



THE ISSUE CONTAINS:

Proceedings of the 5th
International Scientific
and Practical Conference


**CONCEPTS FOR THE DEVELOPMENT OF
SOCIETY'S SCIENTIFIC POTENTIAL**

Prague, Czech Republic
19-20.01.2024


SCIENTIFIC COLLECTION
INTERCONF+

No 41 (185)
January, 2024




OPEN  ACCESS

	Шульга А.В.	ПОСТУЛАТЫ ЕДИНОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ, УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ЗАКОНЫ (КОНЫ) МИРОЗДАНИЯ	477
---	-------------	---	-----




LIGHT INDUSTRY AND FOOD INDUSTRY

	Ткаченко А.С. Бірта Г.О. Бургу Ю.Г. Чернуха О.П.	ДОСЛІДЖЕННЯ СПОЖИВНИХ ВЛАСТИВОСТЕЙ НЕТРАДИЦІЙНИХ ОЛІЙ	485
---	---	--	-----

GENERAL ENGINEERING AND MECHANICS

	Sakhvadze D. Jandieri G. Sakhvadze G. Saralidze B.	KELVIN-HELMHOLTZ EFFECT DURING HYDRO- VACUUM DISPERSION OF METALLURGICAL MELTS	493
	Sakhvadze D. Jandieri G. Sakhvadze G. Saralidze B.	TECHNOLOGICAL LINE FOR PRODUCTION OF ACTIVATED POWDERS BY HYDRO-VACUUM DISPERSION OF LIQUID METALS	498
	Азиев Я.Г. Ахундова Г.А. Мамедова У.Д.	ЭКОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ АВТОМОБИЛЬНОГО ТРАНСПОРТА И ПУТИ ИХ РЕШЕНИЯ	503


INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

	Zeynallı- Hüseynzade L.	EVALUATION OF MACHINE LEARNING ALGORITHMS' PERFORMANCE IN DIGITAL TRANSFORMATIONS: A COMPARATIVE ANALYSIS	510
	Алієва М.К.	ІРФС ЯК ЗАСІБ ПІДВИЩЕННЯ ЕФЕКТИВНОСТІ DVPN	519
	Голубничий Д.Ю. Коломійцев О.В. Осієвський С.В. Третяк В.Ф. Рибальченко А.О. Любченко О.В. Головченко О.С.	МЕТОД ВІДСІКАННЯ БЕЗПЕРСПЕКТИВНИХ ВАРІАНТІВ ДЛЯ ЗАДАЧ ЦІЛОЧИСЕЛЬНОГО ЛІНІЙНОГО ПРОГРАМУВАННЯ З БУЛЕВИМИ ЗМІННИМИ З ВИКОРИСТАННЯМ РАНГОВОГО ПІДХОДУ	526

ARCHITECTURE, CONSTRUCTION AND DESIGN

	Kutsalo O.	PRINCIPLES OF SOCIAL HOUSING DEVELOPMENT IN SPAIN	556
---	------------	--	-----






PHYSICAL EDUCATION AND SPORTS

	Cherevko S. Dorosh V. Lutaeva N.	UNDERSTANDING THE CATEGORY OF VOLITIONAL QUALITIES IN THE CONTEXT OF RUNNING ACTIVITY OF ATHLETES	574
---	--	---	-----

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

 DOI 10.51582/interconf.19-20.01.2024.064

Метод відсікання безперспективних варіантів для задач цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними з використанням рангового підходу

Голубничий Дмитро Юрійович¹ ,
Коломійцев Олексій Володимирович² ,
Осієвський Сергій Валерійович³ ,
Третяк Вячеслав Федорович⁴ ,
Рибальченко Аліна Олександрівна⁵ ,
Любченко Олексій Вікторович⁶ ,
Головченко Олександр Сергійович⁷ 

¹ кандидат технічних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних систем;
Харківський національний економічний університет імені Семена Кузнеця; Україна

² Заслужений винахідник України, доктор технічних наук, професор,
професор кафедри комп'ютерної інженерії та програмування;
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; Україна

³ кандидат технічних наук, доцент, начальник кафедри факультету;
Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба; Україна

⁴ кандидат технічних наук, доцент, старший науковий співробітник,
науковий співробітник наукового центру Повітряних Сил;
Харківський національний університет Повітряних Сил імені Івана Кожедуба; Україна

⁵ аспірантка, інженер 1 категорії кафедри комп'ютерної інженерії та програмування;
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; Україна

⁶ аспірант, інженер 1 категорії кафедри комп'ютерної інженерії та програмування;
Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут»; Україна

⁷ студент групи СПМ-23-5;
Харківський національний університет радіоелектроніки; Україна

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

Анотація.

