

Кантор Б. Я., Кунделев А. Ю., Мисюра Е. Ю.

**БИОМЕХАНИКА ГИПЕРУПРУГИХ
ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ**

Харьков
2006

Рекомендовано к печати ученым советом Института проблем машиностроения
им. А. Н. Подгорного НАНУ (протокол № 5 от 05.10.2006 г.)

Авторы: Б. Я. Кантор, А. Ю. Кунделев, Е. Ю. Мисюра.

Рецензенты: А. В. Мартыненко, доктор физ.-мат. наук, профессор, зав. кафедрой компьютерных технологий и математического моделирования в медицине Харьковского национального университета им. В. Н. Каразина; О. К. Морачковский, доктор технических наук, профессор, зав. кафедрой теоретической механики Национального технического университета «ХПИ».

Кантор Б. Я. Биомеханика гиперупругих тел вращения / Б. Я. Кантор,
А. Ю. Кунделев, Е. Ю. Мисюра. – Харьков: Форт, 2006. – 191 с.

ISBN:

В книге построены математические модели артерий и левого желудочка сердца. Численно исследовано влияние рубцов в хронической стадии инфаркта миокарда в стенке желудочка в зависимости от их расположения и размеров на НДС и конечно-диастолический внутрисполостной объем. Решены задачи нестационарной гемодинамики крупных кровеносных сосудов млекопитающих. Показано, что влияние ряда физических и геометрических характеристик стенок артерии (начального продольного натяжения, степени коничности, локальных стенозов и др.) на механические и гидродинамические параметры кровеносной системы может быть существенным.

Для специалистов в области биомеханики и кардиологии.

ISBN:

© Кантор Б.Я., Кунделев А.Ю., Мисюра Е.Ю., 2006

*Гиперупругость тел прекрасна
(недаром их друг к другу тянет...)
Попытки их понять напрасны,
Но без науки жизнь завянет.*

ПРЕДИСЛОВИЕ

Во многих областях механики и ее практических приложений приходится иметь дело с резиноподобными материалами, а, следовательно, с теорией податливых (низкомодульных) упругих материалов, иначе говоря, с теорией *гиперупругости*. В технике такие материалы применяются для изготовления разного вида опор, амортизаторов, шлангов и им подобных. В биологических объектах, например в телах животных, свойствами гиперупругости обладают мышечная ткань, стенки сосудов, сердца, желудка, мочевого пузыря и т.д.

В последние десятилетия большое развитие получила биомеханика, в частности, биомеханика сердечно-сосудистой системы животных. Исследования ее проблем требуют совместного применения математического моделирования и всей совокупности методов компьютерной механики деформируемого твердого тела и гидромеханики. Построение математических моделей объектов кардиологии, т.е. формулировка задач в понятиях механики (перемещение, деформация, напряжение, давление, скорость, упругость, вязкость) начинается с введения основанного на экспериментальных данных представления стенок сердца и сосудов как гиперупругого материала. Форма рассматриваемого объекта, как правило, разумно упрощается с тем, чтобы уменьшить вычислительные затраты. Вводится также ряд предположений, которые позволяют пренебречь факторами, несущественными для достижения целей исследования. Функционирование и состояние изучаемого объекта формализуется в виде системы уравнений механики, начальных и граничных условий. Так как задачи биомеханики физически и геометрически нелинейны, далее выбирается (или разрабатывается) эффективный численный метод и выполняется решение задачи.

Заметим, что одной из существенных и актуальных проблем биомеханики, является стремление качественно определить влияние параметров системы путем численного решения задач, а не получение точных

сведений об особенностях функционирования и состояния объекта. Последнее невозможно, так как точные механические свойства, размеры и особенности формы конкретного сердца, сосуда и им подобных получить или учесть, как правило, не удастся. Тем не менее, получаемые сведения оказываются полезными для диагностики и планирования лечения, так как часто именно механические аспекты работы здорового или больного органа являются определяющими.

Книга состоит из двух частей, объединенных по тематике свойствами материала рассматриваемых объектов (гиперупругость) и общностью формы (тела вращения), но отличающихся постановкой и методами решения задач.

Первая часть посвящена задаче исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) левого желудочка (ЛЖ) сердца с однородной и кусочно-однородной стенкой в пассивной стадии сердечного цикла (диастола), вторая – гидроупругой задаче пульсирующего течения крови в артерии. Математическая модель ЛЖ представлена гиперупругим составным эллипсоидом, модель артерии – гиперупругим толстостенным цилиндром, содержащим поток несжимаемой Ньютонской жидкости.

Во введении первой части обоснована актуальность темы, определены объект и предмет исследования, сформулированы его цель и задачи.

В первой главе приведен обзор точных и численных решений методом конечных элементов (МКЭ) линейных и нелинейных задач для тел вращения, дан обзор работ по численному исследованию НДС моделей здорового ЛЖ и ЛЖ при инфаркте миокарда (ИМ), описаны потенциалы, используемые в литературе для изучения биомеханики сердца.

Во второй главе изложена методика решения осесимметричных (с кручением и без него) физически и геометрически нелинейных задач для почти несжимаемых кусочно-однородных транслопных и изотропных гиперупругих тел вращения на основе вариационного принципа возможных перемещений в приращениях, реализованный шаговым алгоритмом МКЭ. Предложен и обоснован новый потенциал для почти несжимаемого ортотропного гиперупругого материала стенок ЛЖ.

В третьей главе описаны алгоритм, структура и особенности программы численного решения определения НДС, проведена оценка достоверности результатов, подтвержденной совпадением численных и точных решений линейных и нелинейных задач деформирования полых цилиндра и сферы под внутренним давлением.

В четвертой главе построена математическая модель ЛЖ в виде усеченного и замкнутого кусочно-однородного составного толстостенных эллипсоидов, проведен анализ влияния на НДС модели ЛЖ четырех видов жестких включений, моделирующих рубцовую ткань, образующуюся в хронической стадии ИМ в зонах, лишенных нормального кровообращения.

Вторая часть книги начинается с обзора и анализа исследований, посвященных гидроупругому деформированию сосудов.

В пятой главе рассмотрены наиболее известные задачи, уровень их сложности, а также существующие пути решения. Шестая глава содержит постановку и решение нестационарной гидроупругой задачи о пульсирующем течении крови в цилиндрическом и слабо-коническом толстостенном гиперупругом сосуде (артерии).

Седьмая глава посвящена описанию методики численного решения задачи гидроупругого деформирования крупных кровеносных сосудов, разработке алгоритмов решения изучаемого класса задач и апробации методики. Проведено сравнение с результатами аналитических и численных решений ряда задач теории деформируемого твердого тела и гидродинамики.

В восьмой главе выполнено исследование течения вязкой несжимаемой жидкости, порождаемого периодически изменяющимся градиентом давления, в толстостенном сосуде с гиперупругими стенками на примере течения крови в крупных кровеносных сосудах.

В конце каждой части книги приведены выводы, суммирующие результаты исследований.

Авторы понимают, что при работе над книгой им не удалось избежать отдельных погрешностей и неясностей, поэтому все замечания читателей примут с благодарностью.

БИОМЕХАНИКА ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА С КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ СТЕНКОЙ

Интерес к физически и геометрически нелинейным задачам механики деформируемого твердого тела связан с их большим теоретическим значением для развития нелинейной механики, а также потребностями современной техники. В настоящее время в научной литературе известно много публикаций, посвященных изучению задач об определении НДС однородных и кусочно-однородных изотропных тел вращения при малых деформациях. Однако существенно меньше работ, в которых одновременно учитываются физическая и геометрическая нелинейности (податливость тела при больших деформациях) и анизотропия материала. Учет двух видов нелинейности необходим для исследования поведения резиноподобных тел.

Именно такая постановка проблемы характерна, в частности, для биомеханики – одного из сравнительно новых и перспективных направлений механики деформируемого твердого тела. Многие достигнута в области моделирования сердечно-сосудистой системы человека и исследования различных заболеваний сердца и его сосудов с точки зрения механики. Особый интерес представляет анализ НДС стенок сердца, в частности стенок его ЛЖ и насосной функции. Материал сердца обладает ярко выраженными нелинейными свойствами, трансверсальной изотропией, большой податливостью и кусочной однородностью при различных заболеваниях. Именно поэтому при решении задач необходим учет физической и геометрической нелинейностей.

Таким образом, развитие методики решения физически и геометрически нелинейных задач для почти несжимаемых кусочно-однородных анизотропных гиперупругих тел вращения и анализ их НДС является актуальной проблемой.

Следует подчеркнуть, что точные решения таких задач получены лишь для однородных тел простой формы (цилиндр, сфера, круглая

пластина) в линейной постановке. Решения нелинейных задач известны только для упомянутых форм и нескольких простых физических законов, поэтому для исследования НДС кусочно-однородных тел вращения произвольной формы необходимо применение таких численных методов как метод конечных разностей, вариационно-разностный метод, МКЭ. Наиболее эффективным и широко используемым является МКЭ, который реализует вариационный принцип возможных перемещений.

Основное внимание в книге уделяется развитию теории и разработке метода решения физически и геометрически нелинейных задач для почти несжимаемых кусочно-однородных трансверсально-изотропных гиперупругих тел вращения в осесимметричной (с кручением и без него) постановке, исследованию и анализу их НДС, в частности, задач о деформировании ЛЖ сердца, представленного в виде полого толстостенного эллипсоидального тела вращения.

Первая часть книги посвящена разработке методики численного решения осесимметричных физически и геометрически нелинейных задач для почти несжимаемых кусочно-однородных трансверсально-изотропных гиперупругих тел вращения и анализ их НДС с применением шагового алгоритма МКЭ на основе принципа возможных перемещений в приращениях.

ГЛАВА 1

ОБЗОР И АНАЛИЗ ИССЛЕДОВАНИЙ ГИПЕРУПРУГИХ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

В различных областях техники в современных конструкциях часто используются узлы и детали в виде тел вращения. Поведение таких объектов изучает механика деформируемого твердого тела. Большой интерес для нее представляет развитие методов решения физически и геометрически нелинейных задач, а также исследование и анализ НДС тел вращения.

Теоретическим и прикладным проблемам механики деформируемого твердого тела, связанным с изучением НДС тел вращения, посвящено большое количество работ отечественных и зарубежных авторов. Наиболее сложную проблему представляет анализ НДС анизотропных тел вращения сложной формы и неоднородной структуры в физически и геометрически нелинейной постановке. Интерес к этой области исследований вызван не только внутренними стимулами развития науки, но и запросами практики.

Вопросами постановки и точного решения линейных задач для тел вращения простой формы занимались многие исследователи: И. Н. Снеддон и др. [200], С. П. Тимошенко и др. [202], Л. И. Седов [199], К. Ф. Черных [210], А. П. Филин [208], В. А. Ломакин [183], Х. Хан [209], Ю. Н. Подильчук [196] и др.

Для полого однородного цилиндра (задача Ламе) решение дано в работах [199, 200, 202, 209]. В [199] построено решение для составного цилиндра (один цилиндр надет с натягом на другой). Точное решение для круглого диска приведено в [202, 208]. Для толстостенной сферы решение дано в [208, 209]. В монографии [210] представлены точные решения для ортотропных толстостенного полого и сплошного цилиндров. В [183] построены точные решения для неоднородных полых шара и цилиндрической трубы под действием внутреннего и внешнего давлений и сплошного круглого цилиндра, подверженного растяжению. В [196] даны точные решения первой и второй основных задач теории упругости для сферы, цилиндра, сжатого и вытянутого сфероида, двух- и однополостного гиперboloида вращения, параболоида вращения и параболического цилиндра.

Аналитические решения физически и геометрически нелинейных задач получены А. И. Лурье [184, 185] и К. Ф. Черных [210] только для сжимаемых цилиндра и сферы.

В [185] представлены универсальные точные решения задачи Ламе для нелинейно-упругих цилиндрической трубы и полого шара, подверженных действию давления изнутри и извне. Точные решения задачи Ламе для полых сферы и цилиндра при использовании полулинейного потенциала Джона описаны в [184, 185]. В [210] построено универсальное решение для толстостенного цилиндра из несжимаемого материала, нагруженного внешним давлением. Полученное решение дает возможность учесть изотропию, ортотропию и трансверсальную изотропию материала. В [201] дано аналитическое решение геометрически и физически нелинейной задачи сжатия – растяжения упругого несжимаемого цилиндра, торцы которого жестко скреплены с абсолютно твердыми дисками. Материал цилиндра принят неогуковским.

Аналитические методы практически невозможно применять при любом отклонении от простейшей постановки задачи. Так, к существенному усложнению приводит необходимость учета сжимаемости или почти несжимаемости материала, неоднородности его механических свойств, анизотропии, неклассической формы тела и т. п. В таких случаях применяют различные численные методы, в частности методы, основанные на использовании вариационных принципов механики. Наиболее широкое применение получили МКЭ, метод Ритца и вариационно-разностный метод.

Вначале остановимся на задачах, в которых МКЭ изучено НДС высокоэластичных элементов конструкций простой формы (цилиндр, конус, круглая пластина). Большой вклад в их решение МКЭ внесли Дж. Оден [192], А. С. Сахаров и др. [186], В. В. Киричевский и др. [171], Н. Л. Пацко [193] и др.

В [192] на основе потенциала Муни получено решение нелинейных задач для несжимаемых изотропных гиперупругих тел вращения (толстостенный упругий сосуд под действием внутреннего давления, круглая толстая пластина под действием меняющегося по кусочно-линейному закону внешнего давления) различной формы. Результаты численного решения для толстостенного цилиндра (плоское деформированное состояние), нагруженного внутренним давлением, практически совпали с точным решением.

В [186] на основе итеративных методов решены линейная и нелинейная задачи (геометрически нелинейная и физически линейная,

геометрически и физически нелинейная) следующих тел вращения: полых толстостенных сферы с центральным отверстием, усеченного конуса и прямоугольной плиты, находящихся под действием равномерно распределенной нагрузки. С целью проверки алгоритма на основе интегрального закона решена геометрическая нелинейная задача для толстой круглой пластины, подверженной равномерной нагрузке [171, 186]. Численное решение практически совпало с точным решением С. П. Тимошенко.

В биомеханике одной из важных и сложных проблем, изучающих поведение высокоэластичных тел, является исследование НДС стенок сердца. В современной научной литературе [3, 4, 124, 125, 134 – 136], а также в настоящей книге ей уделяется значительное внимание. Сложность этих задач связана не только с непростой формой изучаемых объектов, но и сильной нелинейностью механических свойств материала, а также невозможностью пренебрегать величиной перемещений по сравнению с характерными размерами объекта. При этом задача становится геометрически нелинейной.

Стенка ЛЖ состоит из трех слоев: эндокард, миокард, эпикард. Основным компонентом стенки является миокард. Он состоит из многих компонент, однако, большую по объему часть (0,90) составляют кардиомиоциты [163]. Миофибриллы (0,36 – 0,40 объема кардиомиоцитов) – мышечные волокна, способные сокращаться в активной фазе сердечного цикла – систоле, расположены упорядочено, слоями. Так как их жесткость больше жесткости других компонент миокарда, то его математическую модель обычно принимают в виде однонаправленного армированного трансверсально-изотропного композита. Миофибриллы образуют спирали, направление которых (угол между касательной к ним и осями глобальной системы координат) меняется по толщине стенки и по меридиану оболочки ЛЖ. Таким образом, материал стенки является неоднородно трансверсально-изотропным.

Впервые распределение угла спирали мышечных волокон по толщине стенки ЛЖ было изучено зарубежными авторами и описано в статье [113]. Установлено, что угол между касательной к окружности и направлением мышечных волокон меняется по толщине стенки. Направление миофибрилл в середине толщины стенки близко к окружному, на внутренней поверхности угол составляет от -40° до -60° , на внешней – около $+60^\circ$. В статье [76] эти данные были подтверждены с помощью трехмерного МКЭ и измерений поперечных сечений сердца.

Пренебрежение разницей в жесткостях мышечных волокон и остальной части материала стенки приводит к изотропии миокарда. Такая существенно упрощенная модель материала миокарда использована в статьях [67, 116].

Напомним, что в сердечном цикле выделяют две основные фазы: диастолу и систолу. В период диастолы происходит наполнение желудочка кровью. Под нарастающим внутренним давлением он расширяется, причем его объем увеличивается приблизительно вдвое. При этом окружная деформация на внутренней поверхности близка к 30 %. Давление в полости ЛЖ нарастает медленно, что позволяет считать процесс деформирования квазистатическим.

В период систолы происходит сокращение мышечных волокон стенки и выброс крови из ЛЖ в аорту. В этой фазе материал стенки проявляет активные свойства. В книге рассматривается только диастола.

ЛЖ является камерой сердца, строение стенки которой изучено систематически. Единой точки зрения относительно формы математической модели ЛЖ, приемлемой для изучения его НДС, нет (см. К. Каро и др. [188]).

На начальной стадии исследований ЛЖ представляли цилиндрическим телом вращения. Такая модель использовалась в работах T. Arts и др. [8, 9], R. S. Chadwick [24], J. G. Dumesnil и др. [2], T. S. Feit [39], Y. C. Rao и др. [97], A. Tozeren [118]. Форма реального ЛЖ заметно отличается от цилиндра, поэтому такая модель дает лишь весьма приближенное описание НДС. D. L. Fry и др. [42] представляли ЛЖ тонкостенным сферическим телом вращения. Такая модель считается неадекватной, так как в начале диастолы толщина стенки ЛЖ составляет 25-33 % его среднего радиуса, а в ее конце – 20 %. В последствии стали применять модель ЛЖ в виде толстостенного тела вращения (W. T. Hanna [50], I. Mirsky [85], C.W. Ursechel и др. [91]).

В последнее время наиболее часто используют эллипсоидальные модели ЛЖ. Получаемые на ее основе численные результаты хорошо согласуются с экспериментальными данными. Можно назвать работы следующих авторов K. D. Costa и др. [3, 4], A. L. Yettram и др. [134]. Модель ЛЖ в виде усеченного эллипсоида применена в статьях [4, 48, 59, 116, 119, 120].

Напряженное состояние ЛЖ в норме и при патологиях, в которых его механические свойства (модуль упругости, коэффициент Пуассона) однородны или являются гладкими функциями координат, изучено во

многих работах. Достаточно полный их обзор дан в статьях J. M. Guccione и др. [48], M. P. Nash и др. [92], T. P. Usyk и др. [119].

В работах A. McCulloch и др. [77] и F. C. P. Yin [135, 136] рассмотрели здоровый ЛЖ. В статьях [3, 4] построена модель ЛЖ в виде толстостенного эллипсоида из несжимаемого анизотропного материала. МКЭ решена осесимметричная физически и геометрически нелинейная трехмерная задача. Рассмотрена диастола. Результаты сопоставлены с решением задачи о нагруженном внутренним давлением толстостенном цилиндре [3].

Более сложным случаем является кусочно-линейная зависимость свойств ЛЖ от координат, возникающая в хронической стадии ИМ. В этой стадии заболевания часть стенки ЛЖ лишается кровоснабжения и рубцуется. Она приобретает жесткость большую, чем здоровая мышечная ткань. С точки зрения механики деформируемого твердого тела, такая задача относится к классу задач о жестком включении, однако в данном случае включение является не абсолютно, а относительно жестким.

Выделяют четыре основных вида ИМ, отличающихся степенью проникновения его по толщине стенки ЛЖ: эндокардиальный – зона поражения расположена около внутренней поверхности стенки ЛЖ, интрамуральный – находится внутри стенки, эпикардиальный – локализуется около внешней поверхности, трансмуральный – пронизывает всю толщину стенки.

Среди первых работ, в которых построена математическая модель ЛЖ при ИМ и изучены закономерности распределения в ней напряжений, можно назвать монографию Б. Я. Кантора, Н. И. Яблучанского, В. Е. Шляховева [163]. Авторами созданы математические модели, качественно воспроизводящие реальную биомеханику ЛЖ в физиологических условиях и патологических состояниях. В терминах кардиологии задача была описана Н. И. Яблучанским, Б. Я. Кантор сформулировал ее математически, составил программу для ее решения, построил представленную усеченным толстостенным эллипсоидом модель ЛЖ для различных случаев (хроническая стадия, диастола, четыре вида ИМ). Несмотря на кажущееся несовершенство модели, численные результаты практически совпали с экспериментальными, которые получил в лабораторных условиях В. Е. Шляховева.

Рассматриваемой проблемой занимались и зарубежные ученые. Большая часть исследований была выполнена для здорового ЛЖ, меньшее количество работ посвящено моделированию ЛЖ при ИМ.

Первая модель инфарктного ЛЖ была представлена Т. Е. Lowe и др. [73]. Авторы на сферической модели рассматривали только инфарктную зону, как относительно податливое выпучивание ЛЖ. Используя вариант этой модели, I. Mirsky и др. [84] и S. Radhakrishnan и др. [106] сделали вывод, что возможность разрыва зависит больше от толщины стенки зоны ИМ, чем от ее размера. Хотя эти исследования дали полезную информацию, но они не учитывали механическую связь между инфарктной и здоровой тканью ЛЖ.

Используя МКЭ, R. F. Janz и др. в статье [58] исследовали влияние хронического инфаркта верхушки (апекса) ЛЖ. Модель основана на осесимметричном представлении ЛЖ и учитывала большие деформации, миокард считался изотропным. Модель С. А. Vinson и др. [125] включала более реальную трехмерную геометрию и анизотропию материала стенки, но нелинейное поведение и распределение по толщине стенки угла наклона мышечных волокон не учитывались. На обеих моделях рассматривали период диастолы.

В статьях D. K. Vogen и др. [5, 17] и A. Needleman и др. [1] представлена модель ЛЖ в виде сферической изотропной мембраны, включающей влияние больших деформаций и мышечной активности. Изучались различные постинфарктные стадии ИМ верхушки ЛЖ, как выпучивание осесимметричной формы с различной жесткостью. Полученные зависимости “конечно-диастолические давление – объем” близки к данным [1], что указывает на возможность использования тонкостенной модели (безмоментной теории оболочек) для приближенного описания функционирования ЛЖ. Вычисленные зависимости для различных размеров зон ИМ близки к экспериментальным и клиническим данным. Авторы также установили рост напряжений и деформаций в близкой к границе зоне. Концентрация напряжений сильно зависит от жесткости зоны ИМ и сократимости здорового миокарда.

Мембранные модели можно применять для изучения глобального поведения ЛЖ, но анализ локальной концентрации напряжений требует учета влияния толстостенности модели. Такую модель ЛЖ использовал Р. Н. М. Bovendeerd [18] с учетом больших деформаций и анизотропии для изучения МКЭ поведения ЛЖ с несимметричной зоной ИМ в диастоле.

Для изучения ИМ верхушки ЛЖ в статье L. A. Taber и др. [116] построена модель тонкой эллипсоидальной оболочки в осесимметричной (с учетом кручения) физически и геометрически нелинейной постановке. Принято во внимание изменение по толщине стенки угла наклона

мышечных волокон. Материал считался несжимаемым и гиперупругим. Рассматривался хронический ИМ, когда рубцовая ткань в 5-7 раз жестче здоровой. Анализ выполнен для периодов диастолы и систолы.

Степень увеличения жесткости инфарктной ткани и ее оценка даны в статьях [5, 17] и К. В. Gurta и др. [25].

При решении задач биомеханики сердечно-сосудистой системы, в частности сердца, материал стенок которого обладает свойствами несжимаемости или малой сжимаемости, трансверсальной изотропии, гиперупругости, применяются потенциалы сложной структуры. Различные формы таких потенциалов приведены в работах [4, 48, 49, 59, 120, 121].

Так, в [53] введен феноменологический двухчленный экспоненциальный потенциал трансверсально-изотропного материала с аргументами в виде первого инварианта тензора меры деформаций Коши-Грина и удлинения в направлении оси изотропии. Теоретические результаты сопоставлены с данными одноосных экспериментов. Этот потенциал не отражает влияния касательных деформаций и взаимного влияния нормальных напряжений на разных площадках. В статье [115] предложен определяющий закон материала стенок камер сердца, учитывающий их композитную структуру (мышечные волокна, коллаген и жидкая матрица). Волокна и коллаген имеют случайную ориентацию и волнистость с простыми функциями распределения. Восемь параметров потенциала определены методом наименьших квадратов из эксперимента, выполненного на тонких квадратных образцах. Показано, что материал обладает трансверсальной изотропией.

Известно [57], что при стремлении деформаций к нулю (инфинитезимальные деформации) соотношения между напряжениями и деформациями гиперупругого материала должны стремиться к закону Гука для анизотропного материала. Анализируя структуру матриц, компоненты которых равны производным от потенциала по компонентам тензора деформаций, к которым приводят большинство используемых при анализе НДС ЛЖ потенциалов, нетрудно убедиться в том, что они не отвечают указанному требованию.

Изложенный выше обзор позволяет сделать следующие выводы.

Исследованию нелинейного деформирования тел вращения посвящено много публикаций, но относительно сложные задачи (наличие кусочной однородности, анизотропии, особенно – неоднородной, учет кручения) изучены недостаточно.

Обширная научная литература посвящена механике ЛЖ сердца, но

влияние локальных зон повышенной жесткости материала его стенки рассмотрено лишь для случая, когда такая зона пронизывает всю толщину стенки (моделирование трансмурального ИМ).

Большая часть используемых в исследованиях НДС ЛЖ потенциалов не удовлетворяет необходимому условию перехода в квадратичный потенциал закона Гука для анизотропного тела при инфинитезимальных деформациях.

Приведенные выше обзор, его анализ и выводы позволяют считать актуальными развитие исследований, направленных на решение физически и геометрически нелинейных задач для почти несжимаемых кусочно-однородных анизотропных гиперупругих тел вращения.

ГЛАВА 2

МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ НЕЛИНЕЙНОГО ДЕФОРМИРОВАНИЯ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

2.1. Постановка задачи

Во второй главе изложены постановка и методика решения осесимметричных (с кручением и без него) физически и геометрически нелинейных задач для почти несжимаемых кусочно-однородных трансверсально-изотропных и изотропных гиперупругих тел вращения [159, 160]. Предложен новый потенциал анизотропного почти несжимаемого материала [166]. Все итоговые соотношения представлены в матричном виде, удобном для построения алгоритма МКЭ. Для решения задачи использован вариационный принцип возможных перемещений в приращениях, реализованный шаговым алгоритмом МКЭ.

Основные предположения:

- материал исследуемых объектов принимаем почти несжимаемым кусочно-однородным трансверсально-изотропным или изотропным гиперупругим;
- решаем осесимметричную физически и геометрически нелинейную задачу в цилиндрической системе координат;
- к части поверхности исследуемых объектов прикладываем равномерное давление;
- процесс деформирования считаем квазистатическим.

Для решения задачи используется вариационный принцип возможных перемещений в приращениях, реализуемый шаговым алгоритмом МКЭ.

2.2. Основные кинематические соотношения

Построим соотношения между приращениями перемещений и деформаций, необходимые для применения шагового метода решения нелинейных осесимметричных задач о деформировании тел вращения.

Напомним основы геометрически нелинейной теории кинематики, необходимые при решении задач о деформировании упругих тел при перемещениях, соизмеримых с размерами тела. Основы нелинейной теории упругости достаточно подробно изложены в работах А. И. Лурье [184, 185], А. Грина и др. [148], К. Ф. Черных [210],

Г. Н. Савина и др. [198], И. И. Гольденבלата [147], Д. И. Кутилина [182] и др.

Отнесем тело к криволинейной системе координат x_i ($i = 1, 2, 3$) и введем координатные векторы $\bar{r}_{,i}$ и $\bar{R}_{,i}$; \bar{r} и \bar{R} – радиус-векторы точки в исходном и деформированном телах, запятой помечено ковариантное дифференцирование. Тогда компоненты метрических тензоров среды до и после деформации будут $g_{ik} = \bar{r}_{,i} \cdot \bar{r}_{,k}$ и $G_{ik} = \bar{R}_{,i} \cdot \bar{R}_{,k}$, а тензор деформаций Коши-Грина

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(G_{ik} - g_{ik}) = \frac{1}{2}(u_{i,k} + u_{k,i}) + \frac{1}{2}(\bar{u}_{,i} \cdot \bar{u}_{,k}), \quad i, k = 1, 2, 3, \quad (2.1)$$

где \bar{u} – вектор перемещений.

Обозначим определители тензоров g_{ik} и G_{ik} (их третьи инварианты) буквами g и G , тогда мера изменения объема при деформировании тела будет $J = \sqrt{G/g}$.

В осесимметричных задачах, рассматриваемых в книге, индексам 1, 2, 3 отвечают r, φ, z .

Введем вектор-столбец компонент вектора перемещений в цилиндрической системе координат

$$\{\mathbf{u}\} = \left\{ u_r \quad u_\varphi \quad u_z \right\}^T,$$

где u_r, u_φ, u_z являются функциями от r, z ; $\frac{\partial u_2}{\partial x_2} = \frac{u_r}{r}$ – ковариантная производная.

Представим компоненты тензора деформаций Коши-Грина в виде вектор-столбца

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left\{ \varepsilon_{rr} \quad \varepsilon_{\varphi\varphi} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{r\varphi} \quad \gamma_{\varphi z} \quad \gamma_{zr} \right\}^T. \quad (2.2)$$

Здесь технические деформации сдвига γ_{ik} есть удвоенные значения компонент ε_{ik} , $i \neq k$. В случае геометрически линейной осесимметричной задачи компоненты вектора (2.2) имеют вид

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = \left\{ \frac{\partial u_r}{\partial r} \quad \frac{u_r}{r} \quad \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \quad \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \quad \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right\}^T. \quad (2.3)$$

В матричном виде соотношение (2.3) будет

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{u}\}$$

или

$$\{\boldsymbol{\varepsilon}\} = [\mathbf{L}]\{\mathbf{u}\} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\varphi \\ u_z \end{Bmatrix}. \quad (2.4)$$

Операторная матрица $[\mathbf{L}]$ есть первый сомножитель правой части (2.4).

Обращаясь к геометрически нелинейному случаю, представим формулу (2.1) в более удобном для преобразований виде

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k}. \quad (2.5)$$

Для построения в дальнейшем шагового метода решения найдем приращение деформаций e_{ik} за один шаг по параметру нагрузки. Вводя в (2.5) вектор $\bar{\mathbf{u}} + \bar{\mathbf{v}}$ вместо $\bar{\mathbf{u}}$, получим

$$\varepsilon_{ik} + e_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial (u_i + v_i)}{\partial x_k} + \frac{\partial (u_k + v_k)}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial (u_j + v_j)}{\partial x_i} \frac{\partial (u_j + v_j)}{\partial x_k}, \quad (2.6)$$

где v_i – компоненты вектора приращений перемещений за один шаг по параметру нагружения; u_i – полные перемещения (накопленные на предыдущих шагах известные функции координат).

Вычитая (2.5) из (2.6), находим

$$\begin{aligned} e_{ik} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \left(\delta_{ji} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Линейное относительно приращений компонент вектора перемещений слагаемое в квадратных скобках (2.7) обозначим далее \tilde{e}_{ik}

$$\tilde{e}_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial v_j}{\partial x_i} \left(\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \left(\delta_{ji} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right], \quad (2.8)$$

тогда получим

$$e_{ik} = \tilde{e}_{ik} + \frac{1}{2} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k}. \quad (2.9)$$

В развернутом виде формула (2.8) будет

$$\tilde{e}_{ik} = \frac{1}{2} (v_{i,k} + v_{k,i}) + \frac{1}{2} (v_{j,i} u_{j,k} + u_{j,i} v_{j,k}), \quad i, j, k = r, \varphi, z. \quad (2.10)$$

Представим (2.10) в матричном виде

$$\{\tilde{\mathbf{e}}\} = [\tilde{\mathbf{L}}] \{\mathbf{v}\}. \quad (2.11)$$

Здесь операторная матрица $[\tilde{\mathbf{L}}]$ имеет вид

$$[\tilde{\mathbf{L}}] = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\partial u_r}{\partial r}\right) \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} \\ \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ \frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} & \left(1 + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} & \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} & \left(1 + \frac{u_r}{r}\right) \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} + \left(\frac{\partial u_r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}\right) & \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}\right) & \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \frac{\partial}{\partial z}\right) \end{bmatrix}. \quad (2.12)$$

Заметим, что если в матрице (2.12) ввести коэффициент 1/2 при производных от полных перемещений и умножить ее справа на вектор узловых значений полных перемещений, то можно вычислить накопленные значения деформаций в соответствии с формулой (2.1).

Далее будет полезным представить производные от вектора приращений перемещений по координатам через вектор-столбец его компонент. Для этого введем диагональные операторные матрицы 3×3

$$[l_1] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial r} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial r} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial r} \end{bmatrix}, \quad [l_2] = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad [l_3] = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

Структура матрицы $[l_2]$ характерна для осесимметричных задач. Тогда будет

$$\{v_{,i}\} = [l_i]\{\mathbf{v}\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.13)$$

2.3. Физический закон для гиперупругих тел вращения

Теория гиперупругости весьма полно развита в трудах классиков нелинейной механики А. Н. Гузя [151], В. В. Киричевского [172], А. И. Лурье [184], Г. Н. Савина и др. [198], Р. С. Ривлина [197],

К.Ф. Черных и др. [211] и др. Известно, что тензоры напряжений гиперупругих тел есть производные от потенциалов по компонентам тензора деформаций. В 2.3 на основе сведений, изложенных в монографиях [172, 184], дан анализ потенциалов, используемых в книге для решения задач, предложены новые их варианты для трансверсально-изотропных тел и приведена методика определения их констант, учитывающая необходимость предельного перехода физического закона в закон Гука при инфинитезимальных деформациях (пренебрежимо малых по сравнению с единицей).

Вначале приведем нужные далее соотношения закона Гука, используемого при решении линейных задач механики деформируемого твердого тела. Он устанавливает линейную связь между компонентами тензоров напряжений и деформаций

$$\sigma^{ij} = D^{ijkl} \varepsilon_{kl}, \quad \varepsilon_{ij} = H_{ijkl} \sigma^{kl}$$

или в матричном виде

$$\{\sigma\} = [\mathbf{D}]\{\varepsilon\}, \quad \{\varepsilon\} = [\mathbf{H}]\{\sigma\},$$

где

$$\{\sigma\} = \left\{ \sigma^{11} \quad \sigma^{22} \quad \sigma^{33} \quad \sigma^{12} \quad \sigma^{23} \quad \sigma^{31} \right\}^T,$$

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \varepsilon_{11} \quad \varepsilon_{22} \quad \varepsilon_{33} \quad \gamma_{12} \quad \gamma_{23} \quad \gamma_{31} \right\}^T,$$

$$\gamma_{ik} = 2\varepsilon_{ik}, \quad i \neq k, \quad i, k = 1, 2, 3;$$

$[\mathbf{D}]$ и $[\mathbf{H}]$ – симметричные матрицы 6х6 модулей упругости и податливостей [209]; $[\mathbf{H}] = [\mathbf{D}]^{-1}$.

В частном случае изотропного тела [140]

$$\sigma^{ik} = \lambda \delta_{ik} \varepsilon_{jj} + 2\mu \varepsilon_{ik},$$

а матрица $[\mathbf{D}]$ имеет вид

$$[\mathbf{D}] = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix}, \quad (2.14)$$

где λ и μ – постоянные Ламе, которые связаны с E и ν (для реальных материалов $0 < \nu < 0,5$) следующими соотношениями [111]:

$$\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}, \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}.$$

В ортотропном теле матрицы $[\mathbf{D}]$ и $[\mathbf{H}]$ – блочно-диагональные, они состоят из симметричных блоков 3×3 $[d_{lm}]$ и $[h_{lm}]$ соответственно ($l, m = 1, 2$). Первый диагональный блок ($l = m = 1$) связывает нормальные напряжения с линейными деформациями, второй ($l = m = 2$) – касательные напряжения и деформации сдвига. Элементы блоков $l \neq m$ и внедиагональные элементы блоков $l = m = 2$ равны нулю. Блок $[h_{11}]$ имеет вид

$$[h_{11}] = \begin{bmatrix} \frac{1}{E_1} & -\frac{\nu_1}{E_2} & -\frac{\nu_2}{E_3} \\ -\frac{\nu_1}{E_2} & \frac{1}{E_2} & -\frac{\nu_3}{E_3} \\ -\frac{\nu_2}{E_3} & -\frac{\nu_3}{E_3} & \frac{1}{E_3} \end{bmatrix}, \quad (2.15)$$

его определитель есть

$$\Delta = \frac{1}{E_3} \left[\frac{1}{E_1} \left(\frac{1}{E_2} - \frac{\nu_3^2}{E_3} \right) - \frac{\nu_1}{E_2} \left(\frac{\nu_1}{E_2} + \frac{\nu_2 \nu_3}{E_3} \right) - \frac{\nu_2}{E_2 E_3} (\nu_2 + \nu_1 \nu_3) \right]. \quad (2.16)$$

Обращая блок $[h_{11}]$, находим

$$[d_{11}] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{E_2 E_3} - \frac{\nu_3^2}{E_3 E_3} & \frac{\nu_1}{E_2 E_3} + \frac{\nu_2 \nu_3}{E_3 E_3} & \frac{\nu_2 + \nu_1 \nu_3}{E_2 E_3} \\ \frac{\nu_1}{E_2 E_3} + \frac{\nu_2 \nu_3}{E_3 E_3} & \frac{1}{E_1 E_3} - \frac{\nu_2^2}{E_3 E_3} & \frac{\nu_3}{E_1 E_3} + \frac{\nu_1 \nu_2}{E_2 E_3} \\ \frac{\nu_2 + \nu_1 \nu_3}{E_2 E_3} & \frac{\nu_3}{E_1 E_3} + \frac{\nu_1 \nu_2}{E_2 E_3} & \frac{1}{E_1 E_2} - \frac{\nu_1^2}{E_2 E_2} \end{bmatrix}, \quad (2.17)$$

где E_1, E_2, E_3 – модули упругости для направлений вдоль осей 1, 2, 3; ν_1, ν_2, ν_3 – коэффициенты Пуассона.

Диагональные элементы блока $[d_{22}]$ есть модули сдвига G_1, G_2, G_3 . У ортотропного материала все внедиагональные элементы блока $[d_{11}]$ различны. У трансверсально-изотропного материала некоторые элементы блока (2.17) равны. Так, если индекс оси изотропии равен 1, то $E_2 = E_3, \nu_1 = \nu_2$, при этом второй и третий элементы первой строки и второй и третий элементы диагонали равны между собой.

Рассмотрим случай гиперупругого материала, т. е. материала, для которого физический закон (зависимость между компонентами тензоров напряжений и деформаций) определяется через потенциал W . Отнесем тело к материальной («вмороженной» в тело) системе ортогональных координат.

В общем случае $W = W(\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, \gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31})$.

Для несжимаемого изотропного материала потенциал принимает вид $W = W(I_1, I_2, I_3)$ или $W = W(J_1, J_2, J_3)$, где I_1, I_2, I_3 – инварианты тензора деформаций Коши-Грина, J_1, J_2, J_3 – инварианты тензора меры деформаций Коши-Грина.

Связь компонент второго тензора напряжений Пиолы-Киргоффа и тензора деформаций Коши-Грина в общем случае определяется формулой [184]

$$\sigma^{ik} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}}. \quad (2.18)$$

Компоненты тензора истинных напряжений (тензора напряжений Коши) t^{ik} связаны с компонентами второго тензора Пиолы-Киргоффа

$$t^{ik} = \frac{1}{J} \sigma^{ik}, \quad (2.19)$$

где $J = \sqrt{G/g}$ (G и g – третьи инварианты тензоров меры деформации Коши-Грина G_{ik} и метрического тензора среды до деформации g_{ik} соответственно).

Напомним, что в ортогональных системах координат $g = 1$.

Рассмотрим связь компонент приращений напряжений Пиолы-Киргоффа s^{ik} и деформаций e_{ik} . Имеет место следующее тензорно-линейное соотношение:

$$s^{ik} = \tilde{D}^{iklm} e_{lm}, \quad (2.20)$$

где

$$\tilde{D}^{iklm} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}}.$$

Заменяя индексы в векторе $\{\varepsilon\}$ на 1, ..., 6 и вводя обозначение $[\tilde{\mathbf{E}}]$ для матрицы 6х6 с элементами

$$\tilde{E}_{ik} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_i \partial \varepsilon_k}, \quad (2.21)$$

запишем соотношение (2.21) в матричном виде

$$\{\mathbf{s}\} = [\tilde{\mathbf{E}}] \{\mathbf{e}\}, \quad (2.22)$$

где

$$\{\mathbf{s}\} = \{s^{11} \quad s^{22} \quad s^{33} \quad s^{12} \quad s^{23} \quad s^{31}\}^T,$$

$$\{\mathbf{e}\} = \{e_{11} \ e_{22} \ e_{33} \ \tilde{\gamma}_{12} \ \tilde{\gamma}_{23} \ \tilde{\gamma}_{31}\}^T,$$

$$\tilde{\gamma}_{ik} = 2e_{ik}, \quad i \neq k.$$

Матрицу $[\tilde{\mathbf{E}}]$ называют матрицей касательных модулей упругости.

Известно большое количество потенциалов для изотропных гиперупругих материалов. Аргументами потенциалов обычно являются инварианты тензоров мер деформаций или тензоров деформаций, а также удлинения. Их можно найти в работах В. В. Киричевского [172], А. И. Лурье [184], Г. Н. Савина и др. [198], Р. С. Ривлина [197], К. Ф. Черных и др. [211], М. А. Biot [15].

Приведем потенциалы Муни-Ривлина и Джона [184], использованные в настоящей книге.

Потенциал Муни-Ривлина

$$W = c_1(J_1 - 3) + c_2(J_2 - 3) + c_3(J - 1)^2,$$

где $J = \sqrt{J_3}$.

Учитывая, что инварианты тензора меры деформаций Коши-Грина [172]

$$J_1 = 3 + \varepsilon_{ii}, \quad J_2 = 3 + 4\varepsilon_{ii} + 2(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}),$$

$$J_3 = 1 + 2\varepsilon_{ii} + 2(\varepsilon_{ii}\varepsilon_{kk} - \varepsilon_{ik}\varepsilon_{ki}) + \frac{4}{3}e^{ikp}e^{rmt}\varepsilon_{ir}\varepsilon_{km}\varepsilon_{pt},$$

их первые производные

$$\frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_{ik}} = 2g_{ik}, \quad \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon_{ik}} = 4\left[g^{ik}(1 + \varepsilon_{ss}) - g^{ir}g^{ks}\varepsilon_{rs}\right],$$

$$\frac{\partial J_3}{\partial \varepsilon_{ik}} = 2\left[g^{ik}(1 + 2\varepsilon_{ss}) - 4g^{ir}g^{ks}\varepsilon_{rs} + 4e^{ijp}e^{kst}\varepsilon_{js}\varepsilon_{pt}\right] \quad (2.23)$$

и второй тензор Пиолы-Кирхгоффа

$$\sigma^{ik} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{\partial W}{\partial J_1} \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_{ik}} + \frac{\partial W}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon_{ik}} + \frac{\partial W}{\partial J_3} \frac{\partial J_3}{\partial \varepsilon_{ik}},$$

получим

$$\sigma^{ik} = c_1 \frac{\partial J_1}{\partial \varepsilon_{ik}} + c_2 \frac{\partial J_2}{\partial \varepsilon_{ik}} + \frac{1}{2} c_3 (1 - J^{-1}) \frac{\partial J_3}{\partial \varepsilon_{ik}}. \quad (2.24)$$

Разлагая правую часть (2.24) в ряд по компонентам тензора деформации, сохраняя лишь члены первого порядка и приравнивая коэффициенты при них к элементам матрицы закона Гука [D], приходим к соотношениям

$$c_1 + 2c_2 = 0, \quad c_2 = -\mu/2, \quad c_1 = \mu, \quad c_3 = (\lambda + 2\mu)/2.$$

Потенциал Джона (полулинейный материал) для цилиндрической системы координат

$$W = \frac{1}{2} \left(\lambda (\lambda_r + \lambda_\varphi + \lambda_z - 3)^2 + 2\mu (\lambda_r^2 + \lambda_\varphi^2 + \lambda_z^2 - 2(\lambda_r + \lambda_\varphi + \lambda_z) + 3) \right), \quad (2.25)$$

где $\lambda_k = \sqrt{1 + 2\varepsilon_{kk}}$ – удлинения, $k = r, \varphi, z$ (по k нет суммирования).

Контравариантные компоненты тензора напряжений Коши есть

$$\sigma^{kk} = \frac{1}{\lambda_r \lambda_\varphi \lambda_z} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{kk}} = \frac{1}{\lambda_r \lambda_\varphi \lambda_z} \left(\lambda \frac{\lambda_r + \lambda_\varphi + \lambda_z - 3}{\lambda_k} + \frac{2\mu(\lambda_k - 1)}{\lambda_k} \right), \quad k = r, \varphi, z. \quad (2.26)$$

При решении задач биомеханики сердечно-сосудистой системы, в частности сердца, материал стенок которого обладает свойствами несжимаемости или малой сжимаемости, трансверсальной изотропии и гиперупругости необходимо применять потенциалы более сложной структуры. Различные формы таких потенциалов приведены в работах [4, 48, 49, 59, 120, 121].

В статьях [4, 48, 49, 59] использован потенциал для несжимаемого трансверсально-изотропного гиперупругого материала

$$W(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}, p) = W_0(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) - \frac{p}{2}(G-1), \quad (2.27)$$

где $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ – тензор деформаций Коши-Грина; p – множитель Лагранжа (гидростатическое давление).

Первое слагаемое (2.27) принято в экспоненциальной форме

$$W_0(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}) = \frac{C}{2}[\exp(Q)-1],$$

где с точностью до обозначений

$$Q = 2b_1(\varepsilon_{rr} + \varepsilon_{ff} + \varepsilon_{zz}) + b_2\varepsilon_{ff}^2 + b_3(\varepsilon_{zz}^2 + \varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{zr}^2 + \varepsilon_{rz}^2) + b_4(\varepsilon_{rf}^2 + \varepsilon_{fr}^2 + \varepsilon_{fz}^2 + \varepsilon_{zf}^2),$$

f – индекс оси изотропии, два других – индексы осей в нормальной к ней плоскости (плоскости изотропии).

В статье [124] введен потенциал для трансверсально-изотропного гиперупругого материала

$$W = \frac{1}{2}C[\exp(Q)-1] + b_4(J-1)^2, \quad (2.28)$$

$$Q = b_1\varepsilon_{ff}^2 + b_2(\varepsilon_{rr}^2 + \varepsilon_{cc}^2 + 2\varepsilon_{rc}^2) + 2b_3(\varepsilon_{fr}^2 + \varepsilon_{fc}^2).$$

Потенциал

$$W = \frac{1}{2}C[\exp(Q)-1] + c_c(J \ln J - J + 1), \quad (2.29)$$

по мнению его авторов [120, 121], может учитывать слабую сжимаемость ортотропного или трансверсально-изотропного гиперупругого материала (в зависимости от значений констант). Второе слагаемое (2.29) представляет собой функцию штрафа. При инфинитезимальных деформациях оно пропорционально квадрату объемной деформации. В данном случае

$$Q = b_{ff} \varepsilon_{ff}^2 + b_{ss} \varepsilon_{ss}^2 + b_{nn} \varepsilon_{nn}^2 + b_{fs} (\varepsilon_{fs}^2 + \varepsilon_{sf}^2) + b_{fn} (\varepsilon_{fn}^2 + \varepsilon_{nf}^2) + b_{ns} (\varepsilon_{ns}^2 + \varepsilon_{sn}^2). \quad (2.30)$$

Известно [57], что при $\varepsilon_{ik} \rightarrow 0$, $i, k = 1, 2, 3$ соотношения между напряжениями и деформациями гиперупругого материала должны стремиться к закону Гука для анизотропного материала. Анализируя структуру матриц, к которым приводят потенциалы (2.27), (2.28) и (2.29), нетрудно убедиться в том, что они не отвечают указанному требованию. Действительно, отсутствие в приведенных выше формулах для Q произведений линейных деформаций приводит к равенству внедиагональных элементов блока $[d_{11}]$, хотя согласно (2.17), даже для трансверсально-изотропного материала с осью 1 они не должны быть равны. Особенно это относится к ортотропному материалу. Более того, можно утверждать, что такая структура функции (2.30) отвечает материалу, составленному из трех невзаимодействующих систем упругих нитей, так как при линейной деформации вдоль одного направления не возникает напряжений в двух других.

Введем новый потенциал, лишенный указанного недостатка, модифицируя потенциал (2.29)

$$W = C \left\{ \frac{1}{\alpha} [\exp(\alpha W_0) - 1] + c_c (J - 1)^2 \right\}, \quad (2.31)$$

$$W_0 = \frac{1}{2} (c_1 \varepsilon_{11}^2 + c_2 \varepsilon_{22}^2 + c_3 \varepsilon_{33}^2 + c_4 \varepsilon_{11} \varepsilon_{22} + c_5 \varepsilon_{22} \varepsilon_{33} + c_6 \varepsilon_{33} \varepsilon_{11} + c_7 \gamma_{12}^2 + c_8 \gamma_{23}^2 + c_9 \gamma_{31}^2),$$

где C – константа с размерностью напряжения; α , c_c и c_1, \dots, c_9 – безразмерные.

Функция штрафа (второе слагаемое) в (2.31) принята такой же, как и в (2.28), но W_0 отличается введением смешанных произведений линейных деформаций.

Рост параметра c_c увеличивает степень несжимаемости материала. В частном случае закона Гука для изотропного материала $c_1 = c_2 = c_3 = 2\mu/C$, $c_4 = c_5 = c_6 = 0$, $c_7 = c_8 = c_9 = \mu/C$, $c_c = \lambda/C$. Заметим, что введение в W_0 слагаемых с коэффициентами c_4, c_5, c_6 позволяет точно описать трансверсально-изотропный и ортотропный материалы. Общий множитель C дает возможность изменять жесткость материала, не влияя на степень его отличия от изотропного, а величина показателя α

управляет степенью нелинейности его жесткости. Придавая коэффициентам c_i неравные друг другу значения, приходим к трансверсально-изотропному или ортотропному случаю.

Функции штрафа в (2.29) и (2.31) отличаются лишь слагаемыми высшего порядка малости (в их разложении по компонентам тензора деформаций), но последняя – проще для численной реализации.

Приведем следующую из (2.31) формулу для компонент тензора напряжений Коши

$$t^{ik} = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{C}{J} \left[\frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{ik}} \exp(\alpha W_0) + c_c (1 - J^{-1}) \frac{\partial J_3}{\partial \varepsilon_{ik}} \right]. \quad (2.32)$$

При умеренных величинах деформаций (20 – 30 %) второе слагаемое (2.32) можно без заметной погрешности упростить, тогда

$$t^{ik} = \frac{1}{J} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ik}} = \frac{C}{J} \left[\frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{ik}} \exp(\alpha W_0) + c_c \frac{J(J-1)}{(1+2\varepsilon_{ik})} \delta_{ik} \right]. \quad (2.33)$$

Для построения соотношений в приращениях (инкрементальная теория) необходимо иметь формулу, связывающую приращения напряжений и деформаций. Ее основу составляет выражение

$$\begin{aligned} s^{ik} &= \frac{\partial}{\partial \varepsilon_{lm}} (J t^{ik}) e_{lm} = \frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} e_{lm} = \tilde{D}^{iklm} e_{lm} = \\ &= C \left\{ \left(\frac{\partial^2 W_0}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} + \alpha \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{ik}} \frac{\partial W_0}{\partial \varepsilon_{lm}} \right) \exp(\alpha W_0) + \right. \\ &\quad \left. + c_c \left[(1 - J^{-1}) \frac{\partial^2 J_3}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} + \frac{1}{2} J^{-3} \frac{\partial J_3}{\partial \varepsilon_{ik}} \frac{\partial J_3}{\partial \varepsilon_{lm}} \right] \right\} e_{lm}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

После перенумерации (см. формулы (2.21), (2.22)) тензору \tilde{D}^{iklm} ставится в соответствие матрица $[\tilde{\mathbf{E}}]$.

Формула для первой производной от третьего инварианта, инварианты тензора меры деформаций Коши-Грина (2.23) приведены выше, а вторая производная имеет вид

$$\frac{\partial^2 J_3}{\partial \varepsilon_{ik} \partial \varepsilon_{lm}} = 2 \left[2g^{ik} g^{sl} g^{sm} - 4g^{ir} g^{ks} g^{rl} g^{sm} + 4e^{ijp} e^{kst} \left(g^{jl} g^{sm} \varepsilon_{pt} + g^{pl} g^{tm} \varepsilon_{js} \right) \right].$$

В упрощенном виде второе слагаемое (2.34) будет иметь вид (2.33)

$$c_c \left[\frac{J(2J-1)\delta_{il} + J(1-\delta_{il})}{(1+2\varepsilon_{ik})(1+2\varepsilon_{lm})} \delta_{ik} \delta_{lm} \right].$$

С целью экономии вычислительных затрат здесь пренебрегли влиянием деформаций сдвига на деформацию изменения объема, т. е. приняли $J = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

Так как в решаемых далее задачах деформации не превышают 30 %, то это не приводит к заметным погрешностям.

Заметим, что существенной экономии вычислительных затрат можно достигнуть, заменяя в (2.31) значение штрафа на $0,5c_c \varepsilon_{ii}^2$.

При построении формул для потенциалов и определении их констант необходимо требовать совпадения матриц, связывающих деформации с напряжениями при инфинитезимальных деформациях, с матрицами закона Гука.

Проведем такой анализ на примере потенциала (2.31). Ограничим его рамки случаями изотропии, трансверсальной изотропии и ортотропии. Представим касательную матрицу упругости, связывающую приращения линейных деформаций и нормальных напряжений, компонентами

$\frac{\partial^2 W}{\partial \varepsilon_{ii} \partial \varepsilon_{kk}} = b_{ik}$, ($i, k = 1, 2, 3$). Для приращения касательных напряжений

введем соотношения $s_{12} = b_1 \tilde{\gamma}_{12}$, $s_{23} = b_2 \tilde{\gamma}_{23}$, $s_{31} = b_3 \tilde{\gamma}_{31}$, в которых b_1 , b_2 ,

b_3 равны $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{12}^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{23}^2}$, $\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{31}^2}$ соответственно. Заметим, что при конечных

деформациях в общем случае все b_{ik} и b_j есть функции деформаций и при $\varepsilon_{ik} \rightarrow 0$, $i, k = 1, 2, 3$ они стремятся к константам.

При уменьшении α первое слагаемое в (2.31) стремится к квадратичному. Выражение в круглых скобках во втором слагаемом при уменьшении деформаций стремится к квадрату деформации изменения объема. В случае инфинитезимальных деформаций изотропного материала ($c_1 = c_2 = c_3 = c$, $c_7 = c_8 = c_9 = d$) три первых диагональных элемента матрицы определяющего закона (2.14) равны $\lambda + 2\mu$, а внедиагональные – λ . Из потенциала (2.31) имеем соответственно $C(c+c_c)$ и Cc_c . Отсюда следует, что должны выполняться соотношения $Cc_c = \lambda$ и $Cc = 2\mu$. Диагональные элементы матрицы связей между касательными напряжениями и деформациями сдвига в законе Гука равны μ , из (2.31) вытекает – $Cd = \mu$. Приведенные формулы делают ясным физический смысл параметров потенциала (2.31) и устанавливают связи, которые должны выполняться между ними. Как видно, из четырех параметров C , c , d , c_c независимыми являются только три C , c , c_c . Удобно принять $C = E$.

