсотки за весь термін вкладу;

i – процентна ставка, ставка нарощування відсотків (десятковий дріб);

n – термін вкладу.

Якщо термін вимірюється в роках (як це звичайно і буває), то і означає річну процентну ставку. Відповідно щороку приносить відсотки в сумі $P \times i.$ Нараховані за весь термін відсотки складуть $I = Pni$.

При нарахуванні простих відсотків один раз на рік майбутня вартість внеску на кінець n-го року визначається за формулою:

$$S = P + I = P + P \times n \times i = P(1 + n \times i). \qquad (1)$$

Вираз (1) називають – *формулою простих відсотків,* а множник $(1 + n \times i)$ – *множником нарощування простих відсотків.*

Якщо $P = 1000, i = 0{,}1,$ а $n = 10,$ то майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1000(1 + 10 \times 0{,}1) = 2000\ (\text{грн}).$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково (один крок – один рік) представлені у табл. 1.

Таблиця 1

Розрахунки при нарахуванні простих відсотків один раз на рік

Рік	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Усього на рахунку в кінці року, грн
1	1 000,00	100,00	1 100,00
2	1 100,00	100,00	1 200,00
3	1 200,00	100,00	1 300,00
4	1 300,00	100,00	1 400,00
5	1 400,00	100,00	1 500,00
6	1 500,00	100,00	1 600,00
7	1 600,00	100,00	1 700,00
8	1 700,00	100,00	1 800,00
9	1 800,00	100,00	1 900,00
10	1 900,00	100,00	2 000,00

У середньо- і довгострокових фінансово-кредитних операціях, якщо відсотки не виплачуються відразу після їх нарахування, а приєднуються до суми боргу, застосовують *складні відсотки.* База для нарахування складних відсотків на відміну від простих не залишається постійною – вона збільшується з кожним кроком в часі. Абсолютна сума відсотків, що нараховуються, зростає, і процес збільшення суми боргу відбувається з прискоренням. Нарощування за складними відсотками можна представити як послідовне реінвестування коштів, вкладених під прості відсотки на один період нарахування. Приєднання нарахованих відсотків до суми, яка послужила базою для їх нарахування, часто називають *капіталізацією відсотків.*

При нарахуванні складних відсотків один раз на рік майбутня вартість внеску на кінець n-го року визначається за формулою:

$$S = P(1+i)^n. \quad (2)$$

Якщо $P = 1000, i = 0{,}1$, а $n = 10$, то майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1000(1+0{,}1)^{10} = 2539{,}74 \text{ (грн)}.$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково (один крок – один рік) представлені у табл. 2.

Таблиця 2

Розрахунки при нарахуванні складних відсотків один раз на рік

Рік	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Усього на рахунку в кінці року, грн
1	1 000,00	100,00	1 100,00
2	1 100,00	110,00	1 210,00
3	1 210,00	121,00	1 331,00
4	1 331,00	133,10	1 464,10
5	1 464,10	146,41	1 610,51
6	1 610,51	161,05	1 771,56
7	1 771,56	177,16	1 948,72
8	1 948,72	194,87	2 143,59
9	2 143,59	214,36	2 357,95
10	2 357,95	235,79	2 593,74

Розглянемо проблему *нарощування відсотків* m *раз на рік*. У сучасних умовах відсотки капіталізуються, як правило, не один, а кілька разів на рік – за півріччями, кварталами і так далі. Деякі зарубіжні комерційні банки практикують навіть щоденне нарахування відсотків. При нарахуванні відсотків кілька разів на рік можна скористатися формулою (2). Параметр n в цих умовах означатиме число періодів нарахування, а під ставкою i слід розуміти ставку за відповідний період.

Отже, нехай річна ставка рівна j, число періодів нарахування в році – m. Кожного разу відсотки нараховуються за ставкою j/m. Ставку j/m називають *номінальною.* Формулу нарощування тепер можна представити таким чином:

$$S = P(1 + \frac{j}{m})^{nm}. \qquad (3)$$

Якщо відсотки нараховуються щоквартально, то $j = 0{,}1$, $n = 10$, $m = 4$, а майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1000(1 + \frac{0{,}1}{4})^{10\times 4} = 2685{,}06 \text{ (грн)}.$$

Якщо відсотки нараховуються щомісячно, то $m = 12$, а майбутня вартість внеску через 10 років складе:

$$S = 1000(1 + \frac{0{,}1}{12})^{10\times 12} = 2707{,}04 \text{ (грн)}.$$

2. Змінні ставки. У кредитних угодах іноді передбачаються процентні ставки, що змінюються в часі. Якщо це прості ставки, то нарощена на кінець терміну сума визначається таким чином:

$$S = P(1 + n_1 i_1 + n_2 i_2 + ... + n_m i_m) = P(1 + \sum_{t=1}^{m} n_t i_t),$$

де i_t – ставка простих відсотків у періоді t, n_t – тривалість періоду з постійною ставкою.

Якщо передбачена зміна процентної ставки: перші п’ять років – 10 %, кожен подальший рік ставка підвищується на 0,5 %, то майбутня вартість внеску через 10 років при нарахування простих відсотків складе:

$$S = 1000(1 + 5 \times 0{,}1 + 1 \times 0{,}105 + 1 \times 0{,}11 + 1 \times 0{,}115 + 1 \times 0{,}12$$
$$+1 \times 1{,}025) = 2075 \text{ (грн)}.$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково представлені у табл. 3.

Таблиця 3

Розрахунки при нарахуванні простих відсотків зі змінною ставкою

Рік	Ставка відсотків	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку в кінці року, грн
1	0,1	1 000,00	100,00	1 100,00
2	0,1	1 100,00	100,00	1 200,00
3	0,1	1 200,00	100,00	1 300,00
4	0,1	1 300,00	100,00	1 400,00
5	0,1	1 400,00	100,00	1 500,00
6	0,105	1 500,00	105,00	1 605,00
7	0,11	1 605,00	110,00	1 715,00
8	0,115	1 715,00	115,00	1 830,00
9	0,12	1 830,00	120,00	1 950,00
10	0,125	1 950,00	125,00	2 075,00

Майбутню вартість внеску при нарахуванні складних відсотків, якщо передбачена зміна ставки відсотків визначають так:

$$S = P \times \prod_{t=1}^{m} (1 + i_t)^{n_t}.$$

Якщо передбачена зміна процентної ставки, то майбутня вартість внеску через 10 років при нарахуванні складних відсотків складе:

$$S = 1000 \times (1 + 0{,}1)^5 \times (1 + 0{,}105)^1 \times (1 + 0{,}11)^1 \times (1 + 0{,}115)^1 \times$$
$$\times (1 + 0{,}12)^1 \times (1 + 0{,}125)^1 = 2775{,}2 \text{ (грн)}.$$

Результати виконання розрахунку нарощеної вартості покроково представлені у табл. 4.

Таблиця 4

Розрахунки при нарахуванні складних відсотків зі змінною ставкою

Рік	Ставка відсотків	Стан рахунку на початку року, грн	Відсотки, накопичені протягом року, грн	Всього на рахунку в кінці року, грн
1	0,1	1 000,00	100,00	1 100,00
2	0,1	1 100,00	110,00	1 210,00
3	0,1	1 210,00	121,00	1 331,00
4	0,1	1 331,00	133,10	1 464,10
5	0,1	1 464,10	146,41	1 610,51
6	0,105	1 610,51	169,10	1 779,61
7	0,11	1 779,61	195,76	1 975,37
8	0,115	1 975,37	227,17	2 202,54
9	0,12	2 202,54	264,30	2 466,84
10	0,125	2 466,84	308,36	2 775,20

3. Урахування інфляції. У розглянутих формулах нарощування всі грошові величини вимірювалися за номіналом. Інакше кажучи, не бралося до уваги зниження реальної купівельної спроможності грошей за період, що охоплюється операцією. Проте в сучасних умовах інфляція в грошових відносинах відіграє помітну роль при вимірюванні реальної прибутковості фінансової операції.

Введемо позначення:

S – нарощена сума грошей номінальна;

C – нарощена сума з урахуванням її знецінення внаслідок інфляції;

J_p – індекс цін.

Очевидно, що $C = {}^{S}/_{J_p}$.

Індекс купівельної спроможності грошей, як відомо, рівний зворотній величині індексу цін – чим вище ціни, тим нижче купівельна спроможність.

Неважко пов’язати індекс цін і темп інфляції. Під *темпом інфляції* h розуміється *відносний приріст цін за період;* зазвичай він вимірюється у відсотках і визначається як:

$$h = 100 \times (J_p - 1).$$

У свою чергу:

$$J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right).$$

Інфляція є ланцюговим процесом. Отже, індекс цін за декілька періодів рівний *добутку* ланцюгових індексів цін:

$$J_p = \prod_{t=1}^{n} \left(1 + \frac{h}{100}\right),$$

де h_t – темп інфляції в періоді t.

Якщо h – постійний очікуваний (або прогнозований) темп інфляції за один період, то за n таких періодів отримаємо:

$$J_p = \left(1 + \frac{h}{100}\right)^n.$$

Якщо нарощування проводиться за простою ставкою, то нарощена сума з урахуванням інфляції дорівнює:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \times \frac{1 + ni}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 %, а номінальна нарощена сума за простими відсотками відома з попередніх розрахунків, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C = \frac{S}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n} = \frac{2000}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^{10}} \approx 1016{,}70 \text{ (грн)}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 15 %, то:

$$C = \frac{2000}{\left(1 + \frac{15}{100}\right)^{10}} \approx 494{,}37 \text{ (грн)}.$$

Нарощена сума з урахуванням інфляції за складними відсотками розраховується за формулою:

$$C = \frac{S}{J_p} = P \times \frac{(1+i)^n}{\left(1 + \frac{h}{100}\right)^n} = P \times \left(\frac{1+i}{1 + \frac{h}{100}}\right)^n.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 7 %, а номінальна нарощена сума за складними відсотками відома з попередніх розрахунків, то можна визначити нарощену суму з урахуванням її знецінення за формулою:

$$C = \frac{2593{,}74}{\left(1 + \frac{7}{100}\right)^{10}} \approx 1318{,}53 \text{ (грн)}.$$

Якщо темп інфляції постійний і складає 15 %, то:

$$C = \frac{2593{,}74}{\left(1 + \frac{15}{100}\right)^{10}} \approx 641{,}13 \text{ (грн)}.$$

4. Графіки. Побудовані графіки щорічної зміни нарощеної суми за простими та складними відсотками наведені на рис. 1.

Таким чином, нарощена сума за складними відсотками більше, ніж за простими, за змінними відсотками, що зростають, більше, ніж за постійними і чим довший термін, тим відчутніше різниця. В умовах інфляції зростання реальної нарощеної суми можливе тільки, якщо відсоткова ставка суттєво перевищує темп зростання цін.

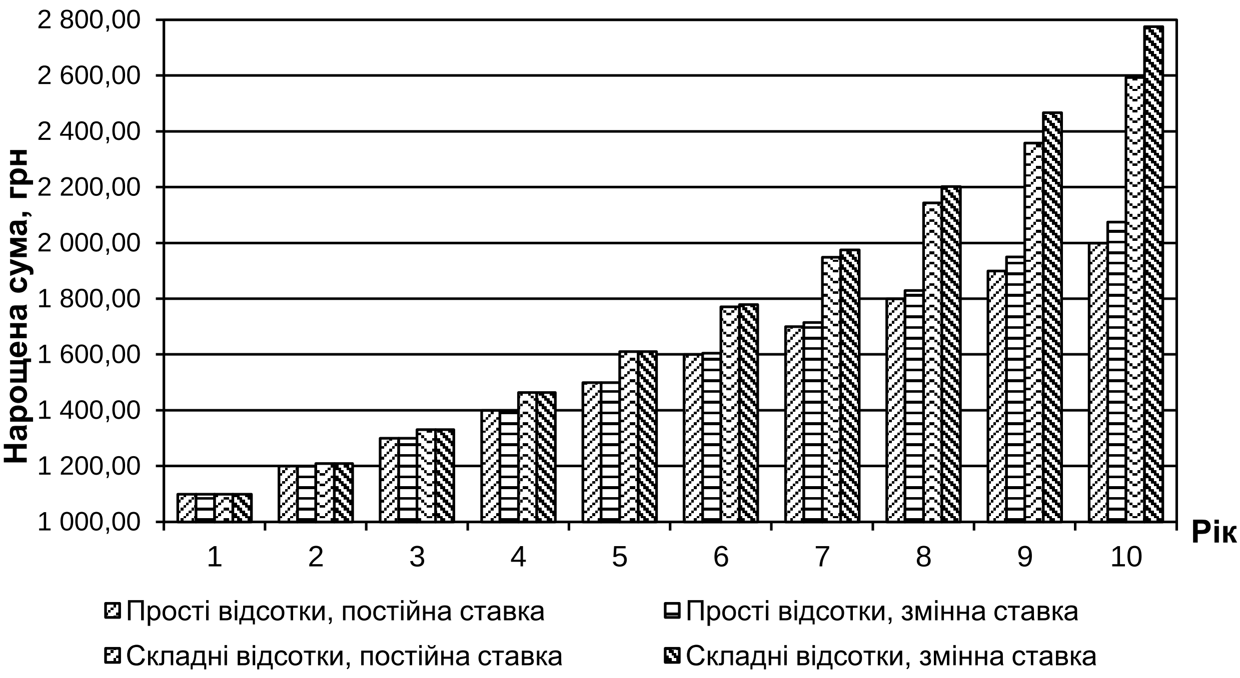

Рис. 1. **Динаміка зміни нарощеної суми при різних умовах вкладу**

Практичне завдання № 2. Похідні процентні розрахунки

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навиків проведення похідних процентних розрахунків.