Стаття досліджує проблему оптимізації структури розподілених баз даних для хмарних OLTP-систем, та особливості методу відсікання неперспективних варіантів при рішенні задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними з використанням рангового підходу.

Ключові слова:

*ранговий підхід
цілочисельне програмування
фрагментація бази даних*

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

1. Проблема оптимізації структури розподілених баз даних для хмарних OLTP-систем.

Бази даних займають центральне місце в автоматизованих інформаційно-управляючих системах (АІУС). Від ефективності та якості їх побудови багато в чому залежить ефективність інформаційних систем, що розробляються. Тому розробка математичних моделей для САПР БД є важливим та актуальним завданням. Для досягнення високої продуктивності розподілених додатків, що працюють з БД, необхідні ефективні методи проектування РБД та оптимізації їхньої структури.

Традиційно вузьким місцем АІУС є зниження продуктивності при зростанні навантаження (збільшення кількості користувачів), накопиченні інформації за тривалий проміжок часу, а також висока фрагментація збережених даних, яка характерна для транзакційних систем. Це особливо критично для ринку OLTP-рішень, які призначені для введення, структурованого зберігання та обробки інформації в режимі реального часу. Крім того, з тієї ж причини у них суттєво обмежені можливості виконання таких функцій, як формування бухгалтерської та аналітичної звітності в різних розрізах та з різною глибиною деталізації. Для вирішення цієї проблеми компанії, що надають послуги, змушені купувати дороге обладнання, проводити його налаштування та постійно користуватися послугами високооплачуваних фахівців. У зв'язку з цим як базова архітектура при розробці білінгових OLTP-систем пропонується використовувати хмарну технологію, яка дозволить замінити великі капітальні витрати на реалізацію такої системи операційними. Ідеологія цього підходу полягає у перенесенні обчислень, обробки та зберігання даних значною мірою з персональних комп'ютерів на сервери мережі Інтернет. Актуальним завданням у цьому випадку є оптимальне розподілення даних у хмарі. Цим можна досягти значного скорочення витрат і підвищення швидкості роботи системи. В даний час в більшості випадків такі системи будуються без урахування критеріїв ефективності і з великим запасом масштабування [1-5].

Нехай є мережа з довільною топологією (хмара), що з'єднує вузли (сервери), і ЛОМ з регулярною структурою, всі ЕОМ яких мають доступ до мережі з довільною топологією. Крім того, є БД, яка розподілена по вузлах хмари. Запит, що надходить на

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

будь-який вузол мережі з довільною топологією, передбачає доступ до певного фрагменту РБД, і всі запити до одного і того ж фрагмента мають різну довжину і вимагають для відповіді різний об'єм даних. Схема обробки запитів полягає в наступному. Запит, ініційований на вузлі, що входить до складу мережі регулярної структури надходить у вхідну чергу вузла мережі з довільною топологією. Процесор ЕОМ обробляє запити у порядку надходження. Якщо потрібний фрагмент міститься в локальній БД вузла, до якої надійшов запит, то запит обробляється і результат надходить на комп'ютер, який ініціював даний запит. Якщо потрібний фрагмент міститься в іншому вузлі, запит пересилається в цей вузол, там обробляється і результат пересилається в початковий вузол.

З описаної схеми обробки запитів у системі слідує, що в процесі обслуговування протягом кожної одиниці часу каналами зв'язку пересилається деякий об'єм даних. Загальне значення цього об'єму, що пересилаються по каналах зв'язку в хмарній структурі, залежить від розподілу фрагментів по локальних БД мережі з хмарною структурою. Чим менший середній об'єм даних, що пересилаються по каналах мережі за одиницю часу, тим вище швидкість обробки запитів і нижча загальна вартість трафіку. Цей об'єм буде мінімальним, якщо на кожному вузлі буде повний набір фрагментів РБД. Для великих БД це практично недосяжно, оскільки обсяги пам'яті вузлів обмежені. Тому виникає завдання оптимального розміщення фрагментів БД по вузлах хмари з урахуванням обмеження на їх доступний дисковий простір.