Рассмотрим соотношения между элементами матрицы закона Гука и матрицы, получаемой с использованием предлагаемого потенциала (2.31), для случая трансверсально-изотропного материала с осью изотропии 1. Полагаем коэффициенты $c_4 = c_6 = 0$, тогда вместо (2.16) и (2.17) имеем

$$\Delta = \frac{1}{E_1 E_2^2} (1 + \nu_3) \left(1 - \nu_3 - 2 \frac{E_1}{E_2} \nu_1^2 \right), \quad (2.35)$$

$$[d_{11}] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1 - \nu_3^2}{E_2^2} & \frac{\nu_1(1 + \nu_3)}{E_2^2} & \frac{\nu_1(1 + \nu_3)}{E_2^2} \\ \frac{\nu_1(1 + \nu_3)}{E_2^2} & \frac{1}{E_1 E_2} - \frac{\nu_1^2}{E_2^2} & \frac{\nu_3}{E_1 E_2} + \frac{\nu_1^2}{E_2^2} \\ \frac{\nu_1(1 + \nu_3)}{E_2^2} & \frac{\nu_3}{E_1 E_2} + \frac{\nu_1^2}{E_2^2} & \frac{1}{E_1 E_2} - \frac{\nu_1^2}{E_2^2} \end{bmatrix}. \quad (2.36)$$

Из потенциала (2.31) следует

$$[d_{11}]^* = \begin{bmatrix} C(c_1 + c_c) & Cc_c & Cc_c \\ Cc_c & C(c_2 + c_c) & C(c_5 + c_c) \\ Cc_c & C(c_5 + c_c) & C(c_3 + c_c) \end{bmatrix}. \quad (2.37)$$

Принимая $C = E_1$ и приравнявая элементы блоков (2.36) и (2.37), приходим к связям $c_3 = c_2$, $Cc_c = a_{12}$, $C(c_1+c_c) = a_{11}$, $C(c_2+c_c) = a_{22}$, $C(c_5+c_c) = a_{23}$, где a_{ik} – элементы блока (2.36). Таким образом, четыре параметра E_1 , E_2 , ν_1 , ν_3 закона Гука позволяют определить параметры потенциала (2.31) c_1 , c_2 , c_5 , c_c . Для их вычисления удобно минимизировать среднеквадратичную невязку между экспериментальными и теоретическими данными по E_1 , E_2 , ν_1 , ν_3 , α .

Соотношения между коэффициентами при деформациях сдвига γ_{ik} имеют вид $G_1 = Cc_7$, $G_2 = 1/2 (a_{33} - a_{23}) = 1/2 C(c_2 - c_5)$, $G_3 = Cc_9$, причем $G_1 = G_3$ ($c_7 = c_9$) также входит в число искомых параметров.

При минимизации функционала невязки следует применять методы условной минимизации, используя в качестве условия требование невырожденности блока, т. е. положительности определителя (2.35), что дает

$$1 - \nu_3 - 2 \frac{E_1}{E_2} \nu_1^2 \geq 0. \quad (2.38)$$

На рис. 2.1 приведены области допустимых значений коэффициентов Пуассона для ряда величин отношения модулей упругости E_1/E_2 . Графики, обозначенные цифрами 1, 2, 3, соответствуют отношениям 8, 4, 2.

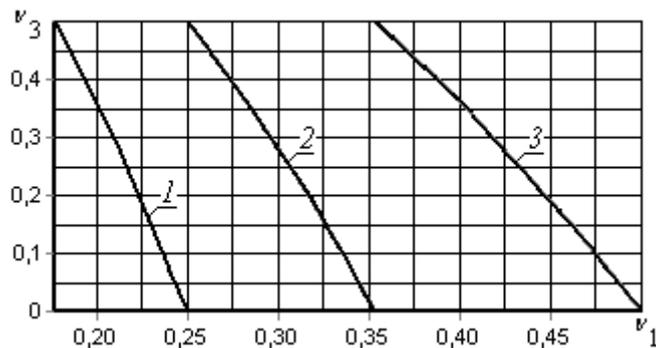


Рис. 2.1. Области допустимых значений коэффициентов Пуассона

С ростом величины отношения E_1/E_2 диапазон значений коэффициентов Пуассона сужается. Отметим, если параметры потенциала таковы, что отвечающая им на рис. 2.1 точка близка к границе, то при увеличении деформаций (с ростом влияния нелинейности задачи, сопровождаемой изменением элементов касательной матрицы упругости) матрица может

стать вырожденной или даже не положительно определенной. Для того, чтобы избежать этого, можно сделать условие (2.38) более жестким, заменив нуль в его правой части на положительное число.

Рассмотрим соотношения между элементами матриц $[d_{11}]$ и $[d_{11}]_*$ для случая трансверсально-изотропного материала с осью изотропии 2. Полагаем $c_4 = c_5 = 0$, $E_1 = E_3 = E$ в плоскости изотропии, $\nu_1 = \nu_3 E_2/E$. Тогда (2.35) – (2.37) можно записать так:

$$\Delta = \frac{1}{E^2 E_2} (1 + \nu_2) \left(1 - \nu_2 - 2 \frac{E_2}{E} \nu_3^2 \right),$$

$$[d_{11}] = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{EE_2} - \frac{\nu_1^2}{E_2^2} & \frac{\nu_1(1+\nu_2)}{EE_2} & \frac{\nu_2}{EE_2} + \frac{\nu_1^2}{E_2^2} \\ \frac{\nu_1(1+\nu_2)}{EE_2} & \frac{1-\nu_2^2}{E_2^2} & \frac{\nu_1(1+\nu_2)}{EE_2} \\ \frac{\nu_2}{EE_2} + \frac{\nu_1^2}{E_2^2} & \frac{\nu_1(1+\nu_2)}{EE_2} & \frac{1}{EE_2} - \frac{\nu_1^2}{E_2^2} \end{bmatrix},$$

$$[d_{11}]_* = \begin{bmatrix} C(c_1+c_c) & Cc_c & C(c_6+c_c) \\ Cc_c & C(c_2+c_c) & Cc_c \\ C(c_6+c_c) & Cc_c & C(c_3+c_c) \end{bmatrix}.$$

Принимая $C = E_2$ и приравнявая элементы $[d_{11}]$ и $[d_{11}]_*$, приходим к связям $c_1 = c_3$, $Cc_c = a_{12} = a_{23}$, $C(c_1+c_c) = a_{11}$, $C(c_2+c_c) = a_{22}$, $C(c_6+c_c) = a_{13}$, где a_{ik} – элементы $[d_{11}]$. Четыре параметра E , E_2 , ν_2 , ν_3 закона Гука позволяют определить параметры c_1 , c_2 , c_6 , c_c потенциала (2.31).

Соотношения между коэффициентами при деформациях сдвига γ_{ik} имеют вид $G_1 = Cc_7$, $G_2 = Cc_8$, $G_3 = C/2/(1+\nu_1)$, причем $G_1 = G_2$ ($c_7 = c_8$) также входит в число искомых параметров.

Требование положительности определителя Δ дает

$$\nu_2 \leq 1 - 2\nu_3^2 \frac{E_2}{E}.$$

Области допустимых значений коэффициентов Пуассона для ряда величин отношения модулей упругости E_2/E совпадают с приведенными на рис. 2.1 при замене обозначений на осях v_3 и v_1 на v_2 и v_3 соответственно.

Отметим возможность построения новых экспоненциальных потенциалов для трансверсально-изотропных материалов на основе обобщенного на конечные деформации закона Гука (так называемого интегрального закона [172]) и потенциала Муни путем введения дополнительных слагаемых. Так, исходя из потенциала

$$W_G = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_1^2 - 2\mu I_2, \quad (2.39)$$

который приводит к интегральному закону, вводя новые слагаемые и используя форму (2.31), получим

$$W = C \left\{ \frac{1}{\alpha} [\exp(\alpha W_1) - 1] + c_c (J - 1)^2 \right\}, \quad (2.40)$$

$$W_1 = \frac{W_G}{C} + k_1 (I_1 - 1) (\lambda_f - 1) + \frac{1}{2} k_2 (\lambda_f - 1)^2, \quad (2.41)$$

где λ_f – удлинение вдоль оси изотропии ($f = 1$, или 2, или 3); k_1, k_2 – безразмерные коэффициенты.

На основе потенциала Муни

$$W_M = c_1 (I_1 - 3) + c_2 (I_2 - 3), \quad (2.42)$$

действуя по аналогии, получим потенциал вида (2.40), в котором W_G в (2.41) следует заменить на W_M .

Приведенные потенциалы дают исследователю возможность простого изменения жесткости и степени его нелинейности за счет выбора значений C и α .

Переходя к случаю ортотропного материала, запишем равенства, вытекающие из приравнивания элементов блока (2.17) и блока

$$\begin{bmatrix} C(c_1+c_c) & C(c_4+c_c) & C(c_5+c_c) \\ C(c_4+c_c) & C(c_2+c_c) & C(c_6+c_c) \\ C(c_5+c_c) & C(c_6+c_c) & C(c_3+c_c) \end{bmatrix},$$

порождаемого потенциалом (2.31): $C(c_i+c_c) = a_{ii}$, $i = 1, 2, 3$; $C(c_{k+2}+c_c) = a_{1k}$, $k = 2, 3$; $C(c_6+c_c) = a_{23}$; $Cc_{j+6} = G_j$, $j = 1, 2, 3$. Здесь G_j – модули сдвига в формулах $\sigma_{12} = G_1 \gamma_{12}$, $\sigma_{23} = G_2 \gamma_{23}$, $\sigma_{31} = G_3 \gamma_{31}$.

Методика определения значений параметров c_c и c_1, \dots, c_9 основана на минимизации функционала среднеквадратичного отклонения заданных в эксперименте, выполненном при инфинитезимальных деформациях, и вычисленных по измеренным деформациям напряжений при $\alpha = 0$ и заданной величине C (ее целесообразно выбирать близкой к ожидаемому характерному значению модуля упругости). Вычислив элементы блока (2.37) и обратив его, получим элементы блока (2.15), что позволит просто определить модули упругости и коэффициенты Пуассона. Затем проводим эксперимент при конечных деформациях и невязку минимизируем по α .

Аналогично случаю трансверсальной изотропии при минимизации функционала невязки экспериментальных и теоретических данных следует учитывать условие положительной определенности блока (2.17), в частности положительности определителя (2.16).

Эффективный метод минимизации, позволяющий избежать возможной перепараметризации, приводящей к плохой обусловленности системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) и затрудняющей поиск минимума, предложен в статье [165]. Идея этого метода состоит в переходе от поиска решения в пространстве параметров потенциала к поиску в пространстве обобщенных параметров – коэффициентов разложения вектора параметров по системе собственных векторов матрицы СЛАУ.

Обращаясь вновь к соотношениям (2.22) между приращениями деформаций и напряжений и учитывая структуру элементов матрицы (2.21), равных вторым смешанным производным потенциала по деформациям, например (2.30), видим, что они зависят от накопленных к данному этапу нагружения тела значений деформаций. Последние являются функциями координат, поэтому тело, которое было однородным и изотропным до нагружения, приобретает свойства неоднородности и анизотропии. Более того, материальная система координат, оси которой совпадают с осями ортотропии или трансверсальной изотропии, при деформировании

поворачивается относительно глобальной системы, что приводит к неоднородной анизотропии. Указанные обстоятельства существенно усложняют решение задачи и вызывают увеличение вычислительных затрат.

Потенциалы (2.31) и (2.40) с учетом (2.39) и (2.42) и описанная выше методика анализа параметров потенциалов, используемых в задачах механики деформируемых гиперупругих тел, могут быть полезны в практике численных исследований поведения объектов биомеханики.

2.4. Вариационный принцип возможных перемещений в приращениях

Для построения метода решения исходим из вариационного принципа возможных перемещений в приращениях. Рассмотрим упругое тело объемом V_0 до деформации, находящееся в состоянии равновесия на шаге с номером m по параметру нагрузки. Пусть накопленные к этому моменту за счет деформирования компоненты тензоров напряжений, деформаций и вектора перемещений есть σ^{ik} , ε_{ik} , u_i соответственно, а их приращения за один шаг – s^{ik} , e_{ik} , v_i .

Полная энергия упругой системы состоит из суммы потенциальной энергии деформации U и работы A сил давления на перемещениях, нормальных к поверхности, к которой они приложены. В соответствии с принципом возможных перемещений в состоянии равновесия вариация полной энергии системы будет равна нулю

$$\delta(U + A) = 0. \quad (2.43)$$

Запишем формулы для вариации U и A на m -ом шаге

$$\delta U_m = \int_{V_0} \sigma^{ik} \delta \varepsilon_{ik} dV_0, \quad \delta A_m = - \int_{S_m} q \delta u_n dS_m. \quad (2.44)$$

где S_m – поверхность деформированного тела на m -ом шаге; q – внешнее давление, заданное на поверхности S_m и отнесенное к ее площади после деформации; u_n – перемещение по нормали к поверхности S_m .

Запишем вариации U и A на следующем шаге по параметру нагрузки

$$\delta U_{m+1} = \int_{V_0} (\sigma^{ik} + s^{ik}) \delta(\varepsilon_{ik} + e_{ik}) dV_0, \quad (2.45)$$

$$\delta A_{m+1} = - \int_{S_{m+1}} (q_m + \Delta q) \delta(u_n + v_n) dS_{m+1}, \quad (2.46)$$

где Δq – приращение давления за шаг; v_n – приращение перемещения по нормали к поверхности S_{m+1} .

Подставляя (2.45) и (2.46) в (2.43), получим

$$\int_{V_0} (\sigma^{ik} + s^{ik}) \delta(\varepsilon_{ik} + e_{ik}) dV_0 - \int_{S_{m+1}} (q_m + \Delta q) \delta(u_n + v_n) dS_{m+1} = 0. \quad (2.47)$$

Учитывая, что в состоянии равновесия $\delta \varepsilon_{ik} = 0$ и $\delta u_n = 0$, приведем (2.47) к виду

$$\int_{V_0} (\sigma^{ik} \delta e_{ik} + s^{ik} \delta e_{ik}) dV_0 - \int_{S_{m+1}} (q_m \delta v_n + \Delta q \delta v_n) dS_{m+1} = 0. \quad (2.48)$$

Подставляя (2.20) для приращений напряжений и (2.9) приращений деформаций в первый интеграл и сохраняя лишь квадратичные относительно приращений перемещений слагаемые, запишем (2.48) в следующем виде:

$$\int_{V_0} \left[\tilde{D}^{iklm} \tilde{e}_{lm} \delta \tilde{e}_{ik} + \frac{1}{2} \sigma^{ik} \left(\frac{\partial \delta v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial \delta v_j}{\partial x_k} \right) \right] dV_0 - \int_{S_{m+1}} \Delta q \delta v_n dS_{m+1} + \delta R_{m+1} = 0, \quad (2.49)$$

где

$$\delta R_{m+1} = \int_{V_0} \sigma^{ik} \delta \tilde{e}_{ik} dV_0 - \int_{S_m} q_m \delta v_n dS_m.$$

В силу шагового процесса здесь известными функциями координат являются накопленные напряжения σ^{ik} (сумма их приращений s^{ik} за m шагов), а $q_m = m\Delta q$.

В случае, если состояние тела на m -ом шаге является равновесным, то $\delta R = 0$. Однако при использовании шагового процесса в связи с конечностью величины шага возникает погрешность. Поэтому при построении алгоритма целесообразно не отбрасывать невязку R . Это позволяет построить эффективный самокорректирующийся шаговый метод решения задачи [167].

Преобразуем второе слагаемое (2.49). Запишем формулу для δA на m -ом шаге

$$\delta A_m = -2\pi \int_{S_m} q_m \left(\frac{\partial z}{\partial s} \delta v_r + \frac{\partial r}{\partial s} \delta v_z \right) r ds$$

или

$$\delta A_{m+1} = -2\pi \int_{S_m} q_m \frac{dl}{ds} (\delta v_r \sin \alpha - \delta v_z \cos \alpha) r ds,$$

где s – локальная безразмерная координата вдоль дуги нагруженного меридиана тела; α – угол между касательной к меридиану и осью r .

На $(m+1)$ -ом шаге вариация работы A будет

$$\begin{aligned} \delta A_{m+1} = \int_{S_m} (q_m + \Delta q) \frac{d(l_m + \Delta l)}{ds} [\sin(\alpha_m + \Delta \alpha) \delta v_r - \\ - \cos(\alpha_m + \Delta \alpha) \delta v_z] (r_m + u_r) ds, \end{aligned}$$

где

$$\sin(\alpha_m + \Delta \alpha) \approx \sin \alpha_m + \Delta \alpha \cos \alpha_m;$$

$$\cos(\alpha_m + \Delta \alpha) \approx \cos \alpha_m - \Delta \alpha \sin \alpha_m.$$

Имея в виду, что $\left(\frac{dl_m}{ds}\right)_m = \sqrt{\left(r'_{m,s}\right)^2 + \left(z'_{m,s}\right)^2} \equiv l_m$, находим

$$\frac{d(\Delta l)}{ds} = \frac{r_{m,s} v_{r,s} + z_{m,s} v_{z,s}}{l_m} \equiv \Delta l_m. \quad \text{Так как } \alpha_m = \arctg\left(z'_{m,s}/r'_{m,s}\right), \quad \text{то}$$

$$\Delta \alpha = \frac{1}{r_{m,s}^2} \frac{1}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha_m} \left(r_{m,s} v_{z,s} - z_{m,s} v_{r,s} \right) = \frac{r_{m,s} v_{z,s} - z_{m,s} v_{r,s}}{l_m^2}.$$

Сохраняя в (2.44) слагаемые второго порядка относительно приращений и вариации перемещений, получим

$$\begin{aligned} \delta A_{m+1} = \Delta q \int_{S_m} l_m r_m (\delta v_r \sin \alpha_m - \delta v_z \cos \alpha_m) ds + q_m \int_{S_m} [& ((r_m \Delta l_m + v_r l_m) \sin \alpha_m + \\ & + r_m l_m \Delta \alpha \cos \alpha_m) \delta v_r + (r_m l_m \Delta \alpha \sin \alpha_m - (r_m \Delta l_m + v_r l_m) \cos \alpha_m) \delta v_z] ds. \end{aligned} \quad (2.50)$$

Приращения перемещений v_r, v_z входят в коэффициенты при вариациях во второе слагаемое (2.50), так что оно квадратично относительно неизвестных на $(m+1)$ -ом шаге. Таким образом, при реализации МКЭ ему должна будет отвечать дополнительная матрица жесткости. К сожалению, она несимметрична и учет ее привел бы к неоправданно излишним вычислительным затратам (напомним, что основная матрица жесткости симметрична). Для того, чтобы избежать этого, при построении алгоритма приравниваем v_r, v_z к значениям, полученным на предыдущем шаге процесса. Тогда второе слагаемое (2.50) приведет к дополнительному вектору-столбцу правой части СЛАУ.

Для дальнейшего применения МКЭ удобно представить принцип возможных перемещений (2.49) в матричном виде. Подставляя (2.11) в (2.49) и учитывая (2.13), получим

$$\begin{aligned} \int_{V_0} \left[\{\delta \mathbf{v}\}^T [\tilde{\mathbf{L}}]^T [\tilde{\mathbf{E}}] [\tilde{\mathbf{L}}] \{\mathbf{v}\} + \frac{1}{2} \left(\{\delta \mathbf{v}\}^T [l_i]^T [\sigma^{ik}] [l_k] \{\mathbf{v}\} + \{\delta \mathbf{v}\}^T [l_k]^T [\sigma^{ki}] [l_i] \{\mathbf{v}\} \right) \right] dV_0 = \\ = \int_{S_{m+1}} \{\delta \mathbf{v}\}^T \{\Delta \mathbf{Q}\} dS_{m+1} - \int_{S_{m+1}} \{\delta \mathbf{v}\}^T \{\mathbf{R}\} dS_{m+1}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

где $[\sigma^{ik}]$ есть матрица 3×3 с элементами σ^{ik} ;

первый и второй интегралы правой части (2.51) есть соответственно вектор-столбцы, отвечающие нагружению и корректирующей шаг невязке.

Заметим, что второе слагаемое под интегралом по объему в левой части (2.51) учитывает геометрическую нелинейность задачи и порождает, так называемую, матрицу геометрической жесткости.

2.5. Соотношения МКЭ для вариационного принципа в приращениях

МКЭ получил широкое распространение для решения различных задач механики деформируемого твердого тела. Он достаточно широко представлен в литературе. Можно отметить здесь такие исследования, как монографии О. Зенкевича [155], Ю. А. Куликова [175], Д. Норри и др. [191], А. С. Сахарова и др. [186], Р. Галлагера [146], О. Зенкевича и др. [154], С. Ю. Еременко [153], В.В. Киричевского [172], В.А. Толока и др. [187].

Рассмотрим применение МКЭ к решению поставленной осесимметричной упругой задачи для гиперупругого почти несжимаемого материала в перемещениях. Используем МКЭ для алгебраизации принципа возможных перемещений в приращениях.

При решении задач МКЭ исследуемый объект разбивается на конечные элементы (КЭ). Каждый КЭ определяется совокупностью узловых точек, принадлежащих ему. Функции перемещений в КЭ определяются суммой произведений их искомым узловых значений на функции формы, обеспечивающие совместность перемещений на общих границах соседних КЭ. Такой подход дает возможность свести краевую задачу к СЛАУ.

МКЭ позволяет рассчитывать объекты, обладающие как изотропными, так и анизотропными свойствами, а также объекты, составленные из нескольких областей с различными физико-механическими свойствами материалов. Одним из основных вопросов при использовании МКЭ является выбор формы и размерности КЭ. По размерности исследуемого объекта их разделяют на одно-, двух- и трехмерные. В двумерной задаче КЭ делятся на треугольные и четырехугольные. Для повышения степени аппроксимации как объекта, так и искомой функции вводят дополнительные узлы по каждому направлению. В зависимости от количества узлов плоские КЭ подразделяют на элементы с линейными (3 и 4 узла) и квадратичными (6 и 8 узлов) функциями формы.

Исследуемый объект разбиваем на конечное число связанных в узловых точках восьмиузловых КЭ (рис. 2.2). Вектор узловых перемещений элемента имеет вид

$$\{\tilde{\mathbf{u}}\} = \left\{ u_{r1} \quad u_{\varphi1} \quad u_{z1} \quad \dots \quad u_{r8} \quad u_{\varphi8} \quad u_{z8} \right\}^T.$$

В каждом КЭ вводим систему локальных координат $-1 \leq \zeta_1 \leq 1$, $-1 \leq \zeta_2 \leq 1$.

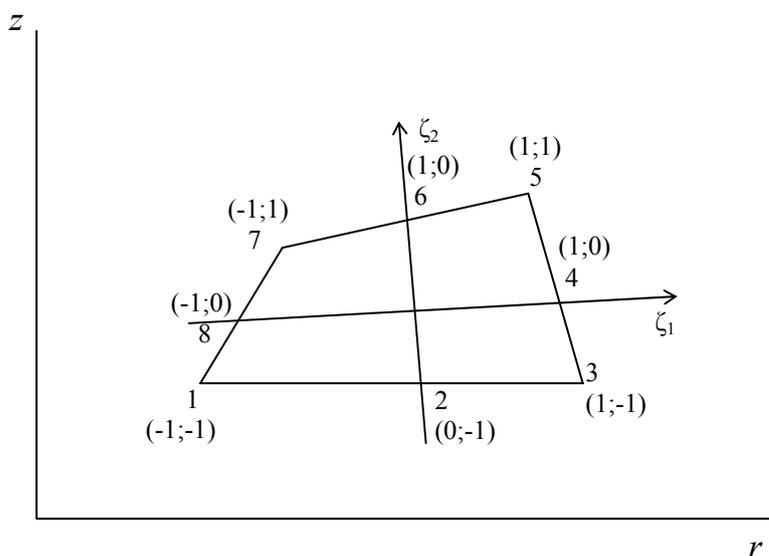


Рис. 2.2. Восьмиузловой КЭ

Функции формы должны быть выбраны таким образом, чтобы при подстановке в (2.52) координат узлов получались значения аппроксимируемой функции в этих узлах. По определению функция формы N_i принимает значение единица в данном узле и нуль во всех других, т. е. $N_i(x_i, y_i) = 1$, $N_i(x_j, y_j) = 0$ при $i \neq j$; $i, j = 1, \dots, 8$.

Для данного восьмиузлового КЭ функции формы в локальных координатах имеют вид [186]

$$N_1 = \frac{(1 - \zeta_1)(1 + \zeta_2)(\zeta_2 - \zeta_1 - 1)}{4}, \quad N_2 = \frac{(1 - \zeta_2^2)(1 - \zeta_1)}{2},$$

$$N_3 = \frac{(\zeta_1 - 1)(1 - \zeta_2)(\zeta_1 + \zeta_2 + 1)}{4}, \quad N_4 = \frac{(1 - \zeta_1^2)(1 - \zeta_2)}{2},$$

$$N_5 = \frac{(1+\zeta_1)(1-\zeta_2)(\zeta_1-\zeta_2-1)}{4}, \quad N_6 = \frac{(1-\zeta_2^2)(1+\zeta_1)}{2},$$

$$N_7 = \frac{(1+\zeta_1)(1+\zeta_2)(\zeta_1+\zeta_2-1)}{4}, \quad N_8 = \frac{(1-\zeta_1^2)(1+\zeta_2)}{2}.$$

С помощью функций формы глобальные координаты произвольной точки КЭ выражаются через значения координат его узлов

$$\begin{Bmatrix} r \\ z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ z_1 \end{Bmatrix} N_1 + \dots + \begin{Bmatrix} r_8 \\ z_8 \end{Bmatrix} N_8,$$

где r_i, z_i – координаты i -го узла.

Поскольку в функционал потенциальной энергии кроме компонент вектора перемещений входят и их первые производные, рассмотрим выражения для производных функций формы по глобальным координатам (r, z) через производные по локальным координатам (ζ_1, ζ_2)

$$\frac{\partial}{\partial r} N_i = a_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} N_i + b_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} N_i, \quad \frac{\partial}{\partial z} N_i = c_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_1} N_i + d_1 \frac{\partial}{\partial \zeta_2} N_i, \quad k = 1, \dots, 8,$$

где

$$\Delta \equiv \det(J) = ad - cb; \quad [\mathbf{I}]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{bmatrix};$$

$$[\mathbf{I}] = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial \zeta_1} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_1} \\ \frac{\partial r}{\partial \zeta_2} & \frac{\partial z}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_1} & z_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_1} \\ r_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_2} & z_k \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_2} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}.$$

Введем соотношения для компонент приращения вектора перемещений и части тензора деформаций (2.10) для одного КЭ в матричном виде

$$\{\mathbf{v}\} = [\mathbf{N}]\{\tilde{\mathbf{v}}\}, \quad \{\mathbf{e}\} = [\tilde{\mathbf{L}}][\mathbf{N}]\{\tilde{\mathbf{v}}\},$$

где $\{\tilde{\mathbf{v}}\}$ – вектор приращений узловых перемещений.

Подставляя приведенные выше формулы в уравнение (2.51), получим

$$\begin{aligned} \{\delta\tilde{\mathbf{v}}\}^T \left\{ \int_{V_0^e} \left[[\mathbf{N}]^T [\tilde{\mathbf{L}}]^T [\tilde{\mathbf{E}}] [\tilde{\mathbf{L}}] [\mathbf{N}] + \frac{1}{2} \left([\mathbf{N}]^T [l_i]^T [\sigma^{ik}] [l_k] [\mathbf{N}] + [\mathbf{N}]^T [l_k]^T [\sigma^{ki}] [l_i] [\mathbf{N}] \right) \right] dV_0^e \right\} \{\tilde{\mathbf{v}}\} = \\ = \{\delta\tilde{\mathbf{v}}\}^T \int_{S_{m+1}} [\mathbf{N}]^T \{\Delta\mathbf{Q}\} dS_{m+1} - \{\delta\tilde{\mathbf{v}}\}^T \int_{S_{m+1}} [\mathbf{N}]^T \{\mathbf{R}\} dS_{m+1}, \end{aligned} \quad (2.53)$$

где $[\sigma^{ik}]$ – матрица 3x3 компонент σ^{ik} тензора полных напряжений.

Суммируя соотношения (2.53) по всем КЭ и приравнявая нулю множители при вариациях компонент вектора приращений узловых перемещений $\{\delta\tilde{\mathbf{v}}\}$, приходим к СЛАУ

$$([\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g])\{\tilde{\mathbf{v}}\} = \{\mathbf{Q}\} - \{\mathbf{R}\}, \quad (2.54)$$

где $[\mathbf{K}_e]$ и $[\mathbf{K}_g]$ – матрицы жесткости и геометрической жесткости, равные интегралам от первого и второго слагаемых в (2.53) (первая из них отвечает геометрически линейной задаче, вторая – учитывает геометрическую нелинейность); $\{\mathbf{Q}\}$ и $\{\mathbf{R}\}$ – векторы-столбцы приращений нагрузок и невязок уравнений равновесия, равные интегралам правой части (2.53).

Далее будем использовать обозначение

$$[\mathbf{K}] = [\mathbf{K}_e] + [\mathbf{K}_g]. \quad (2.55)$$

Кинематические граничные условия вводим в систему (2.54) путем замены диагональных компонент матрицы $[\mathbf{K}]$ (2.55), отвечающих равным нулю компонентам вектора перемещений, значениями существенно большими, чем другие компоненты матрицы.

ГЛАВА 3

МЕТОДИКА И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ПОСТАВЛЕННОЙ ЗАДАЧИ

В третьей главе описаны методика, алгоритм, структура и особенности программы численного решения поставленной задачи [160], проведена оценка полученных результатов, достоверность которых подтверждена их совпадением с точными решениями линейной и нелинейной задач деформирования толстостенных цилиндра [189] и полый сферы под действием внутреннего давления.

3.1. Алгоритм расчета

Исследование НДС гиперупругих тел вращения в книге выполняется с помощью численного решения вариационной задачи МКЭ. Основные этапы алгоритма состоят в следующем.

По исходной информации о форме и размерах поперечного сечения тела и числе КЭ строится сетка КЭ. При этом образуется информационный массив, указывающий на уровень жесткости материала элемента (он необходим для расчета кусочно-однородных тел). Так как расчет выполняется шаговым методом по параметру нагрузки, на каждом шаге имеем линеаризованную задачу МКЭ относительно приращений узловых перемещений. Исходное состояние тела считаем свободным от нагрузки (недеформированным).

Далее, в соответствии с (2.53) численным интегрированием по Гауссу вычисляются элементы матриц жесткости КЭ и производится их накопление в матрицу жесткости тела.

На следующем этапе подсчитываются элементы вектора правой части СЛАУ, отвечающего заданному приращению давления на нагруженной поверхности тела. Затем вводятся кинематические граничные условия – условия закрепления тела, т. е. равенства нулю узловых перемещений в определенных узлах. При этом элементы строк и столбцов матрицы жесткости тела с номерами таких узловых перемещений заменяются нулями, а диагональные элементы – единицами. Нулями заменяются и соответствующие элементы вектора правой части. Таким образом, приходим к СЛАУ.

Матрица полученной системы симметричная, положительно определенная и имеет ленточную структуру, поэтому хранится в виде верхней

правой полуленты. Для ее решения применен известный метод Холецкого [203].

Учитывая, что вектор правой части СЛАУ зависит от накопленных перемещений (так как при его вычислении интегралы берутся по деформированному объему тела, а на выполняемом шаге по нагрузке они еще не известны и заменяются на перемещения, полученные на предыдущем шаге), то для уточнения решения используем итеративный процесс метода Ньютона-Рафсона [186]

$$\Delta V_i = K^{-1}R_{i-1} = K^{-1}(P_{i-1} - KV_{i-1}), \quad (3.1)$$

$$V_i = V_{i-1} + \Delta V_i, \quad (3.2)$$

где i – номер итерации; K – матрица системы на первой итерации; R , P , V – векторы узловых значений невязок, правой части и приращений перемещений.

Приведенные формулы (3.1) и (3.2) требуют затрат на вычисление вектора невязок (умножение матрицы на вектор и вычитание векторов, а также сложение в (3.2)). Для упрощения вычисления преобразуем формулу (3.1): раскрываем второе слагаемое правой части и переносим его в левую, получаем

$$V_i = K^{-1}P_{i-1}.$$

Полное решение СЛАУ выполняется только на первой итерации, на последующих – лишь обратный ход. Высокая эффективность описанного алгоритма подтверждена примерами, описанными в 3.3.

Полученные приращения компонент вектора узловых перемещений прибавляются к массиву накопленных на предыдущих шагах (полных) перемещений, что позволяет вычислять новые координаты узлов деформированной сетки КЭ. Полные деформации в узлах определяются как произведение модифицированной матрицы (2.12) введением коэффициентов $1/2$, умноженной на вектор узловых значений полных перемещений. При этом реализуется точная формула (2.5). Компоненты тензора напряжений в узлах сетки подсчитываются по точным формулам (2.18), (2.19), а затем определяются физические компоненты тензора напряжений Коши. Заметим, что в общепринятом алгоритме шагового

метода решения нелинейных задач деформации и напряжения накапливаются путем сложения их приращений, что приводит к повышению погрешности.

Указанные вычисления повторяются согласно заданному числу шагов по нагрузке, что позволяет проследить за НДС тела на протяжении всего процесса нагружения. После выполнения каждого шага результаты визуализируются в виде графиков распределения функций, представляющих интерес для исследователя.

3.2. Структура и особенности программы

Программа для персонального компьютера представляет собой совокупность ведущего и ряда функциональных блоков и реализующих их процедур. Блок-схема программы показана на рис. 3.1.

При запуске программы ряду идентификаторов присваиваются значения параметров, управляющих выбором режима ее работы: решение задачи в линейной постановке, в геометрически нелинейной, физически нелинейной, физически и геометрически нелинейной, с изотропным или трансверсально-изотропным материалом. Задается максимальное давление и число шагов по нагрузке, информация о форме тела (толстенная сфера, эллипсоид, цилиндр, пластина), его размерах, числе КЭ по толщине и вдоль меридиана, степени сгущения сетки, расположении и числе КЭ включений, коэффициенты их жесткости, сведения об используемом виде потенциала, модуль упругости и коэффициент Пуассона, число узлов формулы интегрирования по Гауссу. Затем подсчитываются количество КЭ, узлов и узловых неизвестных и ширина полуленты матрицы жесткости.

Ведущий блок программы управляет ее работой, обращаясь в соответствии с алгоритмом к ряду процедур. В начале вводятся узлы и веса выбранной формулы Гаусса, затем вычисляются параметры потенциала, засылаются нули в массивы для накопленных значений функций (в узлах сетки КЭ и узлах Гаусса) и идентификатор текущего значения давления.

В подготовку счета входит: задание узлов и весов Гаусса, обнуление накопленного давления, массивов вектора перемещений, тензоров деформаций и напряжений.

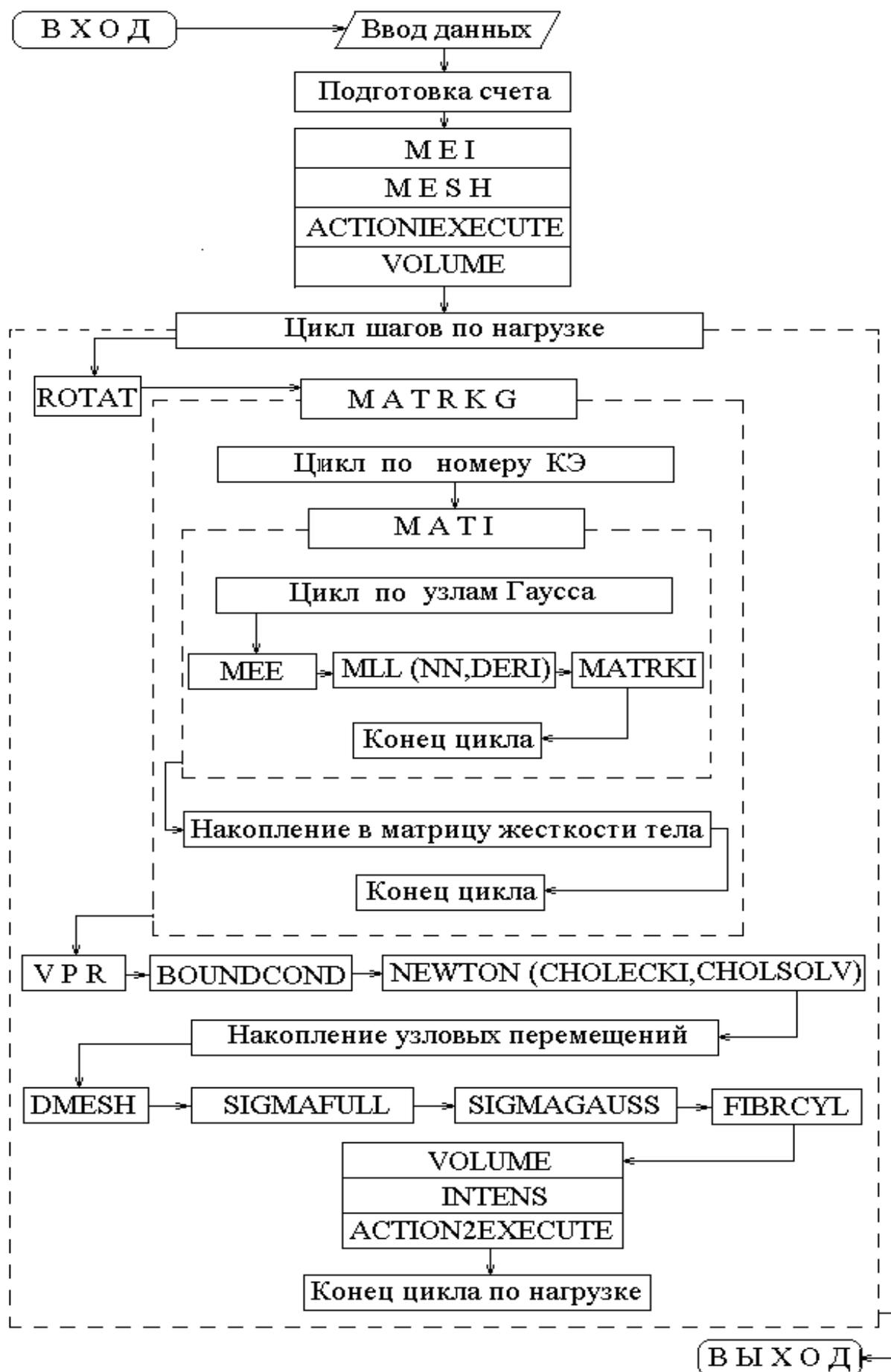


Рис. 3.1. Блок-схема программы

С помощью процедуры MEI образуется матрица закона Гука, используемая далее при вычислении элементов матриц касательных модулей. Процедура MESH создает сетку КЭ, при этом заполняются массивы координат узлов и номеров узлов, образующих каждый КЭ с информацией о том, является ли элемент включением. Специальная процедура ACTION1EXECUTE выдает на экран рисунок сетки КЭ.

Затем начинает работать цикл по номеру шага нагружения. При решении задач определения НДС модели ЛЖ (нагруженный внутренним давлением толстостенный эллипсоид со спиральной транслопией) процедура ROTAT вычисляет для каждого КЭ текущие углы между глобальной (цилиндрической) и материальной системами координат и образует массивы с элементами матриц поворота от одной системы к другой в узлах сетки КЭ и узлах Гаусса. После этого работает процедура MATRKG (вычисление элементов матрицы жесткости тела). Эта процедура представляет собой цикл по номеру КЭ, которая (обращаясь к процедуре MATI) образует матрицы жесткости КЭ и рассылает их со сложением в полуленту массива матрицы жесткости тела. Процедура MATI вычисляет интеграл по объему КЭ как сумму произведений матриц жесткости КЭ в узлах Гаусса (образуемых процедурой MATRKI) на веса Гаусса. Интегрирование по КЭ выполняется с помощью двукратного применения формулы Гаусса с любым заданным числом узлов.

Наиболее сложную работу выполняет процедура MATRKI, которая после обращения в MATI к процедурам MEE и MLL, вычисляет элементы матрицы жесткости в каждой из точек Гаусса. Процедура MEE при этом образует матрицу касательных модулей упругости, а MLL – матрицу связи между приращениями компонент вектора перемещений и деформаций (2.12). При этом процедура NN используется для вычисления значений функций формы, а DERI – их производных по локальным координатам ζ_1 , ζ_2 . В случае решения задачи для тела из трансверсально-изотропного материала для вычисления элементов матрицы касательных модулей в цилиндрической системе координат сначала с помощью специальной процедуры накопленные компоненты тензора деформаций в цилиндрической системе преобразуются в материальную систему. При этом используются матрицы поворота. Далее процедура MEE строит матрицу касательных модулей и преобразует ее к цилиндрической системе координат.

Так как, согласно (2.55), матрица жесткости $[K]$ состоит из двух слагаемых ($[K_e]$ и $[K_g]$), структура которых существенно различна, процедура MATRKI содержит два блока с разными алгоритмами.

Вектор правой части создает процедура VPR.

Преобразование матрицы жесткости и вектора правой части для введения граничных условий выполняет процедура BOUNDCOND.

Полученная СЛАУ решается с помощью процедуры CHOLESKI в сочетании с итеративным процессом (3.1), (3.2) метода Ньютона-Рафсона, реализуемого процедурой NEWTON. После этого ведущий блок программы, обращаясь к процедуре DMESH, вычисляет полные значения деформаций в узлах сетки КЭ и узлах Гаусса.

Значения компонент второго тензора напряжений Пиола-Кирхгоффа и физические компоненты тензора истинных напряжений Кирхгоффа в тех же узлах вычисляет процедура SIGMAFULL.

В случае, если материал трансверсально-изотропный, деформации и напряжения процедурой FIBRCYL преобразуются от материальной к цилиндрической системе координат.

Далее процедура INTENS вычисляет интенсивности деформаций и напряжений, а также длины векторов перемещений в узлах сетки КЭ, а процедура VOLUME по формуле Симпсона путем численного интегрирования подсчитывает внутренний объем деформированного объекта.

После окончания цикла по числу шагов нагружения процедура ACTION2EXECUTE выдает на экран цветные рисунки областей уровня интересующих исследователя функций на фоне деформированной сетки КЭ. Выбор иллюстрируемых функций производится заданием управляющих параметров.

3.3. Оценка достоверности результатов численных решений

Для проверки достоверности результатов, получаемых предложенным выше методом, были решены линейная и нелинейная задачи деформирования толстостенного цилиндра и полой сферы под действием внутреннего давления. Результаты решения линейных задач сравнивались с точными решениями задач Ламе [202, 206, 209], а нелинейной – с точными решениями А.И. Лурье [184] для сжимаемых цилиндра и сферы, выполненных из полулинейного материала Джона.

3.3.1. Толстостенный цилиндр. Для полноты изложения приведем формулы точного решения линейной задачи Ламе

$$u_r = \frac{qa^2}{E(b^2 - a^2)} \left((1 - \nu)r + \frac{(1 + \nu)b^2}{r} \right),$$

$$\varepsilon_r = \frac{qa^2}{E(b^2 - a^2)} \left((1 - \nu) - \frac{(1 + \nu)b^2}{r^2} \right), \quad \varepsilon_\varphi = \frac{qa^2}{E(b^2 - a^2)} \left((1 - \nu) + \frac{(1 + \nu)b^2}{r^2} \right),$$

$$\sigma_r = \frac{qa^2}{b^2 - a^2} \left(1 - \frac{b^2}{r^2} \right), \quad \sigma_\varphi = \frac{qa^2}{b^2 - a^2} \left(1 + \frac{b^2}{r^2} \right),$$

где a , b – внутренний и внешний радиусы толстостенного цилиндра; E , ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно; q – давление, приложенное к внутренней поверхности цилиндра.

Точное решение А. И. Лурье физически и геометрически нелинейной задачи имеет вид

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - r,$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} + 1 \right) \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} - 1 \right),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_r}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} + 1 \right) \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} - 1 \right),$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right)^\alpha} \left(\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu \left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right) - (3\lambda + 2\mu) \right),$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\left(C_1 - \frac{C_2}{r^2} \right)^\alpha} \left(\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu \left(C_1 + \frac{C_2}{r^2} \right) - (3\lambda + 2\mu) \right),$$

$$\sigma_z = \frac{1}{\left(C_1 - \frac{C_2}{r^2}\right)\left(C_1 + \frac{C_2}{r^2}\right)} (\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu\alpha - (3\lambda + 2\mu)),$$

где σ_r , σ_φ , σ_z – физические компоненты тензора напряжений; λ и μ – параметры Ламе; $u_\varphi = 0$, $u_r = u_r(r)$, $u_z = u_z(r, z)$; C_1 , C_2 , α – параметры, которые находятся из следующих граничных условий:

$$\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu\alpha = 3\lambda + 2\mu, \quad (3.3)$$

$$\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu\left(C_1 - \frac{C_2}{a^2}\right) = -q\left(C_1 + \frac{C_2}{a^2}\right)\alpha + 3\lambda + 2\mu, \quad (3.4)$$

$$\lambda(2C_1 + \alpha) + 2\mu\left(C_1 - \frac{C_2}{b^2}\right) = 3\lambda + 2\mu. \quad (3.5)$$

Формула (3.3) – интегральное уравнение равенства нулю осевой силы, (3.4) – $\sigma_r(a) = -q$, (3.5) – $\sigma_r(b) = 0$.

Найдем параметры C_1 , C_2 , α из нелинейной системы уравнений (3.3) – (3.5). В (3.3) выразим α через C_1

$$\alpha = \frac{3\lambda + 2\mu - 2\lambda C_1}{\lambda + 2\mu}. \quad (3.6)$$

Из (3.5) вычтем (3.3) и выразим α через C_1 и C_2

$$\alpha = C_1 - \frac{C_2}{b^2}. \quad (3.7)$$

Приравняв равенства (3.6) и (3.7), получим связь

$$C_1 = 1 + \frac{\lambda + 2\mu}{b^2(3\lambda + 2\mu)} C_2. \quad (3.8)$$

Подставляя в (3.6) выражение для C_1 из (3.8), находим

$$\alpha = 1 - \frac{2\lambda}{b^2(3\lambda + 2\mu)} C_2. \quad (3.9)$$

Подставляя (3.8) и (3.9) в (3.4) и приведя подобные, получим квадратное уравнение относительно C_2

$$a_1 C_2^2 + a_2 C_2 + a_3 = 0, \quad (3.10)$$

где

$$a_1 = \frac{-2q\lambda(a^2(\lambda + 2\mu) + b^2(3\lambda + 2\mu))}{a^2 b^4 (3\lambda + 2\mu)^2},$$

$$a_2 = \frac{a^2(2\mu(3\lambda + 2\mu) + q(2\mu - \lambda)) + b^2(3\lambda + 2\mu)(q - 2\mu)}{a^2 b^2 (3\lambda + 2\mu)},$$

$$a_3 = q.$$

Решив уравнение (3.10), получим две тройки параметров $C_{1(1)}$, $C_{2(1)}$, $\alpha_{2(1)}$ и $C_{1(2)}$, $C_{2(2)}$, $\alpha_{2(2)}$. Выберем тройку, которая удовлетворяет условию убывания функция u_r на отрезке $[a, b]$.

Как отмечалось ранее, нелинейная задача решена для полулинейного закона Джона (2.25).

Физические компоненты тензора напряжений $\sigma_{(kk)}$ определяются с помощью контравариантных компонент тензора напряжений σ^{kk} (2.26) по следующей формуле:

$$\sigma_{(kk)} = \lambda_k^2 \sigma^{kk}.$$

Для расчетов приняты следующие исходные данные: $q = 0,5$ кПа, $a = 2,5$ см, $b = 3,5$ см, $E = 5$ кПа, $\nu = 0,3$, длина цилиндра равна 1 см. Все расчеты проводились на персональном компьютере с помощью разрабо-

танной автором программы. Эффективность итеративного процесса, описанного в 3.2, оказалась настолько высокой, что нагружение выполнялось за один шаг и число итераций не превышало 5.

Для проверки точности и характера сходимости описанного выше метода и алгоритма выполнено численное исследование влияния количества КЭ по толщине цилиндра nh , степени сгущения сетки mh (отношение радиальных размеров внешнего и внутреннего КЭ) к внутренней поверхности и числа шагов по нагрузке nq . Полученные численные решения линейной и нелинейной задач совпали с аналитическими с относительной погрешностью 10^{-4} при $nh = 5$, равномерной сетке ($mh = 1$) и $nq = 1$.

На рис. 3.2 приведена сетка КЭ. Начальное и деформированное состояния сечения цилиндра (нелинейная задача) показаны на рис. 3.3.

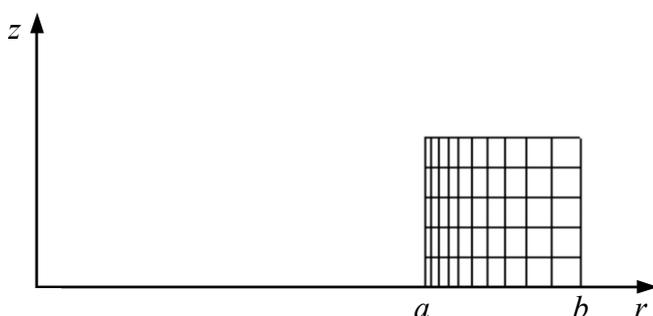


Рис. 3.2. Дискретизация цилиндра КЭ при $mh = 5$

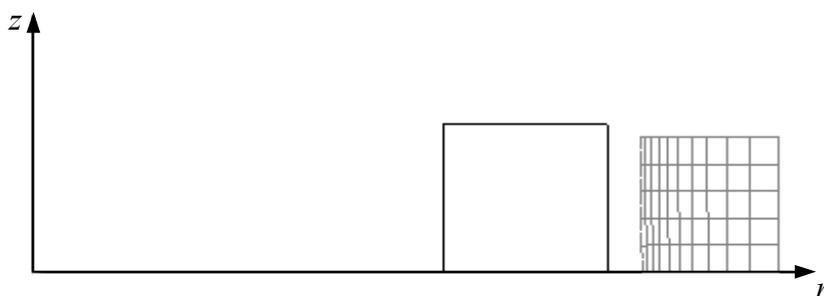
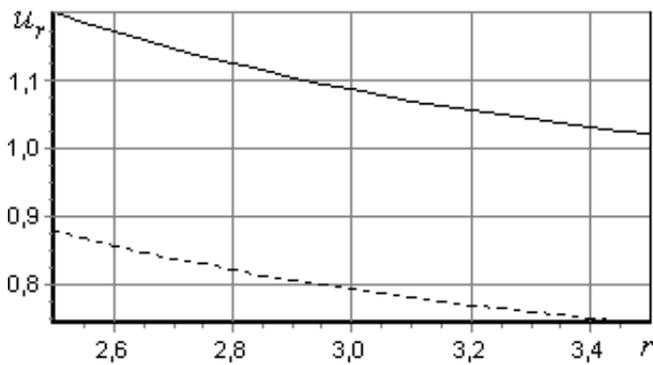
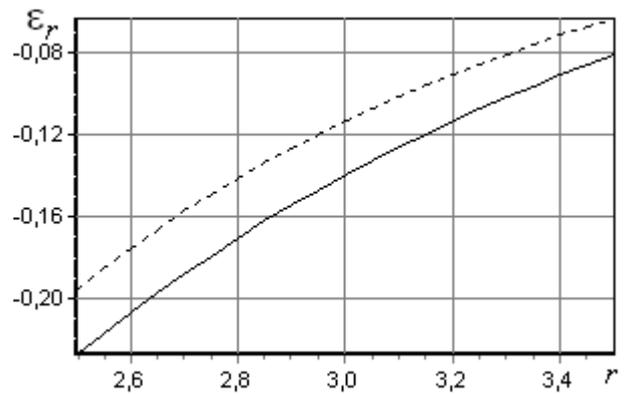
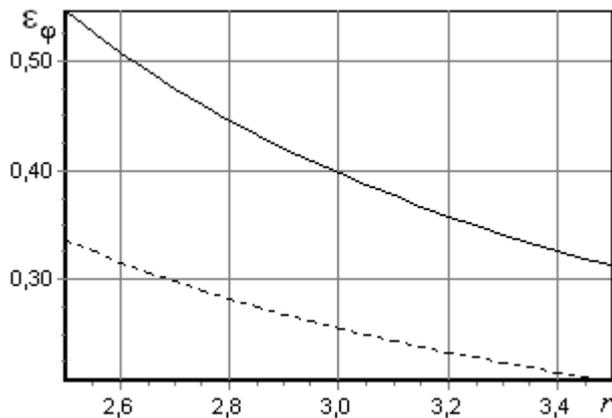
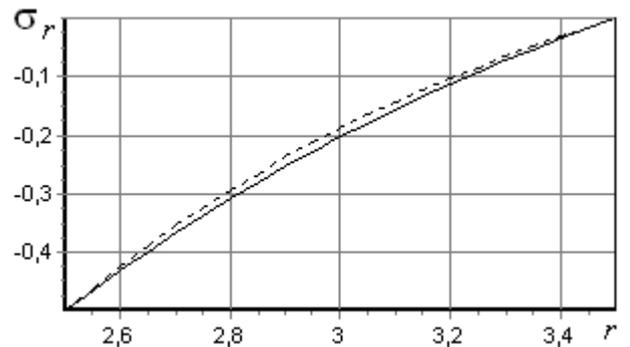
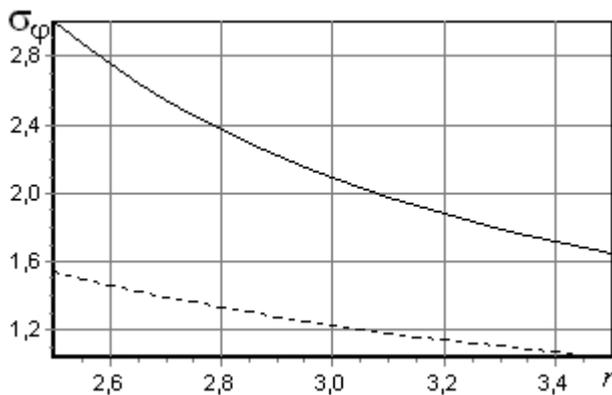
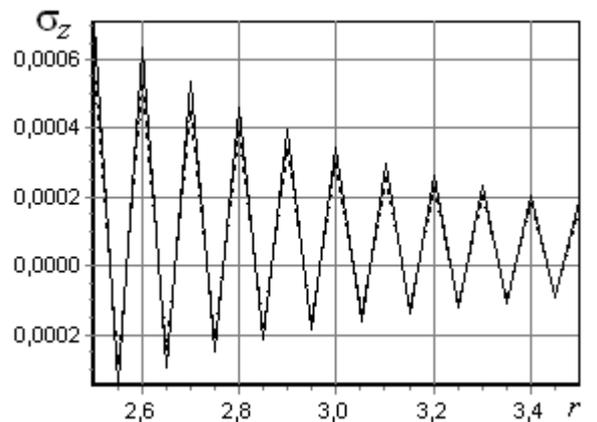


Рис. 3.3. Начальное и деформированное состояния цилиндра

Результаты расчетов НДС цилиндра в линейной (пунктирные линии) и нелинейной (сплошные линии) постановках представлены в виде графиков перемещения u_r (рис. 3.4), деформаций ε_r , ε_φ (рис. 3.5 – 3.6) и напряжений σ_r , σ_φ , σ_z (рис. 3.7 – 3.9).