Початкові дані. Депозит на суму 20 000 грн був відкритий 10 грудня 2009 року по 20 березня 2010 року включно під 15 % річних.

Необхідно

1. Визначити нарощену величину депозиту при нарахуванні простих відсотків трьома способами: 365/365, 365/360, 360/360 в цілому за період та в кожному календарному році окремо.
2. Розрахувати суму нарахованих простих відсотків (365/365, 365/360), якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму.
3. Провести дисконтування і розрахувати первинну суму, якщо в початкових даних указана сума погашення і проста дисконтна ставка (365/365, 365/360).
4. Визначити нарощену величину депозиту при нарахуванні складних відсотків (365/365) в цілому за період та в кожному календарному році окремо.
5. Розрахувати ефективну процентну ставку для 360 і 365 днів.
6. Провести дисконтування і розрахувати первинну суму, якщо в початкових даних вказана сума погашення і складна дисконтна ставка.

Методичні рекомендації

1. Прості відсотки. Оскільки процентна ставка, як правило, встановлюється в розрахунку за рік, то при терміні позики менше року необхідно визначити, яка частина річного відсотка сплачується кредиторові. Аналогічна проблема виникає і у випадках, коли термін позики менше періоду нарахування.

Розглянемо найбільш поширений в практиці випадок – з річними періодами нарахування. Очевидно, що термін позики необов'язково рівний цілому числу років. Виразимо термін n у вигляді дробу

$$n = \frac{t}{K},$$

де t – число днів позики;

K – число днів у році, або *часова база нарахування відсотків.*

У цьому випадку формула (1) набуде вигляду:

$$S = P \times \left(1 + \frac{t}{K} i\right).$$

При розрахунку відсотків застосовують дві часові бази: K = 360 днів (12 місяців по 30 днів) або K = 365 (366) днів. Якщо K = 360, то отримують *звичайні* або *комерційні* відсотки, а при використанні дійсної тривалості року (365, 366 днів) розраховують *точні* відсотки.

Число днів позики також можна зміряти приблизно і точно. У першому випадку тривалість позики визначається з умови, згідно з якою будь-який місяць приймається рівним 30 дням. У свою чергу, точне число днів позики визначається шляхом підрахунку числа днів між датою видачі позики і датою її погашення. День видачі і день погашення вважаються за один день. Отже, можливі і застосовуються на практиці три варіанти розрахунку простих відсотків.

1. *Точні відсотки з точним числом днів позики.* Цей варіант, природно, дає найточніші результати. Цей спосіб застосовується центральними банками багатьох країн і крупними комерційними банками, наприклад, у Великобританії, США. У комерційних документах він позначається як 365/365 або АСТ/АСТ.

2. *Звичайні відсотки з точним числом днів позики.* Цей метод, який іноді називають *банківським,* поширений в позикових операціях комерційних банків між країнами, у внутрішніх операціях – у Франції,

Бельгії, Швейцарії. Він позначається, як 365/360 або АСТ/360. Цей варіант дає дещо більший результат, ніж застосування точних відсотків. Зазначимо, що при числі днів позики, що перевищує 360, цей спосіб приводить до того, що сума нарахованих відсотків буде більша, ніж передбачається річною ставкою.

3. *Звичайні відсотки з наближеним числом днів позики.* Такий метод застосовується тоді, коли не вимагається великої точності, наприклад, при проміжних розрахунках. Він прийнятий в практиці комерційних банків Німеччини, Швеції, Данії. Метод умовно позначається як 360/360.

Визначимо спочатку термін позики, беручи до уваги, що день відкриття і день закриття депозиту рахують за один день. Таким чином, *точне число днів* позики з 10 грудня 2011 року по 20 березня 2012 року складе $t = 22 + 31 + 29 + 20 - 1 = 101$ день. *Наближене число днів* складе $t = 21 + 30 + 30 + 20 - 1 = 100$ днів.

Відповідно початковим даним $P = 20000,\ i = 0{,}15$. Розрахунки майбутньої вартості внеску при нарахуванні простих процентів за різними варіантами наведені у табл. 5.

Якщо загальний термін позики охоплює два суміжні календарні роки і є необхідність у діленні суми відсотків між ними (наприклад, при визначенні річних сум доходу), то загальна сума нарахованих простих відсотків складе суму відсотків, отриманих у кожному році:

$$I = I_1 + I_2 = Pn_1i + Pn_2i$$

де n_1 і n_2 – частини терміну позики, що доводяться на кожен календарний рік.

Таблиця 5

Розрахунки нарощеної суми депозиту при нарахуванні простих відсотків

Варіант розрахунку	Формула розрахунку	Всього на рахунку в кінці терміну, грн
$365/365$	$S = 20000\left(1 + \frac{101}{365} \times 0{,}15\right)$	20830,14
$365/360$	$S = 20000\left(1 + \frac{101}{360} \times 0{,}15\right)$	20841,67
$360/360$	$S = 20000\left(1 + \frac{100}{360} \times 0{,}15\right)$	20833,33

При варіанті розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_1 = 20000 \times \frac{22 - 0{,}5}{365} \times 0{,}15 = 176{,}71 \text{ (грн)}.$$
$$I_2 = 20000 \times \frac{80 - 0{,}5}{365} \times 0{,}15 = 653{,}42 \text{ (грн)}.$$
$$I = I_1 + I_2 = 176{,}71 + 653{,}42 = 830{,}14 \text{ (грн)}.$$

При варіанті розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20000 \times \frac{22 - 0{,}5}{360} \times 0{,}15 = 179{,}17 \text{ (грн)}.$$
$$I_2 = 20000 \times \frac{80 - 0{,}5}{360} \times 0{,}15 = 662{,}50 \text{ (грн)}.$$
$$I = I_1 + I_2 = 179{,}17 + 662{,}50 = 841{,}67 \text{ (грн)}.$$

При варіанті розрахунку 360/360 відсотки складуть:

$$I_1 = 20000 \times \frac{21 - 0{,}5}{360} \times 0{,}15 = 170{,}83 \text{ (грн)}.$$
$$I_2 = 20000 \times \frac{80 - 0{,}5}{360} \times 0{,}15 = 662{,}50 \text{ (грн)}.$$
$$I = I_1 + I_2 = 170{,}83 + 662{,}50 = 833{,}33 \text{ (грн)}.$$

2. Поповнення депозиту. Якщо 1 січня депозит поповнився на первинну суму, то зміни у сумі нарахованих відсотків відбудуться тільки у другому календарному році.

При варіанті розрахунку 365/365 відсотки складуть:

$$I_2 = 40000 \times \frac{80 - 0{,}5}{365} \times 0{,}15 = 1306{,}85 \text{ (грн)}.$$
$$I = I_1 + I_2 = 176{,}71 + 1306{,}85 = 1483{,}56 \text{ (грн)}.$$

При варіанті розрахунку 365/360 відсотки складуть:

$$I_2 = 40000 \times \frac{80 - 0{,}5}{360} \times 0{,}15 = 1325{,}00 \text{ (грн)}.$$
$$I = I_1 + I_2 = 179{,}17 + 1325{,}00 = 1504{,}17 \text{ (грн)}.$$

3. Дисконтування за простою дисконтною ставкою. Суть операції полягає в такому: відсотки нараховуються на початку розрахункового періоду, при цьому за базу (100 %) береться сума погашення боргу, тобто банк утримує авансові відсотки при видачі кредиту (або відсотки по депозиту виплачуються в момент відкриття депозитного рахунку). При цьому застосовується облікова ставка d (це *банківський облік*).

Розмір дисконту, або суми обліку, очевидно рівний $S \times n \times d;$ якщо d – річна облікова ставка, то n вимірюється в роках. Тоді:

$$P = S - Snd = S(1 - nd). \tag{4}$$

Дисконтний множник у цьому випадку дорівнює $(1 - nd)$. З формули (4) випливає, що при $n > 1/d$ величина дисконтного множника і, отже, суми P стане від'ємною. Інакше кажучи, при відносно великому терміні зобов'язання облік може призвести до нульової або навіть від'ємної суми $P.$ Наприклад, при $d = 20~\%$ вже п'ятирічний термін достатній для того, щоб позичальник нічого не отримав при обліку зобов'язання.

Облік за допомогою облікової ставки найчастіше здійснюється при часовій базі K = 360 днів, число днів позики зазвичай береться точним.

Якщо вважати, що в початкових даних вказана сума погашення і проста дисконтна ставка, то розрахувати первинну суму можна у такий спосіб.

При варіанті розрахунку 365/365 первинна сума становить:

$$P = S\left(1 - \frac{t}{K}d\right) = 20000\left(1 - \frac{101}{365} \times 0{,}15\right) = 19169{,}86\ (\text{грн}).$$

При варіанті розрахунку 365/360 первинна сума становить:

$$P = 20000\left(1 - \frac{101}{360} \times 0{,}15\right) = 19158{,}33\ (\text{грн}).$$

4. Складні відсотки. У випадку визначення нарощеної величини депозиту при нарахуванні складних відсотків у цілому за період, менший одного року, формула (2) набуде вигляду:

$$S = P\left(1 + \frac{i}{K}\right)^{t}.$$

Відповідно початковим даним $P = 20000$, $i = 0{,}15$, варіант розрахунку прийнятий 365/365. Тоді майбутня вартість внеску складе:

$$S = 20000\left(1+\frac{0{,}15}{365}\right)^{101} = 20847{,}43 \text{ (грн)}.$$

Проценти за кожним з періодів визначаються за формулами:

$$I_1 = P\left(\left(1+\frac{i}{K}\right)^{t_1} - 1\right),$$

$$I_2 = P\left(\left(1+\frac{i}{K}\right)^{t} - \left(1+\frac{i}{K}\right)^{t_1}\right),$$

де t_1 – кількість днів вкладу в першому календарному році.

Проценти за кожним з періодів для варіанта 365/365 і нарощена сума складуть:

$$I_1 = 20000\left(\left(1+\frac{0{,}15}{365}\right)^{22-0{,}5} - 1\right) = 177{,}46 \text{ (грн)},$$

$$I_2 = 20000\left(\left(1+\frac{0{,}15}{365}\right)^{101} - \left(1+\frac{0{,}15}{365}\right)^{22-0{,}5}\right) = 669{,}97 \text{ (грн)},$$

$$I = I_1 + I_2 = 847{,}43 \text{ (грн)},$$

$$S = P + I = 20000 + 847{,}43 = 20847{,}43 \text{ (грн)}.$$

5. Ефективна процентна ставка. *Дійсна* або *ефективна ставка відсотка* вимірює той реальний відносний дохід, який отримують в цілому за рік. Інакше кажучи, ефективна ставка – це річна ставка складних відсотків, яка дає той же результат, що і m-*разове* нарахування відсотків по ставці $^{j}/_{m}$.

Позначимо ефективну ставку через i. За визначенням множники нарощування за двома ставками (ефективною і номінальною при m-разовому нарахуванні) повинні дорівнювати один одному:

$$(1+i)^n = \left(1+\frac{j}{m}\right)^{nm}.$$

З рівності множників нарощування виходить:

$$i = \left(1 + \frac{j}{m}\right)^m - 1.$$

Ефективна ставка при m > 1 більше номінальної. *Обидві ставки еквівалентні у фінансовому відношенні.*

За умови нарахування відсотків протягом 365 і 360 днів ефективні ставки складуть:

$$i = \left(1 + \frac{0{,}15}{365}\right)^{365} - 1 = 0{,}1618,$$
$$i = \left(1 + \frac{0{,}15}{360}\right)^{360} - 1 = 0{,}1618.$$

Як бачимо, ефективні ставки рівні для обох варіантів нарахування і перевищують номінальну ставку.

6. Дисконтування за складною дисконтною ставкою. У практиці облікових операцій іноді застосовують *складну облікову ставку.* У цих випадках процес дисконтування відбувається з уповільненням, оскільки кожного разу облікова ставка застосовується не до первинної суми (як при простій обліковій ставці), а до суми, дисконтованої на попередньому кроці в часі. Дисконтування за складною обліковою ставкою здійснюється за формулою:

$$P = S(1 - d)^n,$$

де *d* – складна річна облікова ставка.