В точном решении $\sigma_z = 0$, рис. 3.9 характеризует погрешность численного решения. Кроме того, отметим, что в рассмотренном примере максимальная величина деформации ($\varepsilon_\varphi = 0,55$) составляет десятки процентов. Использование в таких случаях геометрически линейной теории недопустимо.

Рис. 3.4. Перемещение u_r Рис. 3.5. Деформация ϵ_r Рис. 3.6. Деформация ϵ_ϕ Рис. 3.7. Напряжение σ_r Рис. 3.8. Напряжение σ_ϕ Рис. 3.9. Напряжение σ_z

Увеличение сгущения mh от 1 до 3 не изменило результатов. Однако дальнейшее увеличение mh приводит к погрешности. Увеличение числа КЭ по толщине nh приводит к изменению максимальных по модулю значений напряжений лишь в четвертой значащей цифре и поэтому не является необходимым. Увеличение числа шагов по нагрузке nq не требуется, так как это не уточняет результаты.

На рис. 3.10, 3.11 приведена зависимость функций u_r и σ_φ от нагрузки nq в двух точках $r = a$ (линия 1) и $r = b$ (линия 2). Эти графики показывают степень нелинейности связи перемещений и напряжений с нагрузкой nq .

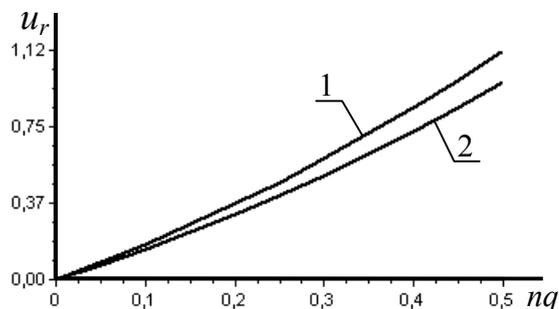


Рис. 3.10. Зависимость перемещения u_r от нагрузки

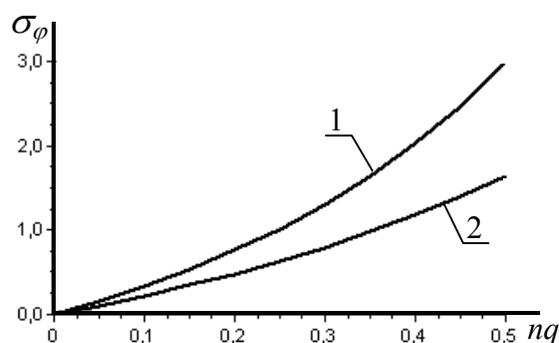


Рис. 3.11. Зависимость напряжения σ_φ от нагрузки

Таким образом, уровень физической и геометрической нелинейности при нагрузке 0,5 кПа таков, что приемлемое по точности решение можно получить при равномерной сетке с пятью КЭ по толщине и при одном шаге по нагрузке. Напомним, что применяется метод Ньютона-Рафсона.

3.3.2. Полая сфера. Приведем формулы точного решения линейной задачи Ламе [209]

$$u_r = \frac{qa^3}{2G(b^3 - a^3)} \left(\frac{1}{2} \frac{b^3}{r^2} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} r \right),$$

$$\varepsilon_r = \frac{qa^3}{2G(b^3 - a^3)} \left(-\frac{b^3}{r^3} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \right), \quad \varepsilon_\varphi = \varepsilon_\theta = \frac{qa^3}{2G(b^3 - a^3)} \left(\frac{1}{2} \frac{b^3}{r^3} + \frac{1-2\nu}{1+\nu} \right),$$

$$\sigma_r = \frac{qa^3}{b^3 - a^3} \left(1 - \frac{b^3}{r^3} \right), \quad \sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{qa^3}{b^3 - a^3} \left(1 + \frac{b^3}{2r^3} \right),$$

где a, b – внутренний и внешний радиусы полой сферы; E, ν – модуль упругости и коэффициент Пуассона соответственно; q – давление, приложенное к внутренней поверхности сферы.

Точное решение А.И. Лурье физически и геометрически нелинейной задачи имеет вид

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r^2} - r,$$

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u_r}{\partial r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\partial u_r}{\partial r} \right) = \frac{1}{2} \left(C_1 - 2 \frac{C_2}{r^3} + 1 \right) \left(C_1 - 2 \frac{C_2}{r^3} - 1 \right),$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{u_r}{r} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{u_r}{r} \right) = \frac{1}{2} \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} - 1 \right) \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} + 1 \right),$$

$$\sigma_r = \frac{1}{\left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right)^2} \left((3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1) - 4\mu \frac{C_2}{r^3} \right),$$

$$\sigma_\varphi = \sigma_\theta = \frac{1}{\left(C_1 - 2 \frac{C_2}{r^3} \right) \left(C_1 + \frac{C_2}{r^3} \right)} \left((3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1) + 2\mu \frac{C_2}{r^3} \right),$$

где $\sigma_r, \sigma_\varphi, \sigma_\theta$ – физические компоненты тензора напряжений; $u_\varphi = 0$, $u_r = u_r(r)$, $u_\theta = 0$; параметры C_1, C_2 находятся из граничных условий $\sigma_r(a) = -q$

$$(3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1) - 4\mu \frac{C_2}{a^3} = -q \left(C_1 + \frac{C_2}{a^3} \right)^2; \quad (3.11)$$

и $\sigma_r(b) = 0$

$$(3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1) - 4\mu \frac{C_2}{b^3} = 0. \quad (3.12)$$

Найдем параметры C_1 и C_2 из нелинейной системы уравнений (3.11) – (3.12). В (3.12) выразим C_2 через C_1

$$C_2 = \frac{(3\lambda + 2\mu)(C_1 - 1)b^3}{4\mu}. \quad (3.13)$$

Подставляя в (3.11) выражение для C_2 из (3.13), получим

$$b_1 C_1^2 + b_2 C_1 + b_3 = 0, \quad (3.14)$$

где

$$b_1 = q \left(4a^3 \mu + b^3 (3\lambda + 2\mu) \right)^2,$$

$$b_2 = (3\lambda + 2\mu) \left[16a^6 \mu^2 \left(1 - \frac{b^3}{a^3} \right) - 2qb^3 \left(4a^3 \mu + b^3 (3\lambda + 2\mu) \right) \right],$$

$$b_3 = (3\lambda + 2\mu) \left[qb^6 (3\lambda + 2\mu) - 16a^6 \mu^2 \left(1 - \frac{b^3}{a^3} \right) \right].$$

Решив уравнение (3.14), получим две тройки параметров $C_{1(1)}$, $C_{2(1)}$ и $C_{1(2)}$, $C_{2(2)}$. Выбираем пару, которая удовлетворяет условию убывания функция u_r на отрезке $[a, b]$.

Для получения МКЭ численного решения полярно симметричной задачи о полой сфере, выполненной из материала с потенциалом полулинейного закона Джона, целесообразно использовать сферические координаты. Дело в том, что этот потенциал выражен через удлинения и не может описывать связь между касательными напряжениями и деформациями сдвига, а эти компоненты тензоров в сферических

координатах равны нулю. Разработанная программа ориентирована на решение задач в цилиндрической системе координат, поэтому в данном случае ее нельзя применить непосредственно для расчета полной сферы, так как касательные компоненты в этой системе отличны от нуля.

Для того, чтобы преодолеть это затруднение, будем решать задачу определения НДС части сферы с осью z и весьма малым углом раствора θ . В качестве кинематических граничных условий примем $u_r = 0$ при $r = 0$ и $u_n = u_r \cos\theta + u_z \sin\theta = 0$, где u_n – перемещение по нормали к боковой поверхности конуса. Касательные напряжения и деформации сдвига в цилиндрической системе координат в рассматриваемой задаче на оси вращения равны нулю точно, а в ее окрестности – весьма малы и тем меньше, чем меньше угол θ .

Граничное условие $u_n = 0$ налагаем с помощью метода штрафа, прибавляя к матрице жесткости (2.53) сумму матриц, порождаемых слагаемыми

$$\frac{1}{2} C_b \delta(u_r \cos\theta + u_z \sin\theta)^2$$

в каждом узле боковой поверхности конуса. При этом к диагональному элементу матрицы жесткости, отвечающему узловому перемещению u_r , прибавляется $C_b \cdot \cos^2\theta$, к элементу той же строки, соответствующей неизвестному u_z , прибавляется $C_b \cdot \sin\theta \cdot \cos\theta$, а к диагональному элементу, отвечающему $u_z - C_b \cdot \sin^2\theta$.

На рис. 3.12 – 3.17 представлены результаты численного решения линейной (пунктирные линии) и нелинейной (сплошные линии) задач для определения НДС сферы при $\theta = 1^\circ$, $a = 2,5$ см, $b = 3,5$ см, $q = 1$ кПа, $nh = 5$, $mh = 1$.

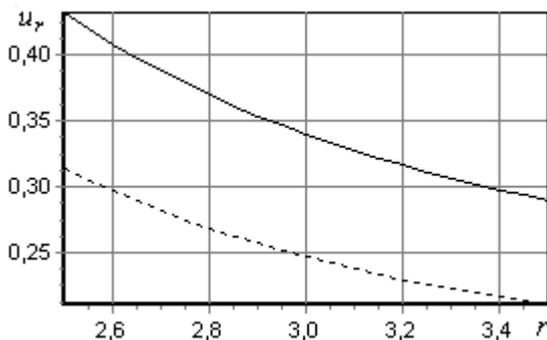


Рис. 3.12. Перемещение u_r

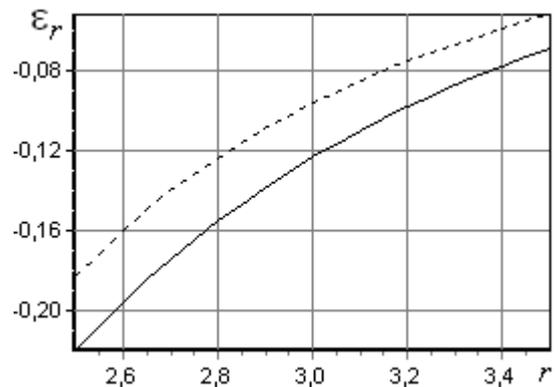
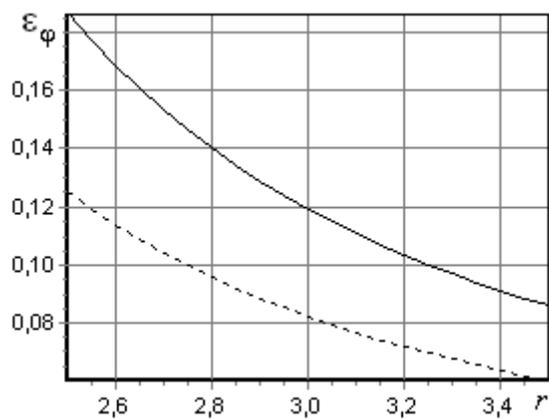
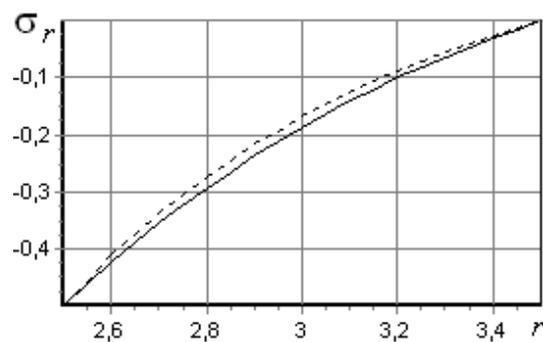
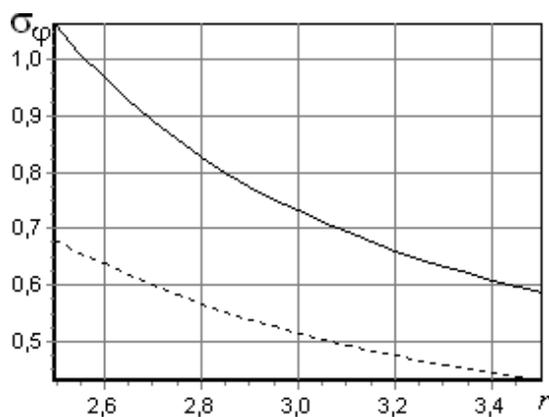
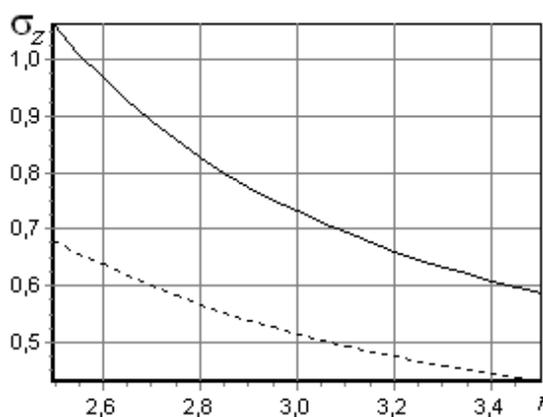


Рис. 3.13. Деформация ϵ_r

Рис. 3.14. Деформация ε_φ Рис. 3.15. Напряжение σ_r Рис. 3.16. Напряжение σ_φ Рис. 3.17. Напряжение σ_z

Так же, как и в для цилиндра, численные решения линейной и нелинейной задач за пять итераций при $nq = 1$ совпали с аналитическими с относительной погрешностью 10^{-4} .

ГЛАВА 4

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ НДС МОДЕЛИ ЛЖ СЕРДЦА

В четвертой главе приведены сведения о принятой в современной научной литературе методике решения задач механики деформирования сердца, построена математическая модель ЛЖ в виде усеченного [160] и замкнутого кусочно-однородного толстостенных эллипсоидов, проведен анализ влияния на НДС модели ЛЖ относительно жестких включений, рассмотрены четыре вида ИМ [159, 164].

Прежде, чем приступить к описанию построения математической модели ЛЖ, метода и результатов исследования, приведем важные для дальнейшего анализа сведения о принятой в современной научной литературе методике решения задач механики о деформировании элементов сердца.

Целью подобных исследований является не столько количественный, сколько качественный анализ влияния тех или иных геометрических параметров, прочностных свойств полого мышечного органа и влияние их изменений на характер НДС. Так как размеры и форма конкретных объектов бесконечно разнообразны, то делать обобщенные выводы целесообразно путем выполнения расчетов моделей относительно простой формы с осредненными размерами. Именно такой подход используется наиболее часто, причем для изучения ЛЖ, как правило, применяется модель в виде толстостенного эллипсоида вращения. Действительно, рассматривая рисунок сердца (рис. 4.1), взятый из классической книги по анатомии человека [46], видим, что стенка ЛЖ (окрашено черным цветом) близка по форме к эллипсоиду. Его геометрические параметры (полуоси внутренней и внешней поверхностей) принимаются равными осредненным для некоторой группы людей (например, заданной возрастной).

Для получения сведений о механических свойствах материала стенок сердца используются два подхода: эксперименты по нагружению извлеченных из сердца образцов ткани (при этом возможно влияние погрешностей, связанных с различием физиологических воздействий на ткань в живом объекте и образце) и сочетание измерений размеров и деформаций в живом объекте с решением обратных задач механики. Измерения выполняются с помощью современных аппаратов ультразвуковых исследований, киноангиографии, катетеров для определения давления на внутренней поверхности стенки ЛЖ. Коэффициенты

потенциала гиперупругого материала стенки определяются путем минимизации отклонения измеренных и вычисленных перемещений и деформаций. В книге используется именно этот (второй) путь.

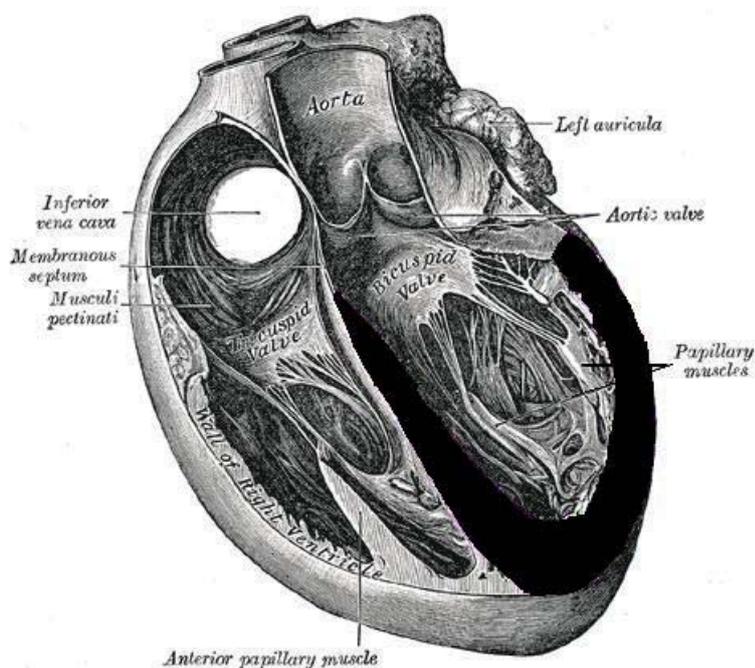


Рис. 4.1. Сечение сердца человека

4.1. Математическая модель ЛЖ сердца

При построении модели ЛЖ сердца примем следующие предположения:

- ЛЖ аппроксимируем толстостенным эллипсоидом – телом вращения и относим его к цилиндрической системе координат (рис. 4.2); геометрические параметры модели принимаем равными средним размерам ЛЖ человека;

- материал стенки считаем однородным или кусочно-однородным, изотропным или трансверсально-изотропным, почти несжимаемым, гиперупругим;

- в стенке располагаем два жестких включения (см. рис. 4.2): одно – моделирует основание сердца (куполообразная структура, в которой размещены его клапаны сверху), второе – зону ИМ, расположенную в вершине (апексе).

Оба включения моделируются участками стенки с повышенной жесткостью, причем второе – один из видов ИМ (трансмуральный – рис. 4.2, а, эндокардиальный – рис. 4.2, б, интрамуральный – рис. 4.2, в,

эпикардиальный – рис. 4.2, г) в хронической стадии. Заметим, что введенные в модель включения являются не абсолютно, а относительно жесткими – характерный модуль упругости материала включений в 5-8 раз больше, чем у здоровой ткани.

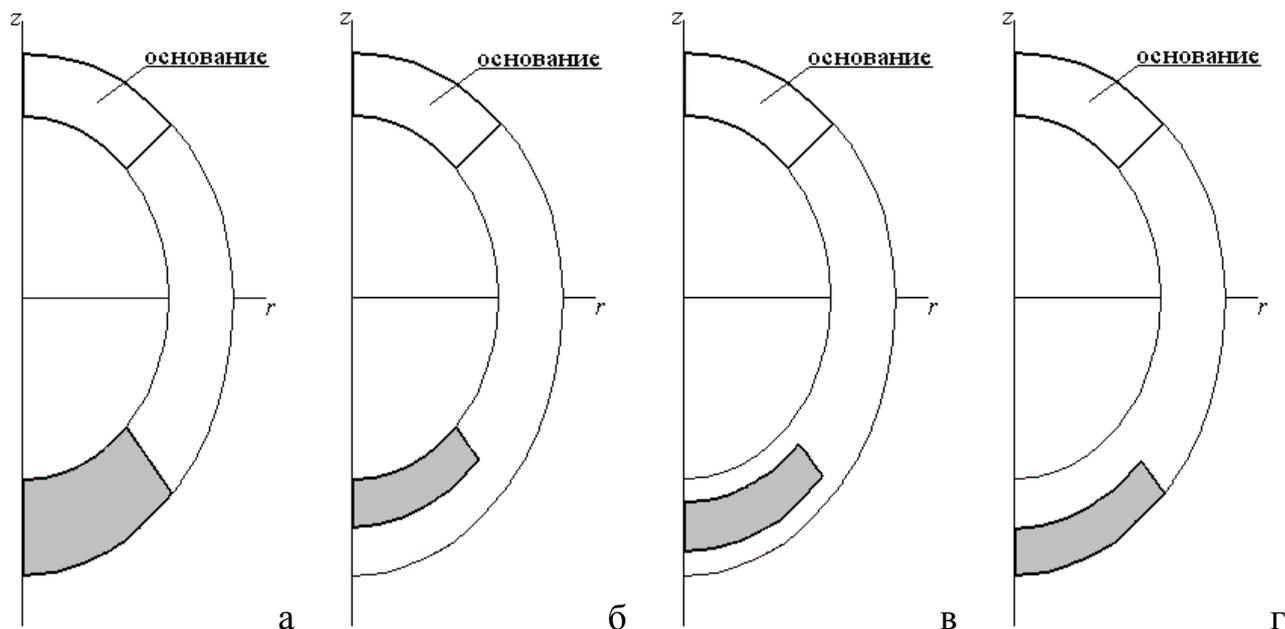


Рис. 4.2. Виды включений

а – трансмуральный б – эндокардиальный в – интрамуральный г – эпикардиальный

Решаем осесимметричную квазистатическую геометрически и физически нелинейную задачу деформирования ЛЖ под действием заданного внутреннего давления, изменяющегося от нуля до конечно-диастолического. Задача считается квазистатической, так как продолжительность сердечного цикла составляет приблизительно 1 с, а период собственных колебаний по низшей частоте модели близок к 0,083 с. Так, низшая собственная частота полой сферы с внутренним и наружным радиусами, равными 0,025 и 0,035 м соответственно, модулем упругости 10 кПа и плотностью 1100 кг/м^3 , полученная МКЭ по программе, разработанной в отделе прочности тонкостенных конструкций ИПМаш НАН Украины (см., например, [143]), составляет 12,2 Гц.

Вводим кинематические граничные условия: равенство нулю радиального перемещения на оси вращения, окружного перемещения на этой оси в зоне основания и осевого перемещения на оси вращения на внешней поверхности основания.

Иногда в литературе применяют модель ЛЖ в виде усеченного сверху эллипсоида (стенка без основания) с жестко закрепленным краем. Такая модель не вполне корректна, так как реальный ЛЖ замкнут и

главный вектор сил давления равен нулю. Однако в указанной модели это не так, поэтому вблизи заземления возникает всплеск напряжений, которого нет в действительности.

4.2. Методика численных исследований НДС ЛЖ

В отличие от алгоритма расчета НДС изотропных тел вращения или тел трансверсально-изотропных, у которых материальная (“вмороженная”) система координат совпадает с цилиндрической, при разработке алгоритма и программы расчета модели ЛЖ необходимо учитывать неоднородную анизотропию.

4.2.1. Учет зависимости угла мышечных волокон от меридиональной и нормальной к толщине стенки координат. Известно, что материал стенки ЛЖ можно рассматривать как композит, состоящий, в основном, из однородной основы (соединительной ткани), армированной относительно более жесткими спирально расположенными мышечными волокнами. Следствием этого является представление о материале стенки, как о трансверсально-изотропном с осью изотропии касательной в каждой точке к направлению мышечного волокна.

Так, например, в соответствии с данными статьи [120] угол направления мышечных волокон меняется по толщине стенки ЛЖ сердца собаки по линейному закону, причем коэффициенты уравнения прямой различны у основания и вершины ЛЖ. Пусть локальная координата ξ , нормальная к толщине стенки, меняется от -1 до 1 (от внутренней к внешней поверхности соответственно). Введем обозначения для значений углов $\gamma_a(\xi)$ и $\gamma_b(\xi)$ у вершины (apex) и основания (base) ЛЖ. Тогда измеренные значения есть $\gamma_a(-1) = -40^\circ$, $\gamma_a(1) = 80^\circ$, $\gamma_b(-1) = -65^\circ$, $\gamma_b(1) = 65^\circ$. Аппроксимируя эти данные линейной зависимостью $\gamma(\xi, \psi) = A + B\psi + \xi(C + D\psi)$, получим $A = 10^\circ$, $B = -0,111$, $C = 62,5^\circ$, $D = 0,0277$. В литературе часто пренебрегают зависимостью угла γ от ψ . Такая расчетная схема использована в данной главе наряду с моделью полного толстостенного эллипсоида.

4.2.2. Связь между цилиндрической и материальной системами координат. Так как аргументами потенциалов трансверсально-изотропного материалов являются компоненты тензора деформаций в материальной системе координат, на

определенном этапе алгоритма необходимо преобразовывать тензор деформаций от цилиндрической системы к материальной.

Свяжем направление миофибриллы со второй осью материальной системы координат x', y', z' , а плоскость изотропии – с первой и третьей осями. Пусть угол между осью r и нормалью к меридиану стенки ЛЖ есть ψ , а γ – угол между касательной ко второй (окружной) координате цилиндрической системы координат и второй координатой материальной системы координат. Тогда матрицы поворота на углы γ и ψ будут [141]

$$[\mathbf{A}_1] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}, \quad [\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \psi & 0 & \cos \psi \end{bmatrix},$$

а преобразование от цилиндрической к материальной системе координат будет выполняться умножением матрицы деформаций в цилиндрической системе координат на матрицу

$$[\mathbf{A}] = [\mathbf{A}_1][\mathbf{A}_2] = \begin{bmatrix} \cos \psi & 0 & \sin \psi \\ -\sin \psi \sin \gamma & \cos \gamma & \cos \psi \sin \gamma \\ -\sin \psi \cos \gamma & -\sin \gamma & \cos \psi \cos \gamma \end{bmatrix}.$$

Полученная матрица $[\mathbf{A}]$ – ортогональна, ее определитель равен единице, обратная ей матрица – транспонированная. С точностью до обозначений матрица $[\mathbf{A}]$ совпадает с матрицей поворота, указанной в статье [76]. Заметим, что дифференцирование потенциала по компонентам тензора деформаций в материальной системе координат дает компоненты тензора напряжений в той же системе. Преобразование от материальной системы координат к цилиндрической выполняется с помощью матрицы, обратной $[\mathbf{A}]$.

4.3. НДС усеченной однородной и полной кусочно-однородной моделей ЛЖ

Цель данной главы состоит в оценке влияния на НДС модели ЛЖ ее геометрии и способа закрепления от смещения вдоль оси как жесткого целого. Отсутствие в расчетной схеме отсеченной части эллипсоида

(основания сердца, в котором расположены клапаны) объясняется тем, что жесткость ее существенно выше жесткости материала стенки.

4.3.1. Усеченный толстостенный эллипсоид. Вначале рассмотрим расчетную схему ЛЖ с условно отсеченным основанием сердца [160, 164]. Стенку ЛЖ сердца аппроксимируем усеченным толстостенным эллипсоидом (рис. 4.3). Такая модель использована в статьях [4, 48, 59, 116].

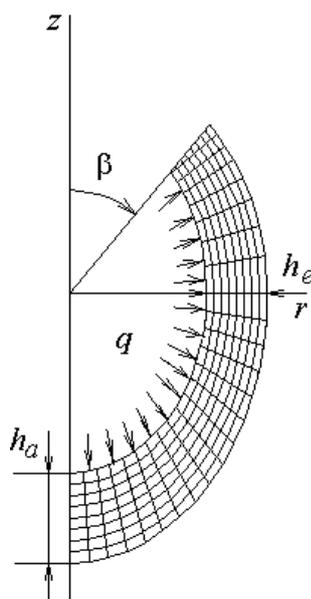


Рис. 4.3. Конечноэлементная модель ЛЖ

Граничные условия задачи следующие: жесткое закрепление при $\beta = \beta_0$, $u_r = 0$ на оси z . К внутренней поверхности приложено давление q . Статические условия (равенство нулю нормального и касательных напряжений на внешней поверхности и равенство нормального напряжения на внутренней поверхности приложенному давлению с обратным знаком) выполняются автоматически в силу использования вариационного принципа.

Геометрия модели ЛЖ определяется такими параметрами: a_v — меньшая полуось внутренней поверхности; b_v — ее большая полуось.

Вначале задается a_v и отношение $c_{ab} = \frac{b_v}{a_v}$, а затем вычисляется $b_v = a_v c_{ab}$.

Далее, задаем толщины эллипсоида h_e на экваторе (при $z = 0$), h_a — в вершине (см. рис. 4.3).

По толщине h_e определяем малую $a_n = a_v + h_e$, большие полуоси верхней $b_n = a_n c_{ab}$ и нижней $b_n = b_v + h_a$ половин внешней поверхности. Таким образом, внутренняя поверхность модели ЛЖ образована

эллипсоидом, а внешняя – состоит из двух эллипсоидов с различными большими полуосями.

В расчетах принято: $a_v = 2,257$ см, $c_{ab} = 1,25$, $h_e = 1$ см, $h_a = 1,5$ см, $\beta_0 = 45^\circ$. Начальный объем полости ЛЖ равен 60 см³. К внутренней поверхности приложено давление $q = 1,6$ кПа, соответствующее конечно-диастолическому, равному 12 мм рт. ст. Эти данные являются усредненными параметрами ЛЖ человека [162].

Материал рассматриваем как почти несжимаемый трансверсально-изотропный гиперупругий с потенциалом (2.29).

Напомним, что здесь деформации отнесены к правой материальной системе координат (первая ось нормальна к меридиану, вторая – направлена по касательной к мышечным волокнам, третья – нормальна к первым двум).

Угол спирали меняется по линейному закону от -60° на внутренней поверхности стенки до $+60^\circ$ на наружной [116]. Константы потенциала определены так, чтобы внутрисполостной объем (ВПО) при максимальном давлении ($q = 1,6$ кПа) был равен 120 см³. Принято $C = E_1 = 5,94$ кПа и $E_2 = 1,2 \cdot E_1 = 7,128$ кПа [120], $\nu_1 = \nu_2 = 0,45$. Приравнивание элементов матрицы закона Гука иматрицы, вытекающей из потенциала при инфинитезимальной деформации (см. 2.2) приводит к значениям (безразмерных) констант $c_1 = c_3 = 3,446$, $c_2 = 5,870$, $c_4 = c_5 = 0$, $c_6 = -0,651$, $c_7 = c_8 = 2,458$, $c_9 = 2,048$ и константы $c_c = 2,118$ кПа; $\alpha = 10$. Именно при таком значении α кривые “деформация–напряжение”, получаемые при расчете и измерениях на образцах миокарда [120, 204] наиболее близки.

Расчеты проведены с сеткой КЭ (см. рис. 4.3) $nh \times nf = 8 \times 32 = 256$ (по толщине и меридиану), при этом количество узловых неизвестных равно 2547 . Численное интегрирование при вычислении элементов матрицы и правой части СЛАУ выполнялось с помощью трехточечных квадратурных формул Гаусса. Число шагов по нагрузке равно 10 . Дальнейшее увеличение густоты сетки, числа точек формулы Гаусса и числа шагов практически не изменяет результаты.

Распределение интенсивности напряжений [195]

$$\sigma_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 + 6(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2)}$$

показано на рис. 4.4, а, б. Рис. 4.4, а позволяет видеть резкий всплеск напряжений вблизи заделки, вызванный осевой реакцией, уравновешивающей

вающей давление в незамкнутом объеме; рис. 4.4, б более подробно показывает напряжения вне зоны закрепления.

Интенсивность деформаций [195]

$$\varepsilon_i = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 + \frac{3}{2}(\gamma_{12}^2 + \gamma_{23}^2 + \gamma_{31}^2)}$$

и модуль вектора перемещений $|\bar{u}|$ даны на рис. 4.5 и 4.6, соответственно. Максимальные интенсивности напряжений и деформаций равны соответственно 101,38 кПа и 0,613, а наибольшее перемещение – 0,922 см. В экваториальной зоне интенсивность напряжений близка к 10,5 кПа, интенсивность деформаций – 0,45.

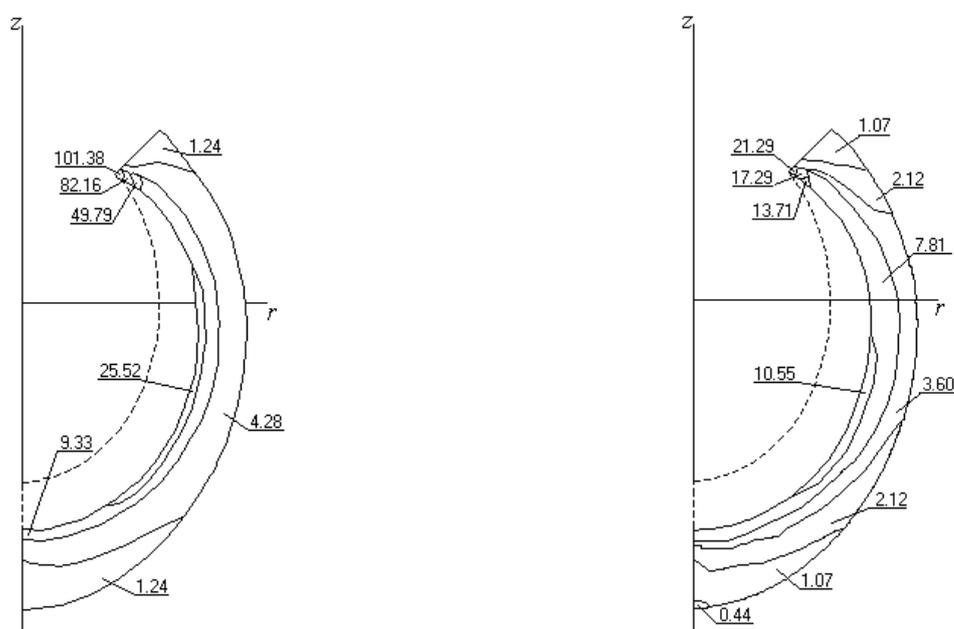


Рис. 4.4. Интенсивность напряжений, кПа

а – с зоной закрепления

б – вне зоны закрепления

На каждом шаге по нагрузке вычисляем объем материала стенки ЛЖ, как разность объемов, ограниченных деформированными внешней и внутренней поверхностями. Она изменяется в пределах 1 %, что является результатом почти несжимаемости материала.

Согласно [163], миокард разрушается при напряжении несколько меньшем 100 кПа. Таким образом, напряжения в зоне закрепления, получаемые по рассматриваемой расчетной схеме, являются явно завышенными. Заметим, что в реальном сердце отмеченной выше

высокой концентрации напряжений (в зоне перехода стенки ЛЖ в основание) не наблюдается. Это расхождение указывает на несовершенство рассмотренной модели ЛЖ. Для устранения этого была построена расчетная схема модели ЛЖ, в которой ВПО замкнут. Ниже приведены результаты анализа такой модели.

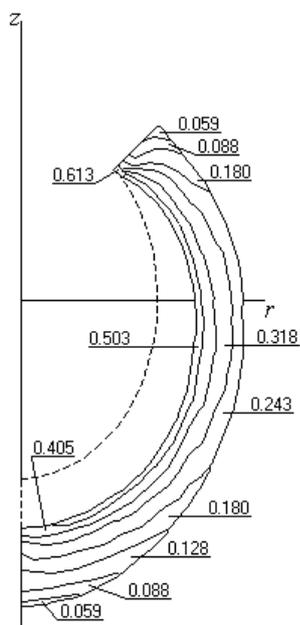


Рис. 4.5. Интенсивность деформаций

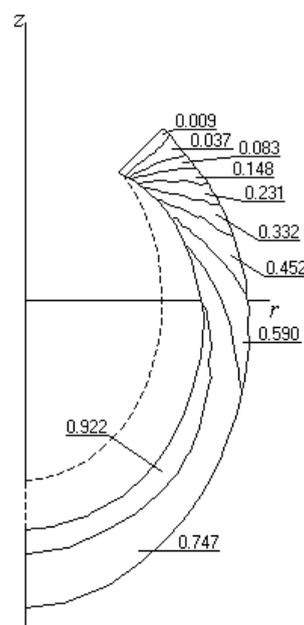


Рис. 4.6. Модуль вектора перемещений, см

4.3.2. Базовая модель ЛЖ. Сравним полученные данные с результатами расчета НДС модели ЛЖ в виде замкнутого кусочно-однородного толстостенного эллипсоида [164] (рис. 4.7). Характерные геометрические и механические параметры этой модели, в дальнейшем называемой базовой, оставлены такими же, как в рассмотренной выше задаче, но в ее верхней части, ограниченной углом $\beta_0 = 45^\circ$, расположено включение с относительной жесткостью, равной 8. Оно моделирует основание сердца.

Для устранения смещения тела, как жесткого целого, вдоль оси вращения осевое перемещение в верхней точке $r = 0$, $z = b_n$ и окружное перемещение при $r = 0$ в основании положены равными нулю.

Наибольшие значения интенсивность напряжений σ_i имеет на внутренней поверхности эллипсоида (рис. 4.8) и достигает максимума (14,82 кПа) в зоне перехода стенки в основание, что значительно меньше величины, полученной по усеченной модели.

Основной вклад в величину σ_i вносит окружное напряжение (14,56 кПа) (рис. 4.9).

Максимальная величина интенсивности деформаций ε_i равна 0,467 (рис. 4.10).

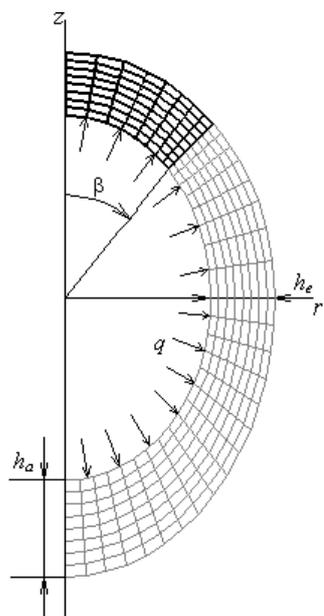


Рис. 4.7. Базовая конечноэлементная модель

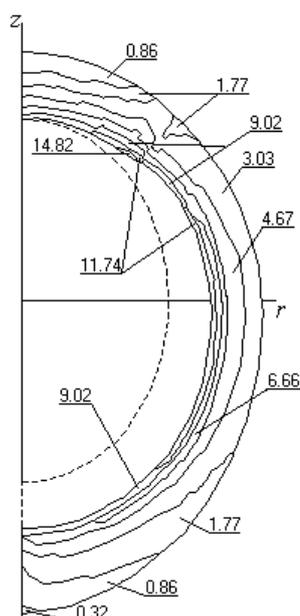


Рис. 4.8. Интенсивность напряжений, кПа

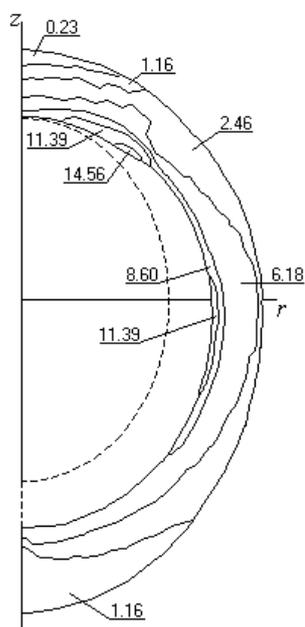


Рис. 4.9. Окружное напряжение, кПа

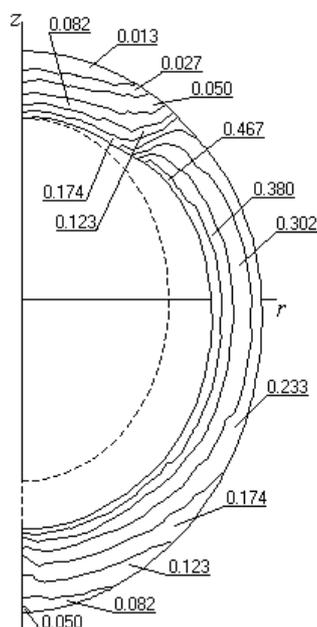


Рис. 4.10. Интенсивность деформаций

Так как жесткость расположенных по спирали мышечных волокон больше жесткости материала в плоскости изотропии, расширение оболочки под действием давления сопровождается небольшим ее закручиванием вокруг оси вращения. Распределение угла закручивания дано на рис. 4.11.

Характер перемещений иллюстрирует рис. 4.12, на котором приведен модуль вектора перемещений $|\bar{u}|$. Наибольшее его значение составляет 0,873 см.

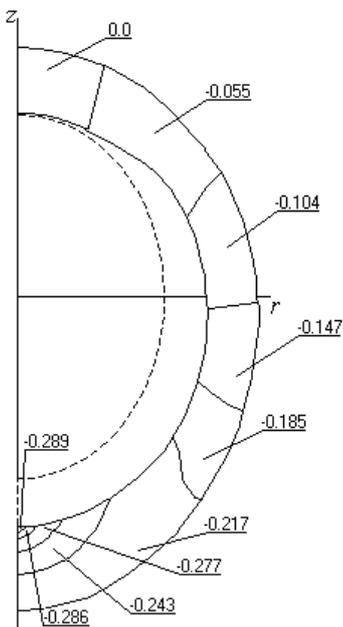


Рис. 4.11. Угол закручивания, градусы

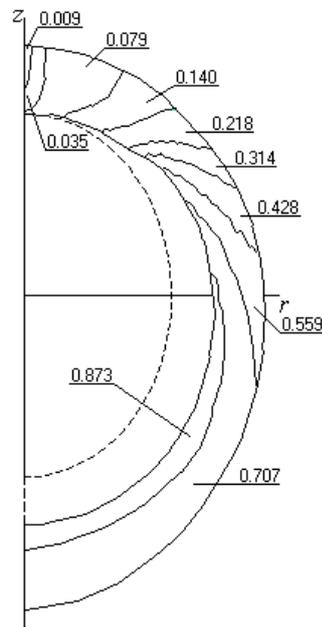


Рис. 4.12. Модуль вектора перемещений, см

Представляет интерес выяснить, как влияют основные геометрические параметры модели (отношение полуосей эллипсоида внутренней поверхности c_{ab} и толщина стенки в апексе h_a) на НДС и ВПО. Строение тела человека, в частности его сердца, варьируется, и указанные параметры могут иметь значения, отличающиеся от средних.

Фиксируем все геометрические и механические параметры базовой модели, кроме c_{ab} , а величину малой полуоси эллипсоида внутренней поверхности вычисляем по формуле

$$a_v = \left(\frac{3V_0}{4\pi c_{ab}} \right)^{1/3}$$

при $V_0 = 60 \text{ см}^3$.

Результаты расчетов НДС при $c_{ab} = 1,0$ (толстостенная сфера, $a_v = 2,428 \text{ см}$) и $c_{ab} = 1,5$ (толстостенный эллипсоид, $a_v = 2,121 \text{ см}$) показаны на рис. 4.13, а, б соответственно.

Существенно отличается от базовой модель при $c_{ab} = 1,0$, у которой несколько меньше напряжения и деформации, а ВПО снижен от 120 до

напряжений и деформаций при этом не меняется.

Графики σ_i при $h_a = 1,25$ и $1,75$ см даны на рис. 4.14, а, б соответственно.

ВПО при $h_a = 1,25$ и $1,75$ см равен $120,7$ и $119,3$ см^3 соответственно.

Таким образом, можно сделать вывод о том, что изменение геометрических параметров модели «здорового» ЛЖ (с неизменными механическими параметрами материала стенки) не приводит к существенным последствиям для ВПО.

Учет трансверсальной изотропии заметно влияет на жесткость стенки ЛЖ, причем повышение значения отношения E_2/E_1 от 1 до 1,2 (степень увеличения анизотропии) приводит к снижению ВПО на 6,8 % и уменьшению интенсивности напряжений в экваториальной зоне на 13,3 %.

Для того, чтобы показать, что более заметное влияние на НДС оказывает изменение жесткости материала стенки, приведем результаты расчета базовой модели ЛЖ, модуль упругости стенки которой увеличен (вследствие кардиосклероза) на 20 %. Принимая $E_1 = 7,37$ кПа и $E_2 = 8,84$ кПа, получим график распределения σ_i (рис. 4.15).

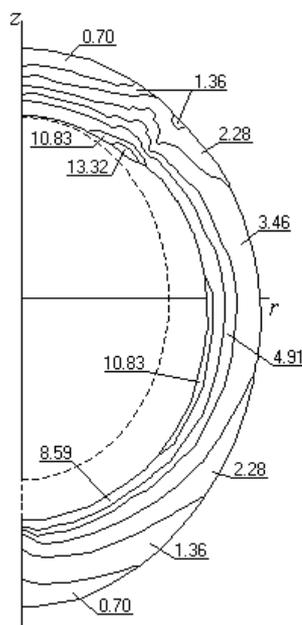


Рис. 4.15. Интенсивность напряжений при повышенной жесткости миокарда, кПа

Максимальное напряжение ($13,32$ кПа) уменьшилось по сравнению с базовым ($14,82$ кПа) на 10,2 %, а ВПО – на $7,58$ см^3 , что составляет 12,6 % ударного объема (УО) в норме (разность между конечным и начальным ВПО, в норме – 60 см^3) и приводит к ухудшению кровообращения.

Заметим, что применение в расчетах потенциалов (2.26) или (2.27) при $c_6 = 0$ приводит к увеличению базовых ВПО и интенсивности напряжений на 5 и 10 % соответственно. Это можно рассматривать как погрешность, вызванную отклонением порождаемого этими потенциалами инфинитезимального физического закона от закона Гука. Форма функции штрафа влияет на результаты лишь в четвертой значащей цифре после запятой.

4.4. Влияние трансмурального, эндокардиального, интрамурального и эпикардиального включений на НДС и ВПО модели ЛЖ

Развитая методика решения задач деформирования кусочно-однородных тел вращения позволяет анализировать влияние на НДС относительно жестких включений, моделирующих лишенные кровообращения и зарубцевавшиеся зоны стенки ЛЖ. Здесь будут изложены результаты анализа влияния на НДС и ВПО последствий хронической стадии ИМ при различных расположениях и размерах пораженных зон, моделируемых относительно жесткими включениями с точки зрения механики твердого деформируемого тела [159, 164].

Рассмотрим влияние на НДС модели ЛЖ жестких включений (рис. 4.16, а – г), расположенных по всей толщине стенки (трансмуральное включение), у внутренней поверхности (эндокардиальное включение), в середине толщины (интрамуральное включение) и у наружной поверхности (эпикардиальное включение) соответственно. Три последних включения занимают половину толщины стенки.

Сохраняем все геометрические и механические параметры базовой модели. Угол охвата включений примем равным 45° , а их жесткость – увеличим в 5 раз по сравнению с жесткостью неповрежденной части стенки.

Для того, чтобы в местах соединения включений и “здоровой” части стенки не возникало погрешности, связанной с конечностью шага сетки, введено смягчение изменения жесткостей. Кроме того, в переходной зоне основания задано сгущение сетки КЭ (см. рис. 4.16, а – г).

Черным цветом в верхней части рисунка отмечено основание, серым – “здоровая” часть стенки, черным цветом в нижней части – включение, моделирующее один из видов ИМ.

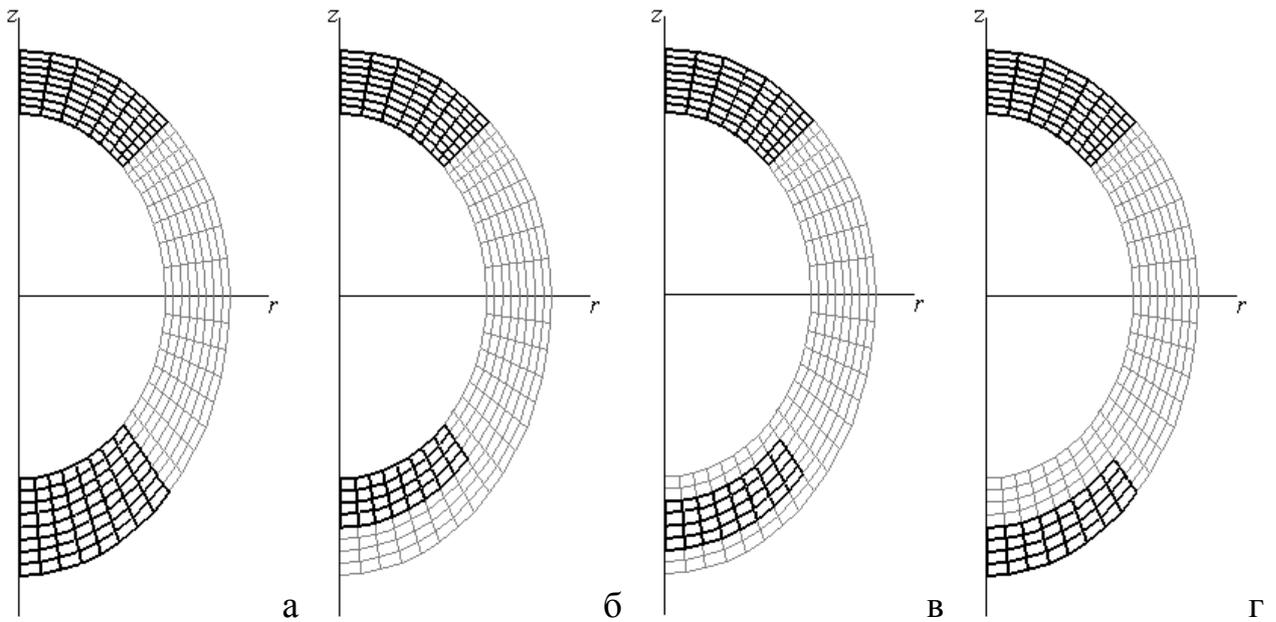


Рис. 4.16. Конечноэлементная модель ЛЖ при четырех видах включений

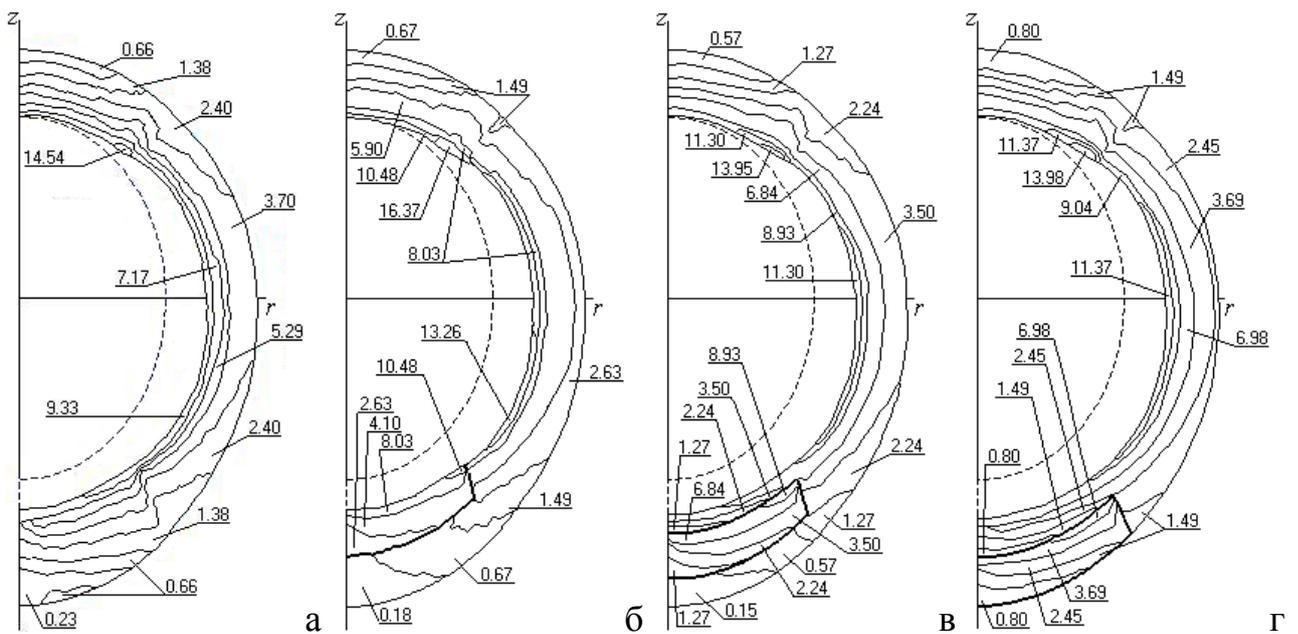


Рис. 4.17. Интенсивность напряжений для четырех видов включений, кПа

Распределение интенсивности напряжений показано на рис. 4.17, а–г. В таблице 4.1 даны ВПО и максимальная интенсивность напряжений ($\sigma_{i \max}$) для четырех видов включений. Напомним, что в норме $\sigma_{i \max}$ составляет 14,82 кПа, а ВПО равен 120,0 см³.

Таблица 4.1. Влияние вида включения на интенсивность напряжений и ВПО

Вид включения	$\sigma_{i \max}$, кПа	ВПО, см ³
трансмуральное	14,54	113,6
эндокардиальное	16,37	114,1
интрамуральное	13,95	116,5
эпикардиальное	13,98	118,2

Как видно из табл. 4.1, наиболее тяжелые последствия для УО возникают при трансмуральном и эндокардиальном включениях. Так, при трансмуральном включении при ВПО, равном 113,6 см³, УО составляет 53,6 см³, что на 10,7 % меньше нормы (60 см³). По мере смещения включения к внешней поверхности (интрамуральное и эпикардиальное включения) ВПО приближается к норме (120 см³).

Распределения интенсивности деформаций приведены на рис. 4.18, а–г.