Дисконтування може проводитися не один, а m раз на рік, тобто кожного разу облік проводиться за ставкою $f/_{m}$. У цьому випадку:

$$P = S\left(1 - \frac{f}{m}\right)^{nm},$$

де f – номінальна річна облікова ставка.

Якщо вважати, що в початкових даних вказана сума погашення і складна дисконтна ставка, то розрахувати первинну суму при умові дисконтування один раз на рік (K = 365) можна так:

$$P = S(1-d)^{\frac{t}{K}} = 20000(1-0{,}15)^{\frac{101}{365}} = 19120{,}50\ (\text{грн}).$$

При умові щоденного дисконтування:

$$P = S\left(1-\frac{f}{K}\right)^{t} = 20000\left(1-\frac{0{,}15}{365}\right)^{101} = 19186{,}69\ (\text{грн}).$$

Практичне завдання № 3. Розрахунок еквівалентних параметрів фінансових операцій

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навиків розрахунку еквівалентних параметрів фінансових операцій.

Частина 1. Початкові дані. Депозитний внесок величиною 10 тис. грн розміщений в банк на 6 років під 10 % річних.

Необхідно

1. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків один раз на рік, визначити еквівалентну облікову ставку.
2. Визначити еквівалентну складну ставку, якщо складні відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.
3. Розрахувати майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків за умови, що депозит відкритий з 1 лютого 2013 року по 15 травня включно (365/365), визначити еквівалентну облікову ставку для К=360, 365.
4. Розрахувати середню процентну ставку для простих відсотків, якщо був відкритий депозит на таку ж суму через рік під 15 % річних з однаковим терміном погашення, а також, якщо був відкритий депозит на суму 5 тис. грн через 2 роки під 15 % річних з однаковим терміном погашення.
5. Розрахувати середню ставку складних відсотків, якщо перші 2 роки ставка 10 %, а кожен наступний рік підвищується на 1 %.

Частина 2. Початкові дані. Філія комерційного банку видала протягом року п’ять позик двом фірмам ("Силікат" і "Дельта"). Дані наведені в табл. 6.

Таблиця 6

Вихідні дані

Квартал	Розмір позики, тис. грн	Термін позики, місяців
Фірма "Силікат"		
I	250	6
II	200	8
IV	500	3
Фірма "Дельта"		
II	600	2
III	450	4

Необхідно

1. Визначити середній розмір позики, отриманої кожною фірмою і всіх позик, виданих банком.
2. Середній термін користування позиками (за умови їх безперервної оборотності).
3. Середнє число оборотів позики за рік.
4. Розмір консолідованого платежу для кожної фірми, за умови, що нараховуються прості відсотки по ставці 10 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 міс.

Методичні рекомендації

Частина 1

1. Еквівалентні прості ставки. Процентні і облікові ставки вирішують одні і ті ж завдання: визначають ступінь прибутковості при операції нарощування або розміри дисконтованих сум при облікових операціях. У зв’язку з цим можливий вибір таких процентних або облікових ставок, при використанні яких фінансові наслідки виявляться рівноцінними. Ставки, що забезпечують рівноцінність фінансових наслідків, називаються *еквівалентними, або релятивними (відносними).* Рівноцінність фінансових наслідків може бути забезпечена в тому випадку, якщо спостерігається рівність множників нарощування або дисконтних множників.

Еквівалентність простої ставки відсотків і облікової ставки виражається формулами:

$$i = \frac{d}{1 - nd}; \qquad d = \frac{i}{1 + ni}.$$

Визначимо спочатку майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків один раз на рік, якщо $P = 10000,\ n = 6,\ i = 0{,}1$:

$$S = 10000(1 + 6 \times 0{,}1) = 16000\ (\text{грн}).$$

Еквівалентна проста облікова ставка складе:

$$d = \frac{0{,}1}{1 + 6 \times 0{,}1} = 0{,}0625.$$

Визначимо майбутню вартість внеску через облікову ставку:

$$S = P\frac{1}{1 - nd} = 10000 \times \frac{1}{1 - 6 \times 0{,}0625} = 16000\ (\text{грн}).$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

2. Еквівалентні складні ставки. Еквівалентність простих і складних процентних ставок при нарахуванні відсотків один раз на рік визначається за формулами:

$$i_{\Pi} = \frac{(1 + i_C)^n - 1}{n}\ ; \qquad i_C = (1 + ni_{\Pi})^{\frac{1}{n}} - 1.$$

Визначимо еквівалентну складну процентну ставку:

$$i_C = (1 + 6 \times 0{,}1)^{\frac{1}{6}} - 1 \approx 0{,}08148.$$

Еквівалентність простої процентної ставки і складної ставки j при нарахуванні відсотків m раз на рік визначається за формулами:

$$i_{\Pi} = \frac{\left(1 + \frac{j}{m}\right)^{nm} - 1}{n}\ ; \qquad j = m\left((1 + ni_{\Pi})^{\frac{1}{nm}} - 1\right).$$

Визначимо еквівалентну складну процентну ставку за умови, що відсотки нараховуються щокварталу і щомісяця:

$$j = 4\left((1 + 6 \times 0{,}1)^{\frac{1}{6\times 4}} - 1\right) \approx 0{,}07911,$$
$$j = 12\left((1 + 6 \times 0{,}1)^{\frac{1}{6\times 12}} - 1\right) \approx 0{,}07859.$$

3. Еквівалентні ставки для короткострокових операцій. Визначимо майбутню вартість внеску при нарахуванні простих відсотків за умови, що депозит відкритий з 1 лютого 2013 року по 15 травня включно (365/365):

$$S = 10000\left(1 + \frac{103}{365} \times 0{,}1\right) \approx 10282{,}19 \text{ (грн)}.$$

Визначимо еквівалентні прості облікові ставки для K = 365, K = 360, за умови, що нарахування відсотків проводиться при K = 365, тобто для двох варіантів: колі часові бази дорівнюють одна одній і коли вони різні:

$$d_{\Pi} = \frac{365 \times i_{\Pi}}{365 + t \times i_{\Pi}} = \frac{365 \times 0{,}1}{365 + 103 \times 0{,}1} = 0{,}09726,$$
$$d_{\Pi} = \frac{360 \times i_{\Pi}}{365 + t \times i_{\Pi}} = \frac{360 \times 0{,}1}{365 + 103 \times 0{,}1} = 0{,}09592.$$

Визначимо майбутню вартість внеску через розраховані прості облікові ставки:

$$S = P\frac{1}{1 - \frac{t}{365}d} = 10000\frac{1}{1 - \frac{103}{365} \times 0{,}09726} \approx 10282{,}19 \text{ (грн)}.$$

$$S = P\frac{1}{1 - \frac{t}{360}d} = 10000\frac{1}{1 - \frac{103}{360} \times 0{,}09592} \approx 10282{,}19 \text{ (грн)}.$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

4. Середні прості процентні ставки. Розглядаючи принцип еквівалентності процентних ставок, необхідно звернути увагу на розрахунок їх середніх значень, оскільки для декількох процентних ставок їх середнє значення є еквівалентною величиною. У випадку, якщо суми отриманих кредитів рівні між собою, то середня процентна ставка (відсотки прості) розраховується за формулою середньої арифметичної зваженої, де вагами служать часові періоди, протягом яких діяла ця ставка. Тобто, якщо був відкритий депозит на таку ж суму через рік під 15 % річних з однаковим терміном погашення, то *середня проста процентна ставка* складе:

$$\bar{i} = \frac{i_1 n_1 + i_2 n_2}{n_1 + n_2} = \frac{0{,}1 \times 6 + 0{,}15 \times 5}{6 + 5} \approx 0{,}12273.$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому:

$$S_1 = 16000 \text{ (грн)}; \quad S_2 = 10000 \times (1 + 5 \times 0{,}15) = 17500 \text{ (грн)},$$
$$S = S_1 + S_2 = 33500 \text{ (грн)}.$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому через середню процентну ставку:

$$S_1 = 10000 \times (1 + 6 \times 0{,}12273) \approx 17363{,}64 \text{ (грн)},$$
$$S_2 = 10000 \times (1 + 5 \times 0{,}12273) \approx 16136{,}36 \text{ (грн)},$$
$$S = S_1 + S_2 = 33500 \text{ (грн)}.$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

При відкритті різних за величиною депозитів, виданих під різні процентні ставки, середня ставка також обчислюється за формулою середньої арифметичної, але вагами в цьому випадку будуть добутки сум отриманих депозитів на терміни, на які вони відкриті. Тобто, якщо був відкритий депозит на суму 5 тис. грн через 2 роки під 15 % річних з однаковим терміном погашення, то *середня проста процентна ставка* складе:

$$\bar{i} = \frac{i_1 n_1 P_1 + i_2 n_2 P_2}{n_1 P_1 + n_2 P_2} = \frac{0{,}1 \times 6 \times 10000 + 0{,}15 \times 4 \times 5000}{6 \times 10000 + 4 \times 5000} = 0{,}1125.$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому:

$$S_1 = 16000 \text{ (грн)}; \quad S_2 = 5000 \times (1 + 4 \times 0{,}15) = 8000 \text{ (грн)},$$
$$S = S_1 + S_2 = 24000 \text{ (грн)}.$$

Визначимо нарощену суму окремо за кожним депозитом і в цілому через середню процентну ставку:

$$S_1 = 10000 \times (1 + 6 \times 0{,}1125) = 16750{,}00 \text{ (грн)},$$
$$S_2 = 5000 \times (1 + 4 \times 0{,}1125) = 7250{,}00 \text{ (грн)},$$
$$S = S_1 + S_2 = 24000 \text{ (грн)}.$$

5. Середня ставка складних відсотків. Середня ставка за складними відсотками визначається за формулою:

$$\bar{\imath}_c = [(1 + i_1)^{n_1} \times (1 + i_2)^{n_2} \times \cdots \times (1 + i_k)^{n_k}]^{\frac{1}{N}} - 1,$$

де $i_1, i_2, \ldots, i_k$ – ставки складних відсотків; $n_1, n_2, \ldots, n_k$ – часові інтервали, протягом яких нарахування проводилося за складними відсотками ($N = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$).

Якщо перші 2 роки ставка 10 %, а кожен наступний рік підвищується на 1 %, то середня ставка складних відсотків складе:

$$\bar{\imath}_c = [(1 + 0{,}1)^2 \times (1 + 0{,}11)^1 \times (1 + 0{,}12)^1 \times (1 + 0{,}13)^1]^{\frac{1}{5}} - 1 \approx 0{,}1119.$$

Визначимо нарощену суму депозиту через змінні ставки складних відсотків і через середню складну ставку відсотків:

$$S = 10000 \times ((1 + 0{,}1)^2 \times (1 + 0{,}11)^1 \times (1 + 0{,}12)^1 \times (1 + 0{,}13)^1) \approx$$
$$\approx 16998{,}27 \text{ (грн)},$$
$$S = 10000 \times (1 + 0{,}1119)^5 \approx 16998{,}27 \text{ (грн)}.$$

Як бачимо, результати розрахунків співпадають.

Частина 2

1. Середній розмір позики. Середній розмір однієї позики ($\bar{P}$) без урахування кількості оборотів за рік знаходиться за формулою середньої арифметичної зваженої:

$$\bar{P} = \frac{\sum P_j \times n_j}{\sum n_j}.$$

Визначимо середній розмір позики, отриманої фірмою "Силікат" ($\bar{P}_{\text{С}}$) і фірмою "Дельта" ($\bar{P}_{\text{Д}}$), а також всіх позик, виданих банком:

$$\bar{P}_{\text{С}} = \frac{250 \times 6 + 200 \times 8 + 500 \times 3}{6 + 8 + 3} \approx 270{,}58824\ (\text{тис. грн}),$$

$$\bar{P}_{\text{Д}} = \frac{600 \times 2 + 450 \times 4}{2 + 4} = 500{,}00\ (\text{тис. грн}),$$

$$\bar{P} = \frac{250 \times 6 + 200 \times 8 + 500 \times 3 + 600 \times 2 + 450 \times 4}{6 + 8 + 3 + 2 + 4} \approx 330{,}43478\ (\text{тис. грн}).$$

2. Середній термін користування позиками (за умови їх безперервної оборотності), тобто середній час, протягом якого усі позики обертаються один раз, визначається так:

$$\bar{n} = \frac{\sum P_j}{\sum \frac{P_j}{n_j}}.$$

Визначимо середній термін користування позиками для фірми "Силікат" ($\bar{n}_{\text{С}}$) і фірми "Дельта" ($\bar{n}_{\text{Д}}$), а також для банку в цілому:

$$\bar{n}_{\text{С}} = \frac{250 + 200 + 500}{\frac{250}{6} + \frac{200}{8} + \frac{500}{3}} \approx 4{,}0714\ (\text{міс.}),$$

$$\bar{n}_{\text{Д}} = \frac{600 + 450}{\frac{600}{2} + \frac{450}{4}} \approx 2{,}5455\ (\text{міс.}),$$

$$\bar{n} = \frac{250 + 200 + 500 + 600 + 450}{\frac{250}{6} + \frac{200}{8} + \frac{500}{3} + \frac{600}{2} + \frac{450}{4}} \approx 3{,}0968\ (\text{міс.}).$$

3. Середнє число оборотів позики за рік. Число оборотів окремих позик за умови їх безперервної оборотності за період, що вивчається, визначається як частка від ділення тривалості періоду ($D = 12$ міс.) на термін видачі позики:

$$W_j = \frac{D}{n_j}.$$

Результати проміжних розрахунків наведені в табл. 7.

Таблиця 7

Результати розрахунків

№ позики	Розмір позики (P_j), тис. грн	Термін позики (n_j), місяців (тривалість одного обороту)	Число оборотів за рік $W_j = \frac{D}{n_j} = \frac{12}{n_j}$	Річний оборот позики $O_j = P_j \times W_j$
Фірма "Силікат"				
1	250	6	2	500
2	200	8	1,5	300
3	500	3	4	2 000
Сума	950	–	–	2 800
Фірма "Дельта"				
4	600	2	6	3 600
5	450	4	3	1 350
Сума	1 050	–	–	4 950
Разом	**2 000**			**7 750**

Тоді середнє число оборотів всіх позик за період (за умови, що вони обертаються безперервно) розраховується так:

$$\bar{W} = \frac{\sum W_j \times P_j}{\sum P_j} = D \times \frac{\sum \frac{P_j}{n_j}}{\sum P_j} = \frac{\sum O_j}{\sum P_j}.$$

Визначимо середнє число оборотів всіх позик за рік для кожної фірми окремо і в цілому для банку:

$$\bar{W}_{\text{С}} = \frac{2800}{950} \approx 2{,}9474, \quad \bar{W}_{\text{Д}} = \frac{4950}{1050} \approx 4{,}7143, \quad \bar{W} = \frac{7750}{2000} = 3{,}875.$$

4. Консолідація платежів. Зміна господарської ситуації нерідко спонукає одну із сторін-учасниць комерційної операції звернутися до іншої сторони з пропозицією змінити умови раніше укладених угод. Найчастіше пропонується змінити терміни платежів у бік їх збільшення, провести об’єднання декількох платежів в один (консолідувати платежі) зі встановленням єдиного терміну погашення. Природно, що пропоновані зміни повинні бути беззбиткові для обох сторін, тобто основним принципом зміни умови операції (контракту) є принцип фінансової еквівалентності. Для вирішення таких завдань використовується рівняння еквівалентності, в якому сума замінюваних платежів, приведених до одного моменту часу, прирівняна до суми платежів за новим зобов’язанням, приведеної до тієї ж дати.

При консолідації декількох платежів в один за умови, що термін нового консолідованого платежу більше раніше встановлених термінів (тобто $n_0 > n_1, n_2, \ldots, n_k$) і використовується проста відсоткова ставка, рівняння еквівалентності має вигляд:

$$S_0 = \sum S_j \times (1 + t_j \times i),$$

де S_0 – нарощена сума консолідованого платежу;

$S_1, S_2, \ldots, S_k$ – платежі, що підлягають консолідації, з термінами сплати $n_1, n_2, \ldots, n_k$;

t_j – часові інтервали між терміном n_0 і n_j, тобто $t_j = n_0 - n_j$.

Визначимо нарощені суми позик для кожної фірми окремо, як це показано у табл. 8.

Таблиця 8

Нарощені суми позик

Назва фірми	Формула розрахунку	Нарощена сума позики, тис. грн
"Силікат"	$S_1^{С} = 250 \times \left(1 + 6 \times \frac{0{,}1}{12}\right)$	262,50
	$S_1^{С} = 200 \times \left(1 + 8 \times \frac{0{,}1}{12}\right)$	213,33
	$S_1^{С} = 500 \times \left(1 + 3 \times \frac{0{,}1}{12}\right)$	512,50
"Дельта"	$S_1^{Д} = 600 \times \left(1 + 2 \times \frac{0{,}1}{12}\right)$	610,00
	$S_1^{Д} = 450 \times \left(1 + 4 \times \frac{0{,}1}{12}\right)$	465,00

Визначимо розмір консолідованого платежу для кожної фірми, за умови, що нараховуються прості відсотки за ставкою 10 % річних, термін погашення консолідованого платежу – 12 міс.:

$$S_0^{\text{С}} = 262{,}5 \times (1 + (12 - 6) \times 0{,}1) + 213{,}33 \times (1 + (12 - 8) \times 0{,}1) +$$
$$+512{,}5 \times (1 + (12 - 3) \times 0{,}1) = 1047{,}0069 \text{ (тис. грн)},$$
$$S_0^{\text{Д}} = 610 \times (1 + 10 \times 0{,}1) + 465 \times (1 + 8 \times 0{,}1) = 1156{,}833 \text{ (тис. грн)}.$$

Практичне завдання № 4. Розрахунок параметрів постійних фінансових рент

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, придбання навиків розрахунку параметрів постійних фінансових рент (потоків платежів).

Початкові дані. Депозитний договір поміщений на 5 років і передбачає щорічні внески в кінці року на депозитний рахунок у розмірі 10 тис. грн, процентна ставка складає 10 % складних річних.

Необхідно

1. Визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.
2. Визначити нарощену суму до кінця терміну депозиту, якщо рентні платежі вносяться щокварталу, відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.
3. Скласти загальну таблицю і порівняти результати нарощування річних і p-строкових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків $S(p, m)$, для $p = 1, 2, 4, 12$ і $m = 1, 2, 4, 12$. Зробити висновки.
4. Визначити сучасну величину ренти, якщо відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.
5. Визначити сучасну величину ренти, якщо рентні платежі вносяться щокварталу, відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.
6. Скласти загальну таблицю і порівняти результати приведення річних і p-строкових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків $A(p, m)$, для $p = 1, 2, 4, 12$ і $m = 1, 2, 4, 12$. Зробити висновки.

7. Розрахувати тривалість ренти при параметрах $p = 1,\ 4$ і $m = 1, 4$, якщо відома її нарощена величина, порівняти з початковими даними.

8. Розрахувати нарощену і сучасну величину річної ренти пренумерандо, якщо відсотки нараховуються один раз на рік, щокварталу, щомісячно.

Методичні рекомендації

1. Річна рента з нарахуванням відсотків m раз на рік. Ряд послідовних фіксованих платежів, здійснених через рівні проміжки часу, називається *фінансовою рентою,* або *ануїтетом.* Фінансова рента (далі – рента) може бути охарактеризована рядом параметрів:

член ренти (R) – величина кожного окремого платежу;

період ренти – часовий інтервал між двома платежами;

термін ренти (n) – час від початку реалізації ренти до моменту нарахування останнього платежу;

процентна ставка (i) – ставка, використовувана для розрахунку нарощування або дисконтування платежів, що складають ренту.

Окрім перерахованих параметрів рента характеризується: кількістю платежів протягом року; частотою нарахування відсотків (тобто кількістю періодів у році, коли нараховуються відсотки); моментом здійснення платежів (на початку, середині або в кінці року) та ін.

Ренти, за якими платежі проводяться раз на рік, називаються *річними.* Залежно від частоти нарахування відсотків розрізняють *ренти з нарахуванням відсотків один раз на рік*, *кілька разів на рік* (m раз) і *безперервним нарахуванням*.

Нарощена сума річної ренти з нарахуванням відсотків один раз розраховуються за формулою:

$$S = R\frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Якщо член ренти $R = 10$ тис. грн, термін ренти $n = 5$ років, а процентна ставка на рік $i = 0{,}1$, то нарощена сума річної ренти складе:

$$S = 10000\frac{(1+0{,}1)^5 - 1}{0{,}1} = 61{,}051\ (\text{тис. грн}).$$

Розглянемо річну ренту з нарахуванням відсотків m раз на рік. У цьому випадку нарахування відсотків кожного разу проводитиметься за ставкою j/m, де j – номінальна (річна) ставка складних відсотків, число членів ренти рівне $n \times m$. Величина нарощеної суми визначатиметься за формулою:

$$S = R\frac{\left(1 + {}^{j}/_{m}\right)^{nm} - 1}{\left(1 + {}^{j}/_{m}\right)^{m} - 1},$$

де n – термін ренти в роках.

Визначимо нарощену суму річної ренти до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються щокварталу, щомісячно:

$$S = 10\frac{\left(1 + {}^{0,1}/_{4}\right)^{5\times4} - 1}{\left(1 + {}^{0,1}/_{4}\right)^{4} - 1} = 61{,}5161\ (\text{тис. грн}),$$

$$S = 10\frac{\left(1 + {}^{0,1}/_{12}\right)^{5\times12} - 1}{\left(1 + {}^{0,1}/_{12}\right)^{12} - 1} = 61{,}6264\ (\text{тис. грн}).$$

2. Рента p-строкова з нарахуванням відсотків m раз на рік. Якщо рентні платежі вносяться кілька разів на рік рівними сумами (p-строкова рента), а нарахування відсотків проводиться раз на рік, в кінці року ($m = 1$), тоді річний платіж рівний R, перший член ренти – R/p, а загальне число членів ренти рівне $n \times p$. Нарощена сума, якщо платежі вносяться щокварталу складе:

$$S = \frac{R}{p}\times\frac{(1+i)^n - 1}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{10}{4}\times\frac{(1+0{,}1)^5 - 1}{(1+0{,}1)^{1/4} - 1} \approx 63{,}295\ (\text{тис. грн}).$$

Нарощена сума для p-строкової ренти, для якої число періодів нарахування відсотків протягом року рівне числу рентних платежів (тобто $p = m$), визначається за формулою:

$$S = R\frac{\left(1+{}^{j}/_{m}\right)^{nm}-1}{j} = 10 \times \frac{\left(1+{}^{0,1}/_{4}\right)^{5\cdot 4}-1}{0,1} \approx 63{,}862\ (\text{тис. грн}).$$

Нарощена сума для p-строкової ренти, для якої число рентних платежів протягом року не рівне числу періодів нарахування відсотків, (тобто $p \neq m$), визначається за формулою:

$$S = \frac{R}{p} \times \frac{\left(1+{}^{j}/_{m}\right)^{nm}-1}{\left(1+{}^{j}/_{m}\right)^{m/p}-1}.$$

Визначимо нарощену суму p- строкової ренти до кінця терміну депозиту, якщо відсотки нараховуються щомісячно:

$$S = \frac{10}{12} \times \frac{\left(1+{}^{0,1}/_{12}\right)^{5\times 12}-1}{\left(1+{}^{0,1}/_{12}\right)^{12/4}-1} \approx 63{,}996\ (\text{тис. грн}).$$

3. Порівняння нарощених сум. Як видно з наведених формул, частота платежів і нарощування відсотків помітно впливають на розмір нарощеної суми. Результати розрахунків нарощених сум для різних умов здійснення платежів і нарахування відсотків наведені у табл. 9.

Таблиця 9

Порівняння нарощених сум рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків

Число рентних платежів протягом року	Число періодів нарахування відсотків			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$
$p = 1$	61,0510	61,3556	61,5161	61,6264
$p = 2$	62,5409	62,8895	63,0732	63,1995
$p = 4$	63,2950	63,6660	63,8616	63,9961
$p = 12$	63,8010	64,1872	64,3909	64,5309

Зіставимо розглянуті варіанти нарощених сум.

Позначимо порівнювані суми як $S(p, m)$. Для одних і тих самих сум річних виплат, тривалості рент і розмірів процентних ставок отримаємо такі співвідношення:

$$S(1,1) < \underset{m>1}{S(1,m)} < \underset{p>1}{S(p,1)} < \underset{m>p>1}{S(p,m)} < \underset{p=m>1}{S(p,m)} < \underset{p>m>1}{S(p,m)}$$

Наведені нерівності можуть бути використані при виборі умов контрактів, оскільки дозволяють заздалегідь (до розрахунку) отримати уявлення про результати, пов'язані з конкретними умовами. Наприклад, можна заздалегідь сказати, що рента з умовами $p = 2$ і $m = 4$ дає меншу нарощену суму, чим з $p = 4$ і $m = 2$ при рівності всіх інших умов.

4. Сучасна величина звичайної ренти (постнумерандо). Під сучасною (наведеною, або поточною) величиною потоку платежів розуміють суму дисконтованих членів цього потоку на деякий попередній момент часу. Сучасна вартість потоку платежів еквівалента у фінансовому сенсі всім платежам, які охоплює потік.

У випадку річної ренти оцінка сучасної величини (A) проводиться на момент початку реалізації ренти (рента негайна) і складає:

$$A = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} = 10 \times \frac{1-(1+0,1)^{-5}}{0,1} \approx 37,9079 \text{ (тис. грн)}. \quad (5)$$

Математично взаємозв’язок між сучасною і нарощеною величиною ренти можна виразити таким чином:

$$A \times (1+i)^n = S.$$

Це дає можливість переконатися, що наведена величина еквівалентна всім платежам, складовим потік рентних платежів.