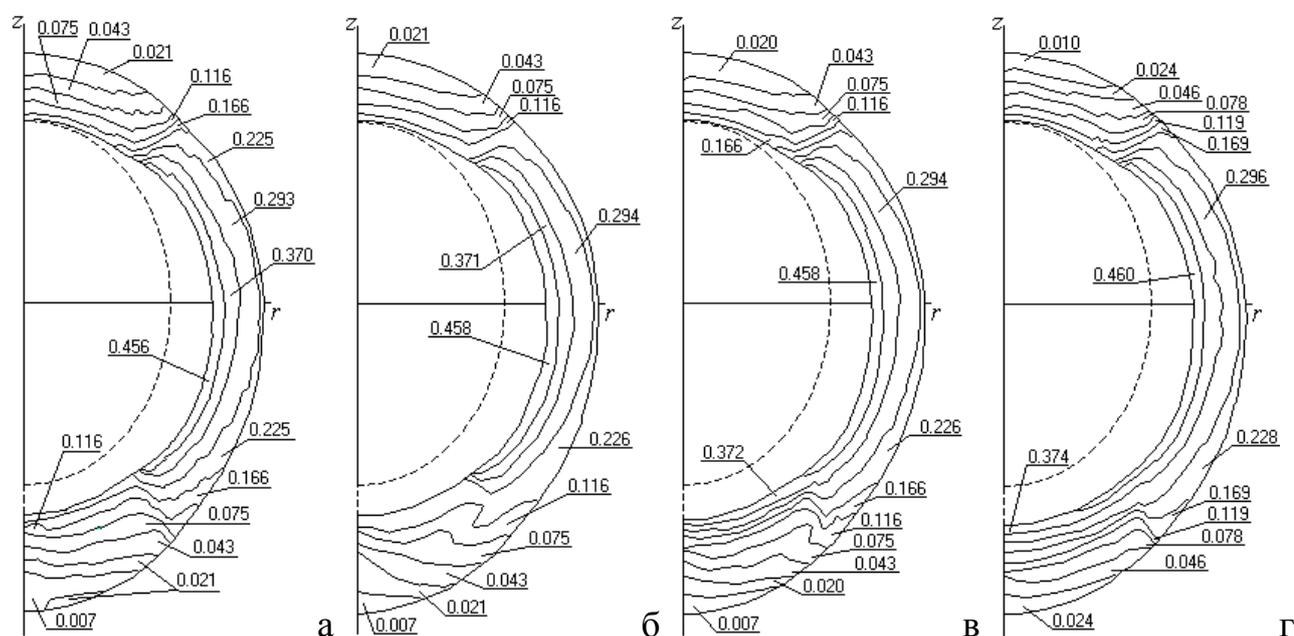


Рис. 4.18. Интенсивность деформаций для четырех видов включений

Сравнивая рис. 4.17, а – г и 4.18, а – г, видим, что зоны максимальных значений интенсивностей напряжений и деформаций не всюду совпадают. Это явление ранее в литературе не отмечалось. Объясняется оно тем, что решается задача для кусочно-однородного материала, в котором имеются зоны с существенно разной жесткостью (модулем

упругости). Хотя в зоне повышенной жесткости интенсивность деформаций несколько уменьшается, ее произведение на резко повышенный модуль упругости (мера величины интенсивности напряжений) может в определенных условиях оказаться большим, чем в зоне с низким модулем упругости. В рассмотренном случае зоны наибольшей интенсивности напряжений расположены в местах перехода от включений к стенке с исходной жесткостью и на части экваториальной зоны, в то время, как максимальная интенсивность деформаций имеет место только в экваториальной области.

Указанное явление можно пояснить на примере растяжения кусочно-однородного стержня. Максимальной является деформация в зоне низкой жесткости, а напряжение постоянно вдоль всей его длины. Таким образом, нет однозначного соответствия расположения зон максимума. Такое явление в однородных телах или телах с плавно меняющейся жесткостью невозможно.

Представляет интерес влияние основных геометрических параметров модели (отношение полуосей эллипсоида внутренней поверхности c_{ab} и толщина стенки в апексе h_a) на НДС и ВПО с углом охвата включения 45° и 60° . В табл. 4.2 и 4.3 приведены основные результаты расчетов с измененными в базовой модели толщиной h_a (при $c_{ab} = 1,25$) или отношением c_{ab} (при $h_a = 1,5$ см).

Таблица 4.2. Влияние геометрических параметров на интенсивность напряжений

Параметры	Интенсивность напряжений, кПа							
	виды включений							
	трансмуральное		эндокардиальное		интрамуральное		эпикардиальное	
угол охвата	45°	60°	45°	60°	45°	60°	45°	60°
$h_a=1,25$	14,62	15,42	17,38	18,36	13,94	13,91	13,98	14,01
$h_a=1,75$	14,50	16,16	15,71	17,51	13,95	13,92	13,97	13,99
$c_{ab}=1,25$	12,91	13,51	14,69	15,37	13,02	12,92	13,12	13,12
$c_{ab}=1,75$	14,89	16,32	16,37	17,95	14,10	14,10	14,11	14,13

Анализируя данные табл. 4.2, отметим, что при угле охвата включения 45° при трансмуральном включении большее отличие от базовой дает сферическая модель, у которой несколько меньше напряжения, а ВПО снижен от 120 до 109,09 см³. Рост вытянутости модели ($c_{ab} = 1,5$) приводит к уменьшению ВПО до 116,1 см³. Увеличение толщины стенки

модели ЛЖ в вершине h_a при $c_{ab} = 1,25$ (базовая модель) также приводит к снижению ВПО, не меняя характера распределения напряжений.

По мере смещения включения (эндокардиальное, интрамуральное и эпикардиальное включения) от внутренней поверхности к внешней, происходит увеличение ВПО. Это объясняется тем, что напряжения в стенке имеют большие значения у внутренней поверхности и уменьшаются при движении к внешней, что вызывает падение влияния включения.

Так, при эндокардиальном включении, когда $c_{ab} = 1,0$, ВПО равен $109,9 \text{ см}^3$; падение УО составляет 16,8 %. Таким образом, сравнивая влияние трансмурального и эндокардиального включений, можно сделать вывод, что основную роль в уменьшении УО играет часть включения, примыкающая к внутренней поверхности ЛЖ. Существенное падение УО при трансмуральном включении наблюдается в практике кардиологии. При $c_{ab} = 1,5$ и эпикардиальном включении ВПО не уменьшается по сравнению с нормой. Таким образом, эти форма модели и вид включения наиболее благоприятны.

Таблица 4.3. Влияние геометрических параметров на ВПО

Параметры	ВПО, см^3							
	виды включений							
	трансмуральное		эндокардиальное		интрамуральное		эпикардиальное	
угол охвата	45°	60°	45°	60°	45°	60°	45°	60°
$h_a=1,25$	113,92	108,7	114,6	109,4	116,8	112,6	118,3	115,3
$h_a=1,75$	113,31	108,3	113,7	108,7	116,4	112,7	118,0	115,5
$c_{ab}=1,25$	109,09	103,8	109,9	104,6	112,5	108,4	114,5	111,5
$c_{ab}=1,75$	116,07	111,2	116,4	111,5	118,6	114,8	120,0	117,3

Сравнивая данные табл. 4.3 при углах охвата включений 45° и 60° , отметим, что увеличение угла охвата включений до 60° ведет к дальнейшему падению ВПО, причем качественно влияние геометрии ЛЖ и вида включений не зависит от их объема. С ростом угла охвата включения падение УО становится большим. По-прежнему, к наиболее тяжелым последствиям для УО приводит случай $c_{ab} = 1,0$ при трансмуральном (падении УО составляет 27,0 %) и эндокардиальном включениях (падении УО составляет 25,7 %).

ВЫВОДЫ

В этой части книги развита методика численного исследования больших деформаций почти несжимаемых кусочно-однородных изотропных и трансверсально-изотропных гиперупругих тел вращения на основе МКЭ, реализующего вариационный принцип возможных перемещений в приращениях, на примере решения осесимметричных (с кручением и без него) физически и геометрически нелинейных задач деформирования таких тел.

Для проверки достоверности полученных результатов проведено сопоставление численных и точных решений линейной и нелинейной задач деформирования толстостенных цилиндра и полой сферы под действием внутреннего давления. Установлено совпадение численных и точных решений.

Предложен и обоснован новый вид потенциала для почти несжимаемого трансверсально-изотропного гиперупругого материала.

Построена математическая модель ЛЖ сердца как почти несжимаемого кусочно-однородного трансверсально-изотропного гиперупругого толстостенного эллипсоида. Учтена неоднородность трансверсальной изотропии материала стенки ЛЖ (зависимость угла оси трансверсальной изотропии от координат точки в сечении стенки). Получены результаты численных исследований влияния степени анизотропии, анализа НДС и ВПО модели ЛЖ при наличии относительно жестких включений в зависимости от их расположения и размеров, а также геометрических и механических параметров модели.

Установлено, что:

- применение модели ЛЖ с отсеченным основанием вызывает появление нереально высокой концентрации напряжений в закрепленном сечении, которая устраняется выбором модели в виде полного толстостенного эллипсоида, принятого в качестве базовой модели для дальнейших исследований;
- увеличение толщины стенки базовой модели в вершине приводит, главным образом, к заметному снижению максимальной интенсивности напряжений, рост степени вытянутости эллипсоида – к повышению максимальной интенсивности напряжений и ВПО;
- рост степени трансверсальной изотропии приводит к снижению ВПО и интенсивности напряжений в экваториальной зоне;
- зоны максимальных значений интенсивностей напряжений и деформаций не всюду совпадают. Это явление ранее в литературе не

отмечалось. Оно характерно для кусочно-однородного материала, в котором имеются зоны с существенно разной жесткостью (модулем упругости);

- наличие трансмурального включения приводит к снижению напряжений и ВПО, причем с ростом угла охвата включения ВПО уменьшается; увеличение толщины стенки базовой модели в вершине приводит к небольшому снижению максимальной интенсивности напряжений и ВПО, рост степени вытянутости эллипсоида – к их увеличению;

- при эндокардиальном включении увеличение толщины стенки в вершине приводит к большему снижению максимальной интенсивности напряжений, при этом значение ВПО базовой модели падает меньше, чем при трансмуральном включении; наличие интрамурального и эпикардиального включений практически не влияет на результаты расчетов.

ПУЛЬСИРУЮЩЕЕ ТЕЧЕНИЕ КРОВИ В АРТЕРИЯХ

В последние годы быстро развивается один из относительно новых и важных разделов механики – механика биологических объектов, в частности, механика сердечно-сосудистой системы человека, изучающая взаимодействие крови и сосудов, материал которых обладает сильно нелинейными свойствами, анизотропией и большой податливостью. При этом влияние геометрической и физической нелинейностей проявляется особенно ярко.

Хотя основные идеи и принципы анализа движения жидкости в кровеносных сосудах известны, очевидно, что механизмы ряда явлений, например нелинейного искажения формы волн давления, исследованы совершенно недостаточно. Также остается малоизученным влияние некоторых факторов (продольное растяжение сосуда, наличие толстой стенки, постепенное и/или локальное сужение просвета) на гидроупругое взаимодействие, НДС стенки и характеристики потока крови.

Таким образом, разработка методов решения нелинейных задач взаимодействия вязкой жидкой среды и цилиндрических гиперупругих сосудов представляет научный и практический интерес. Цель исследования, изложенного в данной части, состоит в разработке эффективных методов решения проблемы взаимодействия вязкой несжимаемой ньютоновской жидкости, каковой является кровь, с гиперупругим сосудом в условиях нестационарного течения. Основные рассмотренные задачи перечислены ниже:

- разработка уточненной модели цилиндрического податливого сосуда, учитывающей характерные особенности распространения в ней волн давления;
- построение нового эффективного численно-аналитического метода решения исходной системы уравнений;

- численное исследование влияния изменения физических и геометрических параметров системы на НДС стенки сосуда и характеристики потока крови;

- расчет различных характеристик гидроупругого взаимодействия, получение которых опытным путем невозможно или сопряжено с большими трудностями.

При решении этих задач применено сочетание аналитических и численных методов. Для математического моделирования исследуемого объекта используется теория больших деформаций и гиперупругости, а также уравнения движения сплошной среды класса жидкостей и газов. При анализе и упрощении исходной системы уравнений применялись методы теории размерностей. Искомые функции аппроксимируются с помощью метода Галеркина и конечноразностного метода. Полученная начальная задача Коши решается одношаговым либо многошаговым методом в зависимости от конфигурации системы.

Достоверность результатов обеспечивается корректностью постановки задач, точностью математических выкладок, использованием обоснованных методов решения, разработкой надежных алгоритмов численной реализации, проведением численных экспериментов, сопоставлением их с теоретическими и экспериментальными данными других авторов.

Разработанная и описанная в этой части математическая модель позволяет определять механические и гидродинамические параметры части кровеносной системы млекопитающих, включающей крупные кровеносные сосуды (артерии и артериолы). Полученные результаты решения задач гидроупругости могут быть использованы в биомеханике и медицине для совершенствования методов диагностики и лечения, а также в практике проектирования технических систем.

ГЛАВА 5

ОБЗОР ПОСТАНОВОК ЗАДАЧ О ГИДРОУПРУГОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ КРУПНЫХ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДОВ И МЕТОДОВ ИХ РЕШЕНИЯ

Изучение течения жидкости и распространения волн давления в крупных кровеносных сосудах привлекает внимание исследователей на протяжении значительного периода времени. В последние десятилетия еще более возрос интерес к данной проблеме в связи с увеличившейся мощностью вычислительных систем, позволяющих решать сложные двух- и трехмерные задачи за приемлемое время. Полученные результаты имеют как теоретическое, так и практическое значение и используются в различных областях человеческой деятельности, в частности в биомеханике и медицине, при изучении кровеносной системы человека.

Приведенный ниже обзор известных исследований, посвященных гидроупругому деформированию сосудов, касается наиболее известных задач, уровня их сложности, а также существующих путей решения.

В общем виде в систему уравнений для рассматриваемого типа задач входят трехмерные уравнения движения жидкости, движения стенок оболочки, закон сохранения массы жидкости и материала стенки, а также граничные условия (условия непрерывности компонент скорости и напряжений на различных границах).

Как известно, для сплошных сред класса жидкостей и газов используется следующая система уравнений:

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (5.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla p + \mu \Delta \vec{v} + \left(\xi + \frac{\mu}{3} \right) \nabla \operatorname{div} \vec{v}, \quad (5.2)$$

$$P_{ik} = P_{ki} = -p \delta_{ik} + 2\mu \overset{\circ}{v}_{ik} + \xi v_{ll} \delta_{ik}, \quad (5.3)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = -p \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu (\overset{\circ}{v}_{ik})^2 + \xi (\operatorname{div} \vec{v})^2 + \lambda \Delta T, \quad (5.4)$$

$$E = E(p, T), \quad (5.5)$$

$$p = p(\xi, T), \quad (5.6)$$

где ρ – плотность сплошной среды; t – время; v_{ik} – тензор скоростей, v_{ik}° – его девиатор; \vec{f} – вектор объемных сил; p – гидростатическое давление; μ – коэффициент динамической вязкости; ξ – коэффициент объемной (второй) вязкости; P_{ik} – тензор напряжений; δ_{ik} – символ Кронекера; E – внутренняя энергия; λ – коэффициент теплопроводности; T – температура сплошной среды.

Сложность решения системы уравнений, описывающих движение жидкости в сосудах, зависит от допущений, сделанных относительно свойств самой жидкости и стенок сосудов. При использовании системы (5.1)–(5.6) для моделирования течения биологических жидкостей, в частности крови, в нормальных условиях используются предположения о несжимаемости жидкости и ее ньютоновских свойствах, которые будут рассмотрены далее. Также обычно считается, что ее движение ламинарное и осесимметричное.

Механическое поведение стенки сосуда определяет его строение – в случае крупного кровеносного сосуда это эластиновые и коллагеновые волокна. При низких величинах внутреннего давления главную роль играют эластиновые волокна, при физиологических величинах – оба компонента, а при высоком внутреннем давлении – коллагеновые волокна.

Общепризнанным является разделение сердечно-сосудистой системы на большой, малый (легочный) и сердечный (коронарный) круги кровообращения. В каждом круге выделяется артериальное, венозное и связующее их капиллярное звено. По традиции физиологи подразделяют сосуды большого круга на крупные и мелкие, условно выбирая границу между ними на уровне самых мелких артерий – артериол. Все артерии имеют общий план строения и образованы из одних и тех же материалов, хотя соотношения между компонентами стенок различных сосудов неодинаковы. Артериальная стенка состоит из трех слоев: внутреннего (интима), среднего (медиа) и наружного (адвенция).

Первые работы по описанию механических свойств сосудистой стенки и ее поведения под нагрузкой [20, 21] были основаны на предположении, что материал стенки сосуда является однородным, изотропным и подчиняется закону Гука. Распространение получило

уравнение Лапласа [114], связывающее давление p и срединный радиус R

$$p = 2(Eh_0/2R_0)(R_0/R - R_0^2/R^2),$$

где E – модуль упругости Юнга; h_0 и R_0 – толщина и срединный радиус недеформированного сосуда.

Эта теория развита далее в работе [78]. Модификация уравнения Лапласа приведена в работах [95, 96], где решена задача о толстостенной трубе из изотропного линейно-упругого материала, нагруженной внутренним и внешним давлением. Рассмотрены три случая распределения окружного напряжения по толщине стенки сосуда. Показано, что напряжение в окружном направлении может менять знак в зависимости от соотношения внутреннего и наружного давлений.

Несмотря на достаточную простоту классической теории упругости, для описания поведения кровеносных сосудов ряд авторов, используя различные допущения, строит модели на ее основе. Такие модели упругой сосудистой стенки предполагают линейную связь между напряжениями и деформациями малого порядка. Эта теория применена в статье [14] для описания поведения артерий с учетом толщины их стенки. Авторы работы [68], модифицируя теорию малых деформаций для изотропного материала, предлагают расчетную модель, в которой допускаются радиальные деформации порядка 20–30 %. Принято, что изменение диаметра сосуда с увеличением давления происходит линейно, а длина сосуда остается постоянной. Связь между давлением и радиусами получена в виде

$$p = \ln(1 - R_{0e}^2(R_{0e}^2 - R_{0i}^2)/R_{0e}^4),$$

где индексы i и e обозначают значения радиуса на внутренней и внешней поверхностях сосуда соответственно.

Более удобной для описания поведения кровеносных сосудов является теория упругих оболочек, в которой сосуд рассматривается как тонкая оболочка и учитываются осевые деформации и напряжения. Теория и методы решения задач деформирования оболочек при нестационарном нагружении получили развитие в работах [152, 212, 213, 214, 215].

Для описания поведения стенок кровеносных сосудов большинство авторов используют уравнения теории оболочек в следующем виде:

$$\rho_w h \frac{\partial^2 u_r}{\partial t^2} = \left(p - 2\mu \frac{\partial u_r}{\partial r} \right)_{r=a} - \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left(\frac{u_r}{a^2} + \frac{\sigma}{a} \frac{\partial u_x}{\partial x} \right),$$

$$\rho_w h \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = -\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial r} + \frac{\partial v_r}{\partial x} \right)_{r=a} + \frac{Eh}{1-\sigma^2} \left(\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\sigma}{a} \frac{\partial u_r}{\partial x} \right),$$

где ρ_w – плотность материала стенки; h – толщина стенки; u_r и u_x – радиальная и осевая компоненты перемещения соответственно; E – модуль упругости Юнга; σ – коэффициент Пуассона; a – внутренний радиус трубки.

Такой подход использован в работах [10, 131].

Некоторые авторы путем усложнения расчетных моделей учитывают анизотропию свойств материала стенки. В силу нелинейной упругости сосудов в работе [144] рассматривается как цилиндрическая оболочка, получающая относительно большие радиальные перемещения. В статье [145] при рассмотрении кровеносного сосуда как двухслойной ортотропной оболочки при малых деформациях приведены уравнения движения для оболочки в усилиях и перемещениях без численного решения. Дается также описание к подходу совместного решения уравнения движений оболочки и крови. В работе [173] различаются радиальный и окружной модули упругости для модели сосудов артериального типа. При рассмотрении математических моделей конических и овальных упругих ненапряженных кровеносных сосудов [80, 81] наиболее важным считается такое свойство стенки сосуда, как линейность зависимости напряжения от деформации ткани в физиологически допустимых пределах нагрузки. В статье [190] материал стенки сосуда считается трансверсально-изотропным, линейно-упругим и учитывается так называемый биофактор N , характеризующий степень активности материала и зависящий от интенсивности раздражителя. Однако применение указанных подходов к описанию связи между давлением и радиусом кровеносных сосудов не дает результатов, достаточно близких к экспериментальным данным.

Несмотря на широкую распространенность представления о строении стенки крупного кровеносного сосуда как трехслойной оболочки, данная модель является, по-видимому, чересчур упрощенной [207].

Внутренняя оболочка артерий состоит из ряда эндотелиальных клеток и субэндотелиального слоя. Эндотелиальный слой состоит из одного ряда клеток, которые в виде непрерывной выстилки покрывают всю поверхность сердечно-сосудистой системы, соприкасающейся с кровью. Этот слой очень непрочен и легко повреждается, например воздействием высокого напряжения сдвига. Внутренняя эластичная мембрана образована, в основном, переплетениями эластических и коллагеновых волокон и составляет примерно 1/10 толщины стенки сосуда. За ней следует средняя оболочка, строение и свойства которой наиболее существенно различаются в разных областях системы кровообращения. По-видимому, у всех видов млекопитающих средняя оболочка имеет слоистое строение. В стенке аорты толщина слоев примерно постоянна [188] и составляет около 15 мкм, так что общее число слоев практически пропорционально радиусу сосуда. В аорте мыши, например, пять слоев, а в аорте свиньи – более семидесяти. Наружная оболочка стенки может быть столь же толстой, как средняя, или даже толще. Она состоит из рыхлой соединительной ткани с редкими эластическими и коллагеновыми волокнами, расположенными, в основном, продольно.

Дополнительное усложнение в строение крупных сосудов вносят так называемые *vasa vasorum* – кровеносные сосуды, питающие стенку артерий. Беря начало от той же артерии (или от соседней), они образуют сеть капилляров в наружной и средней оболочке питаемого сосуда и оказывают влияние на упругие свойства артерий.

В последнее время были предприняты попытки применить элементы теории больших деформаций [6, 148] для описания поведения мягких биологических тканей, в том числе крупных кровеносных сосудов. Ряд авторов отмечает, что материал кровеносных сосудов по своему поведению подобен эластомерам [52, 54]: при нормальных физиологических состояниях он реагирует на циклическое изменение напряжений главным образом упруго [100], но не подчиняясь линейному закону Гука [79, 43, 71]. Кроме того, установлено, что крупные кровеносные сосуды подвергаются большим деформациям, изменение их радиуса в течение каждого сердечного цикла может достигать 14 % [7, 47, 99, 101], а изменение радиуса артерий при физиологических значениях давления может составлять 200 % по сравнению с радиусом при начальном ненапряженном состоянии сосуда [34]. Таким образом, задача геометрически нелинейная. Подчеркивается также, что допущение о постоянстве напряжений по толщине неверно [36] и только с позиций теории больших

деформаций и трехмерного представления НДС стенки можно описать реальное поведение сосудов.

В связи с этим при описании упругого поведения стенки сосудов приобрела популярность теория больших деформаций, при которой материал стенки сосуда принимается упругим или гиперупругим. Если процесс деформации тела является адиабатическим или изотермическим, то в теле накапливается энергия деформации, способная производить работу при переходе из деформированного в недеформированное состояние. Для характеристики энергии деформации используется ее плотность – удельная энергия W . Материал является гиперупругим, если существует скалярно зависящая от тензора деформации функция упругого потенциала (или функция плотности энергии деформаций), производные которой по компонентам деформации определяют соответствующие компоненты напряжений.

Предположение о том, что материал стенки сосуда является гиперупругим и однородным, требует, чтобы параметры материала, входящие в выбранную функцию удельной энергии деформации, не зависели от рассматриваемой точки тела, и функция удельной энергии деформации материала выражалась в одной и той же математической форме по всему объему материала [6]. Если форма W для конкретного материала известна, то соотношения между напряжениями и деформациями можно получить дифференцированием функции удельной энергии деформации. Напряжения, возникающие в упругом, однородном и несжимаемом теле, подвергающемся большим деформациям, определяются в работе [148] формулой

$$\tau^{ij} = 2 \frac{\partial W}{\partial I_1} g^{ij} + \frac{\partial W}{\partial I_2} (I_1 g^{ij} - g^{ir} g^{jr}) + q G^{ij},$$

где τ^{ij} – тензор деформаций; I_1, I_2 – инварианты тензора деформаций; g^{ij}, G^{ij} – метрические тензоры в недеформированном и деформированном состояниях соответственно; q – скалярная функция, зависящая от координат.

Для изотропного и однородного материала предложен ряд выражений функции удельной деформации как функции от инвариантов деформации I_i или от степеней удлинения λ_i ($i = 1, 2, 3$). Как известно, данные величины определяются следующим образом:

$$I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2 + \lambda_3^2,$$

$$I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 + \lambda_2^2 \lambda_3^2 + \lambda_3^2 \lambda_1^2,$$

$$I_3 = \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2,$$

$$\lambda_i = l_i / l_{i0},$$

где l_{i0} и l_i – длина отрезка вдоль оси i до и после деформирования соответственно.

В некоторых работах [52, 117, 94] при построении моделей сосудов W принималось в виде полинома. Одним из наиболее известных уравнений, применяемых к большим деформациям изотропного несжимаемого резиноподобного материала, является уравнение, предложенное М. А. Mooney [89]

$$W = \alpha_1 (I_1 - 3) + \alpha_2 (I_2 - 3),$$

примененное для описания зависимости давление–радиус грудного отдела аорты собаки, где α_1, α_2 – упругие постоянные материала.

В работах [35, 43, 44, 205] показано, что связь между напряжениями и деформациями для биологических тканей, в том числе и для кровеносных сосудов, имеет экспоненциальный характер. В статье [122] представлена функция

$$W = \sum_{i=1}^3 f(\ln \lambda_i),$$

применение которой для мягких биологических тканей было приведено в работе [16]: $f(\ln \lambda_i) = \alpha_1 (\lambda_i^{\alpha_2} - 1)$. Кроме того, для описания поведения мягких биологических тканей использовались следующие формы W :

$$W = \frac{\alpha_1}{2\alpha_2} \left\{ \exp[\alpha_2 (I_2 - 3)] - 1 \right\},$$

$$W = \alpha_1 \left\{ \exp \left[\alpha_2 I_1 (I_1^2 - 3I_2) \right] - 1 \right\},$$

$$W = \alpha_1 \left\{ \exp \left[\alpha_2 (I_1 - 3) \right] - 1 \right\} + \alpha_3 (I_2 - 3) + \alpha_4 (I_3 - 1),$$

$$W = \alpha_1 \left\{ \exp \left[\alpha_2 (I_1 - 3) + \alpha_3 (I_2 - 3) \right] - 1 \right\},$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – постоянные материала.

Наряду с этим оценка деформативных свойств мягких тканей и сосудов животных с различными видами W была проведена в работах [26, 30, 31]. Анализ НДС артерий человека, в предположении сжимаемости материала, проведен в статье [117] на основе выражения

$$W = \alpha_1 (I_1 - 3) + \alpha_2 (I_2 - 3) + \alpha_3 (I_3 - 1) + \alpha_4 (I_1 - 3)^2 + \\ + \alpha_5 (I_2 - 3)^2 + \alpha_6 (I_3 - 1)^2 + \alpha_7 (I_1 - 3)^3 + \alpha_8 (I_2 - 3)^3 + \alpha_9 (I_3 - 1)^3.$$

Существует целый ряд других форм функции удельной энергии деформации. Рассматривая стенку сосуда как трансверсально-изотропный материал, авторы работы [110] предложили выражение для W в виде

$$W = W(I_1, K),$$

где $K = 1/2(\lambda_1^2 - 1)$.

Был проведен анализ окружных напряжений по толщине стенки. Однако эксперименты авторы проводили при фиксированной величине λ_1 , что, конечно, дает только частичную информацию о нелинейно-упругих свойствах материала.

В работе [114] для описания напряженно-деформированного состояния сосуда из ортотропного материала (артерии собаки) было предложено такое выражение для W :

$$W = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3 + \alpha_4 E_1^2 + \alpha_5 E_2^2 +$$

$$+\alpha_6 E_3^2 + \alpha_7 E_1 E_2 + \alpha_8 E_2 E_3 + \alpha_9 E_3 E_1 + \alpha_{10} E_1^3 + \dots,$$

где E_1, E_2, E_3 – компоненты тензора деформаций Грина.

Обсуждая вопрос о необходимом количестве членов в выражении для W , авторы работы [114] установили, что для несжимаемого материала при описании свойств сосуда достаточно первых шести или семи членов, что дает результаты, близкие к экспериментальным данным.

При определении связи между напряжениями и деформациями принимают, что в организме человека сосуды находятся, в основном, под действием внутреннего давления и осевого растяжения и их следует рассматривать как ортотропные [98, 169]. Экспериментально установлено, что в сосудах при такой комбинации нагрузок сдвиговыми напряжениями можно пренебречь [168]. В данном случае W является функцией только главных удлинений: $W = W(\lambda_i, I_3)$ ($i = 1, 2, 3$). Материал стенки кровеносных сосудов можно считать несжимаемым [13, 22]. Из условия несжимаемости вытекает равенство объема тела до и после деформирования, т. е. $I_3 \equiv \lambda_1^2 \lambda_2^2 \lambda_3^2 = 1$, откуда $\lambda_3 = 1/(\lambda_1 \lambda_2)$.

Авторами работы [51] проведено исследование влияния продольных и окружных начальных напряжений на скорость распространения волн в тонкостенном ортотропном гиперупругом сосуде, содержащем вязкую жидкость. Были использованы теория J. R. Womersley [130, 132] и приближение о значительном превосходстве длины волны давления над диаметром сосуда. Проведенные расчеты для двух моделей естественной артерии и одной искусственной показали наличие прямой зависимости между скоростью волны давления и коэффициентом натяжения для естественной артерии и обратной – для искусственной. Авторы не учитывали движение жидкости в сосуде.

В статье [33] предпринята попытка создать модель распространения волн в толстостенной цилиндрической оболочке, сделанной из несжимаемого изотропного материала, заполненного несжимаемой жидкостью. Однако вязкость жидкости в данной модели не была принята во внимание.

Для завершения постановки задачи, помимо уравнений движения стенки сосуда и жидкости в нем, необходимы граничные условия. Эти условия зависят от принятой гипотезы о толщине стенки сосуда. Общими для случаев толстой и тонкой стенок является условие непрерывности компонент скорости на границе раздела между жидкостью и стенкой и условия ограниченности компонент скорости в центре сосуда [194].

Обзор моделей НДС стенок сосудов при различных видах нагружения позволяет перейти к рассмотрению существующих комплексных моделей течения крови в крупных кровеносных сосудах.

В ранних теоретических работах, которые имели отношение к проблемам движения крови, рассматривалось распространение возмущений давления в эластичных трубках, содержащих невязкую жидкость. Первые исследования в этой области принадлежат И. С. Громеке [149, 150], опубликовавшему результаты изучения распространения волн в трубках. Он рассмотрел задачу о течении в тонкостенной трубке, взяв за основу линеаризованные уравнения Навье–Стокса без членов, содержащих вязкость.

A. S. Iberall [55] опубликовал работу, в которой рассмотрел распространение волны в упругой трубке, используя линеаризованные уравнения Навье–Стокса для жидкости и одномерные уравнения теории упругости для стенки. Кроме того, он предположил, что трубка закреплена, и смещения в осевом направлении отсутствуют. Автором работы было получено выражение для импеданса (полного сопротивления потоку жидкости), а также оценено влияние вязкости как на характеристики распространения пульсовой волны, так и на сопротивление и профиль скорости.

Впоследствии стали появляться одно- и двухмерные модели волн, учитывающие влияние вязкости. Значительное достижение в развитии теории распространения пульсовой волны было сделано G. W. Morgan, J. P. Kiely [90] и J. R. Womersley [130, 132]. Авторы работы [90] получили бигармоническое уравнение для константы распространения, оба корня которого характеризуют продольные волны. С меньшей скоростью распространяются моды, называемые модами Юнга; они соответствуют волнам давления, распространяющимся в жидкости. Моды, распространяющиеся с большей скоростью, называются модами Ламба и соответствуют волнам, бегущим в стенке трубки.

J. R. Womersley разработал линейную теорию пульсирующего потока в прямой изотропной тонкостенной линейно упругой трубке, пренебрегая конвективным ускорением. Однако его более поздняя работа [129] и численные исследования S. C. Ling и H. Atabek [72] показали, что нелинейные эффекты, возникающие из-за конвективного ускорения, связанного с движением упругих стенок, не являются пренебрежимо малыми в реальных задачах.

W. Klip и др. [65] исследовали общий случай неосесимметричного распространения волн в сжимаемой жидкости, заключенной в вязкоупру-

гую толстостенную трубку (материал стенки описывался моделью Фойгта). Они получили уравнение, связывающее частоту с константой распространения, и нашел два его корня для предельного случая продольных волн в тонкостенной трубке. Как в работе [65], так и в [64], где рассматривались крутильные волны, авторы не определяют ни скорость жидкости, ни компоненты перемещения стенки.

I. Mirsky [86] обобщил исследование моделей распространения волн, рассмотрев трубки с ортотропными стенками. Он использовал линейаризованные уравнения Навье–Стокса и систему уравнений движения стенки трубки, основанную на приближенной теории оболочек, в которой учитывается влияние поперечных нормальных напряжений. Отсюда результаты для изотропной трубки получаются как частный случай. Поскольку точные решения уравнений такой модели получить весьма трудно, I. Mirsky применил численные методы решения ряда задач как для ортотропного, так и изотропного случаев.

R. H. Cox [28] анализировал распространение волн в толстостенной трубе, пользуясь уравнениями (5.1)–(5.6) применительно к случаю несжимаемой стенки, материал которой считался линейно-упругим. Используя типичные физиологические данные, автор путем численного решения линейаризованных уравнений определил безразмерные характеристики волнового движения и импеданса. Последующее усовершенствование модели позволило учесть влияние сжимаемости стенки [29].

H. V. Atabek и H. S. Lew [11] усовершенствовали модель J. R. Womersley [131], приняв во внимание начальные напряжения в трубке. Для описания движения тонкой стенки использовались уравнения теории оболочек. В статье [75] рассмотрена взаимосвязь между различными определениями скорости пульсовой волны и методикой ее измерения. В работе [170] строится численное решение линейной задачи, а в [93] используется метод интегральных соотношений.

Общим подходом к решению линейаризованных постановок задач распространения пульсовой волны является представление компонент скорости в виде

$$v_x = V_x(r) \exp i(\omega t - \gamma x), \quad v_r = V_r(r) \exp i(\omega t - \gamma x),$$

где γ – волновое число (используется также другой термин – «константа распространения»); ω – круговая частота; ω/γ – фазовая скорость.

В силу однородности поставленной задачи нетривиальное решение существует при определенной связи между ω и γ (дисперсионное уравнение). Импеданс определяется как отношение комплексного давления к комплексному расходу.

Во всех указанных работах, как и в абсолютном большинстве остальных публикаций, принимается, что кровь обладает свойствами ньютоновской жидкости. Некоторые попытки рассмотрения пульсирующего течения крови в жесткой [62, 63] и упругой [107] трубках на основе неньютоновских моделей жидкости не привели к сколько-нибудь интересным результатам. Более того, в статье [107] авторы пришли к выводу, что данные эффекты должны быть малы для крупных кровеносных сосудов. В статье [38] исследовались две модели неньютоновской жидкости в сравнении с обычной ньютоновской моделью. Для описания нелинейной зависимости между напряжением и скоростью сдвига была использована обобщенная модель Максвелла. Осциллирующее движение жидкости рассматривалось в прямых трубках (артериях) с жесткими и упругими стенками. Система дифференциальных уравнений решалась численно с использованием метода, изложенного в [37]. В результате исследований не обнаружено существенной разницы в скоростях потока и сдвига на стенке при наличии и отсутствии упругих элементов в модели Максвелла. Следовательно, при моделировании потока крови в крупных сосудах при обычных условиях можно рассматривать кровь как чисто вязкую жидкость.

Хотя линеаризованные теории движения крови в артериях являются наиболее распространенными, существует необходимость учитывать в ряде случаев нелинейные свойства стенки сосуда [133, 144, 145] и нелинейные инерционные эффекты. Оценки показывают, что квадратичные инерционные члены в уравнениях Навье–Стокса всегда меньше линейных, но могут совпадать по порядку величины с вязкими членами. Поэтому при анализе влияния вязкости в таких случаях нужно сохранять в уравнениях и квадратичные члены.

Формулировка задачи распространения кровеносного потока в сосудах в нелинейном варианте с учетом подвижности границ области, в которых происходит течение, влечет за собой достаточно сложную систему уравнений. Для упрощения нахождения решения применяются различные приближения и упрощения. Кроме аналитических подходов, в последнее время все большее применение находит численный анализ. Данный способ позволяет избежать применения чрезмерно упрощенных моделей жидкости и стенок сосуда. Численный анализ методом конечных

элементов [69, 74, 186, 192] или сеточным методом [12, 23] широко используется в современных работах [157, 158].

В работе [126] рассматривается продольное течение несжимаемой ньютоновской однородной жидкости в изотропной тонкостенной упругой трубке. На жидкость действует периодически изменяющийся градиент давления. Система уравнений (5.1)–(5.6) решается в цилиндрической системе координат. Из предположения «длинной волны», заключающегося в том, что длина волны давления много больше среднего диаметра сосуда, следует независимость функции давления от радиальной координаты: $\partial P/\partial r = 0$. Система уравнений решается методом малого параметра, в роли которого выступает относительное изменение радиуса

$$\varepsilon = (R_{\max} - R_0)/R_0.$$

Получаемые решения исследуются для различных значений коэффициента неустойчивости Уомерсли (Womersley) α и числа Рейнольдса Re_s

$$\alpha = R_0/(\omega/\nu)^{1/2}, \quad Re_s = (\varepsilon\alpha)^2.$$

Число Уомерсли показывает, насколько сильно отличается профиль скорости при ламинарном течении в длинной трубке от пуазейлевского, когда жидкость подвергается воздействию градиента давления, синусоидально изменяющегося с угловой частотой.

Авторами [126] показано, что нелинейное конвективное ускорение порождает средний градиент давления и среднюю скорость сдвига даже при отсутствии расхода. При больших α возникновение течения в пограничном слое компенсируется течением в центре трубы в противоположную сторону вследствие сохранения массы.

В более поздней работе [127] D. M. Wang и J. M. Tarbell обобщили результат для случая потока с отличным от нуля средним расходом. Введение изменения радиальной координаты ξ со временем позволяет избежать трудностей интегрирования, связанных с подвижностью границы потока. Получены простые зависимости для описания профилей продольной скорости при предельных значениях числа Рейнольдса: $(1 - \xi^2)$, когда Re_s мало и $\sin(\pi\xi^2)$ при $Re_s \rightarrow \infty$.

В работах [12, 23] применена вязкоупругая модель тонкой стенки кровеносного сосуда для численного анализа распространения волны

давления. Профиль входного потока предполагался практически плоским, что позволяло провести сравнение с опытом, в котором течение индуцируется движением поршня. Численное интегрирование проводилось с использованием сеточного метода. На основе полученной модели авторы провели исследование течения в условиях слабого (2 %) стеноза для двух состояний стенки сосуда: нормальной и после введения сосудорасширяющего средства.

В статье [108] использован следующий подход к решению задачи трехмерного движения потока в сонной артерии человека: на начальном этапе задавался входной поток и геометрия сосуда, вычислялась волна давления с использованием линейной теории, рассчитывалось положение конечных элементов стенки сосуда исходя из уравнения равновесия, а затем по уравнениям Навье–Стокса рассчитывалось движение жидкости.

Для комплексного исследования поведения кровеносной системы и точного описания поведения условно отсеченной части кровеносного дерева могут использоваться математические теории, учитывающие многократные отражения волн [142] в русле, либо численные модели, построенные на основе опытных данных. В работе [112] построена компьютерная распределенная модель артериальной системы человека, включающая в себя 55 элементов. Каждый артериальный сегмент использует одномерное уравнение движения жидкости и нелинейную зависимость между напряжениями и деформациями для материала стенки сосуда. Упругие свойства стенки сосуда определяются в терминах объемной податливости C_{vol} [128]. Элементы соединены в дерево в соответствии с физиологическими данными, каждая ветвь завершается терминальным сопротивлением для моделирования оставшейся части кровеносной системы. Решается система дифференциальных уравнений в частных производных с помощью метода конечных разностей по времени и координате. Полученные результаты в достаточной степени соответствуют реальному течению крови в нормальных условиях и при наличии стеноза.

Подводя итог краткому обзору работ, можно предложить следующую классификацию различных подходов к решениям задачи гидроупругого деформирования цилиндрических сосудов применительно к гемодинамике крупных кровеносных сосудов.

1. Геометрия сосудов. Перечисленные ниже четыре геометрические формы исследуемых участков сосудов могут быть использованы как базовые элементы при построении более сложной модели кровеносной системы.

1.1. Прямой сосуд.

1.2. Изогнутый сосуд.

1.3. Стеноз (локальное сужение). Использование осесимметричной формы стеноза позволяет ограничить рассмотрение двумерными задачами.

1.4. Ветвление сосудов (примыкание, раздвоение русла). Возможны различные сочетания углов сопряжения, радиусов и материалов сосудов.

2. Математическая модель материала стенки сосуда.

2.1. Материал сосуда абсолютно жесткий. В данном случае необходимо решать только уравнения движения жидкости.

2.2. Материал сосуда упругий изотропный.

2.3. Материал сосуда упругий анизотропный. Согласно опытным данным, материал стенок большинства артерий и является ортотропным.

2.4. Материал сосуда вязкоупругий.

2.5. Материал сосуда гиперупругий. Гиперупругий анализ может применяться для сосудов, которые испытывают большие деформации и перемещения при малых изменениях объема (практически несжимаемый материал). Необходимо также учитывать большую относительную толщину стенки сосуда для крупных кровеносных сосудов.

3. Математическая модель крови.

3.1. Несжимаемая ньютоновская жидкость.

3.2. Несжимаемая неньютоновская вязкопластичная жидкость. Эта модель используется крайне редко, так как, согласно проведенным исследованиям, данные эффекты пренебрежимо малы в крупных кровеносных сосудах.

4. Граничные условия.

4.1. Зависимость граничных условий от времени.

4.1.1. Стационарный поток.

4.1.2. Пульсирующее (периодическое) течение. В большинстве исследований период принимается равным протяженности сердечного цикла (для человека 1 с).

4.2. Граничные условия для жидкости на входе в исследуемый участок.

4.2.1. Плоский профиль скорости входного потока. Соответствует течению жидкости в сосуде, инициированномудвигаемым поршнем.

4.2.2. Параболический профиль скорости входного потока. Соответствует развитому течению несжимаемой вязкой жидкости в трубке с жесткими стенками (течение Пуазейля).

4.2.3. Профиль Уомерсли. Для расчета данного профиля применяется теория Уомерсли.

4.2.4. Одномерные модели распространения волны давления. Наиболее часто используемыми являются модели Максвелла, Фойгта, Кельвина–Фойгта.

4.2.5. Распределенные модели.

4.3. Граничные условия для жидкости на выходе из исследуемого участка.

4.3.1. Давление равно нулю. Наиболее простое условие, соответствующее открытому концу сосуда.

4.3.2. Постоянная отличная от нуля величина давления. Как правило, используется значение давления в диастоле (фазе расслабления сердечной мышцы). Для человека диастолическое давление принимается равным 80 мм рт. ст. (10,6 кПа).

4.3.3. Использование зависимости давления и потока от импеданса. Обычно величина импеданса принимается постоянной и находится в результате опытных измерений.

4.3.4. Одномерные модели распространения волны давления.

4.3.5. Распределенные модели.

4.4. Граничные условия для жидкости на стенке сосуда.

4.4.1. Условия «с прилипанием», т. е. продольная компонента скорости жидкости на стенке равна нулю.

4.4.2. Условия «без прилипания», т. е. продольная компонента скорости жидкости на стенке отлична от нуля. Используется достаточно редко из-за недостаточной близости к реальным условиям.

4.5. Граничные условия для стенки сосуда. В большинстве исследованной литературы игнорируется изменение тонуса артерий, а также влияние прилегающих тканей на кровеносные сосуды. Основанием для данного подхода служит существенное различие в характерных масштабах времени прохождения пульсовой волны (0,1–0,2 с) и изменения тонуса сосуда (от нескольких секунд до десятков секунд).

5. Методы решения.

5.1. Аналитические методы. Проблема гидроупругого деформирования не поддается аналитическому решению в общей виде. Известны лишь несколько классических решений задач гидродинамики в упрощенной постановке. Поэтому оптимальным представляется комбинированный численно-аналитический подход, при котором в задачу сначала вводятся упрощающие предположения, а затем после аналитических преобразований применяются численные методы для получения результата.

5.2. Численные методы. В литературе встречается достаточно большое количество численных методов для решения класса задач гидроупругого деформирования оболочек. Среди них можно выделить три основных подхода к проблеме взаимодействия движущихся стенок сосуда и жидкости в нем:

5.2.1. Полное связывание. Происходит одновременное решение уравнений движения жидкости и твердого тела с использованием метода наложения связей между компонентами движения жидкости и стенки.

5.2.2. Неполное связывание. Решение достигается итерационным процессом, в котором промежуточное решение уравнений жидкости подставляется в виде граничных условий для уравнений движения стенки, и наоборот.

5.2.3. Отсутствие связывания. Распространение волны давления рассчитывается с использованием линейной теории. Результат используется как естественное граничное условие для решения уравнений движения жидкости.

В заключение отметим, что существующие исследования задач в различной (большей частью упрощенной) постановке не позволяют считать вопрос об описании механики кровообращения полностью изученным. Одна из главных нерешенных проблем физиологии сердечно-сосудистой системы кровообращения состоит в создании достоверных моделей отдельных элементов системы и описании ее механики в целом. Многие из авторов, работы которых рассмотрены в настоящей главе, указывают на необходимость дальнейшего развития теории и методов решения задач гидроупругого взаимодействия. Вместе с тем, из анализа публикаций следует, что некоторые проблемы, упомянутые в начале главы, остаются мало изученными.

ГЛАВА 6

ТЕОРИЯ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ В ТОЛСТОСТЕННОМ ГИПЕРУПРУГОМ ЦИЛИНДРИЧЕСКОМ СОСУДЕ

В данной главе осуществлена постановка задачи и получены разрешающие уравнения периодического течения вязкой жидкости (крови) в толстостенном гиперупругом кровеносном сосуде. Предполагается, что кровь является однородной несжимаемой ньютоновской средой. Сосуд рассматривается как толстостенный цилиндр из ортотропного гиперупругого материала, подверженный начальным продольным и окружным деформациям. На кровь воздействует периодически изменяющийся градиент давления, индуцированный сокращениями сердца.

Введение предположения об осесимметричности потока и о том, что длина волны давления много больше радиуса сосуда, позволяет упростить исходную систему уравнений. Для того чтобы избежать трудностей, обусловленных подвижностью границы потока, вводится трансформация радиальной координаты со временем.

Для описания течения крови в крупном кровеносном сосуде человека артериальное дерево ниже по течению моделируется с использованием замыкания Кельвина–Фойгта, что позволяет учитывать отражение пульсовой волны от периферии кровеносной системы.

6.1. Математическая модель движения вязкой жидкости в деформируемом сосуде

Математическая модель движения крови в сегменте артерии основана на уравнениях движения сплошной среды класса жидкостей и газов (5.1)–(5.6). Для несжимаемой вязкой жидкости данную систему можно переписать в более простой форме

$$\operatorname{div} \vec{v} = 0, \quad (6.1)$$

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{f} - \nabla P + \mu \Delta \vec{v}, \quad (6.2)$$

$$\rho \frac{dE}{dt} = 2\mu(v_{ik})^2 + \lambda\Delta T, \quad (6.3)$$

$$E = c_v T, \quad (6.4)$$

где c_v – коэффициент теплоемкости.

Если в среде происходят изотермические процессы и коэффициенты вязкости μ и теплопроводности λ являются константами, то система уравнений распадается на уравнения неразрывности и Навье–Стокса (6.1), (6.2) и уравнения энергии и теплопроводности (6.3), (6.4). Исходя из предположения, что течение является осесимметричным, запишем основные уравнения (6.1), (6.2) в цилиндрической системе координат r, θ, x (ось x направлена вдоль артерии)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + w \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right), \quad (6.5)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial r} + w \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \quad (6.6)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (ru) + \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \quad (6.7)$$

где $u = u(r, x, t)$ – радиальная компонента скорости; t – время; $w = w(r, x, t)$ – продольная компонента скорости; ρ – плотность жидкости; $P = P(r, x, t)$ – функция давления; ν – кинематическая вязкость жидкости.

Решение строится в предположении, что отсутствует или пренебрежимо мало продольное перемещение стенки сосуда, и на ее внутренней поверхности осевая компонента скорости обращается в нуль, а радиальная совпадает со скоростью смещения стенки

$$u(r, x, t) \Big|_{r=R_i(x,t)} = \frac{\partial R_i}{\partial t}, \quad (6.8)$$

$$w(r, x, t) \Big|_{r=R_i(x,t)} = 0, \quad (6.9)$$

а в силу симметрии потока

$$u(r, x, t)|_{r=0} = 0, \quad (6.10)$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial r} \right|_{r=0} = 0. \quad (6.11)$$

В приведенных граничных условиях R_i – внутренний радиус сосуда, зависящий от осевой координаты и времени.

Введем безразмерные переменные и параметры следующим образом:

$$t = t_0 \hat{t}, \quad r = R_{0i} \hat{r}, \quad u = \frac{R_{0i}}{t_0} \hat{u}, \quad w = C_0 \hat{w}, \quad x = C_0 t_0 \hat{x},$$

$$P = \rho C_0^2 \hat{P} + P_0, \quad C_0 = \frac{1}{\sqrt{\rho D}},$$

где «шляпка» над переменной обозначает безразмерную величину; t_0 – характерное время задачи; R_{0i} – внутренний радиус сосуда до деформации; C_0 – характерную скорость волны давления; P_0 – среднее артериальное давление; D – податливость материала сосуда.

Анализ размерностей и безразмерные комбинации величин можно использовать при изучении сложных систем, чтобы выяснить, какие комбинации будут оставаться постоянными на протяжении всего времени, и в каких пределах будут меняться другие переменные. Это существенно облегчает представление результатов, поскольку последние могут быть выражены наилучшим образом в виде графиков зависимостей параметров, сгруппированных именно так, чтобы получить безразмерные величины. При этом можно выявить реакцию данной системы на изменения тех или иных комбинаций переменных безотносительно к единицам измерения, в которых эти переменные выражены. Подобный способ представления полезен, в частности, при сравнении результатов, полученных разными исследователями.

Мерой жесткости стенки принимается податливость (растяжимость) D . Эта величина характеризует собой относительное увеличение площади

S поперечного сечения участка сосуда неизменной длины, вызванного небольшим повышением давления dP

$$D = \frac{1}{S} \frac{dS}{dP}.$$

Весьма полезным безразмерным параметром является число Уомерсли α

$$\alpha = R_{0i} \sqrt{\frac{1}{\nu t_0}}, \quad (6.12)$$

показывающее, как сильно отличается профиль скорости при ламинарном течении в трубке от пуазейлевского. Параметр α может рассматриваться как число Рейнольдса для нестационарного потока, поскольку он характеризует отношение инерционных и вязких сил, определяющих движение за время порядка одного периода колебаний.

В системе кровообращения человека величина α изменяется в широком диапазоне: в аорте α может быть больше 10, тогда как в капиллярах эта величина составляет 10^{-3} . В крупных кровеносных сосудах, которые являются основным объектом исследования данной части, параметр Уомерсли принимает значения от 1 до 10.

Наряду с α для нестационарного потока существенно и число Рейнольдса в обычном смысле

$$Re = \frac{UR_{0i}}{\nu},$$

где U – средняя за период скорость.

Число Re в отличие от α отражает отношение инерционных и вязких сил в среднем за цикл.

Если рассмотреть масштабы радиуса сосуда и длины волны давления, проходящей в этом сосуде, выяснится, что их отношение ε для крупных кровеносных сосудов значительно меньше единицы [194]

$$\varepsilon = \left| \frac{R_{0i}}{C_0 t_0} \right| \ll 1. \quad (6.13)$$

Используя данное предположение, называемое предположением «длинной волны», а также введенные выше обозначения, перепишем уравнение для радиальной компоненты скорости (6.5) в следующем виде:

$$\varepsilon^2 \left(\frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{u} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{t}} + \hat{w} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \right) = - \frac{\partial \hat{P}}{\partial \hat{r}} + \frac{\varepsilon^2}{\alpha^2} \left(\frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{r}^2} + \frac{1}{\hat{r}} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{r}} - \frac{\hat{u}}{\hat{r}^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \hat{x}^2} \right),$$

из которого при отбрасывании относительно малых слагаемых с множителем ε^2 следует независимость давления от радиальной координаты

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 0. \quad (6.14)$$

Для упрощения записи здесь и далее над безразмерными переменными «шляпки» ставиться не будут.

Математическая модель усложняется тем, что течение происходит в области с подвижными границами. Для упрощения формулирования условий на границе вводится трансформация координаты [72]

$$\eta = r/a(x, t), \quad (6.15)$$

где $a(x, t) = R_i(t)/R_{0i}$ – безразмерный внутренний радиус сосуда.

После преобразования координат уравнения (6.6) и (6.7) приобретают следующий вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} = & - \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\alpha^2 a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \left(\frac{\eta}{a} \frac{\partial a}{\partial t} - \frac{u}{a} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} - \\ & - w \left(\frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \eta} \frac{\eta}{a} \right), \end{aligned} \quad (6.16)$$

$$\frac{1}{\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} (\eta u) + a \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial \eta} \eta = 0. \quad (6.17)$$

Помножим уравнение (6.17) на η и проинтегрируем результат по радиальной координате от 0 до η

$$\eta u = \frac{\partial a}{\partial x} \int_0^\eta \eta^2 \frac{\partial w}{\partial x} d\eta - a \int_0^\eta \eta \frac{\partial w}{\partial x} d\eta.$$

Отсюда получается интегро-дифференциальное выражение для радиальной скорости u

$$u = \eta w \frac{\partial a}{\partial x} - \frac{2}{\eta} \frac{\partial a}{\partial x} \int_0^\eta w \eta d\eta - \frac{a}{\eta} \int_0^\eta \eta \frac{\partial w}{\partial x} d\eta. \quad (6.18)$$

Рассмотрим уравнение (6.18) при $\eta = 1$. Учитывая граничные условия (6.8)–(6.9) и то, что

$$2w \frac{\partial a}{\partial x} + a \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} (a^2 w),$$

получим уравнение, описывающее движение стенки сосуда

$$\frac{\partial a}{\partial t} = - \int_0^1 \frac{\eta}{a} \frac{\partial}{\partial x} (a^2 w) d\eta. \quad (6.19)$$

Если ввести функцию Q , характеризующую объемный поток жидкости через цилиндрический сосуд,

$$Q = 2\pi a^2 \int_0^1 \eta w d\eta, \quad (6.20)$$

то уравнение (6.19) приобретает следующий вид:

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial x} Q. \quad (6.21)$$

Из исследований, проведенных авторами работы [23], следует, что для физиологических значений чисел Уомерсли и Рейнольдса с достаточной степенью точности можно записать следующие приближения:

$$\int_0^{\eta} w\eta d\eta = \eta^2 \int_0^1 w\eta d\eta,$$

$$\int_0^{\eta} \eta \frac{\partial w}{\partial x} d\eta = \eta^2 \int_0^1 \eta \frac{\partial w}{\partial x} d\eta.$$

Используя данные преобразования, из уравнения (6.18) и граничных условий (6.8)–(6.9) получим

$$u = \eta \left(w \frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial a}{\partial t} \right), \quad (6.22)$$

а уравнение Навье–Стокса (6.16) для продольной компоненты скорости после подстановки выражения (6.22) запишем в виде

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\alpha^2 a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right) + \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial t} w + \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial x} w^2. \quad (6.23)$$

Граничные условия, выраженные в безразмерных переменных, принимают следующую форму:

$$u(\eta, x, t)|_{\eta=0} = 0,$$

$$\left. \frac{\partial w}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} = 0,$$

$$u(\eta, x, t)|_{\eta=1} = \frac{\partial a}{\partial t},$$

$$w(\eta, x, t)|_{\eta=1} = 0.$$

6.2. Математическая модель артерии

Предполагается, что артерия представляет собой толстостенный цилиндр из ортотропного однородного несжимаемого гиперупругого материала. Инерция стенки не учитывается, изгибными напряжениями пренебрегаем в силу предположения «длинной волны» (6.13). Свойства материала стенки сосуда описываются функцией потенциальной энергии упругого деформирования, конкретный вид и параметры которой определяются, исходя из результатов эксперимента.

Рассмотрим круговую цилиндрическую трубку, находящуюся под действием внутреннего давления и продольного растяжения. Сопутствующую криволинейную систему координат $\{\xi_i\} \equiv \{\xi_i^0\}$ выбираем совпадающей с цилиндрической (x, θ, r) в недеформированном теле так, что $\xi_i|_{t=0} = \xi_i^0$: $(\xi_1^0, \xi_2^0, \xi_3^0) = (x, \theta, r)$. При таком выборе криволинейной системы локальный базис в каждой точке будет совпадать с осями симметрии материала.

Аналогично в рассматриваемый момент времени криволинейная система координат $\{\xi_i\}$ выбирается совпадающей с цилиндрической системой отсчета таким образом, что $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\chi, \vartheta, \rho)$. Здесь χ, ϑ, ρ – цилиндрические координаты в деформированном участке сосуда.

Пусть сосуд в недеформированном состоянии определяется следующим образом:

$$R_{0i} \leq r \leq R_{0e}, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq x \leq L_0,$$

где R_{0i} и R_{0e} – внутренний и внешний радиус до деформации; L_0 – длина сегмента до деформации.

Трубка деформируется под воздействием внутреннего избыточного давления P и осевого растяжения так, что

$$\rho = \rho(r), \quad \vartheta = \theta, \quad \chi = \lambda_x x, \quad (6.24)$$

и при этом

$$R_i \leq \rho \leq R_e, \quad 0 \leq \vartheta = \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \chi \leq L = \lambda_x L_0,$$

где R_i и R_e – внутренний и внешний радиус после деформации; L – длина сегмента после деформации.

Учитывая несжимаемость материала трубки, запишем

$$\rho^2 - R_i^2 = \lambda_x^{-1} (r^2 - R_{0i}^2), \quad (6.25)$$

так как объем материала $\pi(r^2 - R_{0i}^2)L_0$, заключенный между цилиндрами радиуса R_{0i} и R_{0e} , остается неизменным и, следовательно, равным $\pi(\rho^2 - R_i^2)L$.

Для цилиндрической системы координат компоненты метрического тензора g_{ij}^0 , отнесенные к системе отсчета в недеформированном теле, и компоненты метрического тензора G_{ij} , отнесенные к системе отсчета в деформированном теле, определяются как

$$g_{ij}^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$G_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Выразим компоненты тензора G_{ij} в координатах начального (недеформированного) состояния при помощи тензорного преобразования

$$G_{ij}^0 = \frac{\partial \xi^m}{\partial \xi^{0i}} \frac{\partial \xi^n}{\partial \xi^{0j}} G_{mn}.$$

Используя формулы (6.24), получим следующие значения компонент метрического тензора:

$$G_{ij}^0 = \begin{pmatrix} \lambda_x^2 & 0 & 0 \\ 0 & \rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{\partial \rho}{\partial r}\right)^2 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Как известно, ковариантные компоненты тензора конечных деформаций Грина определяются

$$u_{ij} = \frac{1}{2}(G_{ij} - g_{ij}), \quad (6.27)$$

где g_{ij} , G_{ij} – компоненты метрического тензора недеформированного и деформированного тел соответственно.

Главные компоненты тензора деформаций определяются выражениями

$$u_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1^2 - 1), \quad u_2 = \frac{1}{2}(\lambda_2^2 - 1), \quad u_3 = \frac{1}{2}(\lambda_3^2 - 1). \quad (6.28)$$

Физические компоненты тензора Грина записываются в виде

$$u_{ij}^{*0} = \frac{u_{ij}}{\sqrt{g_{ii}^0 g_{jj}^0}} \quad (6.29)$$

(по i и j не суммировать). С учетом (6.26), (6.27) физические компоненты тензора конечных деформаций перепишем в виде

$$u_{ij}^{*0} = \begin{pmatrix} (\lambda_x^2 - 1)/2 & 0 & 0 \\ 0 & ((\rho/r)^2 - 1)/2 & 0 \\ 0 & 0 & ((\partial \rho / \partial r)^2 - 1)/2 \end{pmatrix}.$$

Контравариантные компоненты тензора напряжений τ^{ij} в координатных осях $\{\xi_i^0\}$ определяются на основе теории больших деформаций

выражением, содержащим функцию удельной энергии деформации $W = W(u_{ij}^{*0})$ [148]

$$\tau^{ij} = \frac{1}{2} (A_{mn}^{*ij} + A_{nm}^{*ij}) \frac{\partial W}{\partial u_{mn}^0} + q G^{ij}, \quad (6.30)$$

$$A_{mn}^{ij} = \frac{\partial \xi^i}{\partial \xi^{0m}} \frac{\partial \xi^j}{\partial \xi^{0n}} \frac{1}{\sqrt{g_{mm}^0 g_{nn}^0}},$$

(по m и n не суммировать). Контравариантные компоненты тензора G^{ij} определяются поднятием индекса у ковариантных компонент G_{ij}

$$G^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\rho^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При рассмотрении больших деформаций удобно использовать величины главных удлинений. Из выражений (6.28) находим связь между приращениями деформации по Грину и приращениями степеней главных удлинений вдоль осей симметрии

$$du_{ii}^{*0} = \lambda_i d\lambda_i. \quad (6.31)$$

Тогда выражения (6.30) для напряжений, возникающих в сегменте сосуда, с учетом формулы (6.31) запишутся в виде

$$\sigma_1 = \tau^{xx} = \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + q, \quad (6.32)$$

$$\sigma_2 = \rho^2 \tau^{\theta\theta} = \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + q, \quad (6.33)$$

$$\sigma_3 = \tau^{rr} = \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} + q. \quad (6.34)$$

Напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ – физические компоненты истинных напряжений на элементарной площадке, перпендикулярной к продольному, окружному и радиальному направлениям соответственно, являются нормальными к поверхностям элементарного объема.

Из условия несжимаемости материала трубки

$$\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 = 1 \quad (6.35)$$

и соотношения (6.34) определяется выражение для $\partial W / \partial \lambda_3$

$$\frac{\partial W}{\partial \lambda_3} = -\lambda_1 \lambda_2 \left(\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right)$$

и неизвестная скалярная функция q

$$\begin{aligned} q = \sigma_3 - \lambda_3 \frac{\partial W}{\partial \lambda_3} &= \sigma_3 + \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \left(\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right) = \\ &= \sigma_3 + \left(\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} \right). \end{aligned} \quad (6.36)$$

При известных постоянных материала и степенях удлинений определяются только разности напряжений

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2\lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} + \lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2}, \quad (6.37)$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = 2\lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1}. \quad (6.38)$$

С учетом выражения (6.35) главные удлинения определяются следующим образом (L_0 – длина сегмента в недеформированном состоянии):

$$\lambda_1 = \lambda_x = \frac{L}{L_0}, \quad \lambda_2 = \lambda_\theta = \frac{\rho}{r} \equiv \lambda, \quad \lambda_3 = \lambda_r = (\lambda \lambda_x)^{-1}.$$

Запишем уравнение равновесия сплошной среды в цилиндрической системе координат для сегмента сосуда

$$\frac{\partial \tau^{rr}}{\partial \rho} + \frac{\tau^{rr} - \rho^2 \tau^{\theta\theta}}{\rho} = 0. \quad (6.39)$$

Так как разность $\sigma_3 - \sigma_2$ не зависит от q , то уравнение (6.39) определяет σ_3 в следующей форме:

$$\sigma_3 = \int_{\rho}^{R_e} \frac{1}{\rho} (\sigma_3 - \sigma_2) d\rho = - \int_{\rho}^{R_e} \frac{1}{\rho} \left(2\lambda_2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_2} + \lambda_1 \frac{\partial W}{\partial \lambda_1} \right) d\rho. \quad (6.40)$$

Исходя из условия несжимаемости материала стенки сосуда (6.35) и ранее выведенного соотношения (6.25), перейдем в уравнении (6.40) от независимой переменной ρ к независимой переменной λ . Перепишем соотношение (6.25), заменив ρ на λr и выделив r

$$r^2 = \frac{R_i^2 - \lambda_x^{-1} R_{0i}^2}{\lambda^2 - \lambda_x^{-1}}.$$

Следовательно,

$$\frac{d\rho}{d\lambda} = r + \lambda \frac{dr}{d\lambda} = r \frac{1}{1 - \lambda_x \lambda^2}$$

и тогда зависимость (6.40) принимает вид

$$\sigma_3 = - \int_{\lambda}^{\lambda_e} \frac{1}{\lambda(1 - \lambda_x \lambda^2)} \left(2\lambda \frac{\partial W}{\partial \lambda} + \lambda_x \frac{\partial W}{\partial \lambda_x} \right) d\lambda.$$

Здесь и в дальнейшем используются обозначения

$$\lambda_e = \frac{R_e}{R_{0e}}, \quad \lambda_i = \frac{R_i}{R_{0i}}.$$

Можно отметить, что из уравнения (6.25) следует $\lambda_i \geq \lambda \geq \lambda_e \geq 1$ или $\lambda_i \leq \lambda \leq \lambda_e \leq 1$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $\lambda = 1$ для $R_{0i} \leq r \leq R_{0e}$.

Поскольку сосуд находится под действием только внутреннего давления P , то внешняя поверхность $\rho = R_e$ свободна от напряжений, так что

$$\sigma_3|_{\rho=R_e} = 0, \quad \sigma_3|_{\rho=R_i} = -P.$$

Введем обозначение

$$\widehat{W} = \widehat{W}(\lambda, \lambda_x) = W((\lambda\lambda_x)^{-1}, \lambda, \lambda_x),$$

тогда

$$\frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda} = 2 \frac{\partial W}{\partial \lambda} + \frac{\lambda_x}{\lambda} \frac{\partial W}{\partial \lambda_x}, \quad \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_x} = 2 \frac{\partial W}{\partial \lambda_x} + \frac{\lambda}{\lambda_x} \frac{\partial W}{\partial \lambda}$$

и равенство для радиальной компоненты напряжения можно переписать в виде

$$\sigma_3 = \int_{\lambda}^{\lambda_e} \frac{1}{\lambda_x \lambda^2 - 1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda} d\lambda. \quad (6.41)$$

Компоненты напряжения σ_1 и σ_2 вычисляются аналогично

$$\sigma_1 = \sigma_3 + \lambda_x \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda_x}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 + \lambda \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda}.$$

Используя выведенные соотношения (6.36)–(6.38) с учетом граничных условий, получаем выражение для определения давления как функции от степеней удлинения

$$P = \int_{\lambda_i}^{\lambda_e} (1 - \lambda^2 \lambda_x)^{-1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda} d\lambda. \quad (6.42)$$

Соотношение (6.42) при известных параметрах материала, входящих в функцию удельной энергии деформации, является уравнением для определения неизвестной величины λ при заданных значениях внутрисосудистого давления и λ_x .

При моделировании состояния цилиндра с достаточно тонкой стенкой уравнение (6.42) можно упростить, исходя из условия $\delta = (R_{0e} - R_{0i})/R_{0i} \ll 1$

$$P = \delta \lambda_x^{-1} \lambda^{-1} \frac{\partial \widehat{W}}{\partial \lambda}. \quad (6.43)$$

где λ – любое значение между λ_i и λ_e .

При проведении численных исследований использовались различные функции удельной энергии деформации для крупных кровеносных сосудов млекопитающих.

Первая была предложена в статье [123] для моделирования аорты собаки

$$W = c_1 E_\theta^2 + c_2 E_\theta E_x + c_3 E_x^2 + c_4 E_\theta^3 + c_5 E_\theta^2 E_x + c_6 E_\theta E_x^2 + c_7 E_x^3, \quad (6.44)$$

коэффициенты имеют следующие значения в паскалях:

$$c_1 = 32300,0; \quad c_2 = 3400,0; \quad c_3 = 24700,0; \quad c_4 = 2500,0,$$

$$c_5 = 6800,0; \quad c_6 = 86200,0; \quad c_7 = -4100,0.$$

В той же работе рассмотрена математическая модель искусственной артерии из полиуретана, применяемого в хирургической практике. Функция удельной энергии деформации для данного материала также описывается формулой (6.44), но с иными коэффициентами:

$$c_1 = 302310,0; \quad c_2 = 292270,0; \quad c_3 = 411040,0; \quad c_4 = -169590,0;$$

$$c_5 = -187000,0; \quad c_6 = -283310,0; \quad c_7 = -193320,0.$$

Сравнение результатов, полученных с применением обеих моделей, позволит, в частности, сделать выводы об эффектах, возникающих после замены участка артерии на трубку из искусственного материала.

Следующие две модели были получены V. Kasyanov [60] при исследовании образцов из стенки брюшного отдела аорты человека на двухосное растяжение. Материал был разделен на две группы: I – образцы, взятые у лиц молодого возраста (17–35 лет); II – у лиц среднего возраста (40–57 лет). Для одной и той же функции удельной потенциальной энергии упругого деформирования

$$W = A(e^K - 1) + E(e^L - 1), \quad (6.45)$$

где

$$K = B(\lambda_x - \lambda)^2 + C(\lambda - 1/(\lambda\lambda_x))^2 + D(\lambda_x - 1/(\lambda\lambda_x))^2$$

и

$$L = F(\lambda_x - \lambda)^2 + G(\lambda - 1/(\lambda\lambda_x))^2 + H(\lambda_x - 1/(\lambda\lambda_x))^2$$

значения постоянных материала $A - H$ для групп I и II приведены в табл. 6.1. Постоянные материала определяли для каждого образца на ЭВМ путем аппроксимации экспериментальных данных методом наименьших квадратов.

Таблица 6.1. Средние значения постоянных материала $A - H$ для брюшного отдела аорты человека по возрастным группам

Постоянная материала	Группа	
	I	II
A , кПа	1579,0	1432,0
B	- 0,638	- 0,019
C	1,358	1,619
D	1,274	2,019
E , кПа	20300,0	42360,0
F	- 0,090	0,264
G	0,455	0,224
H	0,518	0,087

Также использовалась функция W для ортотропной артерии грудного отдела кролика [27]

$$W = \frac{c}{2} (\exp(b_1 E_\theta^2 + b_2 E_x^2 + b_3 E_r^2 + 2b_4 E_\theta E_x + 2b_5 E_x E_r + 2b_6 E_\theta E_r) - 1), \quad (6.46)$$

где коэффициенты имеют следующие значения:

$$c = 22400,0 \text{ Па}; \quad b_1 = 1,0672; \quad b_2 = 0,4775;$$

$$b_3 = 0,0499; \quad b_4 = 0,0903; \quad b_5 = 0,0585; \quad b_6 = 0,0042.$$

В функциях потенциальной энергии (6.44) и (6.46) E_θ , E_r , E_x – компоненты тензора деформаций Грина в окружном, радиальном и продольном направлениях соответственно. Они связаны с величинами относительных удлинений такими соотношениями:

$$E_j = \frac{1}{2}(\lambda_j^2 - 1) \quad (j = r, \theta, x),$$

причем из условия несжимаемости материала следует $\lambda_r \lambda_x \lambda_\theta = 1$.

6.3. Граничные и начальные условия

Исходная задача моделирования течения крови в артерии сведена к системе дифференциальных уравнений (6.21), (6.23). Выражение для потока (6.20), уравнение состояния стенки (6.42) и функция потенциальной энергии замыкают систему, которую необходимо проинтегрировать по осевой, радиальной координатам и времени.

Граничные и начальные условия определяются конкретными задачами, для решения которых используется предложенная теория. В применении к проблеме движения крови в крупных кровеносных сосудах млекопитающих были использованы следующие предположения.

В начальный момент времени жидкость находится в покое

$$u(\eta, x, t)|_{t=0} = 0, \quad (6.47)$$

$$w(\eta, x, t)|_{t=0} = 0. \quad (6.48)$$

На входе в артериальный участок задается функция Q осевого потока, зависящая от времени. На рис. 6.1 сплошной линией представлена кривая расхода крови в восходящей аорте вблизи аортального клапана левого желудочка. Сплошной линией отмечена реальная кривая расхода крови, пунктирной – ее аппроксимация в виде треугольной волны. Частота пульса – 1 Гц, средний расход за один цикл – 88 мл.

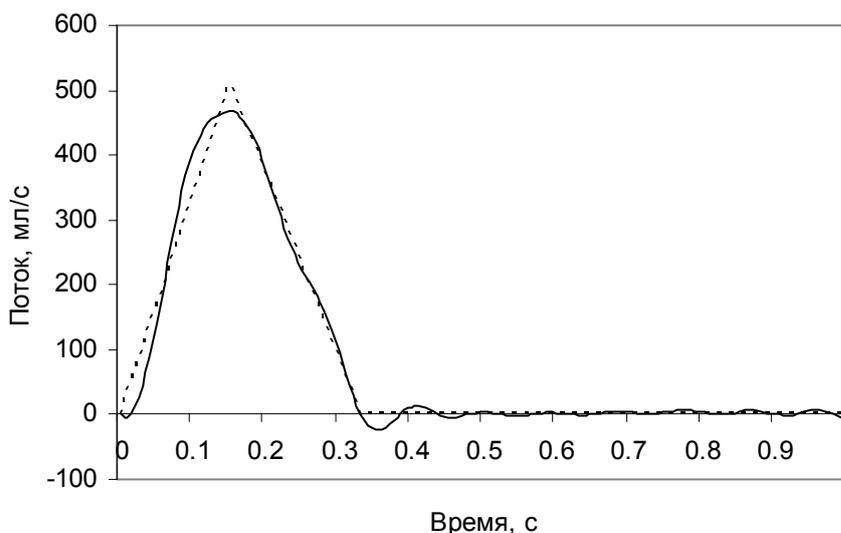


Рис. 6.1. Расход жидкости на входе в исследуемый участок артерии за один период времени

Прямое движение крови в аорте начинается в момент открытия клапана вместе с нагнетанием крови из желудочка. Кровоток резко возрастает до пикового значения и тут же начинает быстро снижаться. При закрытии клапана возникает короткая фаза обратного движения крови, когда она течет по направлению к аортальному клапану, а затем в течение остальной части цикла сокращения сердца движение крови практически прекращается.

Используем приближение реальной кривой треугольной волной, построенной по типичным данным для здорового человека в состоянии покоя (рис. 6.1, пунктирная линия).

Видно, что такая достаточно простая аппроксимация хорошо моделирует реальную ситуацию и вместе с тем легко записывается математически

$$Q(t) = \begin{cases} Q_{\max} t / (T/2), & 0 \leq t \leq T/2 \\ -Q_{\max} (t - T) / (T/2), & T/2 \leq t \leq T, \\ 0, & t > T \end{cases} \quad (6.49)$$

где Q_{\max} – максимум амплитуды потока; T – длительность импульса входного потока.

Пиковое значение потока и частота сердечных импульсов зависят от многих факторов. У здорового человека в состоянии покоя эти величины равны в среднем $5 \cdot 10^{-4}$ м³/с и 1 Гц соответственно. Длительность импульса входного потока принимается, как правило, равной 1/3 периода сердечных сокращений.

При формулировании условий на выходе из исследуемого участка артерии могут использоваться следующие ограничения: равенство нулю гидродинамического сопротивления, бесконечное сопротивление, равенство нулю касательных напряжений либо более сложные зависимости.

Среди математических моделей часто используют модели упругого резервуара, которые позволяют описать сопротивление, возникающее в кровеносной системе при работе сердца. В основном используются двух- и трехэлементные модели упругого резервуара, хотя встречаются и более сложные зависимости. Сравнительный анализ трех конфигураций будет приведен в главе 8.7 «Теоретико-экспериментальная параметризация крупных кровеносных сосудов». При изучении локальных характеристик потока достаточным является применение классической двухэлементной модели Кельвина–Фойгта.

В модели Кельвина–Фойгта система артерий представлена в виде растяжимой камеры, объем которой V пропорционален избыточному давлению в ней. Система микрососудов рассматривается как единственное постоянное сопротивление, расход жидкости через которое прямо пропорционален разности давлений на его концах (рис. 6.2).

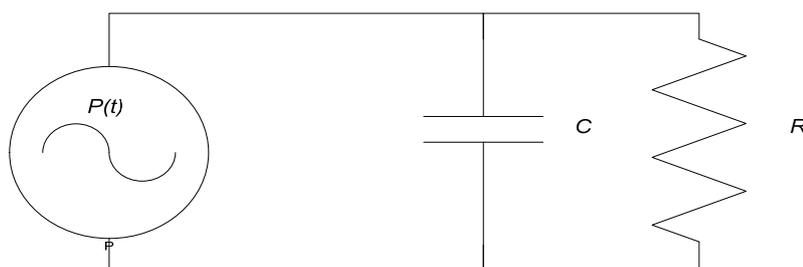


Рис. 6.2. Двухэлементная модель упругого резервуара

Уравнение, связывающее давление и величину потока, выглядит следующим образом:

$$C \frac{d}{dt} P(t) + \frac{1}{R} P(t) = Q(t), \quad (6.50)$$

где C – податливость кровеносной системы; P – давление крови; R – периферическое сопротивление кровеносной системы; Q – функция расхода крови.

Решение (6.51) дает взаимосвязь между давлением в артериях и притоком крови в них из сердца для любого момента времени при известном начальном значении давления P_0 и функции $Q(t)$

$$P(t) = \frac{1}{C} e^{-t/CR} \left(\int_0^t e^{u/CR} Q(u) du + CP_0 \right). \quad (6.51)$$

Из модели следует, что в течение диастолы, когда приток крови в аорту фактически равен нулю, давление в артериях снижается практически экспоненциально, т. е.

$$P \sim e^{-t/CR}.$$

Такой характер спада близок к наблюдаемому в действительности.

ГЛАВА 7

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ В ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ СОСУДАХ

Данная глава посвящена описанию численной методики решения задачи гидроупругого деформирования цилиндрических сосудов, разработке алгоритмов решения изучаемого класса задач и апробации методики. Проведено сравнение с результатами аналитических и численных решений ряда задач теории деформируемого твердого тела и гидродинамики.

Результирующая система нелинейных дифференциальных уравнений раскладывается в ряд по последовательности ортонормированных функций радиальной координаты. Частные производные по продольной координате приближаются центральными разностями второго порядка точности. Полученная задача Коши решается методом Рунге–Кутта либо Адамса при известных начальных и конечных условиях.

7.1. Алгоритм и программа

Так как полученная в предыдущей главе система дифференциальных уравнений является нелинейной и зависящей от времени, необходимо применить численные методы решения данной задачи.

Используем метод Галеркина для разложения продольной компоненты скорости w в ряд по ортонормированным функциям радиальной координаты. Для этого введем счетное множество линейно независимых функций вида

$$\hat{\phi}_i = \eta^{2i} - 1.$$

Вид функций $\hat{\phi}_i$ обеспечивает удовлетворение продольной скоростью w краевых условий (6.8)–(6.11), а именно симметричность относительно продольной оси и равенство нулю при $\eta = 1$.

Существует ортонормированная последовательность функций ϕ_i , порождающая то же самое многообразие функций, которая может быть построена из $\hat{\phi}_i$ посредством следующих рекуррентных формул (процесс ортогонализации Грама–Шмидта [174]):

$$\varphi_i(\eta) = \frac{\Phi_i(\eta)}{\|\Phi_i(\eta)\|} = \frac{\Phi_i(\eta)}{\sqrt{(\Phi_i, \Phi_i)}}, \quad (7.1)$$

$$\Phi_1(\eta) = \hat{\varphi}_1(\eta), \quad \Phi_{i+1}(\eta) = \hat{\varphi}_{i+1}(\eta) - \sum_{k=1}^i (\varphi_k, \hat{\varphi}_{i+1}) \varphi_k(\eta), \quad (7.2)$$

($i = 1, 2, \dots, N$).

Запишем приближение продольной скорости w как

$$w \approx w_N = \sum_{i=1}^N \beta_i(x, t) \varphi_i(\eta) \quad (7.3)$$

и подставим его в уравнение движения (6.23) и уравнение неразрывности (6.21) с учетом выражения (6.20)

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi a} \frac{\partial}{\partial x} \left[2\pi a^2(x, t) \int_0^1 \sum_{i=1}^N \beta_i(x, t) \varphi_i(\eta) \eta d\eta \right], \quad (7.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \frac{\partial \beta_i(x, t)}{\partial t} \varphi_i(\eta) &= \frac{1}{\alpha^2 a^2} \sum_{i=1}^N \beta_i \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right) + \\ &+ \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i + \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial x} \left(\sum_{i=1}^N \beta_i \varphi_i \right)^2 - \frac{\partial P}{\partial x}. \end{aligned} \quad (7.5)$$

Помножим обе части уравнений (7.4) и (7.5) на φ_k и проинтегрируем по η от 0 до 1, учитывая ортогональность последовательности функций φ_i

$$\int_0^1 \varphi_i \varphi_k d\eta = \delta_{ik},$$

где δ_{ik} – функция Кронекера.

В результате получаем систему из $(N + 1)$ -го уравнения относительно $a(x, t)$ и $\beta_k(x, t)$

$$\frac{\partial a(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial x} \left(a^2 \sum_{i=1}^N G_i \beta_i \right), \quad (7.6)$$

$$\frac{\partial \beta_k(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{a^2} \sum_{i=1}^N A_{ik} \beta_i + \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial t} \beta_k + \frac{2}{a} \frac{\partial a}{\partial x} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N D_{ijk} \beta_i \beta_j - E_k \frac{\partial P}{\partial x}, \quad (7.7)$$

$$(k=1, \dots, N).$$

Коэффициенты, возникающие в уравнениях (7.6) и (7.7), определены следующим образом:

$$A_{ik} = \frac{1}{\alpha^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial \varphi_i}{\partial \eta} \right) \varphi_k d\eta, \quad (7.8)$$

$$D_{ijk} = \int_0^1 \varphi_i \varphi_j \varphi_k d\eta, \quad (7.9)$$

$$E_k = \int_0^1 \varphi_k d\eta, \quad (7.10)$$

$$G_i = - \int_0^1 \eta \varphi_i d\eta. \quad (7.11)$$

Частные производные неизвестных функций по осевой координате аппроксимируются центральными конечными разностями второго порядка точности. Для множества равноотстоящих значений аргумента

$$x_m = x_0 + m\Delta x (m = 0, 1, \dots, M)$$

и соответствующих значений функций $a_m = a(x_m, t) = a(x_0 + m\Delta x, t)$, $\beta_{k,m} = \beta_k(x_m, t) = \beta_k(x_0 + m\Delta x, t)$ производные заменяются соотношениями

$$\frac{\partial a_m}{\partial x} = \frac{a_{m+1} - a_{m-1}}{2\Delta x}, \quad \frac{\partial \beta_{k,m}}{\partial x} = \frac{\beta_{k,m+1} - \beta_{k,m-1}}{2\Delta x}.$$

Записывая уравнения (7.6) и (7.7) для каждой точки $m = 1, \dots, M-1$, получаем систему из $(N+1)(M-1)$ обыкновенных нелинейных дифференциальных уравнений, которую необходимо проинтегрировать по времени относительно неизвестных функций $a_m(t)$ и $\beta_{k,m}(t)$ при заданных начальных условиях. Для вычисления значений $a_m(t)$ и $\beta_{k,m}(t)$ в точках $m = 1$ и $m = M-1$ используются величины $a_0(t)$, $\beta_{k,0}(t)$, $a_M(t)$ и $\beta_{k,M}(t)$, определяемые граничными условиями конкретной задачи. Давление $P_m(t)$ в каждой точке $m = 1, \dots, M-1$ задавалось по формуле (6.42) и вычислялось методом трапеций [174].

Введя вектор неизвестных

$$\mathbf{X} = \{\beta_{1,1}, \beta_{1,2}, \dots, \beta_{1,M-1}, \beta_{2,1}, \beta_{2,2}, \dots, \beta_{N,M-1}, a_1, a_2, \dots, a_{M-1}\},$$

получаем задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{X}}{dt} = f(\mathbf{X}), \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0. \end{cases} \quad (7.12)$$

Для интегрирования разрешающей системы дифференциальных уравнений (7.12) применялись одношаговые (Рунге–Кутта) либо многошаговые (Адамса) методы решения в зависимости от характеристик поставленной задачи.

Одношаговые методы Рунге–Кутта очень устойчивы [174] и не требуют отдельной программы для начала решения. В работе применялся метод Рунге–Кутта четвертого порядка точности, т. е. локальная ошибка усечения имеет порядок $O(\Delta x^5)$ при $\Delta x \rightarrow 0$. Для оценки ее величины и контроля величины шага на $(n+1)$ -ом этапе использовалась формула

$$e = 3f_{n+1}\Delta x + k_1 - 2k_3 - 2k_4,$$

где k_1, k_3, k_4 – соответствующие коэффициенты метода.

Преимуществом многошаговых методов является то, что при переходе к следующей точке требуется однократное вычисление правой части (а по методу Рунге–Кутта – многократное), а это является важным для сокращения времени расчета при очень сложной функции $f(\mathbf{X})$. Используемый здесь метод типа «предсказание-коррекция» (метод Адамса четвертого порядка точности [174]), требует знания приближенных значений в 4-х начальных точках, для вычисления которых использовался вспомогательный одношаговый метод (Рунге–Кутта). Получающаяся разность

$$e = x_{n+1}^{корр} - x_{n+1}^{пред}$$

между скорректированным и предсказанным значениями на $(n + 1)$ -м этапе служила для оценки локальной ошибки усечения.

Для реализации представленного численного алгоритма создана программа в среде Borland Delphi. Разработаны и проверены на тестовых задачах модули, отвечающие за векторные и матричные операции, работу с полиномами и численное интегрирование методами Рунге–Кутта и Адамса.

В начале работы программы обнуляется вектор скорости и вычисляется конфигурация системы, соответствующая начальному давлению P_0 . Затем формируется и ортонормируется система полиномов по формулам (7.1), (7.2) и заносится в память для дальнейшего использования, а также вычисляются значения коэффициентов A_{ik} , D_{ijk} , E_k , G_i и числа Уомерсли α . На каждом шаге интегрирования происходит контроль ошибки усечения с выдачей ее на экран, а также вычисление значений скорости потока, давления, внутреннего и наружного радиусов сосуда и напряжения сдвига на стенке. Результаты расчетов (значения скоростей, давления, радиусов, напряжения сдвига и т. д.) сохраняются в виде текстовых файлов, что позволяет использовать их в различных программных продуктах для дальнейшего анализа и интерпретации.

7.2. Сравнение известных решений с полученными результатами и анализ их сходимости

Построенная теория и методика расчета позволяет решать задачи о гидроупругом деформировании цилиндрических тел в различных постановках. Поэтому представляется возможным проверить достовер-

ность результатов на известных задачах гидродинамики и теории упругости.

7.2.1. Математическая модель движения вязкой жидкости в недеформируемом сосуде. Рассмотрим достаточно длинный (по отношению к диаметру) участок прямой трубки с круговым сечением и жесткими стенками. Трубка заполнена вязкой несжимаемой ньютоновской жидкостью, подверженной периодически изменяемому градиенту давления.

При отсутствии перемещений стенок сосуда радиальная составляющая скорости жидкости равна нулю, и продольная компонента скорости w не зависит от координаты x . Уравнение (6.23) приобретает вид

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{1}{\alpha^2 a^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{\partial w}{\partial \eta} \right), \quad (7.13)$$

причем соотношение $\partial P/\partial x$ должно быть независимым от x .

Пусть к участку сосуда приложен градиент давления, зависящий от времени

$$\frac{\partial P}{\partial x} = A e^{it}, \quad (7.14)$$

где A – константа.

Тогда, записывая w как

$$w(\eta, t) = w_1(\eta) e^{it},$$

получим уравнение для w_1

$$\frac{d^2 w_1}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dw_1}{d\eta} - i\alpha^2 a^2 w_1 = A\alpha^2 a^2. \quad (7.15)$$

Уравнение (7.15) было исследовано в работе [132]. После интегрирования данного выражения возможно записать решение (7.13) в явном виде

$$w = \operatorname{Re} \left\{ \frac{A}{i} \left(1 - \frac{J_0(\alpha i^{3/2} \eta)}{J_0(\alpha i^{3/2})} \right) e^{it} \right\}, \quad (7.16)$$

где $\operatorname{Re}\{\}$ – действительная часть выражения в скобках; J_0 – функция Бесселя первого рода нулевого порядка, определяемая формулой

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k+1)} \left(\frac{z}{2} \right)^{2k}.$$

Для приложенного градиента давления (7.14) при $A = 1$ и значения параметра Уомерсли $\alpha = 3,34$ точное решение, вычисляемое по формуле (7.16), представлено на рис. 7.1.

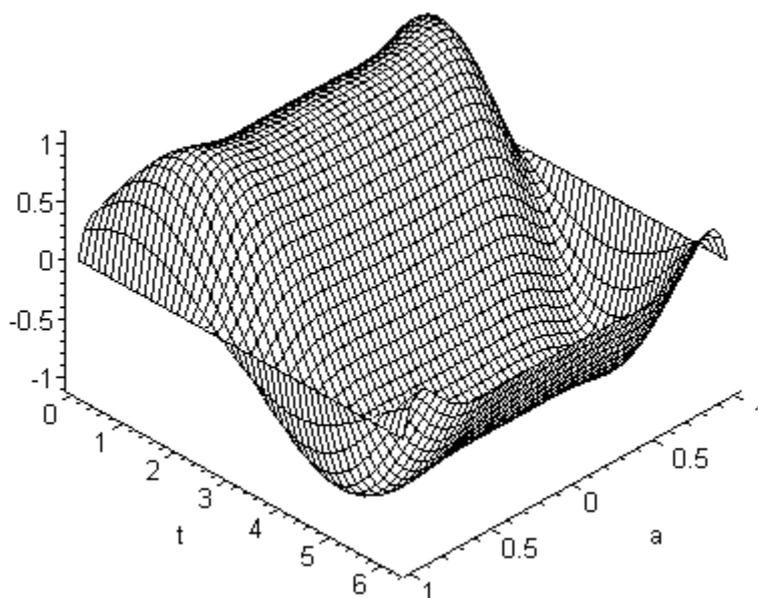


Рис. 7.1. Продольная скорость потока в жесткой трубке как функция времени t и радиальной координаты a , вычисленная аналитическим методом

Проведем сравнение этого решения с результатами, получаемыми по представленной в данной части методике. Так как решение периодически и симметрично относительно оси сосуда, достаточно рассмотреть только половину временного цикла и $0 > a > 1$.

На рис. 7.2 представлены профили продольной скорости с интервалом в 30° . Сплошными линиями изображены графики скорости, получаемые с помощью решения (7.16), точками – значения w , получаемые с помощью разработанного алгоритма. В расчетах использовалось вычисление восьми слагаемых ряда (7.3). Сопоставление графиков

позволяет сделать вывод о достаточной степени близости результатов для всего периода движения жидкости в трубке.

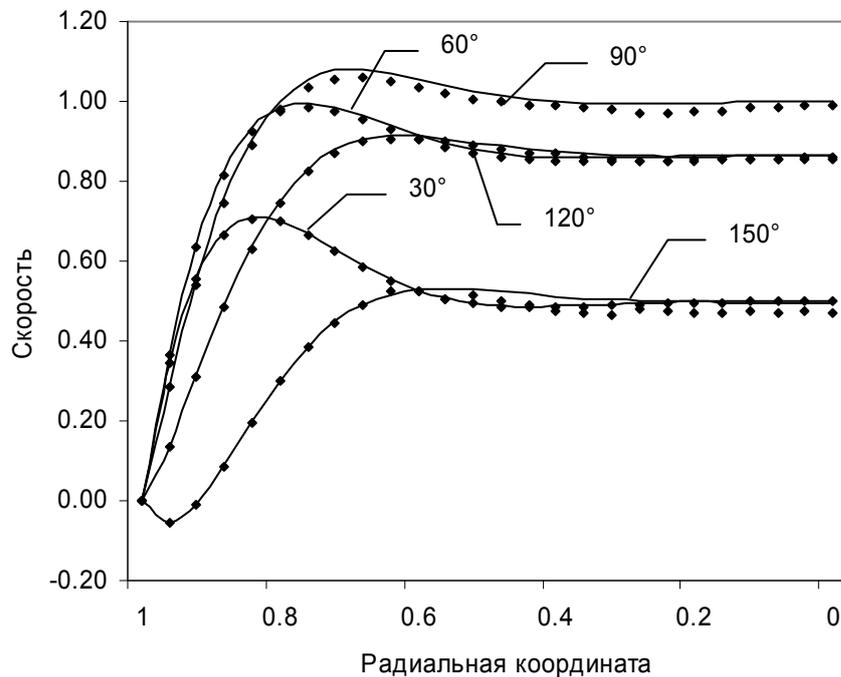


Рис. 7.2. Профили продольной скорости с интервалом в 30° , возникающие при приложенном синусоидальном градиенте давления в сосуде с жесткими стенками

Используемый метод (комбинирование разложения Галеркина по радиусу с приближением производных по продольной координате x конечными разностями) позволил существенно сократить размерность системы и вычислительные затраты, так как для получения необходимой точности результата достаточно четырех – шести слагаемых ряда (7.3). С ростом N повышается точность расчетов, но вместе с тем растет размерность системы уравнений и время вычислений.

При оценке сходимости решения были проведены расчеты для $N = 3, 4, \dots, 8$. Для каждого значения N брался профиль продольной скорости, соответствующий 90° , и вычислялась относительная ошибка, т. е. степень отклонения полученного профиля от решения (7.16). Полученные результаты обобщены на рис. 7.3.

При выборе числа слагаемых ряда (7.3), т. е. значения N , приходится находить компромисс между точностью вычислений и продолжительностью счета. Как правило, в рассматриваемых задачах использовалось $N = 6$.

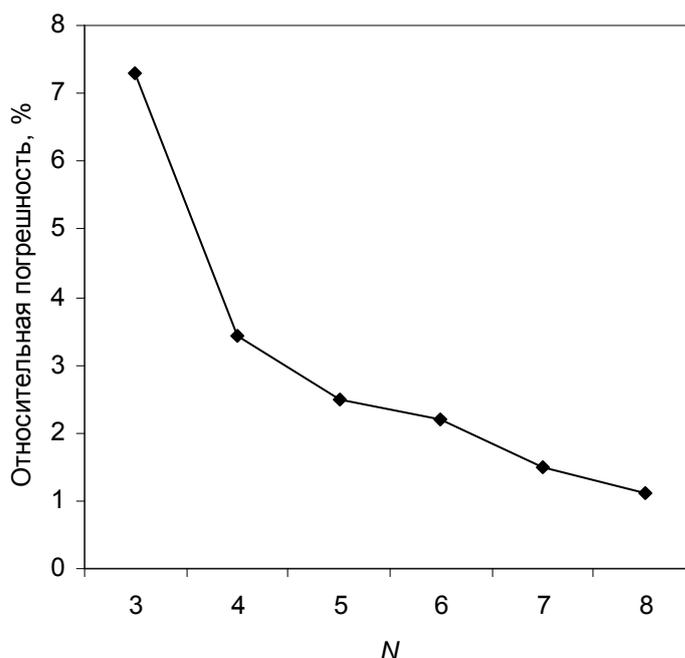


Рис. 7.3. Относительная погрешность при вычислении продольной скорости потока в зависимости от числа слагаемых ряда в разложении

7.2.2. Математическая модель толстостенного цилиндра из гиперупругого материала. Рассмотрим сегмент кровеносного сосуда как осесимметричную цилиндрическую оболочку, находящуюся под действием внутрисосудистого давления P и растягивающей продольной силы M . Материал сосуда принимается однородным и несжимаемым.

При отсутствии действия внутренних сил и концевых эффектов, а также однородности свойств материала напряжения в продольном (σ_1), окружном (σ_2) и радиальном (σ_3) направлениях постоянны вдоль осей 1 и 2, но по толщине (вдоль оси 3) они будут изменяться.

Если сегмент сосуда рассматривается как тонкостенный ($R/h > 10$), то напряжения могут быть определены известными соотношениями [102]

$$\sigma_1 = \frac{PR}{2h} + \frac{M}{2\pi Rh}, \quad (7.17)$$

$$\sigma_2 = \frac{PR}{h}, \quad (7.18)$$

$$\sigma_3 = -\frac{P}{2}. \quad (7.19)$$

Таким образом, в стенке сосуда можно вычислить три средних напряжения. Проведем сравнение результатов, полученных с использованием предложенного метода решения и соотношений (7.17)–(7.19).

Используем функцию удельной энергии деформации (6.46) и примем радиус сосуда и его толщину 8,34 и 0,83 мм соответственно. В данном случае соотношение R к h превышает 10, что обеспечивает применимость приближенной теории. На внутреннюю поверхность действует нагрузка от 0 до 240 мм рт. ст. (от 0 до 32 кПа) при отсутствии нагрузки в продольном направлении. Результаты представлены на рис. 7.4.

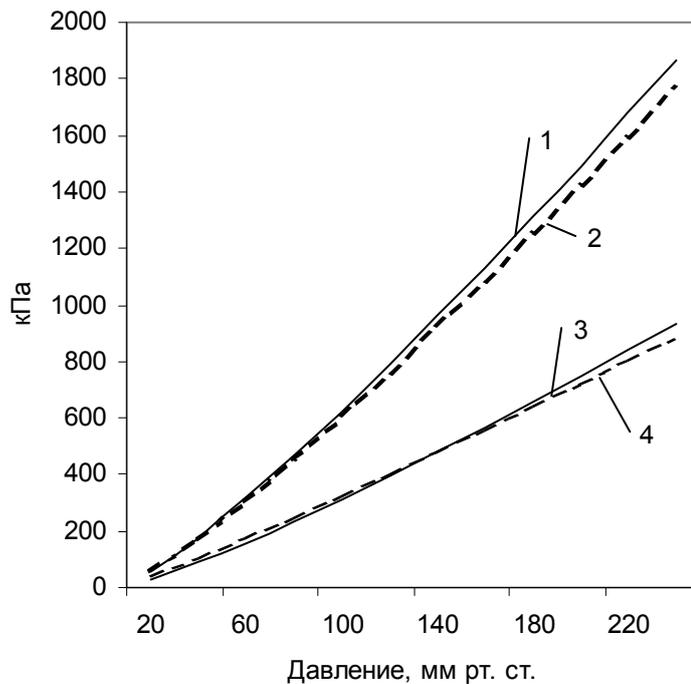


Рис. 7.4. Значения напряжения σ_2 (линии 1, 2) и σ_1 (линии 3, 4) в срединном слое без учета (сплошная линия) и с учетом (пунктирная линия) неравномерного распределения напряжений по толщине сосуда

Видно, что для рассмотренной достаточно тонкой стенки сосуда, данные, полученные с использованием обеих теорий, достаточно близки и не отличаются более чем на 5 %.

Далее, сравним функции напряжений для различных значений толщины стенки при фиксированном внутреннем давлении. Для этого будем

уменьшать толщину стенки с 1,39 до 0,56 мм с сохранением значения внутреннего радиуса 8,34 мм. С уменьшением относительной толщины стенки сосуда различия в результатах становятся меньше, что оправдывает применение упрощенной теории для тонкостенных сосудов.

В таблице 7.1 приведены значения напряжений в продольном σ_1 и окружном σ_2 направлениях для различных соотношений R и h . Оболочка находится под воздействием постоянной внутренней нагрузки 120 мм рт. ст. (16 кПа) и отсутствии внешней.

Таблица 7.1. Значения напряжений σ_1 и σ_2 для различных соотношений R и h при наличии внутренней нагрузки 120 мм рт. ст.

Соотношение R/h	σ_1 , кПа	σ_2 , кПа	σ_1 , кПа	σ_2 , кПа
	С учетом неравномерного распределения напряжений		Без учета неравномерного распределения напряжений	
6	215,23	385,56	208,73	417,45
8	305,58	564,07	298,33	596,65
10	399,20	752,21	392,37	784,73
12	495,23	947,73	489,93	979,86
15	642,73	1251,92	641,61	1283,22

Относительная разность напряжений σ_1 и σ_2 в срединном слое сосуда для постоянного внутреннего давления и различных значений толщины стенки изображена на рис. 7.5.

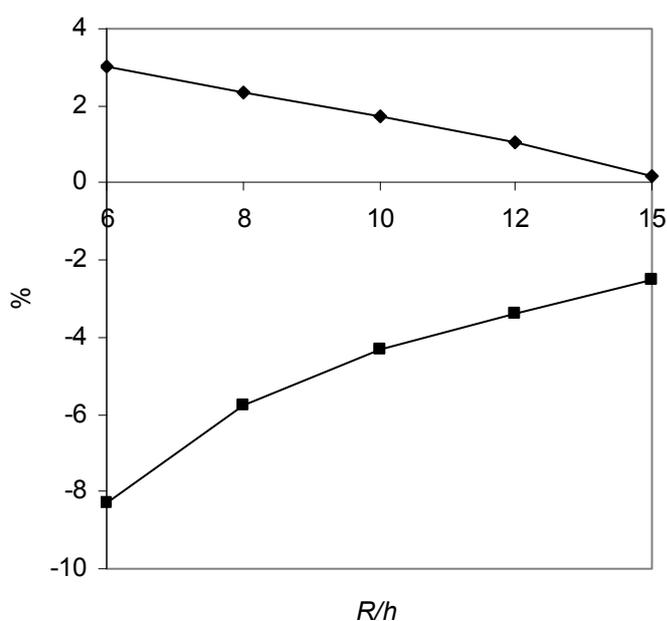


Рис. 7.5. Относительная разность напряжений σ_1 (◆) и σ_2 (■) для различных соотношений R/h при наличии внутренней нагрузки 120 мм рт. ст.

С ростом соотношения R/h различия между соответствующими значениями напряжений становятся пренебрежимо малыми.

Несмотря на то, что полученные с применением обеих теорий значения напряжений в продольном и окружном направлениях близки даже при относительно толстой стенке сосуда, наблюдаются значительные расхождения вблизи границы сосуда, что показывает ограниченность применения соотношений (7.17)–(7.19) при исследовании крупных кровеносных сосудов. Подробно данный аспект будет рассмотрен в разделе 8.6 «Анализ распределения напряжений по толщине стенки сосуда».

Для проверки представленной теории также было проведено сравнение с результатами, изложенными в статье [51]. Для исследования скорости распространения волны давления авторами работы [51] применялась модель тонкостенного цилиндра, содержащего невязкую жидкость, причем движение жидкости не учитывалось, что не позволяло определить такие параметры, как скорость течения жидкости, напряжение сдвига на стенке и др.

Результаты сравнения показаны на рис. 7.6. График 1 изображает зависимость скорости волны давления от величины λ_x , полученные с использованием представленной в работе теории; график 2 взят из статьи [51].

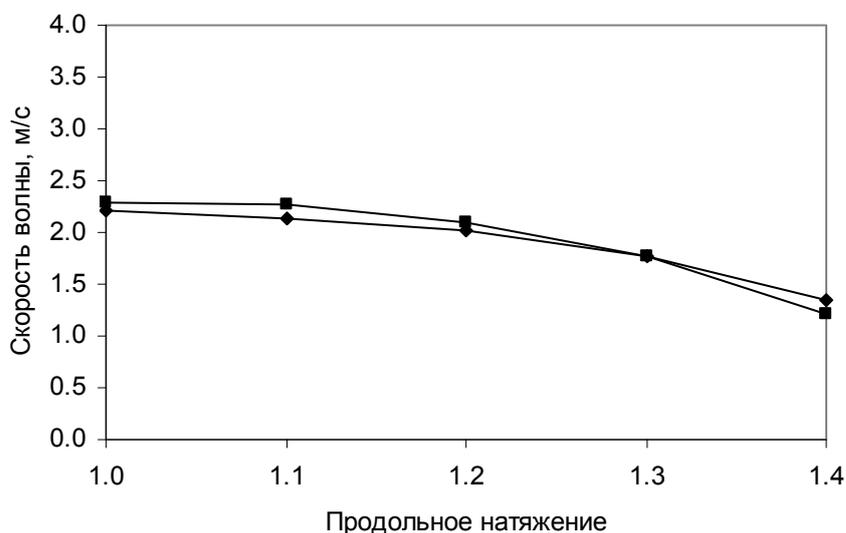


Рис. 7.6. Сравнение результатов (скорость волны давления в зависимости от величины продольного натяжения сосуда), полученных в данной работе (\blacklozenge), с предыдущими исследованиями (\blacksquare)

Сравнение проводилось для потенциала (6.44), толщина стенки принималась равной 0,5 мм при радиусе сосуда в ненапряженном состоянии

3,5 мм. Начальное давление считалось равным 13 мм рт. ст., что соответствует $\lambda_0 = 1,2$. Поскольку авторами [51] применена тонкостенная модель, при сравнении мы использовали приближенный вариант зависимости «давление–радиус» (6.43), записанный в предположении, что относительная толщина стенки $\delta = (R_{0e} - R_{0i}) / R_{0i} \ll 1$ достаточно мала.

Как видно, обе теории в данном случае дают сходные результаты: графики 1 и 2 практически совпадают. Однако использование более точной зависимости (6.42) дает значение скорости, отличающееся примерно на 10 %. Подробнее данный вопрос будет рассмотрен в разделе 8.2 «Влияние начального продольного натяжения».

ГЛАВА 8

МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В КРУПНЫХ КРОВЕНОСНЫХ СОСУДАХ

В данной главе проведено исследование течения вязкой несжимаемой жидкости, порождаемого периодически изменяющимся градиентом давления, в толстостенном сосуде с гиперупругими стенками на примере течения крови в крупных кровеносных сосудах. Рассмотрены задачи гидроупругого деформирования в предварительно растянутых сосудах, в сужающихся сосудах, в области локального сужения просвета артерии. Отдельно изучены распределения напряжений внутри стенки сосуда, а также некоторые электрические аналоги артериального дерева.

8.1. Распространение волн давления в сосуде

В известных исследованиях применяется большое количество моделей крови и сосудов, с различной степенью точности приближающих реальную ситуацию. Распространение волн достаточно хорошо изучено экспериментально, но теоретическое представление результатов по-прежнему не является удовлетворительным. Были проведены эксперименты для проверки точности некоторых теоретических моделей, показавшие, что результаты, полученные при использовании линейных моделей, значительно отличаются от данных опыта [70]. Поэтому актуальным представляется создание нелинейных моделей, которые с большей точностью соответствуют биологическим объектам.

Цель данной главы – исследовать поток вязкой несжимаемой жидкости, возникающий под воздействием периодически изменяющегося градиента давления, в толстостенном сосуде с гиперупругими стенками.

Математическая модель движения крови в сегменте артерии основана на теории, представленной в разделе 6.2. Кровь рассматривается как однородная, несжимаемая, вязкая жидкость, обладающая ньютоновскими свойствами. Предполагается, что артерия представляет собой толстостенный цилиндр из однородного несжимаемого гиперупругого материала. Предполагается, что в начальный момент времени жидкость находится в покое (6.47), (6.48); на входе в артериальный участок задается функция осевого потока, зависящая от времени (6.49). Артериальное дерево ниже по течению представляется с помощью модели (6.50) упругого резервуара.

При расчетах использовались следующие данные о сосуде: длина сегмента равна 0,3 м, внутренний радиус равен 0,011 м, толщина стенки в ненапряженном состоянии равна 0,002 м, коэффициент продольного удлинения $\lambda_x = 1,4$. Плотность жидкости принималась равной 1060 кг/м^3 , а вязкость $0,004 \text{ Па}\cdot\text{с}$. Объемная податливость артериальной системы $C = 1,1 \cdot 10^{-7} \text{ м}^3 \cdot \text{Па}^{-1}$, периферическое сопротивление $R = 9,7 \cdot 10^6 \text{ Па}\cdot\text{м}^{-3} \cdot \text{с}^{-1}$.

На рис. 8.1 представлен трехмерный график расчетной волны давления за один сердечный цикл (1 с) для всего участка сосуда, а на рис. 8.2 – соответствующие графики для входного и выходного давлений.

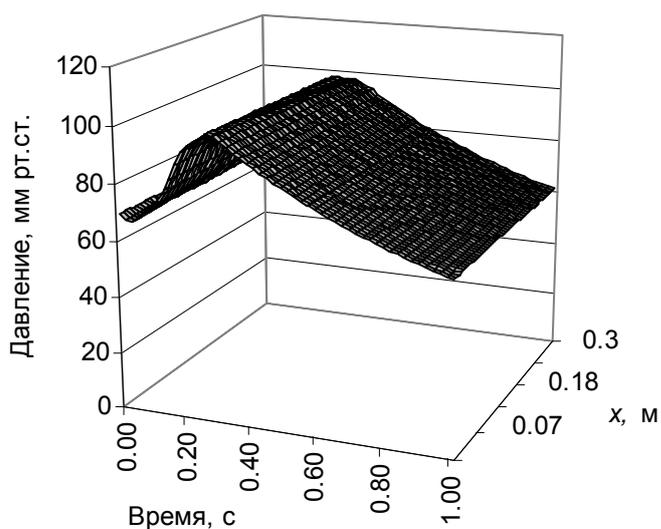


Рис. 8.1. Волна давления за один период сердечного цикла для всей протяженности исследуемого участка сосуда

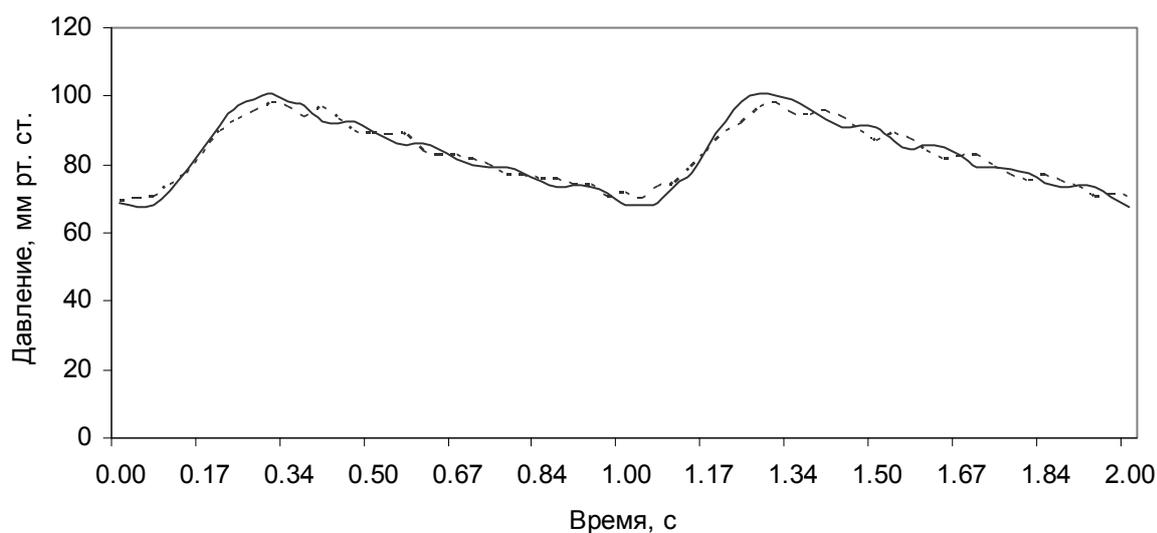


Рис. 8.2. Графики давления на входе (сплошная линия) и выходе (пунктирная линия) в исследуемый участок сосуда для двух периодов сердечного цикла. На выходе наблюдается некоторое запаздывание пиков давления и уменьшение его амплитуды

Величина давления возрастает от начала сердечного цикла и достигает своего максимума к концу систолы (0,33 с). Далее наблюдается пологий спад давления до нижнего (диастолического) значения. Снижение давления происходит значительно медленнее, чем его повышение. Причина этого заключается в наличии емкостного элемента в модели кровеносной системы (6.50): в течение систолы он накапливает часть изгнанного объема крови, которая затем во время диастолы проталкивается в периферические сосуды. Незначительные колебания, накладывающиеся на график, объясняются отражением пульсовой волны на периферии артериального дерева; этот эффект также обеспечивается замыканием отрезка артерии упругим резервуаром.