При нарахуванні відсотків m раз на рік сучасна величина ренти обчислюється за формулою (5), у якій замінили дисконтний множник $(1+i)^{-n}$ на еквівалентну величину $(1+j/m)^{-nm}$, а i на $(1+j/m)^m - 1$. Тоді сучасна вартість річної ренти з нарахуванням відсотків m раз на рік може бути визначена так:

$$A = R \times \frac{1-(1+j/m)^{-nm}}{(1+j/m)^m - 1} = R \times a_{nm,j/m}.$$

Визначимо сучасну величину ренти, якщо відсотки нараховуються щокварталу і щомісяця:

$$A = 10 \times \frac{1-(1+0{,}1/4)^{-5\times 4}}{(1+0{,}1/4)^4 - 1} \approx 37{,}5415 \text{ (тис. грн)},$$

$$A = 10 \times \frac{1-(1+0{,}1/12)^{-5\times 12}}{(1+0{,}1/12)^{12} - 1} \approx 37{,}4558 \text{ (тис. грн)}.$$

5. Сучасна величина p-строкової ренти. При внесенні рентних платежів кілька разів у році (p-*строкова* рента) і нарахуванні відсотків один раз в році ($m = 1$) коефіцієнти приведення знаходяться так само, як і для річної ренти, але за умови, що розмір платежу рівний, а число членів ренти складе $n \times p$. Сума дисконтованих платежів у разі їх щоквартального внесення буде рівна:

$$A = \frac{R}{p} \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{(1+i)^{1/p} - 1} = \frac{10}{4} \times \frac{1-(1+0{,}1)^{-5}}{(1+0{,}1)^{1/4} - 1} \approx 39{,}3012 \text{ (тис. грн)}.$$

Сучасна величина p-строкової ренти, для якої число періодів нарахування відсотків протягом року рівне числу рентних платежів (тобто $p = m$), визначається за формулою:

$$A = R \times \frac{1-(1+j/m)^{-nm}}{j} = 10 \times \frac{1-(1+0{,}1/4)^{-5\times 4}}{0{,}1} \approx 38{,}9729\ (\text{тис. грн}).$$

Сучасна величина p-строкової ренти, для якої число періодів нарахування відсотків протягом року не рівне числу рентних платежів тобто $p \neq m$ (наприклад, якщо нарахування відбувається щомісяця), визначається за формулою:

$$A = \frac{R}{p} \times \frac{1-(1+j/m)^{-nm}}{(1+j/m)^{m/p}-1} = \frac{10}{4} \times \frac{1-(1+0{,}1/12)^{-5\times 12}}{(1+0{,}1/12)^{12/4}-1} \approx$$
$$\approx 38{,}8961\ (\text{тис. грн}).$$

6. Порівняння сучасних вартостей річних і p-строкових рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків.

Як видно з наведених формул, величина сучасної вартості помітно залежить від ставки дисконтування і частоти виплат у межах року. Результати розрахунків сучасних вартостей для різних умов виплат і нарахування відсотків наведені у табл. 10.

Таблиця 10

Порівняння сучасних вартостей рент постнумерандо з різними умовами виплат і нарощування відсотків

Число рентних платежів протягом року	Число періодів нарахування відсотків			
	$m = 1$	$m = 2$	$m = 4$	$m = 12$
$p = 1$	37,9079	37,6670	37,5415	37,4558
$p = 2$	38,8330	38,6087	38,4918	38,4119
$p = 4$	39,3012	39,0854	38,9729	38,8961
$p = 12$	39,6154	39,4054	39,2959	39,2211

Зіставимо розглянуті варіанти наведених сум.

Позначимо порівнювані суми як $A(p,m)$, де p – число надходжень рентних платежів протягом року, m – число періодів нарахування відсотків протягом року. Для одних і тих же сум річних виплат, тривалості рент і розмірів процентних ставок отримаємо такі співвідношення:

$$A(1,\infty) < A(1,m) < A(1,1) < A(p,\infty) \underset{p>m>1}{<A(p,m)} \underset{p=m>1}{<A(p,m)} \underset{m>p>1}{<A(p,m)} < A(p,1).$$

Таким чином, можна заздалегідь сказати, що рента з умовами $p = 4$ і $m = 2$ має меншу сучасну вартість, ніж з $p = 2$ і $m = 4$ при рівності всіх інших умов.

7. Тривалість ренти. При укладенні комерційного контракту, що передбачає погашення зобов’язань рентними платежами, найважливішим параметром є термін ренти. У разі узгодження решти параметрів термін ренти може бути розрахований з використанням величини нарощеної суми. Розрахунки тривалості ренти при параметрах $p = 1,\ 4$ і $m = 1, 4$ наведені у табл. 11.

Таблиця 11

Розрахунок тривалості ренти

p	m	Формула розрахунку	Тривалість ренти, років
1	1	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{R} i + 1\right)}{\ln(1+i)} = \dfrac{\ln\left(\frac{61{,}051}{10} 0{,}1 + 1\right)}{\ln(1+0{,}1)}$	5
1	4	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{R}[(1+j/m)^m - 1] + 1\right)}{m\ln(1+j/m)}$	5
4	1	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{R} p\left[(1+i)^{1/p} - 1\right] + 1\right)}{\ln(1+i)}$	5
4	4	$n = \dfrac{\ln\left(\frac{S}{R} j + 1\right)}{m\ln(1+j/m)} = \dfrac{\ln\left(\frac{63{,}8616}{10} 0{,}1 + 1\right)}{4\ln(1+0{,}1/4)}$	5

Таким чином, як видно з табл. 11, результати розрахунків співпадають.

Практичне завдання № 5. Конверсія фінансових рент. Змінювані ренти

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навиків розрахунку параметрів конверсії рент і змінних фінансових рент (потоків платежів).

Завдання

1. Фірма пропонує покупцеві свою продукцію на суму 2 млн грн з умовою її оплати у кредит протягом 2 років під 15 % річних (складні відсотки). Платежі повинні вноситися щокварталу, відсотки нараховуються в кінці року. Визначити умови конверсії цієї пропозиції. Зробити висновки.

2. Фірма, що спеціалізується на торгівлі нерухомістю пропонує об'єкт вартістю 1,5 млн грн. При цьому пропонуються такі варіанти оплати: а) одноразова оплата; б) оплата протягом 2 років рівними платежами, що вносяться в кінці року під 9 % річних; в) оплата з відстроченням платежу в один рік, останні умови аналогічні попередньому варіанту; г) оплата з відстроченням в один рік, але термін ренти зростає до 3 років. Визначити фінансові наслідки, зробити висновки.

3. Є три річні ренти (негайні з нарахуванням % в кінці періодів) з такими параметрами: $R_1 = 0{,}2$ млн грн, $n_1 = 2$ роки, $i_1 = 9\,\%$; $R_2 = 0{,}25$ млн грн, $n_2 = 4$ роки, $i_2 = 8\,\%$; $R_3 = 0{,}37$ млн грн, $n_3 = 5$ років, $i_3 = 10\,\%$. Їх запропоновано замінити однією річною рентою з нарахуванням % в кінці періоду, термін погашення консолідованої ренти $n = 5$ років, $i = 10\,\%$. Визначити величину рентного платежу консолідованої ренти, якщо: а) початок її терміну збігається з початком терміну всіх замінюваних рент; б) оплата за новою рентою відкладається на 2 роки.

4. На модернізацію підприємства отриманий довгостроковий кредит строком на 10 років, погашення якого здійснюватиметься на таких умовах: у перших 5 років платежі у розмірі 3 млн грн вносяться кожні півроку під 8 % річних, наступних 3 роки платежі у розмірі 5 млн грн вносяться також за півріччями під 10 % річних, останні 2 роки платежі у розмірі 6 млн грн вносяться щокварталу під 10 % річних. Протягом всього терміну ренти відсотки нараховуються раз на рік. Визначити нарощену величину ренти.

5. Кредит розміром 15 млн грн має бути погашений протягом 5 років постійно зростаючими платежами з абсолютним щорічним

приростом, рівним 0,5 млн грн. Платежі і нарахування відсотків на них виробляється в кінці року, процентна річна ставка – 9 %. Визначити розмір першого платежу і загальну суму виплат.

6. Отриманий кредит строком на 7 років. Умови погашення наступні: перший платіж 0,2 млн грн, кожен наступний зростає на 10 %, платежі вносяться двічі в році, процентна ставка 8 % річних. Визначте розмір отриманого кредиту і суму, що підлягає виплаті.

Методичні рекомендації

Під *конверсією* фінансових рент розуміють зміну умов виплати ренти через які–небудь причини, інакше кажучи, мова йде про конвертації умов, що передбачаються при виплаті фінансової ренти. Простими випадками конверсії є: заміна ренти разовим платежем (викуп ренти), або навпаки, заміна разового платежу рентою (розстрочка платежу). До складнішого випадку відноситься об'єднання декількох рент з різними характеристиками в одну – консолідація рент. При цьому передбачається, що конверсія не повинна приводити до зміни фінансових наслідків для кожної із сторін, що беруть участь, тобто конверсія ґрунтується на принципі фінансової еквівалентності.

1. Заміна разового платежу рентним. Для вирішення завдання прирівнюємо сучасну вартість ренти, за допомогою якої проводиться розстрочка, сумі боргу. Завдання полягає у визначенні одного з параметрів цієї ренти – члена ренти – за умови, що решта параметрів задана:

$$A = R \times \frac{1-(1+i)^{-n}}{p \times ((1+i)^{1/p} - 1)}.$$

Звідси

$$R = A \div \frac{1-(1+i)^{-n}}{p \times ((1+i)^{1/p} - 1)},$$

де A – сучасна величина потоків платежів;

i – річна процентна ставка;

n – термін ренти;

p – терміновість ренти (кількість платежів на рік).

Якщо A = 2 млн грн, n = 2 роки, p = 4, m = 1, i = 0,15, тоді член ренти дорівнює:

$$R = 2 \div \frac{1 - (1 + 0{,}15)^{-2}}{4 \times ((1 + 0{,}15)^{1/4} - 1)} = 1{,}16652\ (\text{млн грн}).$$

Далі знаходимо квартальний платіж:

$$R\text{кв} = \frac{R}{4} = \frac{1{,}16652}{4} \approx 0{,}291631\ (\text{млн грн}).$$

Для визначення доцільності здійснення покупки на пропонованих умовах, розрахуємо нарощену величину ренти:

$$S = R \times \frac{(1 + i)^n - 1}{p \times \left((1 + i)^{1/p} - 1\right)} = 1{,}166525 \times \frac{(1 + 0{,}15)^2 - 1}{4 \times \left((1 + 0{,}15)^{1/4} - 1\right)} = \\ = 2{,}645\ (\text{млн грн}).$$

Таким чином, приймаючи умови фірми, покупцеві необхідно буде щокварталу виплачувати 291,631 тис. грн, при цьому переплата складе 645 тис. грн.

2. Зміна умов ренти. Зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна первинних параметрів ренти, приводить до утворення нової ренти, що викликає зміну фінансових наслідків. Разом з тим за бажанням сторін можна зберегти фінансову еквівалентність, змінивши ряд параметрів і зберігши рівність сучасних величин первинною і знов створеною рентою ($A_0 = A_1$), а також зберігши рівність процентних ставок.

Початкові дані: A = 1,5 млн грн, n = 2 року i = 0,09.

Рішення:

а) *одноразова оплата.* Цей варіант припускає, що виплата буде проведена відразу, тобто $S = A = 1{,}5$ (млн грн);

б) *оплата рівними платежами, що вносяться в кінці кожного року,* – з формули розрахунку звичайної річної ренти $\mathrm{A} = R \times \frac{(1+i)^{-n}}{i}$ знаходимо член ренти:

$$R = A \div \frac{(1+i)^{-n}}{i} = 1{,}5 \div \frac{(1+0{,}09)^{-2}}{0{,}09} = 0{,}852703 \text{ млн грн.}$$

Далі розраховуємо нарощену величину ренти:

$$S = R \times \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} = 0{,}852703 \times \frac{(1+0{,}09)^{2} - 1}{0{,}09} = 1{,}782149 \text{ (млн грн);}$$

в) *оплата з відстроченням платежу (термін ренти не змінюється)*. Це завдання припускає розрахунок відстроченої ренти, тобто коли внесення першого внеску переноситься на пізніший термін (t років, місяців). У цьому випадку загальна тривалість ренти залишається колишньою

$$R_t = R_0 \times (1+i)^{t} = 0{,}852703 \times (1+0{,}09)^{1} = 0{,}929446 \text{ (млн грн):}$$

тоді:

$$S = R_t \times \frac{(1+i)^{n} - 1}{i} = 0{,}929446 \times \frac{(1+0{,}09)^{1} - 1}{0{,}09} = 1{,}942543 \text{ (млн грн):}$$

г) *оплата з відстроченням із збільшенням терміну ренти*, тобто необхідно знайти відкладену ренту за умови, що загальна тривалість ренти зростає до 3 років.

Для розрахунку величини рентного платежу нової ренти, відстроченої на період $t = 1$ і з новим терміном, використовується формула:

$$R_t = R_0 \times \left(\frac{(1-(1+i)^{-n_0} / i}{(1-(1+i)^{-n_t} / i} \right) \times (1+i)^{t},$$

$$R_3 = 0{,}852703 \times \left(\frac{(1-(1+0{,}09)^{-2} / 0{,}09}{(1-(1+0{,}09)^{-3} / 0{,}09} \right) \times (1+0{,}09)^{1} =$$

$$= 0{,}645914 \text{ млн грн.}$$

Тоді:

$$S = R_t \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 0{,}645914 \times \frac{(1+0{,}09)^1 - 1}{0{,}09} = 2{,}11737 \text{ (млн грн)}.$$

Таким чином, як вже було вказано, зміна умов виплати ренти, тобто часткова або повна зміна її первинних параметрів, приводить до зміни фінансових наслідків.

3. Консолідація (об’єднання) рент полягає в заміні декількох рент однією, параметри якої необхідно визначити. У цьому випадку з принципу фінансової еквівалентності виходить рівність сучасних вартостей замінюючої і замінюваних рент. Процес консолідації рент може супроводжуватися як збереженням, так і зміною їх параметрів. Основні характеристики, визначувані при консолідації рент, – величина члена ренти і її тривалість.

У табл. 12 вказані основні характеристики об’єднуваних рент.

Таблиця 12

Основні характеристики об’єднуваних рент

№ ренти, q	Член ренти, R_q, млн грн	Термін ренти, n_q, років	Процентна ставка, i, %
1	0,20	2	9
2	0,25	4	8
3	0,37	5	7

а) умови консолідації рент передбачають *збіг початку терміну нової (консолідованою) ренти і об’єднуваних рент*, тому член консолідованої ренти визначається за формулою:

$$R = \frac{\sum_{q=1}^{K} A_q}{(1-(1+i)^{-n}/_i} = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \times {}^{1-(1+i_q)^{-n_q}}\!/_{i_q}}{(1-(1+i)^{-n}/_i},$$

де R_q – член q-ої ренти, n_q – тривалість q-ої ренти, i_q – процентна ставка q-ої ренти, i – параметри консолідованої ренти (n = 5, i = 0,1 %).

У табл. 13 представлені результати розрахунку сучасних величин об'єднуваних рент.

Таблиця 13

Результати розрахунку сучасних величин

№ ренти, q	Член ренти, R_q, млн грн	Термін ренти, n_q, років	Процентна ставка, i_q, %	Сучасна величина, A_q, млн грн
1	0,2	2	0,09	0,3518222
2	0,25	4	0,08	0,8280317
3	0,37	5	0,07	1,5170731
Разом	–	–	–	**2,696927**

Підставивши набуті значення у формулу, набудемо значення річного платежу нової консолідованої ренти:

$$R = \frac{2{,}696927}{(1-(1+0{,}1)^{-5}\big/_{0{,}1}} = 0{,}7114425\ (\text{млн грн});$$

б) умови консолідації рент передбачають, що *оплата за новою рентою відкладається* на 2 роки, тому член консолідованої ренти визначається за формулою:

$$R_t = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \times {1-(1+i_q)^{-n_q}}\big/_{i_q}}{(1-(1+i)^{-n})\big/_{i}} \times (1+i)^t,$$

де R_t – член відкладеної консолідованої ренти, R_q – член -й ренти, n_q – тривалість q-й ренти, i_q – процентна ставка q-й ренти, n_t, i – параметри консолідованої ренти (n = 5, i = 0,1 %, t = 2).

Скоректуємо платіж консолідованої ренти:

$$R_t = \frac{\sum_{q=1}^{K} R_q \times {1-(1+i_q)^{-n_q}}\big/_{i_q}}{(1-(1+i)^{-n}\big/_{i}} \times (1+i)^t = 0{,}7114425 \times (1+0{,}1)^2 =$$

$$= 0{,}8608455\ (\text{млн грн}).$$

Таким чином, ґрунтуючись на принципі еквівалентності, розрахували величину річного платежу консолідованої ренти, при цьому зміна умов виплат приводить до збільшення рентного платежу.

4. Рента з разовою зміною платежу. Потік послідовних платежів, члени якого не є постійними величинами, називається змінною рентою.

У разі, коли потік платежів є дискретним і кожен член ренти постійний тільки в межах свого часового відрізку, розраховується змінна рента з разовими змінами розміру члена ренти:

$$S = R_1 \times s_{n_1,i_1} \times (1+i)^{n-n_1} + R_2 \times s_{n_2,i_2} \times (1+i)^{n-(n_1+n_2)} + \cdots + R_k \times s_{n_k,i_k}.$$

Коефіцієнти нарощування річної ренти $s_{n,i}$ визначаються за формулою:

$$s_{n,i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

У табл. 14 представлений план погашення довгострокового кредиту.

Таблиця 14

Початкові дані погашення довгострокового кредиту

№ ренти, k	Термін ренти, n_k	Річний платіж, R_k	Процентна ставка, i_k	Строковість ренти, p_k
1	5	6	0,08	2
2	3	10	0,1	2
3	2	24	0,1	4

Оскільки схема погашення довгострокового кредиту (m = 1 і n = 10) є змінною рентою з p-строковими платежами, коефіцієнти нарощування визначаються за формулою:

$$s_{n,i}^{(p)} = \frac{(1+i)^n - 1}{p \cdot \left((1+i)^{1/p} - 1\right)}.$$

У табл. 15 представлені результати розрахунку коефіцієнтів нарощування.

Таблиця 15

Результати розрахунку коефіцієнтів нарощування

№ ренти, k	Термін ренти, n_k	Процентна ставка, i_k	Строковість ренти, p_k	Коефіцієнт нарощення, $s_{n,i}^{(p)}$
1	5	0,08	2	5,981676
2	3	0,1	2	3,390779
3	2	0,1	4	2,177187

Таким чином, нарощена величина ренти рівна:

$$S = 6 \times 5{,}981676 \times (1 + 0{,}08)^{10-5} + 10 \times 3{,}390779 \times (1 + 0{,}1)^{10-(5+3)} +$$
$$+24 \times 2{,}177187 = 146{,}01516 \text{ (млн. грн.)}$$

Таким чином, загальна сума виплат за довгостроковим кредитом складе 146,01516 млн грн.

5. Рента з постійною абсолютною зміною членів. Рента, члени якої змінюються за законом арифметичної прогресії, називається *змінною рентою з постійною абсолютною зміною її членів* (на величину d).

Початкові дані: A = 15 млн грн, n = 5 років i = 9 % d = 0,5 млн грн, нарахування відсотків і виплати здійснюються в кінці року.

Рішення:

Знаючи поточну суму боргу, тобто величину A, можна визначити розмір першого платежу:

$$R = \frac{A \times (1 + i)^n - \dfrac{d}{i} \times (s_{n,i} - n)}{s_{n,i}},$$

де $s_{n,i}$ – коефіцієнт нарощування.

$$R = \frac{15 \times (1 + 0{,}09)^5 - \dfrac{0{,}5}{0{,}09} \times (5{,}98471 - 5)}{5{,}98471} = 2{,}942288 \text{ (млн грн)}.$$

Нарощена сума даної ренти визначається за формулою:

$$S = R \times s_{n,i} + \frac{d}{i} \times (s_{n,i} - n)$$

$$S = 2{,}942288 \times 5{,}98471 + \frac{0{,}5}{0{,}09} \times (5{,}98471 - 5) = 23{,}079359 \text{ (млн грн).}$$

Так, щоб виплатити кредит у розмірі 15 млн грн за запропонованою схемою, необхідно внести перший платіж у розмірі 2,942288 млн грн, при цьому переплата складе 8,079359 млн грн.

6. Рента з постійною відносною зміною членів. Рента, члени якої змінюються за законом зростаючої геометричної прогресії, називається *рентою з постійною відносною зміною платежів*.

У табл. 16 представлені початкові дані для погашення кредиту.

Таблиця 16

Початкові дані схеми погашення кредиту

Параметри	Позначення	Значення
Перший член ренти, млн грн	R	0,2
Коефіцієнт зміни членів ренти	q	1,1
Терміновість ренти (кількість виплат на рік)	p	2
Термін ренти	n	7
Процентна ставка	i	0,08

Підсумкова величина виплат за наданим кредитом розраховується за формулою знаходження нарощеної величини p-строкової ренти з постійною відносною зміною платежів:

$$S = R \times \frac{q^{n \times p} - (1+i)^n}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}} = 0{,}2 \times \frac{1{,}1^{7 \times 2} - (1 + 0{,}08)^7}{1{,}1 - (1 + 0{,}08)^{\frac{1}{2}}} = 6{,}857629 \text{ (млн грн).}$$

Сучасна величина p-строкової ренти визначається за формулою:

$$A = R \times \frac{q^{n \times p} \times (1+i)^{-n} - 1}{q - (1+i)^{\frac{1}{p}}} = 0{,}2 \times \frac{1{,}1^{7 \times 2} \times (1+0{,}08)^{-7} - 1}{1{,}1 - (1+0{,}08)^{\frac{1}{2}}} =$$
$$= 4{,}00136 \text{ (млн грн)}.$$

Таким чином, розмір отриманого кредиту складає 4,00136 млн грн, підсумкова сума виплат за запропонованою схемою рівна 6,85769 млн грн, тобто за 7 років переплата за кредитом складе 2,856268 млн грн.

Практичне завдання № 6. Планування погашення середньострокових і довгострокових кредитів

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навиків складання плану погашення середньострокових і довгострокових кредитів різними методами.

Початкові дані. Банк видав довгостроковий кредит в сумі 40,0 тис. дол. на 5 років під 6 % річних.

Необхідно

1. Погашення кредиту повинне проводитися рівними щорічними виплатами в кінці кожного року, що включають погашення основного боргу і процентні платежі. Нарахування відсотків проводиться раз на рік. Скласти план погашення позики.

Розрахувати величину першого платежу для погашення основного боргу, величину процентного платежу на кінець останнього року погашення позики, залишок основного неоплаченого боргу на початок 3–го року погашення. Порівняти розраховані значення з планом погашення позики.

2. Скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо передбачається зміна процентної ставки: перші два роки – 6 %, що залишилися 3 роки – 8 %.

3. Скласти план погашення кредиту, якщо за умовами контракту погашення основного боргу повинне проводитися рівними щорічними платежами, нарахування відсотків – у кінці року. Розрахувати величину процентного платежу і строкової сплати для 4-го року, порівняти розраховане значення з планом погашення боргу.

4. Скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати щорічно на 1 тис. доларів, нарахування відсотків проводиться в кінці року.

5. Скласти план погашення кредиту, якщо виплати основного боргу повинні зростати на 5 % щорічно, нарахування відсотків проводиться в кінці року.

6. Скласти план погашення кредиту рівними щорічними виплатами, якщо після виплати третього платежу між кредитором і позичальником досягнута домовленість про продовження терміну погашення позики на 2 роки і збільшення процентної ставки з моменту конверсії до 10 %.

7. Скласти план погашення кредиту, якщо виданий кредит є іпотекою з щомісячним погашенням основного боргу і відсотків за ним рівними строковими сплатами, Розрахувати залишок боргу на початок 4-го місяця (кожного місяця приймається рівним 30 дням).

Скласти план погашення іпотечного кредиту рівними щомісячними виплатами основного боргу (кожного місяця приймається рівним 30 дням). Зробити висновки.

Методичні рекомендації

1. Погашення боргу рівними строковими сплатами. Умовами кредитного контракту передбачається погашення боргу рівними виплатами в кінці кожного розрахункового періоду:

Параметри позики: D = 40,0 тис. дол.; n = 5 років; i = 0,06; m = 1. Щорічна виплата рівна:

$$Y = D \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 40 \times \frac{0{,}06 \times (1+0{,}06)^5}{(1+0{,}06)^5 - 1} \approx 9{,}49586 \text{ (тис. дол.)}$$

Розрахуємо:

$$I = D \times i = 40 \times 0{,}06 = 2{,}4 \text{ (тис. дол.)}.$$

$$R = Y - I = 9{,}49586 - 2{,}4 = 7{,}09586 \text{ (тис. дол.)}$$

У табл. 17 представлений поетапний план погашення боргу.