Диссипация энергии потока вследствие наличия у жидкости вязкости вызывает небольшое падение амплитуды давления (см. рис. 8.2) на выходе (пунктирная линия) по сравнению с входом (сплошная линия). Величина падения составляет примерно 2–3 % на расчетном участке длиной 30 см. Форма кривых давления, зарегистрированных на входе и выходе, почти одинакова, но та из них, что находится ниже по потоку, чуть запаздывает по времени. При численном анализе результатов выясняется, что сдвиг пиков давления составляет 0,02–0,04 с. Такая малая величина объясняется высокой скоростью распространения пульсовой волны (5–7 м/с) по сравнению со скоростью потока (~0,5 м/с).

Распределение продольной скорости потока во времени представлено на рис. 8.3.

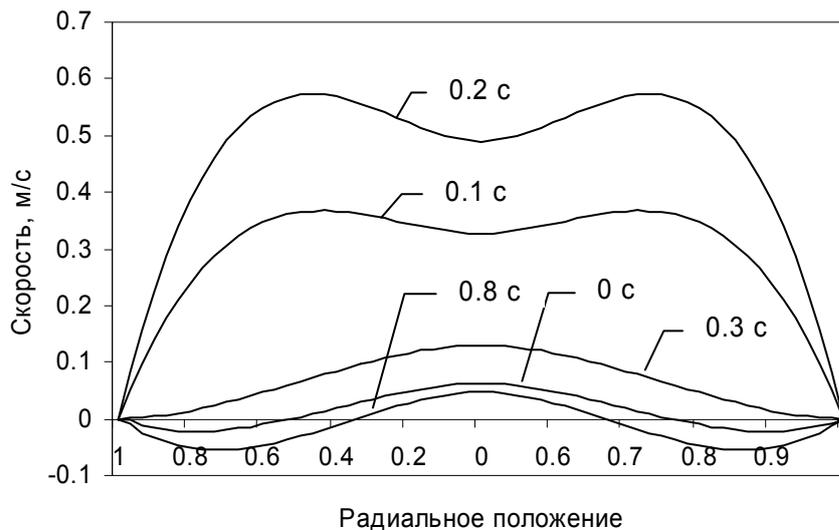


Рис. 8.3. Изменение профиля осевой скорости с течением времени в пределах одного сердечного цикла (1 с). Радиальное положение выражено в относительных единицах

При использовании различных зависимостей для W , учитывающих (6.42) и не учитывающих (6.43) толщину стенки сосуда, существенных различий в профилях скорости не наблюдалось. Так как кровоток зависит от градиента давления, а не от его абсолютной величины, пульсирующее давление обуславливает пульсирующий характер кровотока, то есть изменение его скорости в различные фазы сердечного цикла. Прямое движение крови начинается в момент открытия аортального клапана вместе с изгнанием крови из желудочка. Во время фазы систолы абсолютная величина продольной скорости растет. После достижения максимума 58 см/с происходит постепенный спад скорости и после конца систолы ($\sim 0,4$ с) у стенок сосуда кровь начинает двигаться в обратную сторону, в то время как в центральной области поток все еще положителен. Скорость противотока достигает 10 см/с, т. е. примерно $1/5$ – $1/6$ максимума при пике потока во время систолы. Явление обратного течения объясняется тем, что скорость распространения пульсовой волны превышает скорость кровотока. Поэтому в какой-то момент времени давление в дистальном участке превышает давление в проксимальном отделе; как следствие, образуется отрицательный градиент давления, что и вызывает обратный кровоток.

Отражение пульсовой волны от периферии артериального дерева и упругое колебание стенок сосуда после прохождения положения равновесия сказываются также и на колебаниях величины осевой скорости, и, как следствие, – на напряжении сдвига (рис. 8.4).

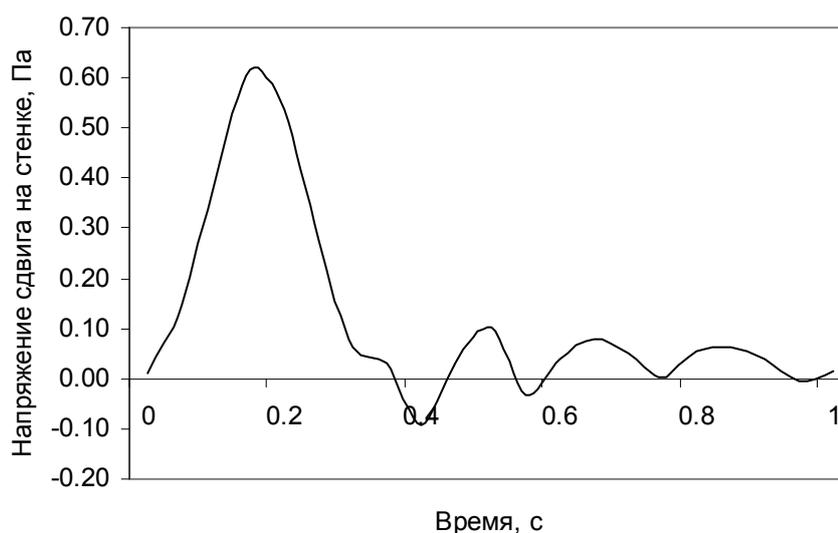


Рис. 8.4. Изменение напряжения сдвига на стенке сосуда с течением времени в пределах одного сердечного цикла

Из рис. 8.4 видно, что наибольшим тангенциальным нагрузкам со стороны потока стенка сосуда подвергается, как и следовало ожидать, во время максимального потока, и этот пик превышает в 6 раз значение скорости сдвига, достигаемой во время диастолы.

Проведенные численные исследования позволили также оценить границы применения формулы (6.43) вместо уравнения (6.42) при изучении распространения волны давления в прямом сосуде. В виде количественной характеристики использовалась среднеквадратическая ошибка на дискретном множестве m точек вида

$$\bar{\sigma}^2 = \frac{1}{m} \sum_{k=0}^m [p_A(t_k) - p_B(t_k)]^2, \quad (8.1)$$

где индексы А и В относятся к значениям давления, вычисленным с использованием формул (6.42) и (6.43).

Приближенная модель стенки сосуда как тонкостенного цилиндра дает удовлетворительные результаты только в случаях, когда величина $\delta = (R_{0e} - R_{0i})/R_{0i}$ достаточно мала. Из табл. 8.1 видно, что при увеличении относительной толщины стенки сосуда наблюдается нелинейный рост погрешности. Для $\delta \geq 1/6$ величина погрешности превышает 10 %. Поэтому в данной работе при изучении потока крови в крупных кровеносных сосудах (например, в аорте, где $\delta = 1/6$) для получения более точных результатов применялось уравнение состояния стенки (6.42).

Таблица 8.1. Среднеквадратическая ошибка σ , отнесенная к среднему за период давлению P_{cp} , на временном интервале $[0, 1]$, для значений давления p в зависимости от относительной толщины стенки δ

δ	1/10	1/9	1/8	1/7	1/6	1/5
$\bar{\sigma}/P_{cp}$	$1,440 \cdot 10^{-2}$	$1,562 \cdot 10^{-2}$	$2,116 \cdot 10^{-2}$	$4,371 \cdot 10^{-2}$	$11,35 \cdot 10^{-2}$	$28,31 \cdot 10^{-2}$

8.2. Влияние начального продольного натяжения

В современных исследованиях стенка сосуда моделируется упругим или вязкоупругим тонкостенным цилиндром [51, 83]. Однако для крупных кровеносных сосудов относительная толщина стенки равна примерно 1/6, что не позволяет считать данное приближение удовлетворительным. Также в большинстве работ, посвященных течению крови в артериях, игнорируется тот факт, что сосуды *in vivo* подвержены

натяжению, величина которого в среднем составляет 1,2–1,8 длины в свободном состоянии.

Данный раздел посвящен исследованию влияния на поток жидкости начального натяжения сосудов.

Численные исследования проводились для трех моделей кровеносного сосуда. Первая (6.44) была предложена в статье [123] для грудной артерии собаки (модель А). Вторая (6.45) использовалась в статье [60] для брюшной аорты человека (модель В). Третья (6.46) применялась в работе [27] для грудной артерии кролика (модель С).

Для всех трех случаев геометрические параметры исследуемого участка сосуда, а также физиологические свойства крови полагались одними и теми же. Используемые данные: $\rho = 1060 \text{ кг/м}^3$ – плотность крови; $\mu = 4 \cdot 10^{-3} \text{ Па}\cdot\text{с}$ – вязкость крови; $L = 100 \text{ см}$ – длина участка артерии; $R_{0i} = 6,0 \text{ мм}$ – внутренний радиус артерии; $h = 1,0 \text{ мм}$ – толщина стенки сосуда; $M = 100$ – число разбиений исследуемого участка по оси сосуда; $N = 5$ – количество функций Галеркина в разложении продольной скорости; $Q_{\max} = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3/\text{с}$ – максимум входного потока; $T = 0,03 \text{ с}$ – длина импульса входного потока; $P_0 = 80 \text{ мм рт. ст.} = 10,6 \text{ кПа}$ – начальное давление, которому подвержен сосуд.

Как видно, относительная толщина стенки взята равной 1/6 (именно такое отношение наблюдается в большинстве крупных кровеносных сосудов млекопитающих), что не позволяет получить результаты с достаточной точностью при применении модели тонкостенного сосуда. Поэтому использовалась модель сосуда с толстой стенкой. Порядок разложения N выбирался как компромисс между точностью вычислений и временем счета.

Для исследования влияния натяжения сосуда на поток крови в нем расчеты проводились для значений относительного удлинения сосуда от 1,0 (сосуд не растянут) до 1,8.

Изучение влияния начального натяжения сосуда на поток крови в нем проводилось на примере прохождения волны давления, вызванной очень коротким (30 мс) импульсом потока на входе в исследуемый участок. Противоположный конец сосуда закрыт отражающей плоскостью. Таким образом, данная модель эквивалентна закрытой гиперупругой цилиндрической трубке, заполненной вязкой жидкостью, волна давления в которой вызывается вдвигаемым поршнем.

Трехмерный график распространения волны вдоль сосуда приведен на рис. 8.5.

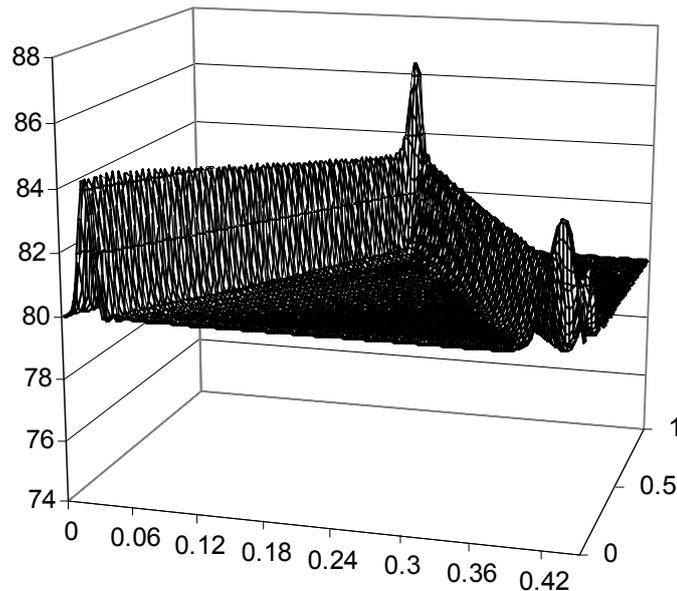


Рис. 8.5. График распространения волны давления вдоль сосуда с течением времени (модель В)

Импульс потока вызывает возмущение давления, которое проходит вдоль сосуда со скоростью 5,05 м/с. Примерно через 0,2 с волна достигает его конца, полностью отражается и возвращается обратно. Здесь она снова полностью отражается, так как начало сосуда тоже считается закрытым. С прохождением вдоль сосуда амплитуда волны давления постепенно снижается вследствие потерь энергии на преодоление вязкости жидкости, уменьшаясь к концу первой секунды в 2,5 раза (с 4 до 1,5 мм рт. ст.). Форма волны при этом остается практически неизменной.

При увеличении λ_x от 1,0 до 1,4 (это значение близко к величине растяжения брюшной аорты человека *in vivo*) происходят изменения скорости распространения и амплитуды волны давления.

На рис. 8.6 сплошными линиями изображены профили волны давления для той же модели через 0,06; 0,10; 0,14; 0,18 и 0,22 с после начального импульса для нерастянутого сосуда; пунктирной линией показаны профили волны давления в те же моменты времени при $\lambda_x = 1,4$. Наблюдается увеличение амплитуды волны давления почти на 50 % с одновременным замедлением скорости ее распространения.

Достаточно большая длина исследуемого сосуда не позволяет отраженной волне исказить форму исходной волны. Поэтому значения скорости волны, вычисленные для фиксированных участков ее фронта

(например, для подножия), можно использовать в качестве меры собственной скорости распространения волны давления в артериях.

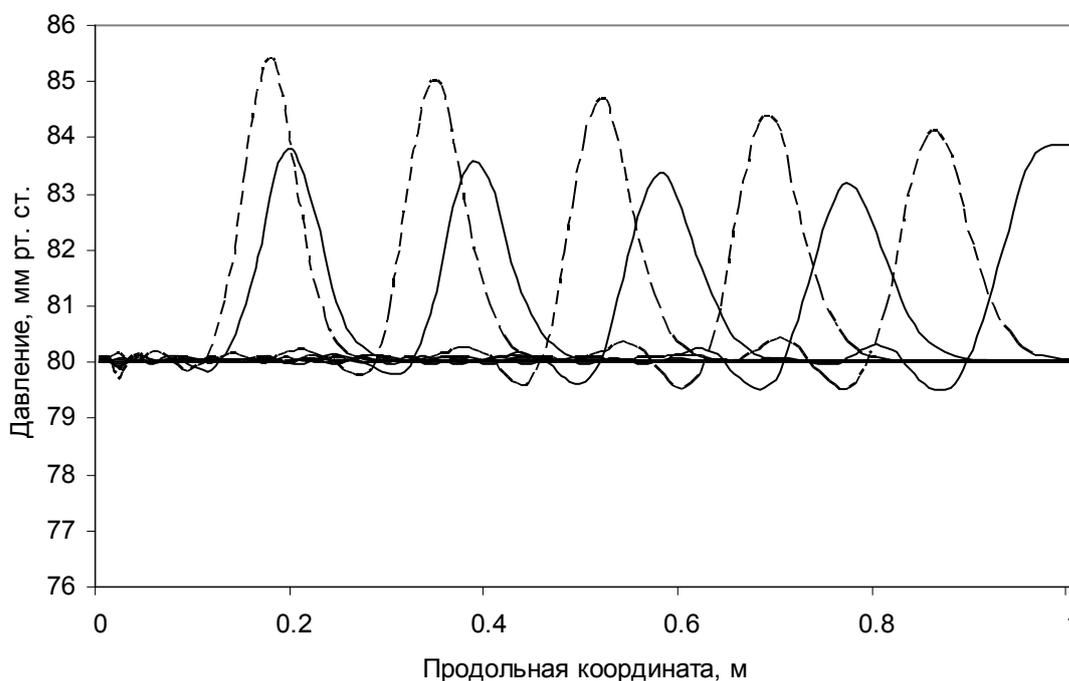


Рис. 8.6. Давление как функция продольной координаты в различные моменты времени (0,06; 0,10; 0,14; 0,18 и 0,22 с) для нерастянутого ($\lambda_x = 1,0$, сплошные линии) и растянутого ($\lambda_x = 1,4$, пунктирные линии) сосудов. Использована модель В

На рис. 8.7 приведены изменения скорости волны давления C_0 при увеличении продольного натяжения от 1,0 до 1,8. Характерно, что для всех трех используемых функций потенциальной энергии скорость C_0 падает. Наиболее заметен этот эффект для модели А (грудная артерия собаки). Если для нерастянутого сосуда $C_0 = 4,26$ м/с, то при $\lambda_x = 1,8$ скорость распространения давления уменьшается до 2,16 м/с, т. е. почти в два раза.

Падение скорости распространения волны давления объясняется увеличением податливости сосуда с ростом λ_x при одном и том же начальном внутреннем давлении. Податливость прямо пропорциональна приросту площади поперечного сечения трубки dS и обратно пропорциональна приросту трансмурального давления dP на данном участке

$$D = \frac{1}{S} \frac{dS}{dP}.$$

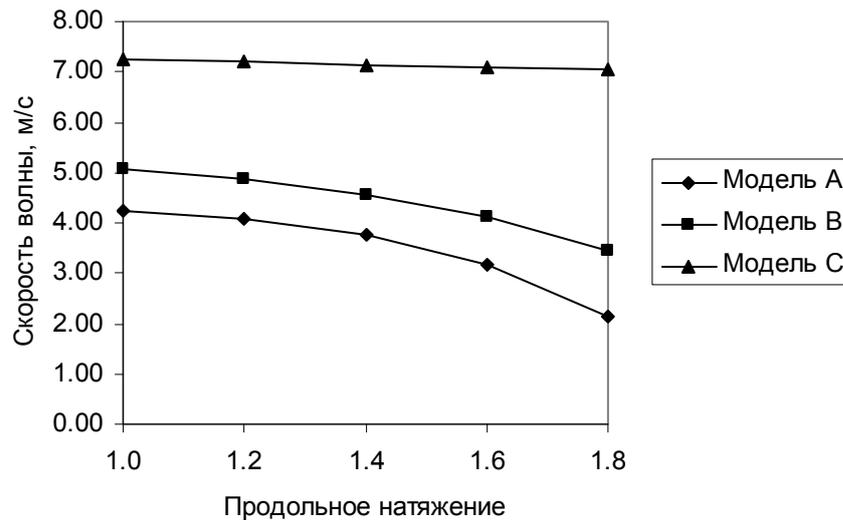


Рис. 8.7. Изменение скорости волны давления с изменением величины продольного натяжения

Уменьшение скорости волны давления при растяжении сосуда согласуется с результатами, полученными при использовании метода характеристик для анализа распространения волны давления в податливой трубке, содержащей несжимаемую невязкую жидкость [32].

Важной характеристикой потока является величина напряжения сдвига на стенке сосуда. Экспериментами подтверждено, что области с пониженным напряжением сдвига хорошо коррелируются с участками, имеющими поврежденный эндотелий. Наличие таких областей ведет к образованию жировой прослойки на стенках сосуда и в итоге – к атеросклерозу.

График, представляющий зависимость величины напряжения сдвига от начального продольного натяжения, изображен на рис. 8.8. Видно, что при значениях натяжения от 1,2 до 1,6, характерных для большинства сосудов, амплитуда напряжения сдвига меняется незначительно (менее 5 %) для артерии собаки (модель А) и грудной артерии кролика (модель С), а для брюшной аорты человека ее увеличение составило более 75 %.

При увеличении λ_x амплитуда напряжения сдвига (рис. 8.9) возрастает нелинейно. Вместе с тем смещаются по времени пики напряжения сдвига вследствие изменения скорости потока.

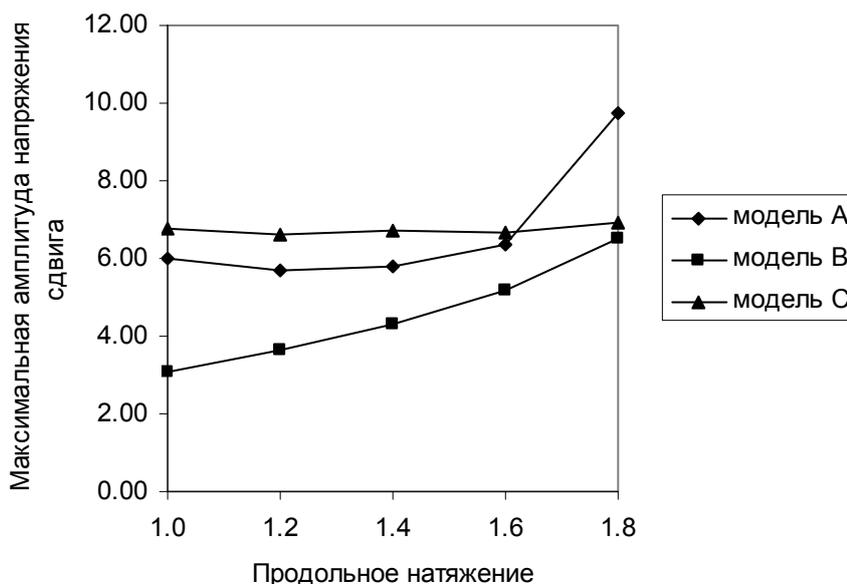


Рис. 8.8. Изменение максимальной амплитуды напряжения сдвига с изменением величины продольного натяжения

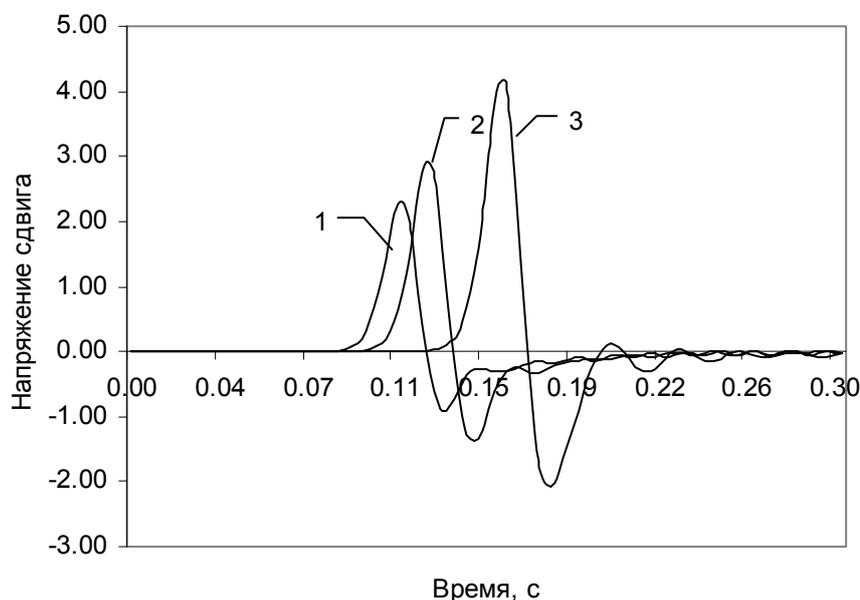


Рис. 8.9. Напряжение сдвига на стенке сосуда (модель В) как функция времени для нерастянутого и растянутого в продольном направлении сосудов. График 1 соответствует $\lambda_x = 1,0$; графики 2 и 3 – $\lambda_x = 1,4$ и $1,8$

Как видно из рис. 8.10, для модели В растяжение сосуда в 1,8 раза влечет за собой увеличение максимальной скорости потока более чем в 3 раза. Профиль скорости становится значительно более плоским с

уменьшением толщины пограничного слоя, что объясняет увеличение напряжения сдвига на стенке сосуда.

Обращает на себя внимание также то, что для моделей А и С небольшое растяжение сосуда приводит к уменьшению скорости потока с минимумом в области натяжения, испытываемого сосудом *in vivo*, и лишь после превышения этой отметки начинается ее постепенный рост.

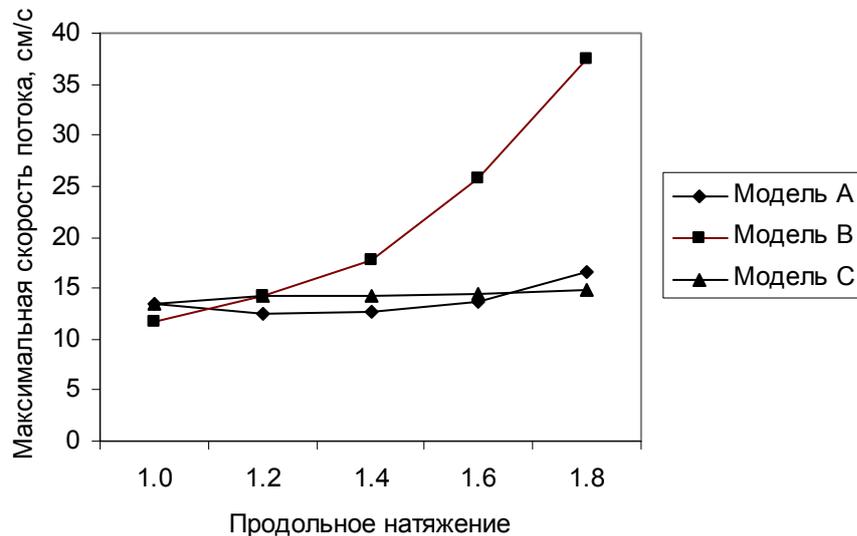


Рис. 8.10. Зависимость максимальной скорости потока от продольного натяжения

В данном разделе оценен эффект влияния начального продольного натяжения сосуда на характеристики потока вязкой жидкости в гиперупругих толстостенных цилиндрах. Для исследования использовались три различные функции удельной потенциальной энергии деформации сосуда, предложенные в работах [27, 60, 123]. Из представленных результатов следует, что влияние начального натяжения λ_x на поток в значительной мере зависит от материала сосуда, и поэтому нет единой закономерности, которая описывала бы поведение сосуда и жидкости в нем. Тем не менее, изменение продольного натяжения сосуда способно оказать значительное влияние на характеристики потока. Этот эффект особенно проявляется для сосуда с функцией потенциальной энергии, описывающей упругие свойства брюшной аорты человека. Пренебрежение степенью продольного натяжения в отдельных случаях может привести к серьезным искажениям результатов и недооценке значений таких важных параметров, как напряжение сдвига на стенке сосуда, продольная скорость потока и скорость волны давления.

При проверке разработанной теории было проведено сопоставление с данными, представленными в статье [51]. Сравнение проводилось для потенциала (6.44), толщина стенки принималась равной 0,5 мм при

радиусе сосуда в ненапряженном состоянии 3,5 мм. Начальное давление считалось равным 13 мм рт. ст., что соответствует $\lambda_0 = 1,2$. Выводы, изложенные в разделе 7.2, свидетельствуют о близости значений известных решений и полученных результатов при использовании упрощенной зависимости «давление–радиус» (6.43). Привлечение более точной зависимости (6.42) дает значение скорости волны давления, отличающееся примерно на 10 % во всем диапазоне наиболее вероятных натяжений сосуда (рис. 8.11). Таким образом, для получения более достоверных результатов необходимо использовать математическую модель, учитывающую эффекты, связанные со значительной толщиной стенки сосуда.

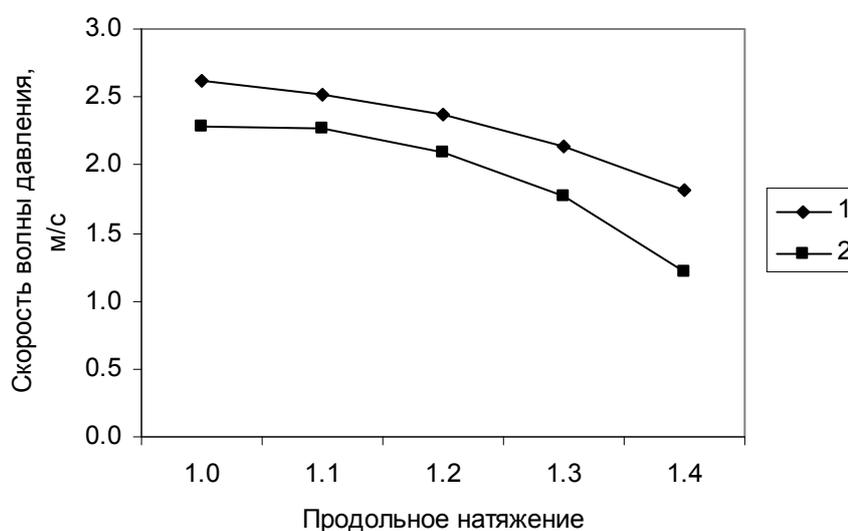


Рис. 8.11. Сравнение значений скорости волны давления в стенке сосуда для различных зависимостей «давление–радиус». График 1 отображает данные, полученные с помощью представленной теории, график 2 взят из статьи [51]

8.3. Анализ влияния стеноза

На протяжении последних двух десятилетий уделяется особое внимание исследованиям течения крови в области локального стеноза (сужения просвета) крупных кровеносных сосудов. Одна из главных причин интенсивного изучения данной задачи заключается в том, что возмущения потока, вызванные атеросклерозом, могут иметь диагностическое значение при выявлении патологических зон. Изменения в геометрии сосуда, возникшие в результате локального утолщения стенки артерии, ведут к возмущению скорости потока вблизи стеноза. С помощью неинвазивных технологий, например, ультразвуковой диагностики, есть возможность определить место, где профиль скорости

претерпевает изменения, и соответственно область вероятного возникновения атеросклероза. Дальнейший прогресс в развитии высокоточных измерителей позволит установить пораженные зоны еще на ранних стадиях развития заболевания и предпринять курс лечения во избежание перехода заболевания в тяжелую стадию.

Несмотря на то, что исследованиям течения в условиях стеноза уделялось довольно большое внимание, по-прежнему недостаточно хорошо изучены тонкости распределения скорости потока и напряжения сдвига на внутренней поверхности сосуда. Большинство теоретических и экспериментальных исследований не принимают во внимание тот факт, что стенка артерии обладает упругими свойствами и достаточно большой относительной толщиной. Для исследований применяются также одномерные модели, которые не позволяют получить подробную информацию о движении крови и взаимодействии стенок сосуда с потоком внутри него.

В данной главе использована более точная математическая модель, позволяющая учитывать продольное растяжение артерии и толщину ее стенки. Геометрические и физические параметры сосуда соответствуют грудной артерии кролика.

Сегмент артерии моделируется как толстостенный цилиндр с круговым сечением из ортотропного, однородного несжимаемого гиперупругого материала. Продольное движение стенки не учитывается. Толщина стенки есть функция продольной координаты, следовательно, податливость стенки и величина просвета меняются вдоль сосуда. Предполагается, что изучаемый сегмент является осесимметричным и прямолинейным, так что исследование ограничено достаточно коротким отрезком сосуда, не слишком близким к точкам бифуркации. Несмотря на то, что *in vivo* наблюдается постепенное сужение артерий в периферическом направлении, мы можем пренебречь данным фактом, если ограничимся достаточно коротким участком сосуда, на котором относительная величина сужения является малой.

Математическая модель может быть значительно упрощена предположением, что течение является двухмерным, т. е. присутствуют только продольная и осевая компоненты скорости.

Исходя из того, что задача остается осесимметричной при влиянии физиологических нагрузок, используем модель, описанную в главе 6.

Поскольку материал сосуда является несжимаемым, то $\lambda_\theta \lambda_x \lambda_r = 1$, и можно записать $\lambda_{\theta e}$ как функцию $\lambda_{\theta i}$

$$\lambda_{\theta e} = \sqrt{\lambda_x^{-1} \left[-\left(\frac{h(x)}{R_{0e}} \right)^2 + 2 \left(\frac{h(x)}{R_{0e}} \right) \right] + \left(1 - \frac{h(x)}{R_{0e}} \right)^2 \cdot \lambda_{\theta i}^2}. \quad (8.2)$$

Величина λ_x считается неизменной, в то время как толщина сосуда в ненапряженном состоянии $h(x)$ меняется вдоль сосуда для моделирования локального утолщения внутреннего слоя стенки сосуда.

Исходная задача сводится к интегрированию (6.23) и (6.21) относительно w и a по t и x . Соотношения (6.42) и (8.2) замыкают формулировку задачи. Поскольку полученная система является нелинейной и зависящей от времени, был применен численный метод решения, изложенный в главе 2.3, состоящий в разложении неизвестных функций в ряд Галеркина по радиальной координате (использованы ортонормированные полиномы четной степени) и приближении частных производных по осевой координате конечно-разностным методом. Интегрирование системы по времени производилось методом «предсказание–коррекция» четвертого порядка точности с автоматическим выбором величины шага.

Для моделирования кровеносной системы вне рассматриваемого участка сосуда была использована модель, изображенная на рис. 8.12.



Рис. 8.12. Условия на входе и выходе исследуемого участка сосуда

На входе в сосуд задается периодическая функция потока Q по формуле (6.49). Достаточно небольшая длина исследуемого участка артерии (20 см) позволяет считать податливость C и периферическое сопротивление R кровеносной системы одинаковыми на входе и выходе и равными $1,1 \cdot 10^{-10} \text{ м}^3 \cdot \text{Н}^{-1}$ и $1,2 \cdot 10^9 \text{ Н} \cdot \text{с} \cdot \text{м}^{-5}$ соответственно.

Моделирование стеноза выполняется в центральной части сосуда утолщением внутреннего слоя стенки артерии

$$h(x) = \begin{cases} h_0 + K_s R_{0i} \left(\cos \left(\left(x - \frac{L_0}{2} \right) \cdot \frac{2\pi}{L_s} \right) + 1 \right), & \frac{L_0 - L_s}{2} \leq x \leq \frac{L_0 + L_s}{2}, \\ h_0 & \text{иначе} \end{cases}$$

где h_0 – толщина стенки в ненапряженном состоянии; K_s – коэффициент стеноза; R_{0i} – внутренний радиус сосуда в ненапряженном состоянии; L_0 – длина сосуда в ненапряженном состоянии; L_s – длина области утолщения, принятая равной 10 % от длины сосуда.

Продольное сечение цилиндрического сосуда с локальным осесимметричным утолщением стенки изображено на рис. 8.13.

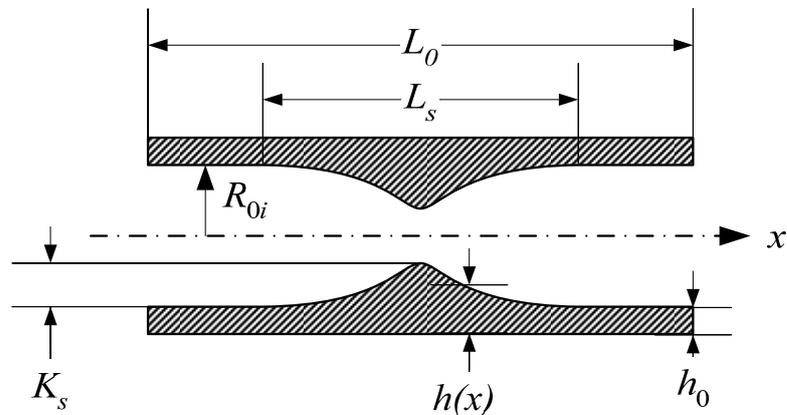


Рис. 8.13. Осесимметричное утолщение стенки цилиндрического сосуда

Исследования влияния стеноза на поток крови в артерии проводились для различных величин сужения просвета сосуда: уменьшение площади просвета составляло 5, 10, 20, 30 %, т. е. рассматривалось легкое и среднее поражение стенок сосуда атеросклерозом. Число Рейнольдса в исследуемой конфигурации системы не превышало предельно допустимой величины ($Re_{кр} = 2000 \dots 2300$) для ламинарного течения.

Для указанных условий влияние стеноза на проходящую волну давления пренебрежимо мало. При наиболее сильном уменьшении площади просвета в 30 % падение давления сразу после систолы не превышает 0,5 %. Варьирование степени стеноза в указанных пределах практически не изменяет величины падения давления, что согласуется с исследованиями [112].

Влияние небольшого сужения просвета сосуда на поток крови в нем является локальным. Профиль продольной скорости на удаленном от просвета участке (рис. 8.14) не претерпевает заметных изменений, и

распределения скорости в начальной и конечной области изучаемого участка сосуда совпадают.

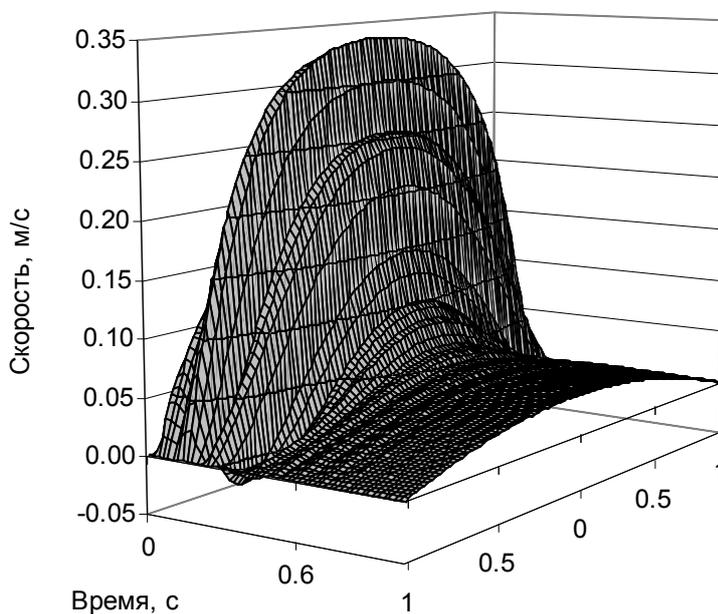


Рис. 8.14. Изменение профиля продольной скорости вдали от стеноза

Небольшие колебания, накладывающиеся на профиль скорости, обуславливаются отражением волны давления от периферии кровеносной системы.

В отличие от отдаленных участков сосуда, вблизи утолщения стенки наблюдается достаточно сильное возмущение кровеносного потока, что соответствует экспериментальным наблюдениям [112, 139]. В фазе систолы во время пика скорости потока кровь в области стеноза получает дополнительное ускорение из-за сужения сосуда (рис 8.15, а). В области стеноза, предшествующей его максимальному значению, скорость частиц жидкости, расположенных вблизи оси симметрии сосуда, слегка уменьшается, в то время как скорость частиц вблизи стенок увеличивается таким образом, что поток через поперечное сечение остается прежним в соответствии с законом сохранения массы. В пост-стенозной зоне, наоборот, дополнительное ускорение получают частицы вблизи центральной оси артерии, так что профиль продольной скорости становится более похожим на параболу (рис 8.15, б).

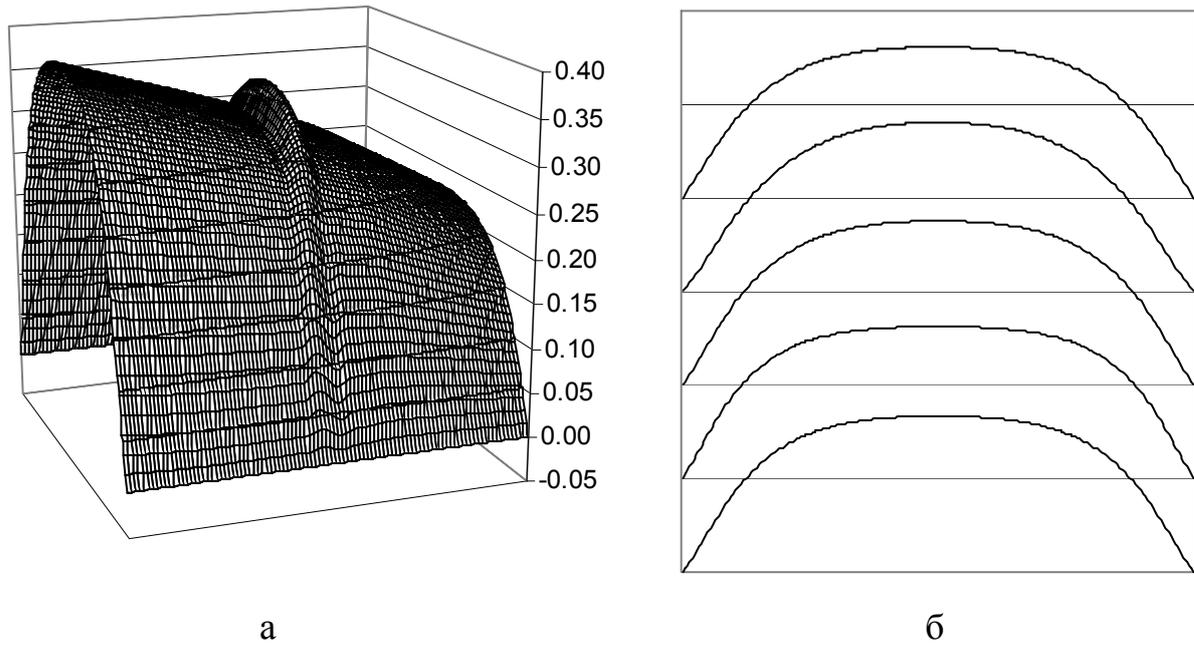


Рис. 8.15. Продольная скорость как функция осевой координаты во время систолы: а – трехмерная картина распределения скорости; б – сравнение профилей в районе стеноза

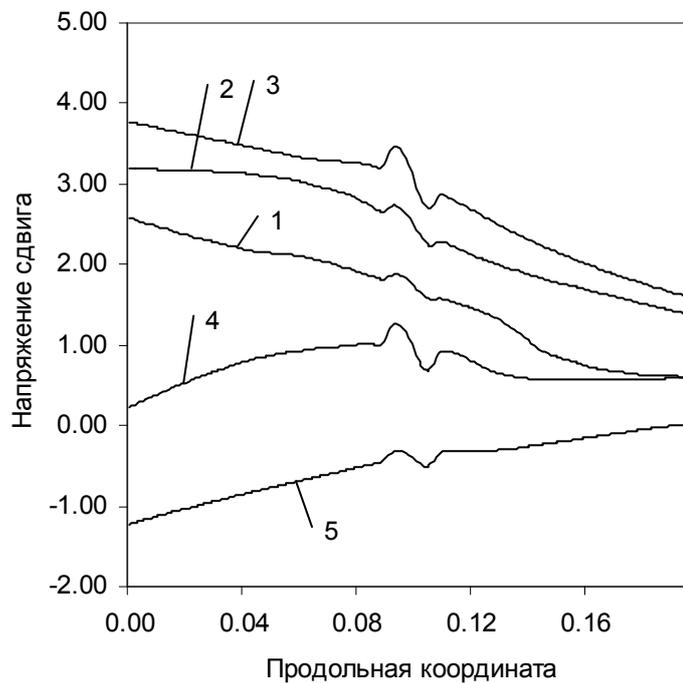


Рис. 8.16. Безразмерное напряжение сдвига на стенке сосуда для различных моментов времени: 1 – 0,09 с; 2 – 0,13 с; 3 – 0,16 с; 4 – 0,25 с; 5 – 0,33 с

Влияние сужения сосуда проявляется не только в распределении продольной скорости, но также в картине напряжения сдвига на стенке. В

области, непосредственно предшествующей стенозу, частицы жидкости с более высокой скоростью располагаются ближе к стенке, наклон профиля скорости возрастает, и напряжение сдвига соответственно увеличивается. После прохождения наиболее узкого участка напряжение сдвига падает из-за сглаживания профиля скорости (рис. 8.16). За областью локального утолщения стенки величина напряжения снова увеличивается, достигая прежней величины перед входом в стеноз.

В остальной части исследуемого сосуда картина распределения напряжения сдвига не отличается от обычной для цилиндрического податливого сосуда. Максимальное значение напряжения сдвига достигается одновременно с максимумом потока (систолический пик).

После систолического пика (0,16 с) скорость кровеносного потока начинает уменьшаться, и знак градиента давления меняется на противоположный (рис. 8.17, а). Частицы жидкости, находящиеся вблизи стенки сосуда, обладают меньшим количеством движения и первыми начинают двигаться в обратную сторону (рис. 8.17, б). Поскольку в пост-стенозной зоне скорости меньше, именно в этой области начинается противоток. В момент начала противотока жидкость в области перед сужением все еще продолжает двигаться вперед; направленный назад градиент только замедляет жидкость в ядре потока и, в конце концов, все частицы жидкости приобретают отрицательную продольную скорость.

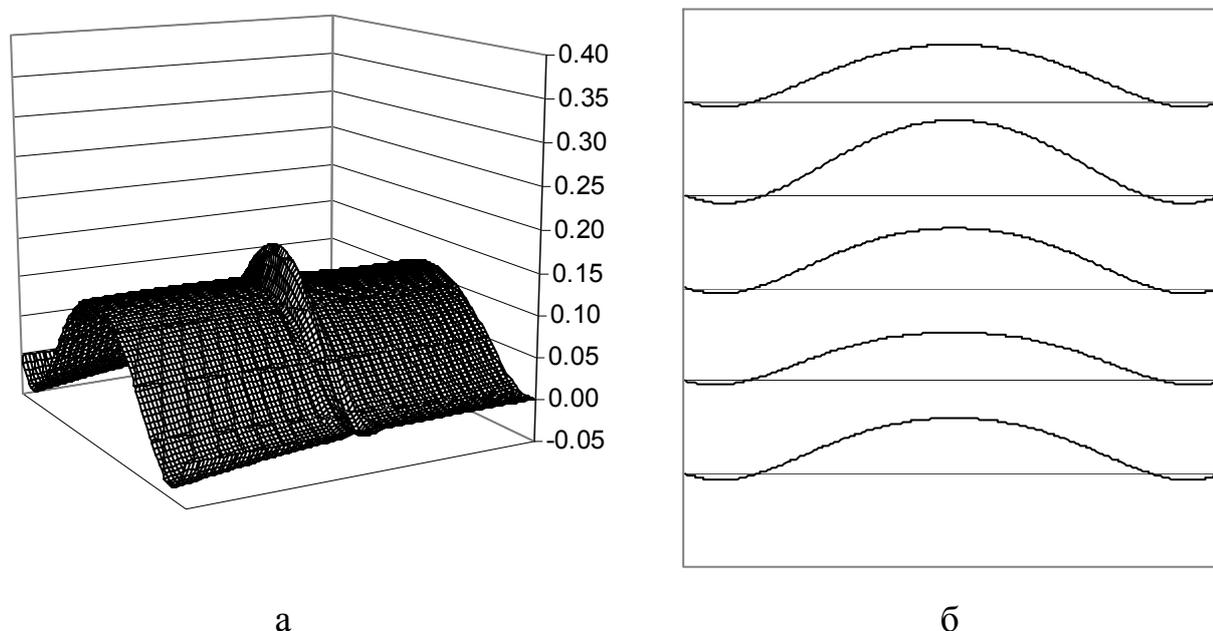


Рис. 8.17. Продольная скорость как функция продольной координаты во время диастолы и начала противотока: а – трехмерная картина распределения скорости; б – сравнение профилей в районе стеноза

При изменении знака продольной скорости изменяется и напряжение сдвига на стенке: оно становится отрицательным. Нужно также отметить, что напряжение сдвига принимает отрицательные значения в то время, когда поток положителен.

Наличие возвратного течения обуславливает разделение потока и возникновение вихря в малой области за сужением.

Дальнейшее распространение волны характеризуется постепенным спадом величины скорости с сохранением параболического профиля скорости и исчезновением противотока.

При увеличении степени стеноза происходит возрастание скорости, достигаемой жидкостью в момент прохождения точки сужения: уменьшение площади просвета сосуда на 30 % приводит к ускорению потока более чем на 20 % по сравнению с 5 % стенозом (рис. 8.18). Вместе с тем становится заметна разница между профилями скорости крови до и после стеноза: чем более близким к параболе он становится после прохождения сужения, тем более плоским он становится в предстенозной области, а на трехмерном графике появляется характерный провал перед всплеском скорости (рис. 8.18). Это влечет за собой значительный рост амплитуды напряжения сдвига на стенке кровеносного сосуда (рис. 8.19).

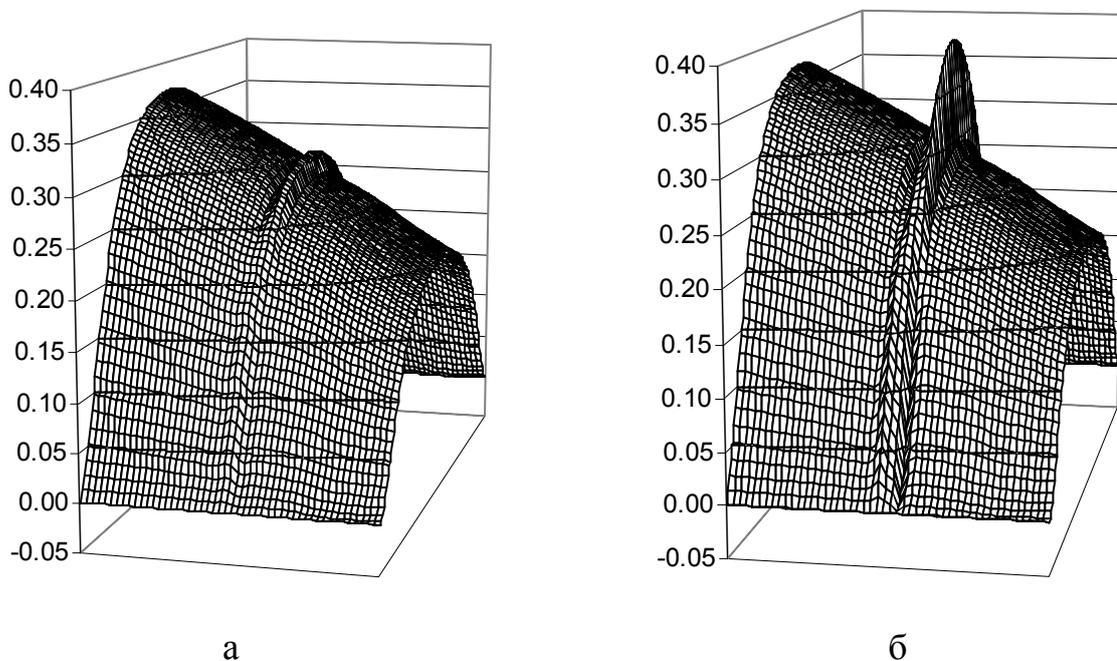


Рис. 8.18. Влияние степени стеноза на профиль продольной скорости:
а – стеноз 5 %, б – 30 %

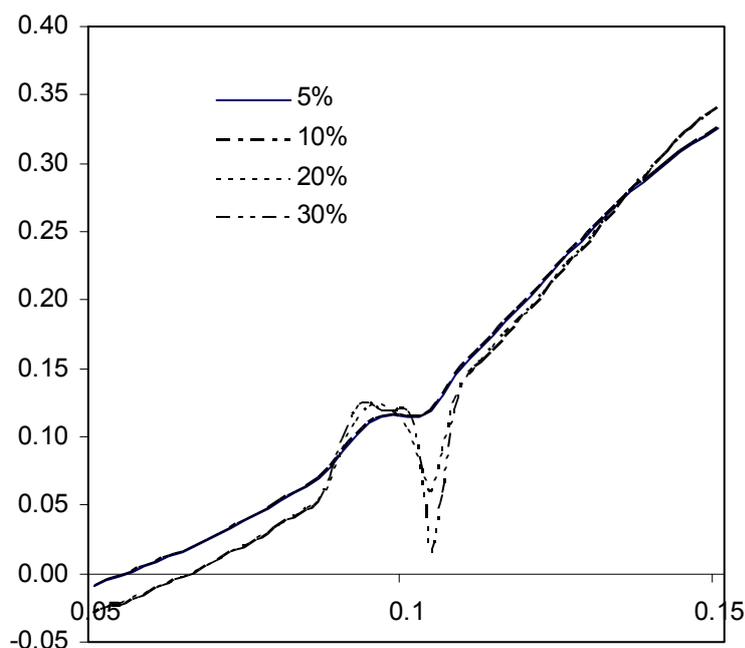


Рис. 8.19. Изменение напряжения сдвига с увеличением степени стеноза (диастола)

Геометрия артерии оказывает значительное влияние на характеристики потока крови: локальное уменьшение просвета сосуда в значительной степени изменяет поле скоростей. Представленное в этом разделе исследование было направлено на изучение гемодинамики в начальной стадии атеросклероза, когда в артерии наблюдается незначительное местное сужение просвета сосуда. Достаточно важным является изучение характеристик потока для определения патологических зон на ранней стадии развития заболевания. Более того, необходимость изучения стеноза на его ранней стадии подчеркивалась в предыдущих работах, так как экспериментальные исследования наводят на мысль, что на возникновение и развитие атеросклероза оказывают влияние не только биологические факторы, но также и механическое воздействие крови на стенки сосуда. Внутренняя оболочка артерий настолько тонкая, что она очень чувствительна к изменениям напряжения сдвига. Повреждение эндотелия ведет к нарушению метаболизма артериальной стенки и возникновению атеросклеротических бляшек.

Возникновение стеноза влечет за собой значительные изменения в распределениях скоростей и напряжений в области вблизи стеноза; эти эффекты возрастают с увеличением степени стеноза. На основании полученных результатов можно предположить, что возникновение локального утолщения интимы приводит к постепенному росту стеноза, так как наиболее благоприятные условия для роста жировой прослойки

наблюдаются в зонах с пониженным напряжением сдвига. Таким образом, атеросклеротические процессы имеют тенденцию к саморазвитию.

8.4. Анализ влияния изменения физических характеристик стенки сосуда

Знание состояния кровеносных сосудов имеет не только теоретическое значение. Изучение механизма возникновения таких патологий, как атеросклероз и гипертония, может быть полезным в кардиологической практике и при разработке новых методов лечения. Целью данного раздела является изучение изменения гемодинамики крупных кровеносных сосудов с возрастом на примере брюшной аорты человека.

Размеры и свойства крупных артерий зависят не только от их места в системе кровообращения и размеров тела, но и от возраста человека. Данные измерений на тканях человека свидетельствуют о том, что на протяжении жизни толщина стенки кровеносного сосуда и ее строение медленно меняются и что такие изменения отражаются на упругих свойствах. Понятно также, что сходные изменения артерий возникают и у млекопитающих других видов, хотя данные о них менее полны.