Таблиця 17

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу, D	Процентний платіж, I	Річна витрата по погашенню основного боргу, R	Річна строкова сплата (ануїтет), Y
1	40	2,4	7,0959	9,4959
2	32,9041	1,97424864	7,5216	9,4959
3	25,3825	1,5229522	7,9729	9,4959
4	17,4096	1,04457797	8,4513	9,4959
5	8,9584	0,53750128	8,9584	9,4959
Разом		**7,47928009**	**40,0000**	**47,4793**

Знаючи розмір кредиту, процентну ставку i і термін погашення кредиту n, розрахуємо величину першої виплати погашення основного боргу R_1:

$$R_1 = D \times \frac{i}{(1+i)^n - 1} = 40 \times \frac{0{,}06}{(1+0{,}06)^5 - 1} = 7{,}09586 \text{ (тис. дол.)}.$$

Розмір платежу основного боргу в будь-якому періоді (R_k) можна визначити за формулою:

$$R_k = R_1 \times (1+i)^{k-1}.$$

$$R_3 = R_1 \times (1+i)^{k-1} = 7{,}09586 \times (1+0{,}06)^{3-1} = 7{,}9729 \text{ (тис. дол.)}.$$

Використовуючи наведені формули, можна розрахувати величину процентного платежу I для будь-якого періоду k.

$$I_k = Y - R_k = Y - Y \times (1+i)^{-n+k-1} = Y \times [1 - (1+i)^{-n+k-1}].$$

За умовою завдання необхідно розрахувати величину процентного платежу на кінець останнього року погашення позики:

$$I_5 = Y - R_k = Y - Y \times (1+i)^{-n+k-1} = 9{,}49586 \times [1 - (1+0{,}06)^{-5+5-1}] =$$
$$= 0{,}537501 \text{ (тис. дол.)}.$$

Для розрахунку залишку неоплаченого основного боргу на будь-який k-й період використовується формула:

$$D_k = \frac{Y - R_k}{i}.$$

За умовою завдання необхідно визначити залишок основного неоплаченого боргу на початок 3-го року погашення:

$$D_3 = \frac{Y - R_3}{i} = \frac{9{,}49586 - 7{,}9729}{0{,}06} = 25{,}382536\ (\text{тис. дол.}).$$

Таким чином, при погашенні позики рівними платежами залишок боргу з кожною виплатою зменшується; отже, зменшуються і процентні виплати. У результаті від періоду до періоду зростає розмір платежів, що йдуть на погашення основного боргу. Порівнюючи розрахунки з планом погашення позики, бачимо, що отримані результати не відрізняються. При цьому сумарна переплата складає 47,4793 тис. дол.

2. Погашення боргу рівними строковими сплатами при зміні процентних ставок

Параметри позики: D = 40,0 тис. дол.; n_1 = 2 року; i_1 = 0,06; n_2 = 3 року; i_2 = 0,08; m = 1 $n = n_1 + n_2 = 5$.

Рішення

Для складання плану погашення позики визначимо величину щорічної виплати, враховуючи, що загальний термін погашення складе 5 років:

$$Y_1 = D \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 40 \times \frac{0{,}06 \times (1+0{,}06)^5}{(1+0{,}06)^5 - 1} \approx 9{,}49586\ (\text{тис. дол.}).$$

Покроковий розрахунок здійснюється, виходячи зі співвідношень:

$$Y = D \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1},$$

$$I = D \times i,$$

$$R = Y - I,$$

$$D_i = D_{i-1} - R_{i-1}.$$

У табл. 18 представлений поетапний план погашення боргу.

Таблиця 18

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Процентна ставка, i	Залишок боргу, D	Процентний платіж, I	Річна витрата за погашенням основного боргу R	Річна строкова сплата, Y
1	0,06	40	2,4000	7,0959	9,495856017
2	0,06	32,9041	1,9742	7,5216	9,495856017
3	0,08	25,3825	2,0306	7,8187	9,849274874
4	0,08	17,5639	1,4051	8,4442	9,849274874
5	0,08	9,1197	0,7296	9,1197	9,849274874
Разом			**8,5395**	**40,0000**	**48,5395**

Таким чином, збільшення процентної ставки приводить до збільшення щорічних виплат. Як видно з прикладу, за 3 роки зміна ставки на 2 % привела до збільшення сумарної переплати на 1,0603 тис. дол. і складає 48,5395 тис. дол.

3. Погашення позики рівними виплатами основного боргу. За умовою завдання погашення основного боргу повинне проводитися рівними щорічними платежами. У цьому випадку розміри платежів за основним боргом будуть рівні:

$$\frac{D}{n} = R_1 = R_2 = \cdots = R_k = R_k.$$

$$R = \frac{40}{5} = 8\ (\text{тис. дол.}).$$

Залишок основного боргу на початку кожного розрахункового періоду (D_k) визначається як:

$$D_k = D - R \cdot (k - 1),$$

де D – сума всього боргу;

k – номер розрахункового періоду.

Наприклад

Величина строкової сплати в кожному розрахунковому періоді рівна:

$$Y_k = D_k \times i + R.$$

Наприклад, $Y_4 = D_4 \times i + R = (D - R \times (k - 1)) \times i + R = (40 - -8 \times (4 - 1)) \times 0{,}06 + 8 = 8{,}96\ (\text{тис. дол.})$

Величина процентного платежу для k-го розрахункового періоду визначається за формулою:

$$I_k = D_k \times i.$$

Наприклад, $I_4 = D_4 \times i = (D - R \times (k - 1)) \cdot i = (40 - 8 \times (4 - -1)) \times 0{,}06 = 0{,}96\ (\text{тис. дол.})$

У табл. 19 представлений поетапний план погашення боргу.

Таблиця 19

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу, D	Процентний платіж, I	Річна витрата за погашенням основного боргу, R	Річна строкова сплата, Y
1	40	2,4	8,0000	10,4000
2	32,0000	1,92	8,0000	9,9200
3	24,0000	1,44	8,0000	9,4400
4	16,0000	0,96	8,0000	8,9600
5	8,0000	0,48	8,0000	8,4800
Разом		**7,2**	**40,0000**	**47,2000**

Таким чином, при погашенні позики рівними виплатами основного боргу з часом річна строкова сплата зменшується. Це відбувається за рахунок того, що залишок боргу і процентний платіж з кожною виплатою зменшується. Сумарна переплата складає 7,2 тис. дол.

4. Погашення позики змінними виплатами основного боргу (зміна виплат в арифметичній прогресії). За умовами контракту передбачено погашення основного боргу платежами, що зростають в арифметичній прогресії з різницею d = 1 тис. дол.

У цьому випадку величина виплати основного боргу в періоді k рівна:

$$R_k = R_1 \pm (n - k) \times d.$$

Величина основного боргу рівна сумі всіх виплат, тобто сумі членів арифметичної прогресії:

$$D = \frac{(R_1 + R_1 + (n-1) \times d) \times n}{2} = \frac{n}{2} \times (2 \times R_1 + (n-1) \times d).$$

Величина першої виплати основного для прогресії розраховується за формулою:

$$R_1 = \frac{D}{n} \mp \frac{(n-1)}{2} \times d.$$

У табл. 20 представлений поетапний план погашення боргу.

Таблиця 20

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу, D	Процентний платіж, I	Річна витрата за погашенням основного боргу, R	Річна строкова сплата, Y
1	40,00	2,40	6,00	8,40
2	34,00	2,04	7,00	9,04
3	27,00	1,62	8,00	9,62
4	19,00	1,14	9,00	10,14
5	10,00	0,60	10,00	10,60
Разом		**7,80**	**40,00**	**47,80**

Таким чином, сумарні виплати за кредитом складуть 47,8 тис. дол., преплата при цьому буде рівна 7,8 тис. дол. відповідно.

5. Зміна виплат у геометричній прогресії. Одним з варіантів погашення кредитної заборгованості є погашення основного боргу платежами, кожен з яких більше або менше попереднього в q разів.

Величина основного боргу визначається за формулою геометричної прогресії, де R_1 – перший член прогресії і одночасно перший платіж основного боргу, q – знаменник прогресії. Тоді основний борг D рівний:

$$D = R_1 \times \frac{q^n - 1}{q - 1}, \text{ де } q > 1,$$

або

$$D = R_1 \times \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ де } q < 1.$$

Звідси, величина першої виплати основного розраховується за формулою:

$$R_1 = D \times \frac{q - 1}{q^n - 1}, \text{ де } q > 1,$$

або

$$R_1 = D \times \frac{1 - q}{1 - q^n}, \text{ де } q < 1.$$

У табл. 21 представлений поетапний план погашення боргу, враховуючи, що виплати основного боргу повинні зростати на 5 % щорічно, тобто:

Таблиця 21

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу, D	Процентний платіж, I	Річна витрата за погашенням основного боргу, R	Річна строкова сплата, Y
1	40	2,4	7,2390	9,6390
2	32,7610	1,96566048	7,6009	9,5666
3	25,1601	1,50960399	7,9810	9,4906
4	17,1791	1,03074468	8,3800	9,4108
5	8,7990	0,5279424	8,7990	9,3270
Разом		**7,43395155**	**40,0000**	**47,4340**

Таким чином, сумарні виплати за кредитом складуть 47,434 тис. дол., переплата при цьому буде рівна 7,434 тис. дол. відповідно.

6. Конверсія позик. Зміна умов погашення кредитів називається *конверсією позики.* При будь-якому методі конверсії спочатку визначаються сума виплаченого основного боргу і величина непогашеної його частини. Непогашена частина боргу розглядається як новий борг, що підлягає сплаті на нових умовах.

Розглянемо один з варіантів конверсії, коли змінюються термін погашення позики і процентна ставка, а строкові сплати як за старими, так і за новими умовами проводяться рівними платежами; відсотки нараховуються один раз у кінці кожного розрахункового періоду.

Позначимо параметри позик:

n – первинний термін погашення позик до конверсії;

n_1 – термін, на який продовжений період погашення в результаті конверсії;

k – число сплачених розрахункових періодів до конверсії;

i – процентна ставка до конверсії;

i_1– процентна ставка після конверсії;

Y – величина строкової сплати до конверсії;

Y_1 – величина строкової сплати після конверсії;

D – величина основного боргу;

D_{n-k} – залишок боргу на момент конверсії.

Для складання плану погашення конверсійної позики визначають:

1) величину строкової сплати за старими умовами:

$$Y = D \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1};$$

2) залишок боргу на момент конверсії:

$$D_{n-k} = Y \times \frac{(1+i)^{n-k} - 1}{(1+i)^{n-k} \times i};$$

3) величину строкової сплати за новими умовами:

$$Y_1 = D_{n-k} \times \frac{i_1 \times (1+i_1)^{n-k+n_1}}{(1+i_1)^{n-k+n_1} - 1}.$$

Величина строкової сплати за старими умовами складе:

$$Y = 40 \times \frac{0{,}06 \times (1 + 0{,}06)^5}{(1 + 0{,}06)^5 - 1} \approx 9{,}49586 \text{ (тис. дол.)}$$

Залишок боргу на момент конверсії:

$$D_4 = 9{,}49586 \times \frac{(1 + 0{,}06)^{5-k} - 1}{(1 + 0{,}06)^{5-3} \times 0{,}06} = 17{,}4097 \text{ (тис. дол.)}$$

Величина строкової сплати за новими умовами:

$$Y_1 = 17{,}4097 \times \frac{0{,}1 \times (1 + 0{,}1)^{5-3+2}}{(1 + 0{,}1)^{5-3+2} - 1} \approx 5{,}4923 \text{ (тис. дол.)}.$$

План погашення конверсованого кредиту представлений в табл. 22.

Таблиця 22

План погашення боргу, тис. дол.

Рік	Залишок боргу, D	Процентний платіж, I	Річна витрата за погашенням основного боргу, R	Річна строкова сплата, Y
до конверсії				
1	40	2,4	7,0959	9,4959
2	32,9041	1,97424864	7,5216	9,4959
3	25,3825	1,5229522	7,9729	9,4959
після конверсії				
4	17,4096	1,74096328	3,7513	5,4922
5	13,6584	1,36583652	4,1264	5,4922
6	9,532	0,95319709	4,539	5,4922
7	4,9929	0,49929371	4,9929	5,4922
Разом		**10,4564914**	**40**	**50,4565**

Таким чином, після зміни умов виплати боргу сумарна сума виплат склала 50,4565 тис. дол., що на 2,9772 тис. дол. більше, ніж величина виплат за первісним планом погашення.

Практична завдання № 7. Розрахунок та аналіз показників ефективності фінансових операцій

Мета – закріплення теоретичного і практичного матеріалу, набуття навиків розрахунку показників ефективності фінансових операцій.

Завдання

Частина 1. Фірмі надали кредит на 250 днів під 12 % річних. Комісійні склали 0,5 % від суми кредиту.

Необхідно

1. Визначити прибутковість операції для кредитора у вигляді річної ставки складних відсотків, якщо кредит був виданий під прості відсотки (365/360), під складні відсотки (365/365).

2. Визначити прибутковість облікової операції, якщо в початкових цих вказана сума векселя і ставку дисконту.

Частина 2. Розглядаються пропозиції двох фірм щодо будівництва промислового об'єкта. У табл. 23 вказані початкові умови для кожної фірми.

Таблиця 23

Початкові умови фірм щодо будівництва промислового об'єкта

Параметри	Умови фірми А	Умови фірми Б
Ціна нового об'єкта, млн грн	50,0	55,0
Термін будівництва, років	1	1
Авансові платежі (вносяться при підписанні контракту), млн грн	20,0	10,0
Термін кредиту, років	8	7
Пільговий період, років	2	3
Ставка відсотків, %	10,0	11,0

Кредит погашається рівними річними виплатами, ставка порівняння $q = 12$ %. Вибрати оптимальні умови контракту.