У растущего животного и человека толщина стенки крупных артерий постепенно увеличивается, что объясняется в основном утолщением и разрастанием эластических пластин средней оболочки. Этот процесс завершается с наступлением зрелости. Далее эластические элементы стенки начинают изнашиваться, фрагментироваться и могут подвергаться обызвествлению. Увеличивается количество коллагеновых волокон, которые замещают гладкомышечные клетки в одних слоях стенки и разрастаются в других. В целом это приводит к утолщению стенки, и она становится значительно менее растяжимой. Такое повышение жесткости затрагивает как крупные артерии, так и артерии среднего размера.

Для исследования течения крови в брюшной аорте человека использовалась математическая модель, изложенная в главе 6. Изучение производилось для двух возрастных групп (17–35 и 36–57 лет) с использованием потенциала (6.45).

Физиологические характеристики брались следующими: $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ – плотность крови; $\mu = 0,004 \text{ Н}\cdot\text{с/м}^2$ – ее вязкость; продольное натяжение сосуда $\lambda_x = 1,36$. Начальный внутренний радиус сосуда и толщина стенки: $R_{0i} = 8,34 \text{ мм}$, $H = 1,53 \text{ мм}$ – для младшей

возрастной группы; $R_{0i} = 7,96$ мм, $H = 1,78$ мм – для старшей; длина сосуда – 0,3 м.

Поскольку целью исследования является изучение изменения гемодинамики с возрастом, его влияние рассматривается при неизменном начальном радиусе и толщине стенки, соответствующих состоянию младшей возрастной группы, состоящей из пациентов 17–35 лет [число Уомерсли (6.12) равно в данном случае 4,69]. Возрастное ужесточение сосуда, вызванное, например, увеличением содержания кальция в материале стенки сосуда, приводит к тому, что в диапазоне наиболее вероятных радиальных удлинений потенциальная энергия упругого деформирования для старшей возрастной группы превышает в 2–4 раза эту же величину для молодых пациентов (рис. 8.20).

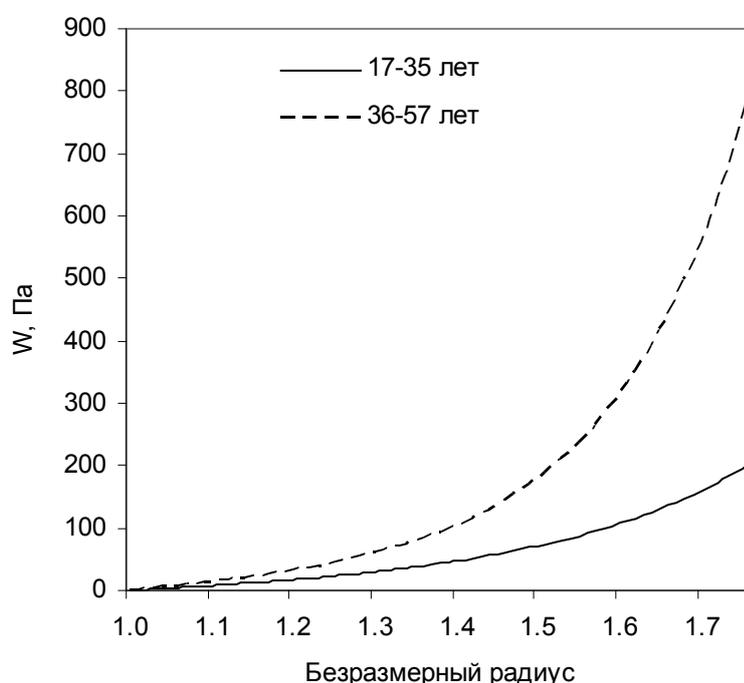


Рис. 8.20. Потенциальная энергия упругого деформирования для двух возрастных групп. Графики обозначают зависимости при начальном радиусе и толщине стенки, соответствующих младшей возрастной группе

Данное изменение характеристик стенок сосуда приводит к уменьшению просвета сосуда при неизменном входном потоке (количестве крови, поступающей из артериального дерева выше по течению), что, в свою очередь, влечет повышение артериального давления и развитие гипертонии (рис. 8.21).

Для старшей возрастной группы происходит увеличение систолического давления от 120 до 140 мм рт. ст. при практически неизменном диастолическом давлении, что полностью соответствует опытными данным.

Профиль падения давления остается таким же, как и у младшей возрастной группы, что объясняется постоянным тонусом резистивных сосудов (постоянной величиной сопротивления кровотоку, оказываемой сосудами, расположенными ниже по течению). Помимо увеличения амплитуды давления, наблюдается более сильное искажение картины его распределения во времени отраженными от периферии кровеносной системы волнами. Величина колебаний, накладывающихся на график, достигает 10 мм рт. ст. (7 %) для второй группы в отличие от 3–4 мм рт. ст. (3 %) – первой.

Сужение сосуда при постоянном среднем по времени кровотоке приводит, очевидно, к росту продольной скорости течения крови.

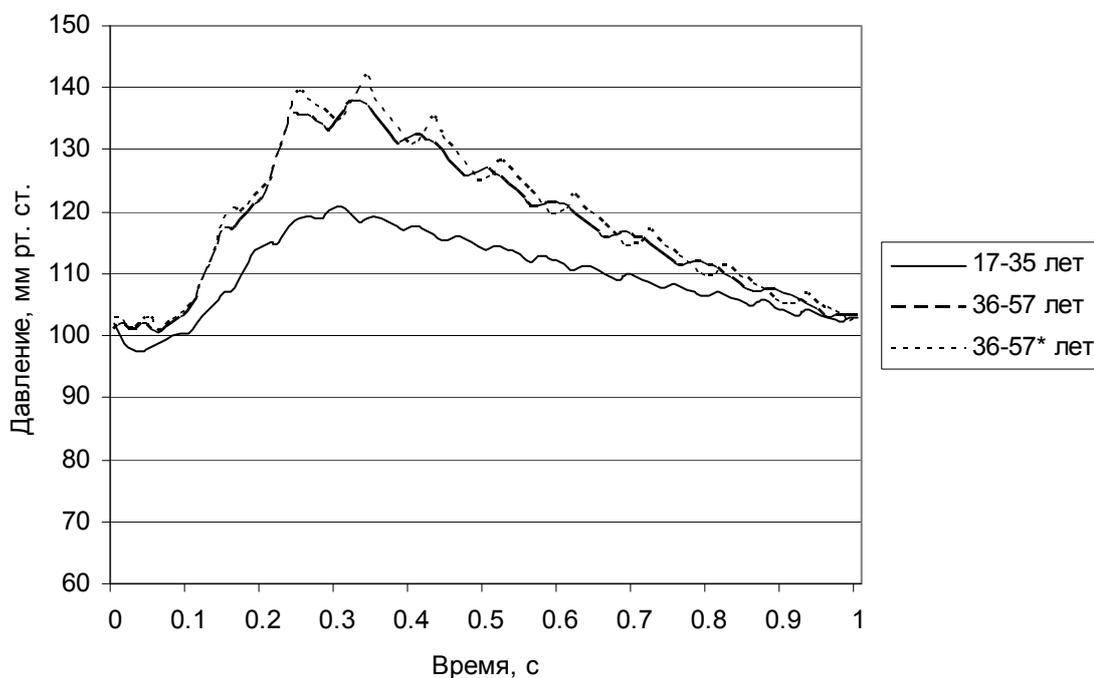


Рис. 8.21. Давление в сосуде в течение одного сердечного цикла для двух возрастных групп (звездочкой обозначен график зависимости для старшей возрастной группы при начальном радиусе и толщине стенки, наблюдаемых в ней *in vivo*)

На рис. 8.22 показано изменение величины скорости потока вблизи оси симметрии аорты для младшей и старшей возрастных групп при двух значениях начального радиуса и толщины стенки. Происходит постепенное увеличение максимального значения скорости с 27 до 39 см/с, т. е. более чем на 40 %. После систолического пика отмечается замедление потока, и во время диастолы его скорость составляет несколько сантиметров в секунду для обеих возрастных групп.

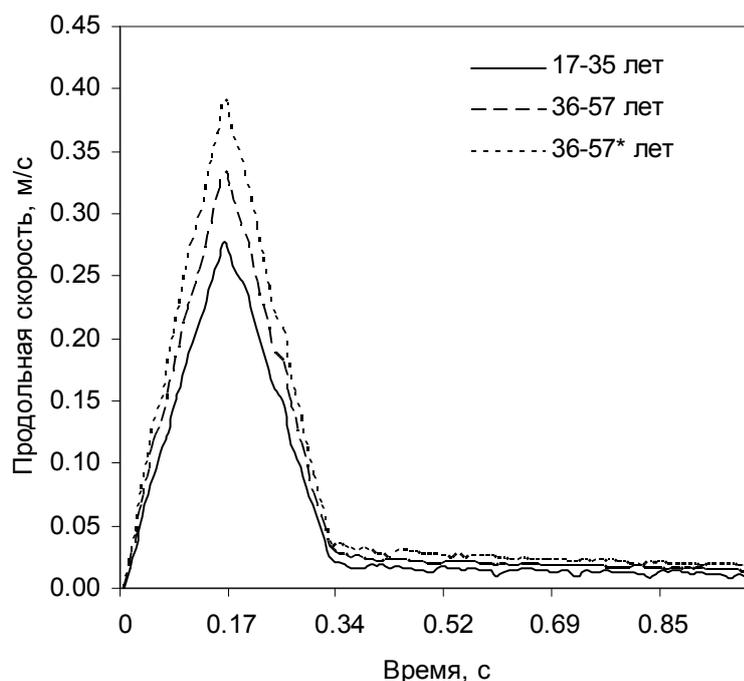


Рис. 8.22. Продольная скорость потока вблизи оси симметрии сосуда как функция времени для двух возрастных групп



Рис. 8.23. Изменение профиля осевой скорости с течением времени

В отличие от центрального потока, вблизи стенок сосуда наблюдается обратный ток крови (рис. 8.23) вследствие возникновения отрицательного градиента давления. Противоток усиливается от 6 до 8 см/с при переходе к более жесткой стенке. Несмотря на изменение

экстремумов продольной скорости потока, наклон ее профиля остается одним и тем же, так что величина нагрузки (напряжение сдвига на стенке), испытываемой внутренней поверхностью стенки аорты, остается неизменной.

Отдельно рассмотрим течение в условиях стеноза. Локальное утолщение стенки сосуда задается по закону косинуса и расположено в середине сосуда на протяжении 10 % длины исследуемого участка (0,03 м). Используемая математическая модель изложена в разделе 8.3 «Анализ влияния стеноза». Утолщение стенки влечет за собой локальное изменение ее упругих свойств.

По сравнению с неповрежденными участками сосуда, в области локального сужения просвета (внутрисосудистая обструкция) наблюдаются более серьезные изменения характеристик потока при изменении физических характеристик стенки сосуда. Исследуемый стеноз, составляющий всего 2 % от радиуса (уменьшающий просвет сосуда примерно на 4 %), вносит заметные искажения в функцию продольной скорости крови (рис. 8.24), сохраняющиеся для обеих возрастных групп.

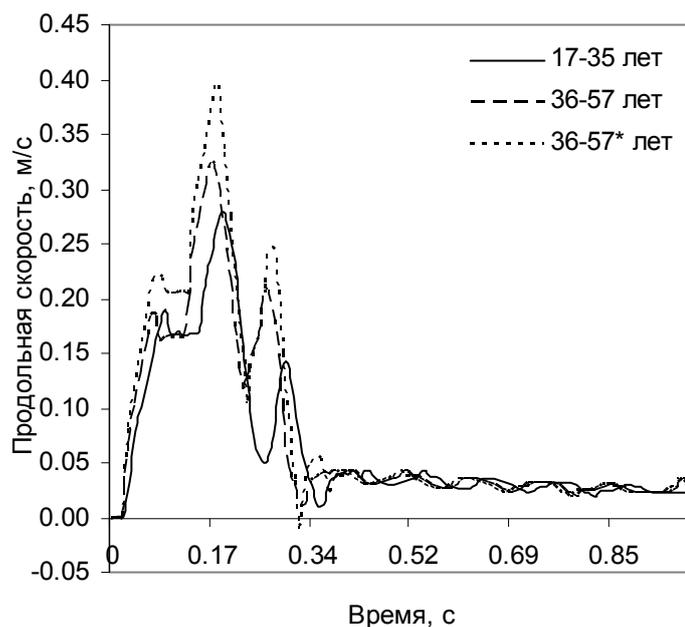


Рис. 8.24. Продольная скорость потока вблизи оси симметрии сосуда как функция времени. Течение в области максимума стеноза

С возрастом происходит изменение наклона профиля скорости, параболический профиль становится более плоским, что влечет за собой рост максимального значения напряжения сдвига в области стеноза (рис. 8.25).

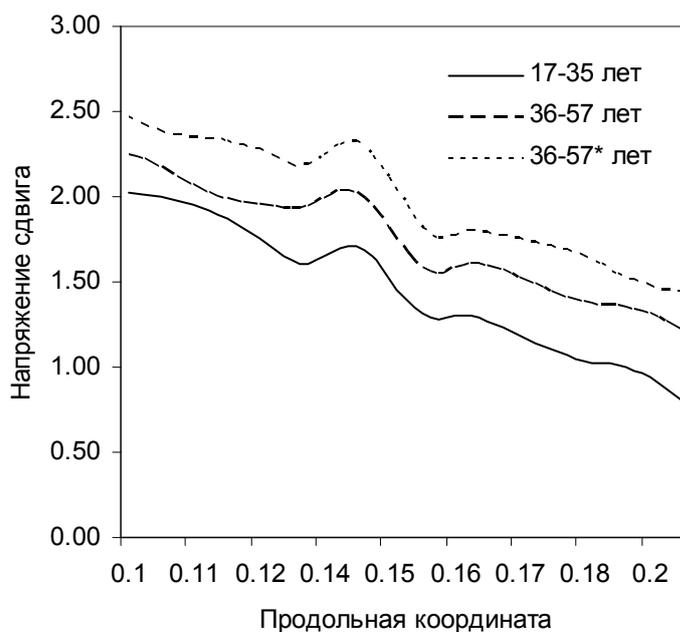


Рис. 8.25. Напряжение сдвига в районе стеноза (систола)

Влияние данного утолщения сосуда на распределение давления очень мало. В соответствии с законом Пуайзеля сужение протока вызывает падение давления (рис. 8.26).

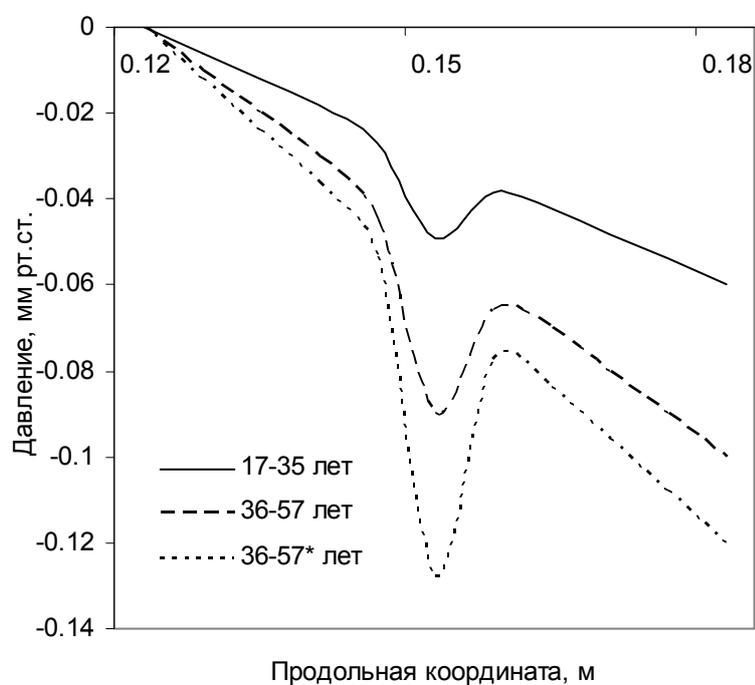


Рис. 8.26. Падение давления в районе стеноза. Для удобства из величины давления вычтено ее значение перед районом стеноза

Во время систолы, т. е. когда скорость потока достигает своего максимума, с возрастом величина падения давления в области стеноза возрастает в 3 раза, оставаясь, тем не менее, пренебрежимо малой по сравнению с самим давлением (около 0,1 %).

Приведенное исследование показывает, что совокупность процессов, происходящих в кровеносном сосуде при старении, приводит к увеличению нагрузки на его стенки со стороны крови. Увеличение жесткости стенок аорты, имеющее возрастной характер или связанное с патологией, приводит к возрастанию систолического и пульсового давлений (разность между систолическим и диастолическим давлениями), а также к ускорению кровотока в систолу. Сужение диаметра сосуда усугубляет возникающую гипертонию, развитие которой характеризуется повреждением интимы артерий, отложением в ней липидов (жировых веществ, холестерина), солей кальция с последующим сужением просвета сосудов и, как следствие, возникновением атеросклероза. В пораженных областях разница между гемодинамикой возрастных групп становится еще более заметной, что влечет за собой дальнейшее прогрессирование болезни.

Указанные нарушения механики кровеносной системы могут нивелироваться изменением сосудистого тонуса на периферии кровеносной системы либо изменением сердечного выброса.

Полученные результаты хорошо коррелируются с известными клиническими данными о процессе возникновения и развития болезней сердечно-сосудистой системы – гипертонии, гипертензии, атеросклероза. Очевидно, математическая модель позволяет дать количественные оценки изменений в гемодинамике, а это имеет большое значение для прогнозирования течения болезни и оптимизации ее лечения.

8.5. Анализ влияния слабой коничности сосуда

К настоящему времени проведено достаточно обширное теоретическое исследование проблем распространения пульсовой волны. Однако в отдельных случаях сравнение полученных результатов с экспериментальными исследованиями выявляет значительные расхождения [82, 83, 109]. Очевидно, причину необходимо искать в явлениях, которые остались неучтенными в разработанных моделях. Так, в известных работах предполагается независимость физических и геометрических свойств сосуда от продольной координаты. В частности, не учитывается сужение сосудов по длине и, как следствие, не изучается различие в условиях распространения прямой и возвратной волн давления [56, 87].

Цель исследования, изложенного в данном разделе, состоит в определении влияния сужения сосуда на характеристики потока жидкости в нем и сравнении результатов, полученных с учетом и без учета слабой коничности сосуда.

Для изучения течения жидкости в деформируемом сосуде использовалась математическая модель, изложенная в главе 6. Движение крови описывается уравнениями Навье–Стокса для ньютоновской несжимаемой вязкой жидкости. Рассматривается распространение волны давления в толстостенном цилиндрическом сосуде из гиперупругого материала, закрытого с обеих сторон отражающими плоскостями.

Поскольку материал сосуда является несжимаемым, можно записать $\lambda_{\theta e}$ как функцию $\lambda_{\theta i}$

$$\lambda_{\theta e} = \sqrt{\lambda_x^{-1} \left[-\left(\frac{h_0}{R_{0e}(x)} \right)^2 + 2 \left(\frac{h_0}{R_{0e}(x)} \right) \right] + \left(1 - \frac{h_0}{R_{0e}(x)} \right)^2 \lambda_{\theta i}^2}.$$

Введем закон изменения внешнего радиуса сосуда по длине (рис. 8.27)

$$R_{0e}(x) = \bar{R}_{0i} \exp(-x\beta/(2\bar{R}_{0i} + h_0)) + h_0,$$

где \bar{R}_{0i} – внутренний радиус на входе в исследуемый участок сосуда в ненапряженном состоянии; β – параметр, характеризующий скорость сужения сосуда; h_0 – толщина сосуда в ненапряженном состоянии.

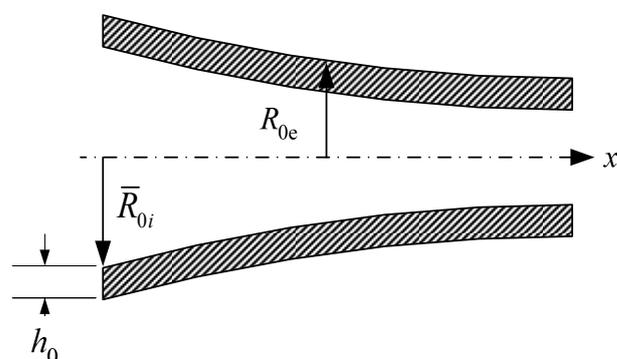


Рис. 8.27. Продольное сечение сужающегося сосуда

Согласно исследованиям, представленным в работе [103], данная экспоненциальная зависимость достаточно хорошо описывает изменение диаметра аорты и артерий млекопитающих.

При проведении расчетов использовался потенциал (6.46), продольное натяжение $\lambda_x = 1,2$. Начальный радиус сосуда на входе в участок принимался равным $1,393 \cdot 10^{-3}$ м при толщине стенки $0,596 \cdot 10^{-3}$ м. Как видно, соотношение h/R близко к $1/3$, что ограничивает применение моделей, не учитывающих влияние толщины стенки на волну внутри сосуда.

Для возбуждения волны давления на входе сосуда подается короткий (30 мс) импульс потока. Небольшая по времени протяженность этого импульса позволяет провести различие между прямой волной давления, движущейся к дальней границе сосуда, и отраженной волной, движущейся в обратном направлении (рис 8.28, 8.29).

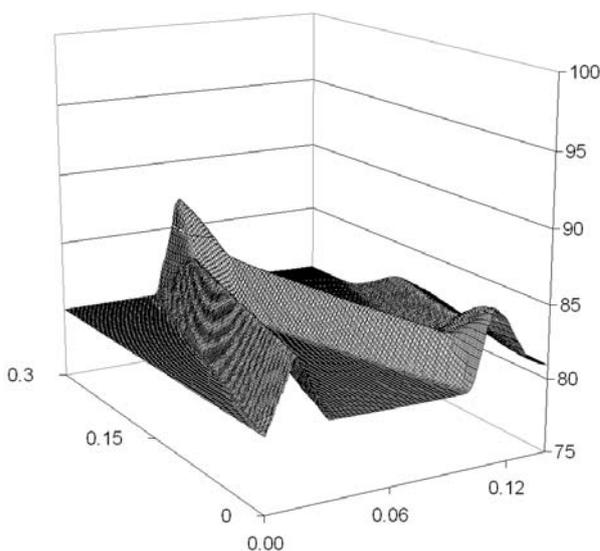


Рис. 8.28. Распространение давления в цилиндрическом сосуде

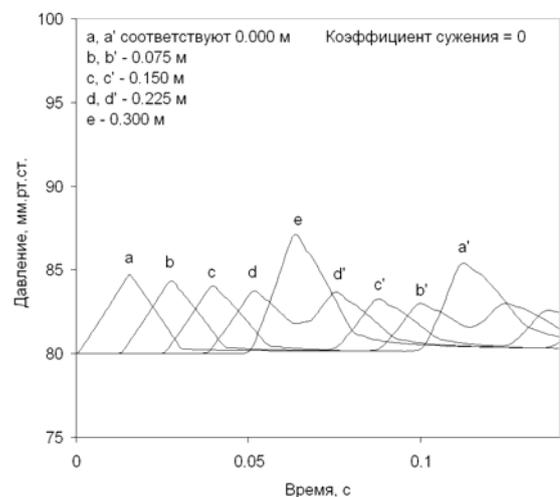


Рис. 8.29. Зависимость давления от времени для равноотстоящих точек вдоль сосуда ($\beta = 0$)

Рассмотрим вначале поведение волны давления в цилиндрическом сосуде. Первый график на рис. 8.29 (кривая а) – порожденная волна давления на входе в сосуд. Это возмущение распространяется вдоль сосуда, пересекая отметки b, c и d через 12,5, 25,0 и 37,5 мс соответственно, и достигает его противоположной стенки через 50 мс. Скорость распространения прямой (неотраженной) волны давления составляет 6 м/с. После отражения от стенки волна давления возвращается, пересекая отметки d', c' и b'. Во время прямого и возвратного движения форма волны остается неизменной, тогда как ее амплитуда постепенно убывает. Для количественного описания увеличения или уменьшения амплитуды давления предлагается ввести экспоненциальные зависимости между пиками давления для прямой и возвратной волн в направлении оси x

$$P_+(x) = P_0 \exp(k_+ x),$$

$$P_-(x) = P_L \exp(k_-(L - x)).$$

Здесь P_0 и P_L – амплитуды давления в противоположных концах сосуда; k_+ и k_- принимают отрицательные значения при уменьшении максимума давления и положительные – при его увеличении. В случае с неизменным начальным радиусом эти величины равны примерно минус $1,05 \text{ м}^{-1}$. Как следствие, при прохождении импульса вдоль всей длины сосуда амплитуда становится меньше на 25 % с дальнейшим ее уменьшением во время возвратного движения.

При наличии сужения сосуда ($\beta = 0,01$) картина распространения возмущения заметно изменяется (рис. 8.30 и 8.31). С распространением импульса вдоль сосуда амплитуда давления постоянно увеличивается ($k_+ = 1,1 \text{ м}^{-1}$), так что при достижении волной дальней стенки ее амплитуда оказывается выше, чем в ситуации, когда сужение отсутствует (кривая e на рис. 8.31). Во время возврата отраженной волны изменяется ее форма, а амплитуда существенно снижается ($k_- = -5,65 \text{ м}^{-1}$), достигая $2/3$ своей величины при $\beta = 0$.

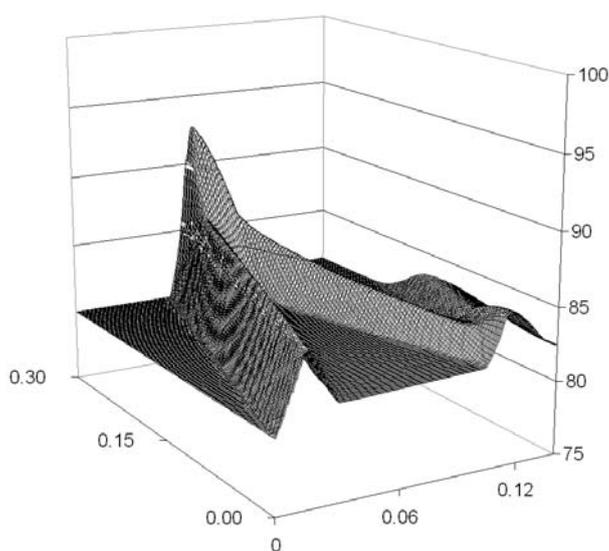


Рис. 8.30. Распространение давления в сосуде с сужением ($\beta=0,01$)

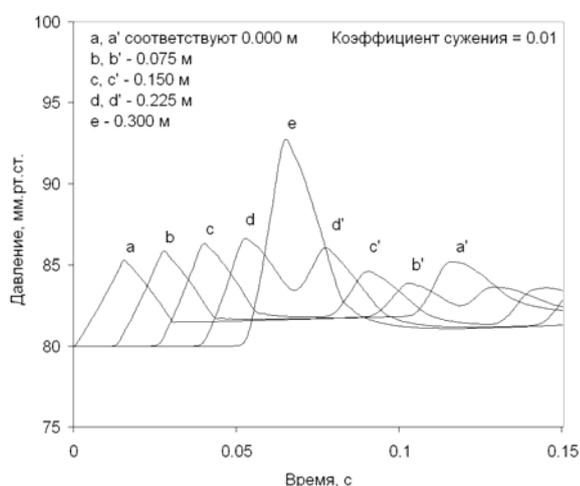


Рис. 8.31. Зависимость давления от времени для равноотстоящих точек вдоль сосуда ($\beta=0,01$)

Данные различия проявляются более отчетливо с увеличением степени сужения. При коэффициенте β , равном 0,02, волна начинает затухать уже после первого отражения, практически полностью исчезая по

возвращении к ближней стенке (рис. 8.32, 8.33). Коэффициенты усиления и затухания в данном случае принимают значения плюс $2,30 \text{ м}^{-1}$ и минус $7,67 \text{ м}^{-1}$ соответственно.

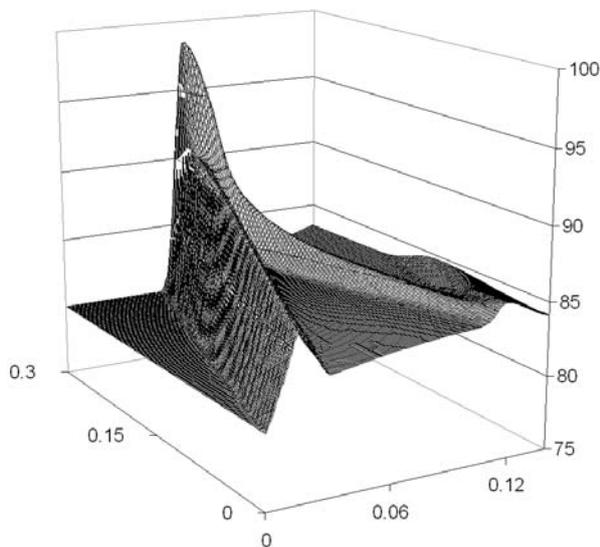


Рис. 8.32. Распространение давления в сосуде с сужением ($\beta=0,02$)

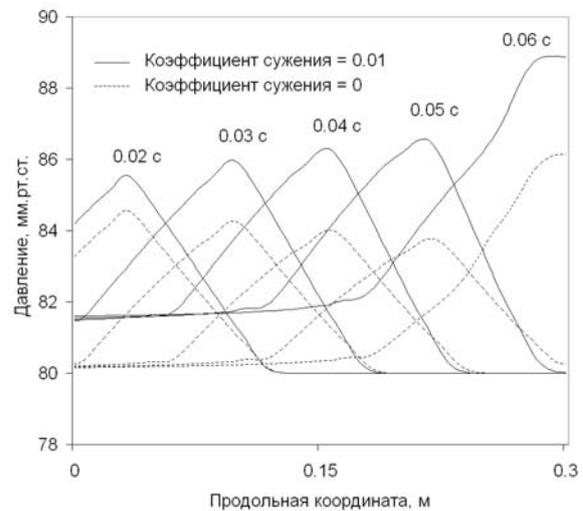


Рис. 8.33. Сравнение зависимостей давления от продольной координаты для различных моментов времени для случаев $\beta=0$ и $\beta=0,01$

График распределения давления вдоль сосуда – давление как функция продольной координаты – для пяти различных моментов времени (рис. 8.33) показывает, что амплитуда волны возрастает, даже когда возмущение давления еще не достигло противоположного конца сосуда. Следовательно, причиной усиления импульса не является отраженная волна. В случае сужающегося сосуда скорость распространения волны давления остается прежней при более высокой ее амплитуде. Для цилиндрического сосуда величина давления после прохождения импульса возвращается к своему исходному значению, в случае же сужения просвета, наоборот, она остается существенно выше, чем в начальный момент времени.

Основной задачей данного раздела являлся анализ воздействий, оказываемых сужением сосуда, на распространение волны давления. Для этого использовалась математическая модель движения крови, включающая в себя нелинейные законы распространения крови и движения стенок сосуда. Эта модель позволяет получать общее описание процессов, происходящих как во всем сосуде, так и отдельно взятом его участке. В модели устранены общие для предыдущих исследований ограничения: невязкая жидкость, жесткие стенки артерии, игнорирование ее натяжения

и т. д. В исследовании намеренно использовались граничные условия с бесконечно большим импедансом (сопротивлением). Эта конфигурация позволяет максимально увеличить отражение волн и сосредоточиться на исследовании изменений в распространении давления, обуславливаемых только лишь свойствами сосуда, в частности, сужением его просвета.

Одним из результатов данного исследования является вывод о различном характере распространения импульса в зависимости от направления его движения – прямого или возвратного. При прямом движении амплитуда возрастает, а при возвратном – уменьшается, причем общим результатом является затухание волны, так как степень усиления не компенсирует уменьшения амплитуды. Величина затухания сильно зависит от коэффициента сужения сосуда. Важно отметить, что усиление (рост амплитуды) волны при поступательном движении происходит именно из-за сужения сосуда, поскольку данный эффект наблюдается еще перед достижением волной противоположного конца исследуемого участка и ее взаимодействием с отраженным импульсом.

Полученные результаты позволяют получить более полное объяснение процессов, происходящих в кровеносной системе человека и иных подобных системах. Использование моделей, не учитывающих влияние даже слабой коничности сосуда на распространение импульса давления в обоих направлениях, может привести к искажению картины распространения давления и скоростей в исследуемой области.

8.6. Анализ распределения напряжений по толщине стенки сосуда

Известно, что крупные кровеносные сосуды человека (аорта и артерии) являются толстостенными: у них отношение $(R_{0e} - R_{0i})/R_{0i}$ составляет $1/10 \dots 1/6$. Проницаемость и целостность внутренней поверхности стенки аорты зависят от гидродинамических эффектов, например, от таких как высокочастотные компоненты турбулентного движения крови. Причиной разрушения эндотелия в этом случае является увеличение удельной энергии деформации на внутренней стенке сосуда, а также нелинейное распределение по толщине сосуда физических компонент истинных напряжений в продольном, окружном и радиальном направлениях. Отмечается также тот факт, что распределение потенциальной энергии деформации влияет также на движение молекул липопротеина, что, в свою очередь, ведет к возникновению атеросклероза. Поэтому важно

знать распределение напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 и функции потенциальной энергии деформации W по толщине стенки кровеносного сосуда.

Для определения данных величин необходимо выяснить изменение степени окружного удлинения $\lambda \equiv \lambda_2$ по толщине стенки.

Если материал стенки сосуда несжимаем, то при деформации элемента оболочки его объем сохраняется

$$\pi L_0 (R_{0e}^2 - R_{0i}^2) = \pi L (R_e^2 - R_i^2).$$

Отсюда получаем выражение для r :

$$r = \sqrt{\lambda_x (\rho^2 - R_i^2) + R_{i0}^2}.$$

Степень удлинения в окружном направлении зависит от ρ

$$\lambda = \frac{\rho}{r} = \frac{\rho}{\sqrt{\lambda_x (\rho^2 - R_i^2) + R_{i0}^2}} \quad (8.3)$$

и может быть вычислена в любой точке по толщине сосуда при известных величинах степени удлинения λ_x в продольном направлении и значениях радиуса внутренней поверхности недеформированного (R_{0i}) и деформированного (R_i) сосудов.

Распределение по толщине сосуда напряжений и функции W рассматривается для сосудов при значениях давления 80, 120 и 180 мм рт. ст., что соответствует диастолическому, систолическому и повышенному систолическому давлениям. Используется функция потенциальной энергии упругой деформации (6.45).

При постоянном значении степени продольного натяжения $\lambda_x = 1,36$ давлениям 80 и 120 мм рт. ст. соответствуют значения удлинения на внутренней поверхности 1,55 и 1,71; удлинения на внешней поверхности составляют соответственно 1,39 и 1,52. Для повышенного давления 180 мм рт. ст. удлинения на внутренней и внешней поверхностях равны 1,85 и 1,63.

Численным интегрированием выражения (6.41) по методу Симпсона с учетом (8.3) и по известным значениям λ_x , λ_i и λ_e рассчитывается распределение по толщине сосуда напряжения σ_3 в радиальном направлении. По формуле (6.45) вычисляются значения функции W по толщине

стенки, а из (6.37) и (6.38) получаются выражения для напряжений σ_1 и σ_2 при известном значении напряжения σ_3 .

Величины напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 и функции W имеют нелинейный характер изменения по толщине стенки (рис. 8.34). Максимальные значения упомянутые величины имеют на внутренней поверхности сосуда.

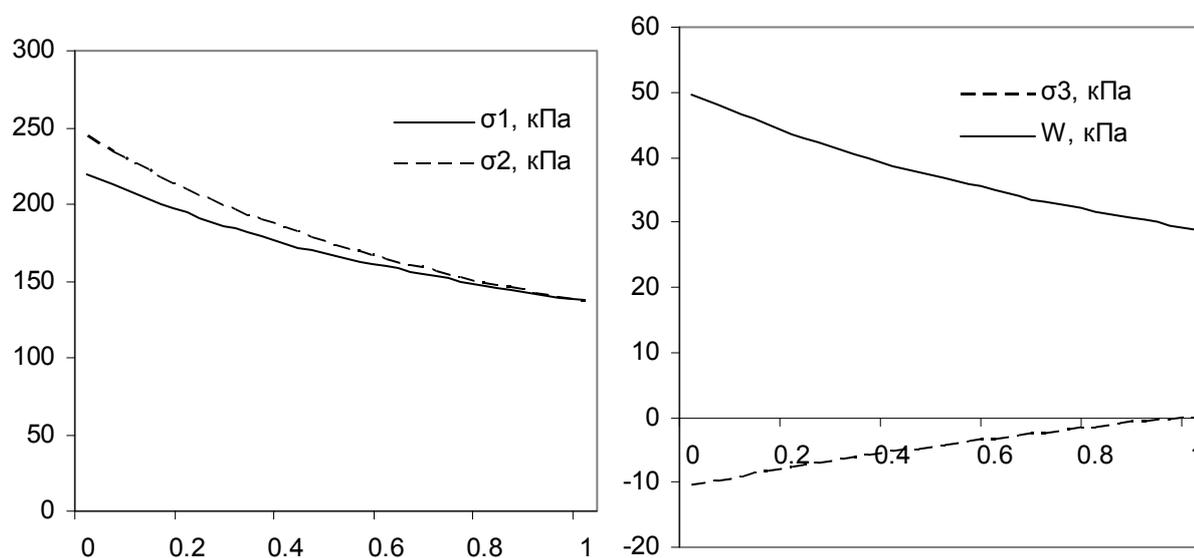


Рис. 8.34. Распределение напряжений σ_1 , σ_2 , σ_3 и функции удельной энергии деформации W по толщине стенки для внутреннего давления 80 мм рт. ст.

Координата точки по толщине стенки выражена в относительных единицах; значению 0 соответствует внутренняя поверхность сосуда, значению 1 – внешняя

При давлении 80 мм рт. ст. (10,6 кПа) напряжение в окружном направлении σ_2 меняется от своего максимального значения 243,8 кПа на внутренней поверхности стенки сосуда до минимального значения 135,9 кПа на наружной. При этом величина напряжений в срединной поверхности сосуда σ_2^{cp} равна 173,3 кПа, т. е. по направлению к наружной поверхности имеет место существенное уменьшение напряжения от 140,6 % до 78 % по отношению к напряжению σ_2^{cp} .

Аналогичная зависимость наблюдается как для напряжения в продольном направлении σ_1 , так и для функции удельной деформации. Напряжение в радиальном направлении уменьшается в срединном слое по отношению к напряжению на внутренней поверхности сосуда, которое равно внутреннему давлению 10,6 кПа со знаком минус. На наружной поверхности σ_3 становится равным нулю (рис. 8.35).

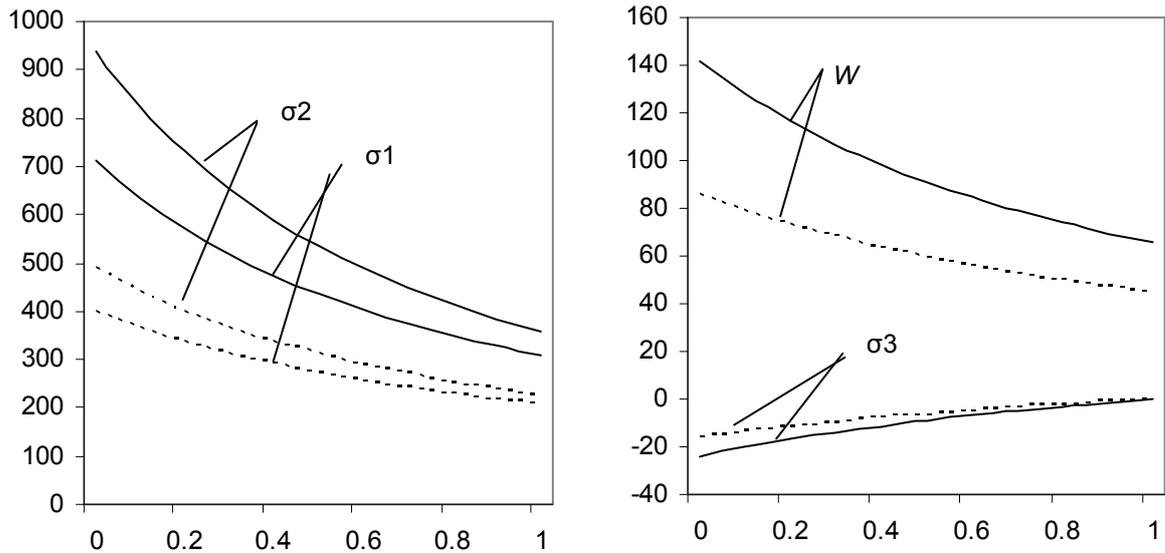


Рис. 8.35. Распределение значений σ_1 , σ_2 , σ_3 и W по толщине стенки в зависимости от внутреннего давления. Пунктиром отмечены графики при давлении 120 мм рт. ст.; сплошными линиями – 180 мм рт. ст. Координата точки по толщине стенки выражена в относительных единицах; значению 0 соответствует внутренняя поверхность сосуда, 1 – внешняя

При росте давления наблюдается увеличение напряжения на эндотелиальной поверхности стенки сосуда и уменьшение – на наружной поверхности по отношению к напряжению в срединном слое. Так, при давлении 120 мм рт. ст. (15,96 кПа) σ_1 уменьшается с 150 до 76 % по отношению к σ_1^{cp} , а σ_2 – с 157 до 72 % по отношению к σ_2^{cp} .

С дальнейшим ростом давления происходит заметное увеличение значения функции удельной энергии деформации на внутренней поверхности стенки сосуда по отношению к значению W на наружной поверхности. Величина W при $P = 80$ мм рт. ст. на внутренней поверхности на 75 % больше, чем на наружной. При давлении $P = 120$ мм рт. ст. это превышение составляет практически 100 %, а по достижении внутренним давлением значения 180 мм рт. ст. (23,94 кПа) функция удельной энергии деформации на внутренней поверхности превышает значение W на внешней поверхности в 2,2 раза.

Расчет напряжений, возникающих в сосуде, с использованием более простой модели (7.17)–(7.19) без учета неравномерного распределения напряжений по толщине сосуда дает занижение их величин в 1,5–2 раза по сравнению с изложенным методом решения (рис. 8.36).

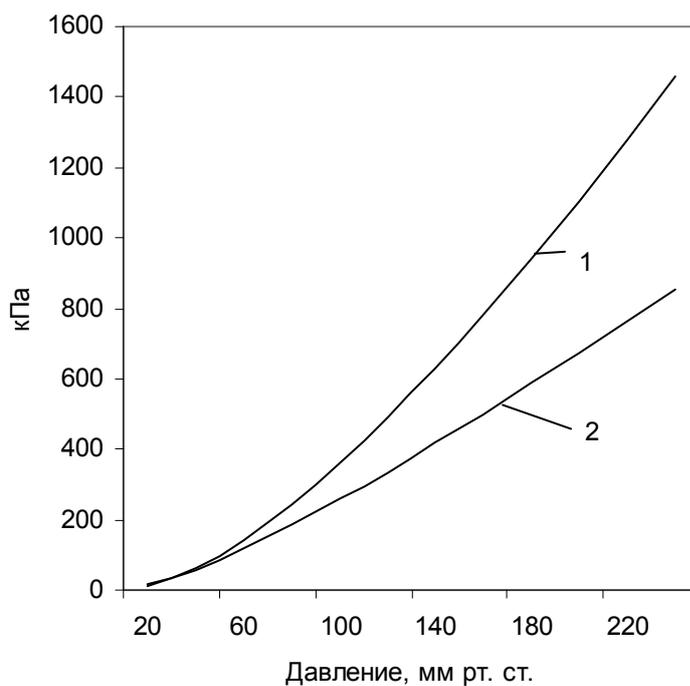


Рис. 8.36. Значения напряжения σ_2 на внутренней поверхности сосуда с учетом (1) и без учета (2) неравномерного распределения значений напряжения

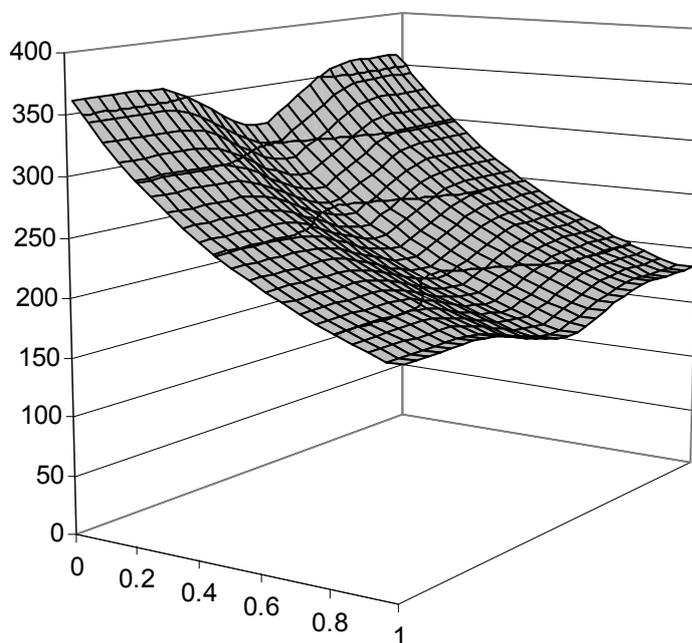


Рис. 8.37. Распределение напряжения σ_2 внутри стенки сосуда в районе стеноза. Напряжение выражено в кПа; толщина стенки в относительных единицах; значению 1 соответствует внешняя поверхность сосуда

Превышение предельного значения напряжения в окружном направлении σ_2^{\max} , которое составляет по разным оценкам от 2000 до 3000 кПа для крупных артерий человека, может привести не только к микроструктурным изменениям стенки, но и разрыву внутреннего слоя артерии.

Рассмотрим также изменение напряжения в окружном направлении для случая сосуда со стенозом. При этом используется математическая модель, изложенная в разделе 8.3 «Анализ влияния стеноза». Проанализирован момент, при котором внутреннее давление в участке сосуда, не подверженном влиянию стеноза, составляет 100 мм рт. ст. (13 кПа). Величина сужения просвета сосуда составляет 10 % радиуса, причем максимум сужения приходится на середину исследуемого участка (рис. 8.37).

Как и ожидалось, изменение давления в области сужения не оказывает заметного влияния на картину распределения σ_2 в стенке; напряжение в окружном направлении уменьшается вследствие изменения геометрии сосуда. В зоне максимума сужения напряжение σ_2 уменьшается на 12 % на внутренней стенке сосуда и на 15 % на внешней.

Исходя из полученных результатов, можно предположить, что при повышении артериального давления возможность заболевания атеросклерозом увеличивается из-за повышения значений напряжений и функции W на внутренней поверхности сосуда по отношению к значениям в срединном слое и на наружной поверхности. Увеличение происходит нелинейно, с повышением скорости изменения с приближением к внутренней поверхности. В области стеноза определяющим фактором является не локальное падение давления, а изменение геометрии сосуда.

8.7. Теоретико-экспериментальная параметризация артериального резервуара

Рассмотренные в предыдущих разделах частные модели кровеносного сосуда могут быть использованы при создании более сложной модели артерии, учитывающей особенности строения реальных сосудов, для применения на практике при расчете параметров реальных систем кровообращения.

Получение результатов, близких к системам *in vivo*, также требует точного описания поведения условно отсеченной части кровеносного дерева. В работах, посвященных данному вопросу, встречается применение различных модификаций моделей «упругой камеры» («упругого резервуара», «артериального резервуара») для решения данной проблемы.

В данном разделе проведен анализ трех наиболее часто используемых вариантов «упругой камеры», а также представлен метод расчета параметров исходя из лабораторных данных.

Классическая двухэлементная модель «упругой камеры» (ее также называют моделью Кельвина–Фойгта [41]) рассмотрена в разделе 6.3 «Граничные и начальные условия». Эта модель применялась в статьях [88] и [138] при изучении кровеносной системы млекопитающих. Уравнение (6.50) определяет зависимость между давлением в системе $P(t)$ и потоком $Q(t)$ и может быть проинтегрировано в явном виде.

Иная модель кровеносной системы была предложена Бремером в работе [19]. Известная как трехэлементная модель «упругой камеры», модель Бремера вводит дополнительный элемент сопротивления в двухэлементную модель «упругой камеры» (рис. 8.38).

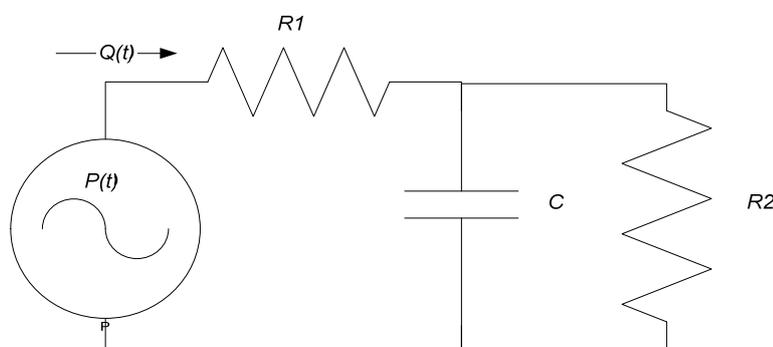


Рис. 8.38. Трехэлементная модель «упругой камеры»

Этот вариант был использован в недавних работах [40, 61, 66, 138].

Руководствуясь законами Ома и правилами Кирхгофа, можно записать зависимость между силой тока $Q(t)$ и напряжением $P(t)$ для известных сопротивлений резисторов R_1 и R_2 и емкости конденсатора C

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)Q(t) + CR_1 \frac{dQ(t)}{dt} = \frac{P(t)}{R_2} + C \frac{dP(t)}{dt}. \quad (8.4)$$

В применении к физиологической системе, $Q(t)$ является потоком крови, а $P(t)$ – давлением. Параметр C характеризует податливость артериальной системы, выраженную в единицах объема, отнесенных к давлению ($\text{м}^3/\text{Па}$), R_2 – сопротивление периферических сосудов ($\text{Па}\cdot\text{с}/\text{м}^3$), а R_1 – сопротивление, оказываемое потоку крови со стороны аортального

клапана. Очевидно, что при $R_1 = 0$ и $R_2 = R$ уравнение (8.4) вырождается в уравнение для двухэлементной модели (6.50).

В литературе предлагаются различные вариации двух- и трехэлементных моделей. Мы выбрали модификацию, использованную в работе [137] при изучении кровеносной системы цыпленка и в статьях [45, 104] при исследованиях малого круга кровообращения кошки и крысы. Данная модификация вводит дополнительный элемент (индукционную катушку) в основную ветвь эквивалентной электрической схемы (рис. 8.39).

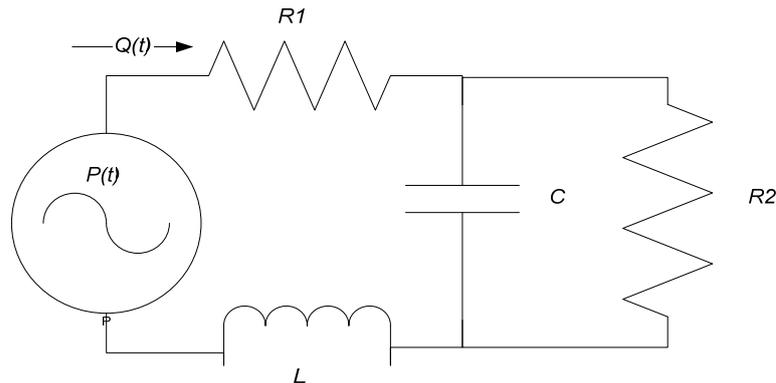


Рис. 8.39. Четырехэлементная модель «упругой камеры»

Индуктивность L предназначена для моделирования инерции жидкости, которая не учитывалась в предыдущих зависимостях. Применяя те же методы для анализа цепи, что и в предыдущем случае, запишем дифференциальное уравнение

$$\left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right)Q(t) + \left(R_1C + \frac{L}{R_2}\right)\frac{dQ(t)}{dt} + LC\frac{d^2Q(t)}{dt^2} = \frac{P(t)}{R_2} + C\frac{dP(t)}{dt}. \quad (8.5)$$

При $L = 0$ уравнение превращается в зависимость (8.4).

Представленные три модели «упругой камеры» связывают функции давления и потока с их первыми и вторыми производными через набор параметров $\{R, C\}$, $\{R_1, R_2, C\}$ или $\{R_1, R_2, L, C\}$. В зависимости от целей исследования уравнения (6.50), (8.4) и (8.5) могут использоваться при решении следующих типов задач:

а) нахождение функции давления по известной функции потока и параметрам;

б) нахождение функции потока по известной функции давления и параметрам;

в) нахождение значения параметров, применение которых позволяет наилучшим образом приблизить расчетные функции давления и потока к данным измерений.

Проблемы типа а) и б) не представляют серьезных трудностей и могут быть решены либо явным интегрированием дифференциальных уравнений, либо численными методами Рунге–Кутты или Адамса, изложенными в главе 7.

Для решения задач третьего типа, а также для сравнения различных моделей разработан программный модуль, реализующий метод Левенберга–Маркара.

В виде исходных данных использовались графики кровяного потока и давления (рис. 8.40) в аорте крысы, полученные экспериментальным путем [88].

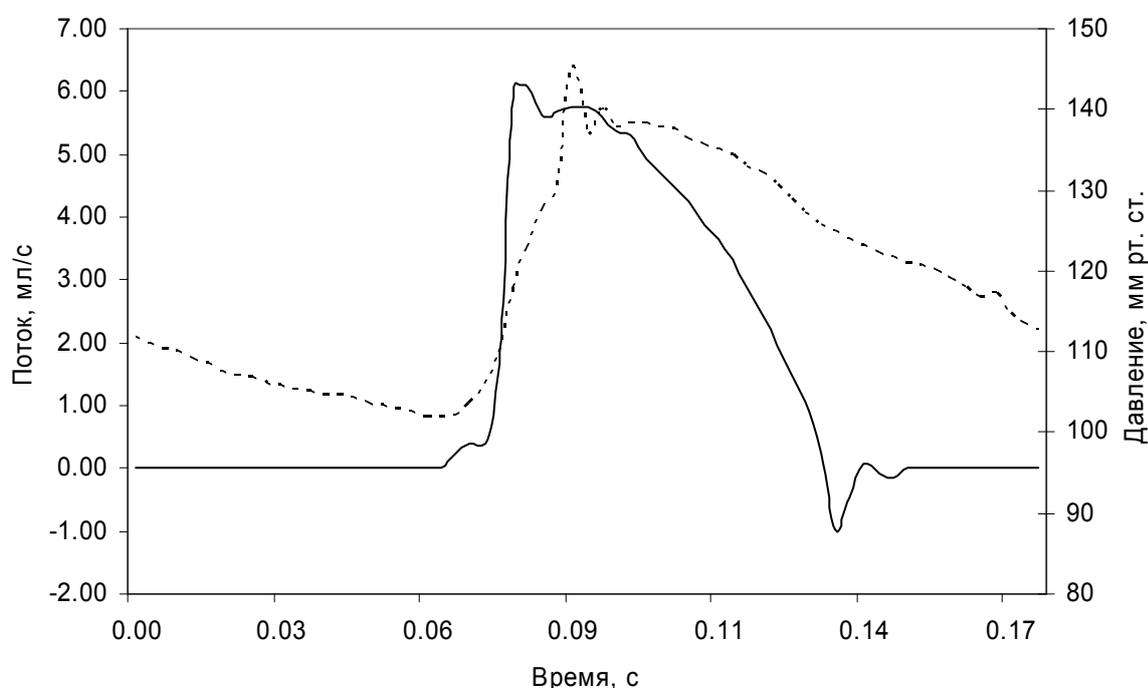


Рис. 8.40. Давление (пунктирная линия) и поток (сплошная линия) в аорте крысы согласно экспериментальным данным. Для графиков выбраны различные масштабы для удобства сравнения

Средние значений за один период сердечного цикла давления P_m и потока Q_m используются для вычисления периферического сопротивления системы

$$R = \frac{P_m}{Q_m}.$$

Полученное значение сопротивления ($R = 81,684 \text{ Па}\cdot\text{с}/\text{м}^3$) подставляется в дифференциальное уравнение (6.50) для двухэлементной модели. Решение $P(t)$ используется при оптимизации параметра C методом Левенберга–Маркара.

Алгоритм Левенберга–Маркара [105] представляет собой метод нелинейной оптимизации (который относится к методам Ньютона), использующий для поиска минимума комбинированную стратегию – линейную аппроксимацию и градиентный спуск. Переключение с одного метода на другой происходит в зависимости от того, была ли успешной линейная аппроксимация. Выбор данного метода обусловлен его быстрой сходимостью.

Вычисленные значения R и C использованы в качестве стартовых при решении трех-, а затем четырехэлементной модели с последующей оптимизацией параметров этих систем. Решение дифференциальных уравнений осуществлялось методом Рунге–Кутты четвертого порядка точности. Экспериментальные данные о потоке и давлении (имеющие дискретизацию 0,003 с) интерполировались на каждом шаге линейной функцией.

Результаты расчетов представлены на рис. 8.41.

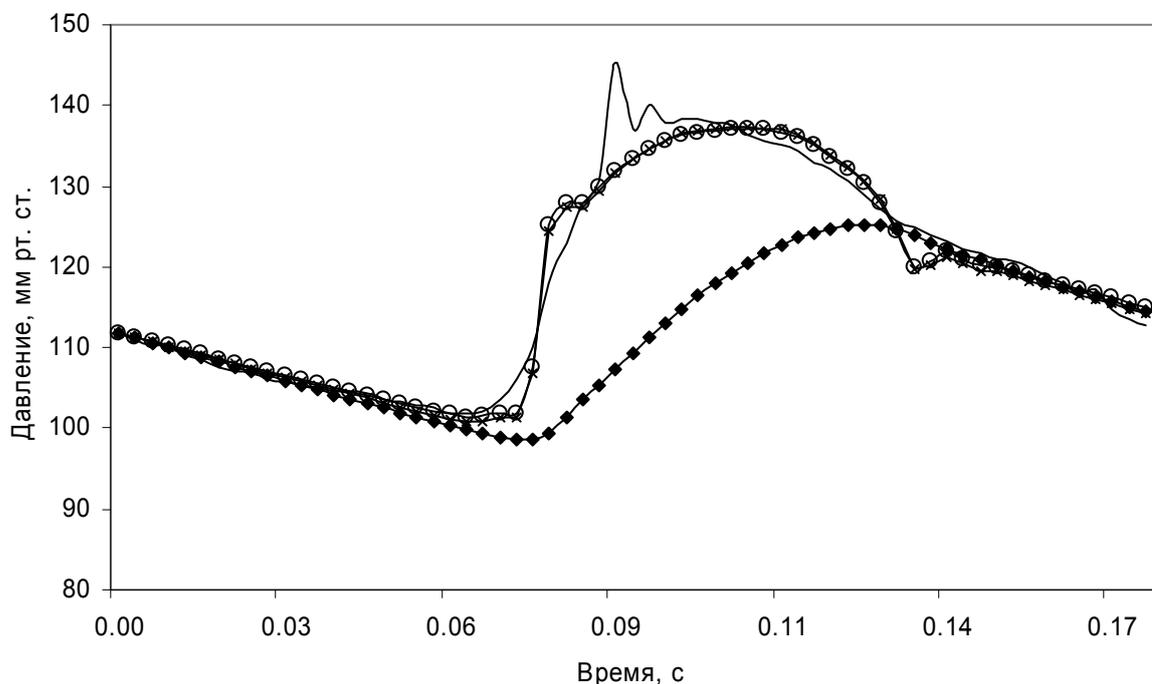


Рис. 8.41. Давление в аорте крысы: сплошная линия – экспериментальные данные; маркер (♦) обозначает результаты, полученные с помощью двухэлементной «упругой камеры»; маркер (*) – трехэлементной; маркер (⊕) – четырехэлементной

Сравнение графиков показывает, что для данной биологической системы трехэлементная модель упругого резервуара модель значительно более точно воспроизводит волну давления, чем двухэлементная. Улучшение наиболее заметно в систолической части сердечного цикла ($t = 0,07 \dots 0,10$ с). Введение дополнительного четвертого параметра не приводит к заметному улучшению результатов.

Оптимизированные значения сопротивлений, податливости и емкости приведены в табл. 8.2. Вычислена также отнесенная к максимальному значению давления (145 мм рт. ст.) среднеквадратическая погрешность Δ аппроксимации функции $P(t)$.

Таблица 8.2. Расчетные параметры R_1 , R_2 , L , C и среднеквадратическая погрешность Δ для различных моделей упругой камеры

Число элементов в модели	$R (R_2)$	C	R_1	L	Δ
2	81,684	$6,4761 \cdot 10^{-2}$	–	–	$8,0614 \cdot 10^{-2}$
3	81,684	$7,0289 \cdot 10^{-2}$	4,1651	–	$1,8493 \cdot 10^{-2}$
4	81,684	$7,4421 \cdot 10^{-2}$	4,1491	$9,0316 \cdot 10^{-5}$	$1,8003 \cdot 10^{-2}$

Разработанная методика может быть применена при расчете параметров различных вариаций «упругой камеры». Полученные зависимости могут применяться в виде граничных условий для моделей крупных кровеносных сосудов.

Использование уточненных трех- и четырехэлементных моделей позволяет получить более адекватное математическое описание систем кровообращения и в перспективе разработать методы прогнозирования возможных патологических изменений кровеносной системы.

Для дальнейших исследований представляет интерес разработка аналогичной методики определения параметров для нелинейных механических моделей.

ВЫВОДЫ

Основные результаты и выводы этой части книги, представленные также в ряде предыдущих работ [156, 176–181], заключаются в следующем.

Проблема разработки методов решения нелинейных задач взаимодействия цилиндрических гиперупругих оболочек и вязкой жидкой среды представляет научный и практический интерес как для механики, так и биомеханики и медицины. Существующие исследования задач в различной (большей частью упрощенной) постановке не позволяют считать вопрос об описании гидроупругого взаимодействия полностью изученным. Ряд аспектов проблемы, в частности влияние продольного натяжения и изменения физических и геометрических параметров на НДС и характеристики потока, остается мало исследованным.

На основе теории больших деформаций гиперупругих материалов и уравнений Навье–Стокса для несжимаемой вязкой ньютоновской жидкости разработана уточненная математическая модель податливого сосуда, содержащего нестационарный поток жидкости. Предложен эффективный численный метод решения поставленной задачи, основанный на сочетании разложения Галеркина по радиальной координате и приближения производных неизвестных функций конечными разностями по продольной координате.

На ряде тестовых задач проведено сравнение полученных результатов с аналитическими решениями и численными результатами, имеющимися в литературе. Изучена сходимость метода разложения Галеркина в зависимости от количества слагаемых ряда, шагов по продольной координате и времени. Анализ результатов показал достаточную точность численных решений и их хорошее согласование с данными других авторов.

На примере течения крови в артерии человека численно изучено НДС стенки сосуда, распределение во времени давления, скорости потока и напряжения сдвига на стенке. Рассмотрено влияние физических и геометрических характеристик стенок сосуда на механические и гидродинамические параметры системы с использованием упругих потенциалов реальных биологических материалов стенок сосудов.

Изучено влияние изменения начального продольного натяжения оболочки на характеристики потока. Показано, что пренебрежение степенью продольного натяжения в отдельных случаях может привести к серьезным искажениям результатов.

Исследовано влияние уменьшения просвета сосуда (стеноза) на гемодинамику; получены характеристики системы в области стеноза. Сужение просвета влечет за собой значительные изменения в распределениях напряжений сдвига и скоростей потока вблизи области стеноза; эти эффекты возрастают с увеличением степени стеноза.

Предложен метод оценки характеристик кровеносной системы (податливость системы, гидравлическое сопротивление) по данным экспериментов, основанный на модели упругого резервуара. Полученные зависимости используются в виде граничных условий при постановке задач гидроупругости крупных кровеносных сосудов для более точного моделирования условно отсеченной части кровеносного русла.

Методы и результаты данной работы могут быть использованы в механике биологических объектов при исследовании процессов, происходящих в аорте, артериях и артериолах. Развитые теория и программа позволяют дать количественные оценки изменений НДС и гемодинамики, что имеет большое значение для прогнозирования течения болезни и оптимизации ее лечения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A finite element model of the infarcted left ventricle / A. Needleman, S. A. Rabinowitz, D. K. Bogen, T. A. McMahon // *J. Biomech.* – 1983. – Vol. 16. – P. 45–58.
2. A mathematical model of the dynamic geometry of the intact left ventricle and its application to clinical data / J. G. Dumesnil, R. M. Shoucri, J. L. Laurenceau, J. Turcot // *Circulation.* – 1979. – Vol. 59, № 11. – P. 1024–1034.
3. A three-dimensional finite element method for large elastic deformations of ventricular myocardium. Part I. Cylindrical and spherical polar coordinates / K. D. Costa, P. J. Hunter, J. M. Rogers, J. M. Guccione, L. K. Waidman, A. D. McCulloch // *ASME J. Biomech. Eng.* – 1996. – Vol. 118. – P. 452–463.
4. A three-dimensional finite element method for large elastic deformations of ventricular myocardium. Part II. Prolate spheroidal coordinates / K. D. Costa, P. J. Hunter, J. S. Wayne, L. K. Waidman, J. M. Guccione, A. D. McCulloch // *ASME J. Biomech. Eng.* – 1996. – Vol. 118. – P. 464–472.
5. An analysis of the mechanical disadvantage of myocardial infarction in the canine left ventricle / D. K. Bogen, S. A. Rabinowitz, A. Needleman, T. A. McMahon, W. H. Abelmann // *Circ. Res.* – 1980. – № 47. – P. 728–741.
6. Anastomosis of the internal mammary artery to the distal left anterior descending coronary artery / G. E. Green, S. H. Stertzler, R. Gordon, D. A. Tice // *Circulation.* – 1970. – 41, N 5. – P. 79–85
7. Arndt J. O. The damper of the intact carotid artery in man and its change with pulse pressure / J. O. Arndt, J. Klauske, F. Mersche // *Pflugers Arch.* – 1968. – Vol. 301, N 3. – P. 230–240.
8. Arts T. A model of the mechanics of the left ventricle / T. Arts, R. S. Reneman, P. C. Veenstra // *Annals Biomed. Eng.* – 1979. – Vol. 7, № 3. – P. 299–318.
9. Arts T. Dynamics of left ventricular wall and mitral valve mechanics: A model study / T. Arts, R. S. Reneman // *J. Biomech.* – 1989. – Vol. 22, № 3. – P. 261–271.
10. Atabek H. B. Wave propagation through a viscous fluid contained in a tethered initially stressed orthotropic elastic tube // *Biophys. J.* – 1968. – Vol. 8, N 5. – P. 626–649.
11. Atabek H. B. Wave propagation through a viscous incompressible fluid contained in an initially stressed elastic tube / H. B. Atabek, H. S. Lew // *Biophys. J.* – 1966. – Vol. 6, N 4 – P. 481–503.
12. Belardinelli E. Theoretical analysis of pressure pulse propagation in arterial vessels / E. Belardinelli, S. Cavalcanti // *J. Biomech.* – 1992. – Vol. 25, N 11. – P. 1332–1349.
13. Bergel D. H. The properties of blood vessels // *Biomechanics. Its foundation and objectives.* – 1972. – P. 105–140.
14. Bergel D. H. The static elastic properties of the arterial wall // *J. Physiol.* – 1961. – Vol. 156, N 3. – P. 445–457.
15. Biot M. A. *Mechanics of incremental deformations.* – New York; London; Sydney: John Willey & Sons, 1965. – 504 p.
16. Blatz P. J. On the mechanical behavior of elastic animal tissue / P. J. Blatz, B. M. Chu, H. Wayland // *Trans. Soc. Rheol.* – 1969. – Vol. 13. – P. 83–102.

17. Bogen D. K. An analysis of myocardial infarction: the effect of regional changes in contractility / D. K. Bogen, A. Needleman, N. A. McMahon // *Circ. Res.* – 1984. – № 55. – P. 805–815.

18. Bovendeerd P. H. M. The mechanics of the normal and ischemic left ventricle during the cardiac cycle: A numerical and experimental analysis. – Ph. D. thesis. – Netherlands. Maastricht: Univ. of Limburg, 1990.

19. Broemser A. Ueber die Messung des Schlagvolumens des Herzens auf unblutigem Weg // *Zeitung fur Biologie.* – 1930. – 90. – P. 467–507.

20. Burton A. C. Physical principles of circulatory phenomena: the physical equilibria of heart and blood vessels // *Handbook of Physiology. Sect. 2. Vol 1. Circulation.* Amer. Physiol. Soc. – 1968. – P. 85–106.

21. Burton A. C. The relation of structure to function of the tissues of the wall of blood vessels // *Physiol. Rev.* – 1954. – Vol. 34, N 4. – P. 619–642.

22. Carew T. E. Compressibility of the arterial wall / T. E. Carew, R. N. Vanishnav, D. J. Patel // *Circulation Res.* – 1968. – Vol. 23, N 1. – P. 61–68.

23. Cavalcanti S. Hemodynamics of an artery with mild stenosis // *J. Biomech.* – 1995. – Vol. 28, N. 4. – P. 387–399.

24. Chadwick R. S. Mechanics of the left ventricle // *Biophys. J.* – 1982. – Vol. 39, № 3. – P. 279–288.

25. Changes in passive mechanical stiffness of myocardial tissue with aneurysm formation / K. B. Gurta, M. B. Ratcliffe, M. A. Fallet, L. H. Edmunds, D. K. Bogen // *Circulation.* – 1994. – Vol. 89. – P. 2315–2326.

26. Chu B. M. Influence of longitudinal tethering on the tension in thick-walled blood vessels in equilibrium / B. M. Chu, S. Oka // *Biorheology* – 1973. – Vol. 10, N 4. – P. 517–525.

27. Chuong C. J. On residual stresses in arteries / C. J. Chuong, Y. C. Fung // *J. Biomech. Eng.* – 1986. – Vol. 108. – P. 189–192.

28. Cox R. H. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thick-walled, viscoelastic tube // *Biophys J.* – 1968. – Vol. 8, N 6. – P. 691–709.

29. Cox R. H. Wave propagation through a Newtonian fluid contained within a thick-walled, viscoelastic tube: the influence of wall compressibility // *J. Biomech.* – 1970. – Vol. 3, N 3. – P. 317–335.

30. Crisp J. D. On the mechanical equilibrium states of cylindrical blood vessels // *Microvasc. Res.* – 1968. – Vol. 1, N. 1. – P. 35–57.

31. Demiray H. A note on the elasticity of soft biological tissues // *J. Biomech.* – 1972. – Vol. 5, N 3. – P. 309–311.

32. Demiray H. Pulse velocities in initially stressed vessels // *J. Biomech.* – 1988. – Vol. 21. – P. 55–58.

33. Demiray H. Waves in initially stressed fluid-filled thick tubes // *J. Biomech.* – 1997. – Vol. 30, N. 3. – P. 273–276.

34. Dobrin P. B. Influence of vascular smooth muscle on contractile mechanics and elasticity of arteries / P. B. Dobrin, A. A. Rovic // *Amer. J. Physiol.* – 1969. – Vol. 217, N 6. – P. 1644–1651.

35. Doyle J. M. Finite deformation analysis of the relaxed and contracted dog carotid artery / J. M. Doyle, P. B. Dobrin // *Microvasc. Res.* – 1971. – Vol. 3, N 4. – P. 400–415.
36. Doyle J. M. Stress gradients in the wall of large arteries / J. M. Doyle, P. B. Dobrin // *J. Biomech.* – 1973. – Vol. 6, N 6. – P. 631–639.
37. Dutta A. Numerical Analysis of Flow in an Elastic Artery Model / A. Dutta, D. M. Wang, J. M. Tarbell // *J. Biomech. Eng.* – Vol. 114. – P. 26–32.
38. Dutta A. Influence of Non-Newtonian Behavior of Blood on Flow in an Elastic Artery Model / A. Dutta, J. M. Tarbell // *J. Biomech. Eng.* – 1996. – Vol. 118. – P. 111–119.
39. Feit T.S. Diastolic pressure-volume relations and distribution of pressure and fiber extension across the wall of model left ventricle // *Biophys. J.* – 1979. – Vol. 28, № 2. – P. 143–166.
40. Fogliardi, R. Comparison of linear and nonlinear formulations of the three-element windkessel model // *Am. J. Physiol.* – 1996. – Vol. 271. – P. 2661–2668.
41. Frank O. Die Grundform des arteriellen Pulses // *Zeitung fur Biologie.* – 1899. – Vol. 37. – P. 483–586.
42. Fry D. L. Myocardial mechanic: tension-velocity-length relationship of heart muscle / D. L. Fry, D. M. Griggs, J. C. Greenfield // *Circ. Res.* – 1964. – Vol. 14, № 1. – P. 73–85.
43. Fung Y. C. Elasticity of soft tissues in simple elongation // *Amer. J. Physiol.* – 1967. – Vol. 213, N 6. – P. 1532–1544.
44. Gou P. F. Strain energy function for biological tissues // *J. Biomech.* – 1970. – Vol. 3, N 6. – P. 547–550.
45. Grant, B. Characterization of pulmonary arterial input impedance with lumped parameter models // *Am. J. Physiol.* – 1987. – Vol. 252. – P. 585–593.
46. Gray H. *Anatomy of the human body.* – Philadelphia: Lea & Febiger, 1918. – 1396 p.
47. Greenfield J. C. Relation between pressure and diameter in the ascending aorta of man / J. C. Greenfield, D. J. Patel // *Circ Res.* – 1962. – Vol. 10. – P. 778–781.
48. Guccione J. M. Finite element stress analysis of left ventricular mechanics in the beating dog heart / J. M. Guccione, K. D. Costa, A. D. McCulloch // *J. Biomech.* – 1995. – Vol. 28. – P. 1167–1177.
49. Guccione J. M. Mechanics of active contraction in cardiac muscle. Part II. Cylindrical models of the systolic left ventricle / J. M. Guccione, L. K. Waldman, A. D. McCulloch // *ASME J. Biomech. Eng.* – 1993. – Vol. 115. – P. 82–90.
50. Hanna W. T. A simulation of human heart function // *Biophys. J.* – 1973. – Vol. 13, № 5. – P. 603–621.
51. Hart V. G., Shi J. Effects of initial stretches on wave speeds in thin orthotropic hyperelastic tubes containing fluid / V. G. Hart, J. Shi // *Appl. Math. Modelling* – 1994. – Vol. 18. – P. 198–206.
52. Hoppmann W. H. Large deformations of elastic tubes / W. H. Hoppmann, L. Wan // *J. Biomech.* – 1970. – Vol. 3, N 6. – P. 593–600.

53. Humphrey J. D. On constitutive relations and finite deformations of passive cardiac tissue: I. A pseudostrain-energy function / J. D. Humphrey, F. C. P. Yin // *ASME J. Biomech. Eng.* – 1987. – Vol. 109, № 4. – P. 298–304.
54. Hung E. J. Mechanics of rupture of cerebral saccular aneurysms / E. J. Hung, M. R. Botwin // *J. Biomech.* – 1975. – Vol. 8, N 6. – P. 385–392.
55. Iberall A. S. Attenuation of oscillatory pressures in instrument lines // *J. Res. Nat. Bur. Standards.* – 1950. – Vol. 45, N 1. – P. 85–108.
56. Imaeda K., Goodman F. O. Analysis of nonlinear pulsatile blood flow in arteries / K. Imaeda, F. O. Goodman // *J. Biomech.* – 1980. – Vol. 13. – P. 1007–1022.
57. Itskov M. A class of orthotropic and transversely isotropic hyperelastic constitutive models based on a polyconvex strain energy function / M. Itskov, N. Aksel // *Intern. J. Solids and Structures.* – 2004. – Vol. 41. – P. 3833–3848.
58. Janz R. F. Predicted effect of chronic apical aneurysms on the passive stiffness of the human left ventricle / R. F. Janz, R. J. Waldron // *Circ. Res.* – 1978. – Vol. 42. – P. 255–263.
59. Karlson W. J. Influence of myocardial fiber organization on ventricular function. – San Diego: Univ. of California, 1998. – P. 210–243.
60. Kasyanov V. The anisotropic nonlinear model of human large blood vessels // *Mehanika Polimerov.* – 1974. – Vol. 5. – P. 204–211.
61. Khir A. W. Determination of wave speed and wave separation in the arteries / A. W. Khir, A. O'Brien // *J. Biomech.* – 2001. – Vol. 34. – P. 1145–1155.
62. Kline K. A. Concentration effects in oscillatory blood flow / K. A. Kline, S. J. Allen // *Biorheology* – 1969. – Vol. 6, N. 2. – P. 99–108.
63. Kline K. A. The relationship of pressure gradient to blood velocity based on a continuum theory of blood / K. A. Kline, S. J. Allen // *J. Biomech.* – 1969. – Vol. 2, N. 3. – P. 313–318.
64. Klip W. Phase velocity and dumping of torsional waves in thin-walled tubes of infinite length / W. Klip, D. A. Klip // In: *Pulsatile blood flow.* – New York: Mc.Graw-Hill. – 1964. – P. 323–329.
65. Klip W. Formulas for the phase velocity and damping of longitudinal waves in thick-walled viscoelastic tubes / W. Klip, P. van Loon, D. A. Klip // *J. Appl. Phys.* – 1967. – Vol. 38, N 9. – P. 3745–3755.
66. Lambermont, B. Comparison between Three- and Four-Element Windkessel Models to Characterize Vascular Properties of Pulmonary Circulation // *Arch. Physiol. and Biochem.* – 1997. – Vol. 105. – P. 625 – 632.
67. Lamina fiber architecture and three-dimensional systolic mechanics in canine ventricular myocardium / K. D. Costa, Y. Takayama, A. D. McCulloch, J. M. Covell // *Amer. J. Physiol. (Heart Circ. Physiol.)*. – 1999. – Vol. 276 (45). – P. 595–607.
68. Learoyd B. M. Alterations with age in the visco-elastic properties of human arterial walls / B. M. Learoyd, M. G. Taylor // *Circulation Res.* – 1966. – Vol. 18, N 3. – P. 278–292.
69. Lee D. A numerical simulation of steady flow fields in a bypass tube / D. Lee, J. M. Su, H. Y. Liang // *J. Biomech.* – 2002. – Vol. 34, N 11. – P. 1407–1416.
70. Li J. K. Pulse wave propagation. / J. K. Li, J. Melbin, R. A. Riffle // *Circ. Res.* – 2001. – Vol. 49. – P. 442–452.

71. Ling S. C. Modeling the nonlinear behavior of arteries // AIAA Paper. – 1970. – Vol. 789. – P. 1–6.
72. Ling S. C. A nonlinear analysis of pulsatile flow in arteries / S. C. Ling, H. Atabek // *J. Fluid Mech.* – 1972. – Vol. 55. – P. 493–511.
73. Lowe T.E. Cardiac aneurysms: a mechanical analysis of their deformation / T.E. Lowe, E.R. Love // *J. Exp. Biol. Med. Sci.* – 1948. – Vol. 26. – P. 497–513.
74. Majdalani J. Two-dimensional viscous flow between slowly expanding or contracting walls with weak permeability / J. Majdalani, Z. Chong // *J. Biomech.* – 2002. – Vol. 35, N 10. – P. 1399–1403.
75. Malinzak G. S. Comparative study of arterial transmission velocity / G. S. Malinzak, J. H. Meredith // *J. Biomech.* – 1970. – Vol. 3, N.3. – P. 337–350.
76. Mathematical model of geometry and fibrous structure of the heart / P.M.F. Nielsen, L.J. Le Grice, B.H. Smaill, P.J. Hunter // *Amer. J. Physiol. (Heart Circ. Physiol.)*. – 1991. – Vol. 260 (29). – P. H1365–H1378.
77. McCulloch A. Large-scale finite element analysis of the beating heart / A. McCulloch, L. Waldman, J. Rogers // *CRC Crit. Rev. Biomed. Eng.* – 1992. – Vol. 20. – P. 427–449.
78. McDonald D. A. Blood flow in arteries. – New York: Arnold, 1974. – 488 p.
79. Mechanical properties of the living dog aorta / R. L. Evans, E. F. Bernstein, E. Johnson, C. Reller // *Amer. J. Physiol.* – 1962. – Vol. 202, N 4. – P. 619–621.
80. Melbin J. Elastic deformation in orthotropic vessels. Theoretical and experimental results / J. Melbin, A. Noordergraaf // *Circulation Res.* – 1971. – Vol. 28, N 6. – P. 680–692.
81. Melvin J. W. Mechanical characteristics of soft tissues at high strain rates / J. W. Melvin, D. Mohan, A. S. Wineman // *Biomechanics Symposium.* – 2001. – Vol. 10. – P. 75–78.
82. Milnor W. R. A new method of measuring propagation coefficients and characteristic impedance in blood vessels / W. R. Milnor, W. W. Nichols // *Circ. Res.* – 1975. – Vol. 36. – P. 631–639.
83. Minor W. R. The relation between arterial viscoelasticity and wave propagation in the canine femoral artery in vivo / W. R. Minor, C. D. Bertram // *Circ. Res.* – 1978. – Vol. 43. – P. 870–879.
84. Mirsky I. Mechanical behavior of ventricular aneurysms / I. Mirsky, P.L. McGill, R.F. Janz // *Bull. Math. Biophys.* – 1978. – Vol. 40. – P. 451–464.
85. Mirsky I. Ventricular and arterial wall stresses based on large deformation analysis // *Biophys. J.* – 1973. – Vol. 13, № 11. – P. 1141–1159.
86. Mirsky I. Wave propagation in a viscous fluid contained in an orthotropic elastic tube // *J. Biophys.* – 1967. – Vol. 7, N 2 – P. 165–186.
87. Misra J. C. A study on the non-linear flow of blood through arteries / J. C. Misra, S. I. Singh // *Bull. Math. Boil.* – 1987. – Vol. 49. – P. 257–277.
88. Molino, P. Beat-to-beat estimation of windkessel model parameters in conscious rats // *Am. J. Physiol.* – 1998. – Vol. 274. – P. 171–177.
89. Mooney M. A. A theory of large elastic deformations // *J. Appl. Phys.* – 1940. – Vol. 11, N 9. – P. 582–592.

90. Morgan G. W. Wave propagation in a viscous liquid contained in a flexible tube / G. W. Morgan, J. P. Kiely // *J. Acoust. Soc. Amer.* – 1954. – Vol. 26, N3. – P. 323–328.

91. Myocardial mechanics in aortic and mitral valvular regurgitation: The concept of instantaneous impedance as a determinant of the performance of the intact heart / C. W. Ursechel, J. W. Covell, E. H. Sonnenblick, J. Ross, E. Braunwald // *J. Clin. Invest.* – 1968. – Vol. 47, № 11. – P. 867–883.

92. Nash M. P. Computational mechanics of the heart / M. P. Nash, P. J. Hunter // *J. Elasticity.* – 2000. – Vol. 61 (1-3). – P. 113–141.

93. Nerem R. M. Fluid mechanical aspects of blood flow // *Space Technol.* – Vol. 1. – 1969. – P. 25–30.

94. Non-linear anisotropic elastic properties of the canine aorta / R. N. Vanishnav, J. T. Young, J. S. Janicki, D. J. Patel // *Biophys. J.* – 1972. – Vol. 8, N 8. – P. 1008–1027.

95. Oka S. Physical theory of tension in thick walled blood vessels in equilibrium / S. Oka, T. Azuma // *Biorheology.* – 1970. – Vol. 7, N 2. – P. 254–264.

96. Oka S. Theoretical and clinical hemorheology / S. Oka, T. Azuma // *Theoretical and clinical hemorheology.* – 1971. – P. 71–78.

97. Pao Y. C. Plane-strain finite-element analysis of reconstructed diastolic left ventricular cross-section / Y. C. Pao, R. A. Robb, E. L. Ritman // *Amer. Biomed. Eng.* – 1976. – Vol. 4, № 3. – P. 232–249.

98. Patel D. J. The elastic symmetry of arterial segments in dogs / D. J. Patel, D. L. Fry // *Circulation Res.* – 1969. – Vol. 24, N 1. – P. 1–8.

99. Patel D. J. In vivo pressure – length-radius relationships of certain vessels of men and dogs / D. J. Patel, J. C. Greenfield, D. L. Fry // *Pulsatile blood flow.* – 1964. – P. 293–302.

100. Patel D. J. Static anisotropic elastic properties of the aorta in living dogs / D. J. Patel, J. S. Janicki, T. E. Carew // *Circulation Res.*, – 1969. – Vol. 25, N 6. – P. 765–779.

101. Patel D. J. Aortic mechanics in living dog / D. J. Patel, A. J. Mallos, D. L. Fry // *J. Appl. Physiol.* – 1961. – Vol. 16, N 2. – P. 293–299.

102. Patel D. J. The rheology of large blood vessels / D. J. Patel, R. N. Vanishav // *Cardiovascular fluid dynamics* – 1972. – Vol. 2. – P. 1–64.

103. Pedley T. J. *The fluid mechanics of large blood vessels.* – London: Cambridge University Press, 1980. – 540 p.

104. Piene, H. Does normal pulmonary impedance constitute the optimum load for the right ventricle? // *Am. J. Physiol.* – 1982. – Vol. 242. – P. 154–160.

105. Press, W.H. *Numerical Recipes in FORTRAN: The Art of Scientific Computing.* – New York: Cambridge University Press. – 1992. – 528 p.

106. Radhakrishnan S. Mechanical analysis of development of left ventricular aneurysms / S. Radhakrishnan, D. N. Ghista, G. Jayaraman // *J. Biomech.* – 1980. – Vol. 13. – P. 1031–1039.

107. Ravindran R. Wave propagation in a micropolar fluid contained in a visco-elastic membrane / R. Ravindran, R. G. Devi // *Proc. Acad. Sci.* – 1970. – Vol. 72. – P. 108–120.

108. Reuderink, P. J. Analysis of the flow in a 3D distensible model of the carotid artery bifurcation // *J. Biomech.* – 1989. – Vol. 22, N 8. – P. 819–827.

109. Segers P. Role of tapering in aortic wave reflection: hydraulic and mathematical model study / P. Segers, P. Verdonck // *J. Biomech.* – 2000. – Vol. 33. – P. 299–306.
110. Simon B. R. Large deformation analysis of the arterial cross-section / B. R. Simon, A. S. Kobayashi, D. E. Strandness // *Trans. ASME.* – 1971. – Vol. 93, N 2. – P. 138–145.
111. Sneddon J. N., Berry D. S. The classical theory of elasticity / J. N. Sneddon, D. S. Berry. – Berlin; Gottingen; Heidelberg: Springer-Verlag, 1958. – 219 p.
112. Stergiopoulos N. Computer simulation of arterial flow with application to arterial and aortic stenoses / N. Stergiopoulos, D. Young, T. Rouge // *J. Biomech.* – 1992. – Vol. 25, N 12. – 1477–1488.
113. Streeter D. D. An engineering analysis of myocardial fiber orientation in pig's left ventricle in systole / D. D. Streeter, Jr. and D. L. Bassett // *Anat. Rec.* – 1966. – Vol. 155. – P. 503–511.
114. Streeter V. L. Pulsatile pressure and flow through distensible vessels / V. L. Streeter, W. F. Keitzer, D. F. Bohr // *Circulation Res.* – 1963. – Vol. 13, N 1. – P. 3–20.
115. Structural three-dimensional constitutive law for the passive myocardium / A. Horowitz, Y. Lanir, F. C. P. Yin, M. Perl, I. Sheinman, R. K. Strumpf // *ASME J. Biomech. Eng.* – 1988. – Vol. 110. – P. 200–207.
116. Taber L. A. A laminated shell model for the infarcted left ventricle / L. A. Taber, W. W. Podszus // *Intern. J. Solid and Structures.* – 1997. – Vol. 34, № 2. – P. 223–241.
117. Tickner E. G. A theory for the static elastic behavior of blood vessels / E. G. Tickner, A. H. Sacks // *Biorheology.* – 1967. – Vol. 4, N 4. – P. 151–168.
118. Tozeren A. Static analysis of the left ventricle // *J. Biomech. Eng.* – 1983. – Vol. 105, № 1. – P. 35–46.
119. Usyk T. P. Computational Methods for Soft Tissue Biomechanics / T. P. Usyk, A. D. McCulloch // *Biomechanics of soft tissue in cardiovascular systems.* – New York: Springer Wien, 2002. – P. 273–342.
120. Usyk T. P. Effect of laminar orthotropic myofiber architecture on regional stress and strain in the canine left ventricle / T. P. Usyk, R. Mazhari, A. D. McCulloch // *J. Elasticity.* – 2000. – Vol. 61. – P. 143–164.
121. Usyk T. P. Regional septal dysfunction in a three-dimensional computational model of focal myofiber disarray / T. P. Usyk, J. H. Omens, A. D. McCulloch // *Amer. J. Physiol. (Heart Circ. Physiol.).* – 2001. – Vol. 281 (50). – P. H506–H514.
122. Valanis K. S. The strain-energy function of hyperelastic material in terms of extension ratios / K. S. Valanis, R. I. Landel // *J. Appl. Phys.* – 1967. – Vol. 38, N 7. – P. 2997–3002.
123. Vanishev R. N. Nonlinear anisotropic elastic properties of the canine aorta / R. N. Vanishev, J. T. Young, J. S. Janicki // *Biophys. J.* – 1972. – Vol. 12. – P. 1008–1027.
124. Vetter F. J. Three-dimensional stress and strain in passive rabbit left ventricle: A model study / F. J. Vetter, A. D. McCulloch // *Annals Biomed. Eng.* – 2000. – Vol. 28. – P. 781–792.
125. Vinson C. A. Analysis of left ventricular behavior in diastole by means of finite element method / C. A. Vinson, D. G. Gibson, A. L. Yettram // *Brit. Heart J.* – 1979. – Vol. 41. – P. 60–67.

126. Wang D. M. Nonlinear analysis of flow in an elastic tube (artery): steady streaming effects / D. M. Wang, J. M. Tarbell // *J. Fluid Mech.* – 1992. – Vol. 239. – P. 341–358.

127. Wang D. M. Nonlinear Analysis of Oscillatory Flow, With a Nonzero Mean, in an Elastic Tube (Artery) / D. M. Wang, J. M. Tarbell // *J. Biomech. Eng.* – 1995. – Vol. 117. – P. 127–135.

128. Westerhof N. Analog studies of human systemic arterial tree / N. Westerhof, F. Bosman, C. De Vries // *J. Biomech.* – 1969. – Vol. 2. – P. 121–143.

129. Womersley J. R. An elastic tube theory of pulse transmission and oscillatory flow in mammalian arteries // Wright Air Dev. Center, Tech. Rep. – 1957. – P. 560–614.

130. Womersley J. R. Oscillatory flow in arteries: the constrained elastic tube as a model of arterial flow and pulse transmission // *Phys. Med. Biol.* – 1957. – Vol. 2. – P. 178–187.

131. Womersley J. R. Oscillatory motion of a viscous liquid in a thin-walled elastic tube – I. The linear approximation for long tubes. // *Phil. Mag.* – 1955. – Vol. 46, N 343. – P. 199–221.

132. Womersley J. R. Oscillatory flows in arteries. II: The reflection of the pulse wave at junctions and rigid inserts in the arterial system. // *Phys. Med. Biol.* – 1957. – Vol. 2. – P. 313–323.

133. Wu J. Z. Elastic anisotropy of articular cartilage is associated with the microstructures of collagen fibers and chondrocytes / J. Z. Wu, W. Herzog // *J. Biomech.* – 2002. – Vol. 35, N 7. – P. 931–942.

134. Yettram A.L. Modelling the left ventricle for determination of the elasticity of the myocardium / A. L. Yettram, B. S. Grewal, D. G. Gibson // *J. Eng. Medicine.* – 1994. – Vol. 208. – P. 1–8.

135. Yin F. C. P. Applications of finite-element method to ventricular mechanics // *CRC Crit. Rev. Biomed. Eng.* – 1985. – Vol. 12. – P. 311–342.

136. Yin F. C. P. Ventricular wall stress // *Circ. Res.* – 1981. – Vol. 49 – P. 829–842.

137. Yoshigi, M. Dorsal aortic impedance in stage 24 chick embryo following acute changes in circulating blood volume // *Am. J. Physiol.* – 1996. – Vol. 270. – P. 1597–1606.

138. Yoshigi, M. Characterization of embryonic aortic impedance with lumped parameter models // *Am. J. Physiol.* – 1997. – Vol. 273. – P. 19–27.

139. Young D. F. Fluid mechanics of arterial stenoses. // *J. Biomech. Engng.* – 1979. – Vol. 101. – P. 157–175.

140. Амбарцумян С. А. Теория анизотропных оболочек. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 384 с.

141. Анго А. Математика для электро- и радиоинженеров. – М.: Наука, 1965. – 279 с.

142. Бабаев А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей / Под ред. В. Д. Кубенко. – Киев: Наук. думка, 1990. – 176 с.

143. Власні гідропружні коливання кришок гідротурбин / І. С. Веремеєнко, О. Н. Зеленська, Б. Я. Кантор, О. В. Єселева, Т. Ф. Медведовська, О. А. Стрельнікова // *Машинознавство.* – 2003. – № 8. – С. 3–6.

144. Вольмир А. С. О поведении кровеносных сосудов как упругих оболочек / А. С. Вольмир, М. С. Герштейн // Изв. АН АрмССР, Механика. – 1966. – Т. 19, N 1. – С. 8–12.
145. Вольмир А. С. Проблемы динамики оболочек кровеносных сосудов / А. С. Вольмир, М. С. Герштейн // Механика полимеров. – 1970. – Т. 2. – С. 373–379.
146. Галлагер Р. Метод конечных элементов. Основы. – М.: Мир, 1984. – 428 с.
147. Гольденблат И. И. Нелинейные проблемы теории упругости. – М.: Наука, 1969. – 336 с.
148. Грин А. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошной среды / А. Грин, Дж. Адкинс. – М.: Мир, 1965. – 456 с.
149. Громека И. С. К теории движения жидкости в узких цилиндрических трубках. – Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР. – 1952. – С. 149–171.
150. Громека И. С. О скорости распространения волнообразного движения в упругих трубках. – Собр. соч. – М.: Изд-во АН СССР. – 1952. – С. 172–183.
151. Гузь А.Н. Основы трехмерной теории устойчивости деформируемых тел. – Киев: Вища шк., 1986. – 511 с.
152. Гузь А. Н. Методы расчета оболочек. Т.5. Теория нестационарной гидроупругости оболочек. / А. Н. Гузь, В. Д. Кубенко – К.: Вища шк., 1982. – 400 с.
153. Ерёменко С. Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272 с.
154. Зенкевич О. Конечные элементы и аппроксимация / О. Зенкевич, К. Морган. – М.: Мир, 1986. – 318 с.
155. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541с.
156. Кантор Б. Я. Моделирование периодического течения вязкой жидкости в толстостенном сосуде / Б. Я. Кантор, А. Ю. Кунделев // Пробл. машиностроения. – 1998. – Т. 1, N 2. – С. 94–101.
157. Кантор Б. Я. К расчету тонкостенных конструкций вращения методом конечных элементов. / Б. Я. Кантор, В. М. Миткевич, Э. С. Шишкина– Харьков, 1976. – 58 с. – (Препринт/ АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; N 25).
158. Кантор Б. Я. Механика закручивания левого желудочка сердца / Б. Я. Кантор, Т. П. Усик // Вестник ХГПУ.– Харьков: Изд-во ХГПУ. – 1998. – Вып.10. – С.34–37.
159. Кантор Б. Я. Исследование толстостенной гиперупругой эллипсоидальной оболочки с относительно жесткими включениями (модель левого желудочка сердца) / Б. Я. Кантор, Н. И. Яблучанский, Е. Ю. Мисюра // Вестник НТУ “ХПИ”. Динамика и прочность машин. – 2004. – № 31. – С. 106–117.
160. Кантор Б. Я. Метод конечных элементов в задачах биомеханики сердца / Б.Я. Кантор, Е.Ю. Мисюра // Медицина и ... – 2004. – № 1(10). – С. 23–31.
161. Кантор Б. Я. Напряженно-деформированное состояние модели левого желудочка сердца при инфаркте миокарда / Б. Я. Кантор, Е. Ю. Мисюра // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т. 5, № 4. – С. 92–101.
162. Кантор Б. Я. Неинвазивная диагностика нарушений биомеханики левого сердца / Б. Я. Кантор, Н. И. Яблучанский, А. В. Мартыненко. – Киев: Наук. думка, 1992.– 219 с.

163. Кантор Б. Я. Нелинейная кардиобиомеханика левого желудочка / Б. Я. Кантор, Н. И. Яблучанский, Н. И. Шляховер. – Киев: Наук. думка, 1991. – 212 с.
164. Кантор Б. Я. Нелинейное моделирование напряженно-деформированного состояния левого желудочка сердца в хронической стадии инфаркта миокарда / Б. Я. Кантор, Е. Ю. Мисюра // Пробл. машиностроения. – 2005. – Т. 8, № 4. – С. 79–87.
165. Кантор Б. Я. Определение параметров потенциала трансверсально-изотропного материала на примере миокарда / Б. Я. Кантор, Н. И. Яблучанский, А. В. Мартыненко // Механика композитных материалов. – 1993. – № 1. – С. 99–104.
166. Кантор Б. Я. Потенциал почти несжимаемого трансверсально-изотропного гиперупругого материала / Б. Я. Кантор, Е. Ю. Мисюра // Вестник НТУ “ХПИ”. – 2005. – Вып. 20. – С. 111–120.
167. Кантор Б. Я. Самокорректирующийся шаговый процесс расчета гибких оболочек / Б. Я. Кантор, Г. Д. Баевская. – Харьков, 1977. – 12 с.– (Препринт / АН УССР. Ин-т пробл. машиностроения; № 54).
168. Касьянов В. А. Анизотропная нелинейно-упругая модель крупных кровеносных сосудов человека // Механика полимеров. – 1974. – Т. 5. – С. 874–884.
169. Касьянов В. А. Функция энергии деформации крупных кровеносных сосудов человека / В. А. Касьянов, И. В. Кнетс // Механика полимеров. – 1974. – Т. 1. – С. 122–128.
170. Киликовский В. В. Расчет на ЭЦВМ объемной скорости кровотока в сечении артериального сосуда по измеренным давлению и градиенту давления // Математические методы в биологии. – 1969. – Т. 2. – С. 9–14.
171. Киричевский В. В. Исследование поведения конструкций из эластомеров при различных законах состояния на основе МКЭ // Пробл. прочности. – 1994. – № 5. – С. 56–63.
172. Киричевский В. В. Метод конечных элементов в механике эластомеров. – Киев: Наук. думка, 2002. – 655 с.
173. Кисляков Ю. Я. Статические свойства пассивных сосудов артериального типа // Биофизика. – 1971. – Т. 16, N 6. – С. 1093–1099.
174. Корн Г. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г. Корн, Т. Корн – М.: Наука, 1977. – 832 с.
175. Куликов Ю. А. Решение плоской задачи теории упругости методом конечных элементов: Учебное пособие. – Горький: Изд-во Горьк. гос. ун-та, 1980. – 68 с.
176. Кунделев А. Ю. Влияние изменения физических характеристик цилиндрической оболочки на поток вязкой жидкости в ней // Пробл. машиностроения. – 2000. – Т. 3, N 1–2. – С. 136–140.
177. Кунделев А. Ю. Исследование распространения волн в подверженных начальному натяжению толстостенных сосудах с жидкостью // Пробл. машиностроения. – 1998. – Т. 1, N 3–4. – С. 112–121.
178. Кунделев А. Ю. Применение моделей упругого резервуара при расчете параметров кровеносной системы / А. Ю. Кунделев, Б. Я. Кантор // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т. 5, N 3. – С. 71–75.

179. Кунделев А. Ю. Распространение волн давления в сужающихся цилиндрических сосудах с жидкостью / А. Ю. Кунделев, Б. Я. Кантор // Пробл. машиностроения. – 2000. – Т. 3, N 3–4. – С. 118–122.
180. Кунделев А. Ю. Анализ влияния начального натяжения толстостенных сосудов на поток жидкости в них / А. Ю. Кунделев, Б. Я. Кантор // Доп. НАН України. – 1999. – N 11. – С. 167–170.
181. Кунделев А. Ю. Поток вязкой жидкости в гиперупругих цилиндрических сосудах при наличии локального утолщения стенки // Пробл. машиностроения. – 2002. – Т. 5, N 1. – С. 73–79.
182. Кутилин Д. И. Теория конечных деформаций. – М; Л.: Гос. изд-во техн.-теорет. лит., 1947. – 276 с.
183. Ломакин В. А. Теория упругости неоднородных тел. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1976. – 368 с.
184. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости. – М.: 1980. – 512 с.
185. Лурье А. И. Теория упругости. – М.: Наука, 1970. – 940 с.
186. Метод конечных элементов в механике твердых тел // А. С. Сахаров, В. Н. Кислокий, В. В. Киричевский, И. Альтенбах, У. Габберт, Ю. Данкерт, Х. Кепплер, З. Кочык. – Киев: Вища шк., 1982. – 480 с.
187. Метод конечных элементов: Теория, алгоритмы, реализация / В. А. Толок, В. В. Киричевский, С. И. Гоменюк, С. Н. Гребенюк, Д. П. Бувайло. – Киев: Наук. думка, 2003. – 316 с.
188. Механика кровообращения / К. Каро, Т. Педли, Р. Шротер, У. Сид. – М.: Мир, 1981. – 624 с.
189. Мисюра Е. Ю. Численное решение геометрически нелинейной задачи для толстостенного цилиндра, выполненного из материала Джона // Вестник НТУ “ХПИ”. Динамика и прочность машин. – 2004. – №19. – С. 141–148.
190. Никитин Л. В. Модель биоупругого тела // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1971. – Т. 3. – С. 154–157.
191. Норри Д. Введение в метод конечных элементов / Д. Норри, Ж. Де Фриз. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
192. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред. – М.: Мир, 1976. – 464 с.
193. Пацко Н. Л. К расчету напряженно-деформированного состояния осесимметричных резинометаллических изделий // Прикл. механика. – 1994. – Т. 30, № 1. – С. 18–25.
194. Педли Т. Гидродинамика крупных кровеносных сосудов. – М: Мир, 1980. – 400 с.
195. Писаренко Г. С. Уравнения и краевые задачи теории пластичности и ползучести / Г. С. Писаренко, Н. С. Можаровский. – Киев: Наук. думка, 1981. – 496 с.
196. Подильчук Ю. Н. Трехмерные задачи теории упругости. – Киев: Наук. думка, 1979. – 240 с.
197. Ривлин Р. С. Большие упругие деформации // Реология. Теория и приложения / Под ред. Ю. Н. Работнова, П. А. Ребиндера. – М.: Изд-во иностр. лит., 1962. – С.421–458.

198. Савин Г. Н. Общая нелинейная теория упругости (обзор) / Г. Н. Савин, Ю. И. Койфман // Прикл. механика. – 1970. – Т. 6, вып. 12. – С. 3–26.
199. Седов Л. И. Механика сплошной среды. – М.: Наука, 1973. – 584 с.
200. Снеддон И. Н. Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1961. – 219 с.
201. Суюншалиев Н. Х. Некоторые задачи теории конечных упругих деформаций. – Ташкент: Фан, 1988. – 128 с.
202. Тимошенко С. П. Теория упругости / С. П. Тимошенко, Дж. Гудьер. – М.: Наука, 1975. – 576 с.
203. Уилкинсон Р. Линейная алгебра: Справочник алгоритмов на языке АЛГОЛ. – М.: Машиностроение, 1976. – 389 с.
204. Усик Т. П. Исследование больших деформаций анизотропных гиперупругих тел вращения: Дис. ... канд. техн.: 01.02.04. – Защищена 14.05.98; Утв. 11.11.98. – Харьков, 1998. – 133 с.
205. Фанг Я. Ч. Математические модели зависимости напряжение–деформация для живых мягких тканей // Механика полимеров. – 1975. – Т. 5. – С. 850–867.
206. Феодосьев В. И. Соппротивление материалов. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
207. Физиология кровообращения: Физиология сосудистой системы. Руководство по физиологии / Под ред. Б. И. Ткаченко. – Л.: Наука, 1984. – 652 с.
208. Филин А. П. Прикладная механика деформируемого твердого тела. – М.: Наука, 1975. – Т. 1. – С. 832.
209. Хан Х. Теория упругости: Основы линейной теории и ее применения. – М.: Мир, 1988. – 344 с.
210. Черных К. Ф. Введение в анизотропную упругость. – М.: Наука, 1988. – 192 с.
211. Черных К. Ф. Теория больших деформаций / К. Ф. Черных, З. Н. Литвиненкова. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1988. – 256 с.
212. Янютин Е. Г. Импульсное деформирование упругих элементов конструкций. – Киев: Наук. думка, 1993. – 147 с.
213. Янютин Е. Г. Напряженное состояние цилиндра конечной длины под действием импульсной нагрузки / Е. Г. Янютин, Т. В. Мымка // Вестник НТУ "ХПИ". – N 95. – С. 25–31.
214. Янютин Е. Г. Импульсные воздействия на упруго-деформируемые элементы конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский – Харьков: Изд-во ХГАДТУ, 2001. – 184 с.
215. Янютин Е. Г., Янчевский И. В. Обратная задача теории упругости при нестационарном неосесимметричном нагружении цилиндрической оболочки / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский // Вестник НТУ "ХПИ". – N 104. – С. 125–131.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	3
Часть 1. Биомеханика левого желудочка сердца с кусочно-однородной стенкой.....	6
Глава 1. Обзор и анализ исследований гиперупругих тел вращения.....	8
Глава 2. Метод решения задач нелинейного деформирования тел вращения.....	16
2.1. Постановка задачи.....	16
2.2. Основные кинематические соотношения.....	16
2.3. Физический закон для гиперупругих тел вращения.....	20
2.4. Вариационный принцип возможных перемещений в приращениях.....	36
2.5. Соотношения МКЭ для вариационного принципа в приращениях.....	40
Глава 3. Методика и алгоритм решения поставленной задачи.....	44
3.1. Алгоритм расчета.....	44
3.2. Структура и особенности программы.....	46
3.3. Оценка достоверности результатов численных решений.....	49
Глава 4. Численный анализ НДС модели ЛЖ сердца.....	60
4.1. Математическая модель ЛЖ сердца.....	61
4.2. Методика численных исследований НДС ЛЖ.....	63
4.3. НДС усеченной однородной и полной кусочно-однородной моделей ЛЖ.....	64
4.4. Влияние трансмурального, эндокардиального, интрамурального и эпикардиального включений на НДС и ВПО модели ЛЖ.....	73
Выводы.....	78
Часть 2. Пульсирующее течение крови в артериях.....	80
Глава 5. Обзор постановок задач о гидроупругом деформировании крупных кровеносных сосудов и методов их решения.....	82
Глава 6. Теория периодического течения вязкой жидкости в толстостенном гиперупругом цилиндрическом сосуде.....	99
6.1. Математическая модель движения вязкой жидкости в деформируемом сосуде.....	99
6.2. Математическая модель артерии.....	106
6.3. Граничные и начальные условия.....	115
Глава 7. Численное решение нелинейных задач течения жидкости в цилиндрических сосудах.....	119
7.1. Алгоритм и программа.....	119

7.2. Сравнение известных решений с полученными результатами и анализ их сходимости.....	123
Глава 8. Моделирование течения крови в крупных кровеносных сосудах.....	132
8.1. Распространение волн давления в сосуде	132
8.2. Влияние начального продольного натяжения.....	136
8.3. Анализ влияния стеноза	143
8.4. Анализ влияния изменения физических характеристик стенки сосуда.....	152
8.5. Анализ влияния слабой коничности сосуда.....	158
8.6. Анализ распределения напряжений по толщине стенки сосуда.....	163
8.7. Теоретико-экспериментальная параметризация артериального резервуара.....	168
Выводы	174
Литература.....	176
Оглавление	188

In this book mathematical biomechanical models of arteries and the left ventricle of heart were constructed. The numerical research have been conducted of influences of scarrings observable in case of a chronic stage of myocardial infarction, on the deformation mode and end-diastolic intracavitary volume depending on scarrings' position and their size. The issues related to nonsteady hemodynamics of mammals' large blood vessels have been solved. It has been proved that the influence of a number of physical and geometrical characteristics of the vessel walls (original longitudinal stress, tapering degree, local stenoses, etc.) on mechanical and hydrodynamic parameters of the blood system can be considerable.

For specialists in the fields of biomechanics and cardiology.

Kantor Boris
Kundelyev Andriy
Misyura Yevgeniya

**BIOMECHANICS OF HYPERELASTIC
FIGURES OF REVOLUTION**

У книзі побудовані математичні моделі артерій та лівого шлуночка серця. Чисельно досліджено вплив рубців у хронічній стадії інфаркту міокарда в стінці шлуночка залежно від їхнього розташування та розмірів на НДС і скінченно-діастолічний внутрішньопорожнинний об'єм. Розв'язані задачі нестационарної гемодинаміки великих кровоносних судин ссавців. Показано, що вплив ряду фізичних і геометричних характеристик стінок артерії (початкового поздовжнього натягу, ступеня конічності, локальних стенозів та ін.) на механічні й гідродинамічні параметри кровоносної системи може бути істотним.

Для фахівців у галузі біомеханіки та кардіології.

Наукове видання

Кантор Борис Якович
Кунделєв Андрій Юрійович
Місюра Євгенія Юріївна

БІОМЕХАНІКА ГІПЕРПРУЖНИХ ТІЛ ОБЕРТАННЯ

Російською мовою

Відповідальні редактори *Шупіков О. М., Мартиненко О. В.*

Підписано до друку . Формат .
 Папір . Гарнітура Times New Roman. Друк ризографічний.
 Наклад 1000 прим. Зам. .

ТОВ «Форт».
 Україна, пошт. індекс, м. Харків, вул. ХХХ, ХХ.
 Тел. (057) ХХХ-ХХ-ХХ.
 Свідоцтво серії ХХ № ХХХ від ХХ.ХХ.ХХХХ.