Частина 3. Умови двох контрактів такі: $P_1 = 10{,}0$ млн грн, $P_2 = 12{,}0$ млн грн, $i_1 = 8$ %, $i_2 = 7$ %, $n_1 = 5$ років, $n_2 = 4$ роки. Визначити граничні параметри другого контракту, прийнявши ставку порівняння $q = 10$ %. Визначити граничні параметри другого контракту, якщо $n_1 = n_2 = 5$ років.

Методичні рекомендації

Загальним принципом визначення фінансової ефективності різних операцій є прибутковість, еквівалентна прибутковості від проведення позикової операції, тобто проблема зводиться до визначення розрахункової процентної ставки, що відображає загальну прибутковість на вкладений капітал.

Розрахункову процентну ставку в позикових операціях зазвичай називають ефективною ставкою. У розрахунках за оцінкою облігацій її називають прибутковістю на момент погашення. Проте у вітчизняній економічній літературі найчастіше розрахункову процентну ставку позначають терміном "повна прибутковість" (ПП).

Для запису формул розрахунку ставок повної прибутковості приймемо такі позначення:

$i_э$ – ставка повної прибутковості;

i – процентна ставка;

g – відсоток комісійних утримань від суми кредиту;

n – термін погашення заборгованості ($n = t/K$);

n' – часовий інтервал від моменту обліку векселя до моменту сплати за ним;

d – облікова ставка.

1. Розрахунок ставки повної прибутковості з урахуванням комісійних

Початкові дані: t = 250, i = 0,12, g = 0,005, K = 360 (365).

Рішення:

а) при видачі позики під прості відсотки (365/360):

$$i_э = \left(\frac{1 + n \times i}{1 - g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1 + \frac{250}{360} \times 0{,}12}{1 - 0{,}005}\right)^{\frac{360}{250}} - 1 = 0{,}130296;$$

б) при видачі позики під складні відсотки (365/365):

$$i_э = \frac{1 + i}{(1 - g)^{\frac{1}{n}}} - 1 = \frac{1 + 0{,}12}{(1 - 0{,}005)^{\frac{365}{250}}} - 1 = 0{,}128227;$$

в) при реалізації облікової операції:

$$i_э = \left(\frac{1}{1 - n' \times d - g}\right)^{\frac{1}{n}} - 1 = \left(\frac{1}{1 - \frac{250}{360} \times 0{,}12 - 0{,}005}\right)^{\frac{365}{250}} - 1 = 0{,}144562.$$

2. Вибір оптимальних умов у комерційних контрактах

Аналіз фінансових наслідків реалізації комерційних контрактів може проводитися на основі використання методу порівняння сучасних величин всіх платежів, передбачених цими контрактами, коли всі платежі приводяться до моменту початку їх дії.

Сучасна величина всіх витрат характеризуватиме грошову суму, яка з нарахованими на неї відсотками забезпечить виконання всіх платежів, передбачених контрактом. Для покупця найбільш вигідною є найменша сучасна величина.

При обчисленні сучасних величин дисконтування всіх платежів, передбачених контрактами, проводиться за єдиною процентною ставкою, так званою *ставкою порівняння.*

При аналізі умов різних контрактів необхідно враховувати, що збільшення терміну постачання скорочує сучасну величину витрат покупця. Тому зіставні результати можуть бути отримані у тому випадку, коли терміни постачань однакові.

При одноразовому постачанні товару заборгованість, як правило, визначається на момент постачання:

$$A = Q + I \times V^{t+L} + Y \times a_{n,q} \times V^{t+L},$$

де Q – сума авансового платежу;

I – відсотки в пільговому періоді (прості або складні);

$V = (1 + q)^{-1}$;

t – час від моменту укладення оборудки до моменту постачання товару;

L – час пільгового періоду;

$a_{n,q}$ – коефіцієнт приведення;

n – термін погашення заборгованості;

Y – величина щорічних строкових сплат.

При постачанні товару партіями із заздалегідь обумовленими термінами постачання для кожної партії встановлюють відповідні моменти часу, що визначають заборгованість:

$$A = Q_1 + Q_2 \times V^t + I \times a_{L,q} \times V^t + Y \times a_{L,q} \times V^{t+L},$$

де t – термін виплати останнього авансового платежу;

Q_1 і Q_2 – суми авансових платежів;

L – пільговий період (відсотки виплачуються щорічно);

n – термін погашення заборгованості (погашення проводиться рівними річними платежами);

i – договірна процентна ставка;

I – нараховані за пільговий період відсотки;

q – ставка порівняння;

$Y = D \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$ – величина щорічних строкових сплат;

D – накопичена заборгованість на кінець терміну постачання за умови, що на авансові платежі нараховуються відсотки:

$$D = \sum_j M_j \times (1+i)^{T_j} - \sum_k Q_k \times (1+i)^{T_k},$$

де M_j – вартість кожної партії товару, що поставляється ($M = \sum M_j$ – загальна вартість товару);

T_j – терміни постачань кожній партії товару ($T = \sum T_j.$ – загальний термін);

T_k – час від моменту виплати останнього авансового платежу до кінця терміну постачань ($T_k = T - k$).

Зважаючи на початкові дані завдання, в табл. 24 представлені розрахункові значення основних параметрів комерційних контрактів.

Таблиця 24

Розрахункові значення основних параметрів комерційних контрактів

Параметри контрактів	Умовне позначення	А	Б
1	2	3	4
Сума авансового платежу, млн грн	Q	20	10
Залишок заборгованості після сплати авансу, млн грн	D	30	45
Час від моменту укладення контракту до моменту постачання товару, років	t	1	1

Закінчення табл. 24

1	2	3	4
Термін погашення заборгованості (термін кредиту – пільговий період), років	n	6	4
Ставка відсотків за кредитом	i	0,1	0,11
Пільговий період, років	L	2	3
Множник дисконтування з параметром (t)	V^t	0,892857	0,892857
Множник дисконтування з параметром $(t+L)$	V^{t+L}	0,71178	0,635518
Коефіцієнт наведення з параметрами (n,q)	$a_{n,q}$	4,111407	3,037349
Коефіцієнт наведення з параметрами (L,q)	$a_{L,q}$	1,690051	2,401831
Сучасна вартість заборгованості, млн грн	$\boldsymbol{A}$	**44,68474**	**48,61349**

Таким чином, умови фірми А є переважнішими, оскільки сучасна величина кредиту за цією фірмою менша, ніж за фірмою Б.

3. Граничні значення параметрів комерційних контрактів. Для порівняння конкурентоспроможності двох альтернативних контрактів використовується метод визначення граничних значень параметрів, при яких зіставляються ціни або процентні ставки.

Граничним значенням параметра контракту є величина, конкурентоспроможність, що забезпечує його, щодо іншого, базового, тобто порівнюваного з ним, контракту при незмінності решти умов.

Облік всіх умов контрактів при використанні граничних значень їх параметрів повинен забезпечити рівність сучасних величин платежів покупця за обома контрактами.

$$P_1 \times \left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{-n_1} = P_2 \times \left(\frac{1+i_2}{1+q}\right)^{-n_2},$$

де P_1 і P_2 – вартість товару за умовами першого і другого контрактів;

i_1 і i_2 – процентні ставки;

n_1 і n_2 – терміни платежів;

q – ставка порівняння.

У табл. 25 представлені умови двох контрактів.

Таблиця 25

Умови двох контрактів

Параметри	Умовне позначення	Умови контракту А	Умови контракту Б
Вартість товару за умовами контракту, млн. грн.	P_i	10	12
Термін платежів, років	n_i	5	4
Ставка порівняння, %	q	10	
Ставка відсотків, %	i	8	7

а) з наведеного виразу знайдемо i_2^* і P_2^*:

$$i_2^* = (1+q) \times \left[\frac{P_2}{P_1} \times \left(\frac{1+i_1}{1+q}\right)^{n_1}\right]^{\frac{1}{n_2}} - 1 = (1+0{,}1) \times \left[\frac{12}{10} \times \left(\frac{1+0{,}08}{1+0{,}1}\right)^{5}\right]^{\frac{1}{4}} - 1 = \\ = 0{,}125193,$$

$$P_2^* = P_1 \times \frac{(1+i_2)^{n_2}}{(1+i_1)^{n_1}} \times (1+q)^{n_1-n_2} = 10 \times \frac{(1+0{,}07)^4}{(1+0{,}08)^5} \times (1+0{,}1)^{5-4} = \\ = 9{,}813163 \text{ (млн грн)};$$

б) значення i_2^* і P_2^* істотно залежать від прийнятої ставки порівняння і терміну кредитування. У випадку якщо $n_1 = n_2 = n$, то для розрахунків граничних значень параметрів операції можна обійтися без ставки порівняння, а саме:

$$i_2^* = (1+i_1) \times \left[\frac{P_1}{P_2}\right]^{\frac{1}{n}} - 1 = (1+0{,}08) \times \left[\frac{10}{12}\right]^{\frac{1}{5}} - 1 = 0{,}0413279,$$

$$P_2^* = P_1 \times \left(\frac{1+i_1}{1+i_2}\right)^{n} = 10 \times \left(\frac{1+0{,}08}{1+0{,}07}\right)^{5} = 10{,}476106 \text{ (млн грн)}.$$

Таким чином, за умови, що терміни контрактів однакові, переважно будуть умови першого, оскільки $i_2^* < i_2$ і $P_2^* < P_2$.

Рекомендована література

Основна

1. Башарин Г. П. Начала финансовой математики / Г. П. Башарин. – М. : ИНФРА-М, 1998. – 160 с.
2. Бочаров П. П. Финансовая математика : учебник / П. П. Бочаров, Ю.Ф. Касимов. – М. : ИНФРА-М, 2002. – 624 с.
3. Долінський Л. Б. Фінансові обчислення та аналіз цінних паперів : навч. посібн. / Л. Б. Долінський. – К. : Майстер-Клас, 2005. – 192 с.
4. Ковалев В. В. Курс финансовых вычислений / В. В. Ковалев, В. А. Уланов. – М. : Финансы и статистика, 2001. – 328 с.
5. Малыхин В. И. Финансовая математика : учебн. пособ. для вузов / В. И. Малыхин. – М. : ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 247 с.
6. Медведев Г. А. Начальный курс финансовой математики : учебн. пособ. / Г. А. Медведев. – М. : ИНФРА-М, 2000. – 267 с.
7. Мелкумов Я. С. Финансовые вычисления. Теория и практика : Учеб. пособ. / Я. С. Мелкумов. – М. : ИНФРА-М, 2007. – 408 с.
8. Роздавальний матеріал з навчальної дисципліни "Фінансова математика" для студентів напряму підготовки "Економічна кібернетика" денної форми навчання / укл. О. В. Панасенко. – Х. : Вид. ХНЕУ, 2010. – 16 с.
9. Фомин Г. П. Финансовая математика: 300 примеров и задач : учебн. пособ. / Г. П. Фомин. – М. : Гном-Пресс, 2000. – 120 с.
10. Четыркин Е. М. Финансовая математика : учебник / Е. М. Четыркин. – М. : Дело, 2004. – 400 с.

Додаткова

11. Бакаєв Л. О. Кількісні методи в управлінні інвестиціями : навч. посібн. / Л. О. Бакаєв. – К. : КНЕУ, 2000. – 151 с.
12. Бланк И. А. Инвестиционный менеджмент : учебн. курс / И. А. Бланк. – К. : Эльга-Н; Ника-Центр, 2001. – 448 с.

13. Вітлінський В. В. Аналіз, моделювання та управління економічним ризиком : навч.-метод. посібн. для самост. вивч. дисц. / В. В. Вітлінський, П. І. Верченко. – К. : КНЕУ, 2000. – 292 с.

14. Кочович Е. Финансовая математика: Теория и практика финансово-банковских расчетов / Е. Кочович ; пер. с серб. – М. : Финансы и статистика, 1994. – 268 с.

15. Лукасевич И. Я. Анализ финансовых операций. Методы, модели, техника вычислений / И. Я. Лукасевич. – М. : Финансы ; ЮНИТИ, 1998. – 400 с.

16. Шимон Беннинга. Финансовое моделирование с использованием Excel / Шимон Беннинга. – М. : ООО "И.Д. Вильямс", 2007. – 592 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Методичні рекомендації до виконання практичних завдань з навчальної дисципліни "ФІНАНСОВА МАТЕМАТИКА"

для студентів напряму підготовки 6.030502 "Економічна кібернетика" денної форми навчання

Укладачі: **Панасенко** Оксана Володимирівна
Прокопович Світлана Валеріївна
Смірнова Анастасія Юріївна

Відповідальний за випуск **Клебанова Т. С.**

Редактор **Бутенко В. О.**

Коректор **Бриль В. О.**

План 2013 р. Поз. № 98.

Підп. до друку Формат 60 х 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.

Ум.-друк. арк. 4,0. Обл.-вид. арк. 5,0. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи ***Дк № 481 від 13.06.2001 р.***