У зв'язку з тим, що у хмарних технологіях використовується бізнес-модель "плата в міру використання", а вартість зберігання інформаційних масивів є лінійно зростаючою функцією від їх об'єму, то із урахуванням необхідності підвищення доступності та надійності зберігання даних іншим актуальним завданням є визначення оптимальної кількості копій (реплік) фрагментів БД та отримання варіанта їх розміщення, щоб сумарна цінність реплік фрагментів була максимальною, а сумарна вартість оренди апаратних ресурсів не перевищувала задані межі, і виконувались обмеження, пов'язані з обсягом доступної пам'яті кожного вузла.

Даний тип задач відносить до рішення задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

(ЦЛП з ВЗ). Домінуюче місце в методах рішення цих задач у даний час займають комбінаторні методи. До них у першу чергу можна віднести методи повного перебору, віток і границь, динамічного програмування, а також локальні алгоритми. Практичне застосування даних методів ускладнено при рішенні задач великої розмірності.

На жаль задачі ЦЛП з ВЗ відносяться до класу NP-повних задач, які з трудом підлягають рішенню навіть при використанні сучасних ЕОМ (табл. 1, 2) [4–5].

Таблиця 1

Вплив технічного удосконалення ЕОМ на поліноміальні та експоненціальні алгоритми

Функції часової складності	Розмір найбільшої задачі, яка вирішується за 1 годину		
	На сучасних ЕОМ	На ЕОМ, в 100 раз більш бистріших	На ЕОМ, в 1000 раз більш бистріших
n	N_1	$100 N_1$	$1000 N_1$
n^2	N_2	$10 N_2$	$31,6 N_2$
n^3	N_3	$4,64 N_3$	$10 N_3$
n^5	N_4	$2,5 N_4$	$3,98 N_4$
2^n	N_5	$6,64+N_5$	$9,97+N_5$
3^n	N_6	$4,19+N_6$	$6,29+N_6$

Таблиця 2

Максимальна розмірність задач, які розв'язуються за даний час

Складність	Час рішення задачі					
	1 с	10^2 с 1,7 хв.	10^4 с 2,7 хв.	10^6 с, або 12 діб	10^8 с, або 3 роки	10^{10} с, або 3 століття
$1000 \times n$	10^3	10^5	10^7	10^9	10^{11}	10^{13}
$1000 \times n \times \log n$	140	$7,7 \times 10^3$	$5,2 \times 10^5$	$3,9 \times 10^7$	$3,1 \times 10^9$	$2,6 \times 10^{11}$
$100 \times n^2$	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	10^7
$10 \times n^3$	46	$2,1 \times 10^2$	10^3	$4,6 \times 10^3$	$2,1 \times 10^4$	10^5
$n \times \log n$	22	36	54	79	112	156
$2^{n/3}$	59	79	99	119	139	159
2^n	19	26	33	39	46	53
3^n	12	16	20	25	29	33

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

Спроби зменшення часу рішення задач ЦЛП з БЗ за рахунок розпаралелювання зштовхуються з іншою проблемою теорії паралельних обчислень, яка полягає в тому, що з точки зору паралельних алгоритмів даний тип задач відноситься до класу сильнозв'язаних задач і тому погано піддається розпаралелюванню. Тому, при розробці паралельних алгоритмів для рішення задачі ЦЛП з БЗ крім протиріччя між точністю рішення задачі і часом її рішення, виникає ще одне протиріччя – між сильною зв'язністю властивій даній задачі і необхідністю її розпаралелювання.

Тому є актуальним розробка методу відсікання безперспективних варіантів для задач цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними з використанням рангового підходу

2. Модель рангового підходу до рішення задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними

Загальна постановка цієї задачі формулюється таким чином. Необхідно знайти вектор \vec{x} , що доставляє максимум функції:

$$f(\vec{x}) = \sum_{j=1}^n c_j \times x_j, \quad (1)$$

при виконанні умов:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \times x_j \leq b_i, \quad (2)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad i = (\overline{1,m}); \quad j = (\overline{1,n}). \quad (3)$$

Для спрощення викладу математичної моделі розглянемо одномірну задачу, тобто максимізуємо функціонал

$$f(\vec{x}) = c_1 \times x_1 + c_2 \times x_2 + \dots + c_n \times x_n, \quad (4)$$

при обмеженнях:

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

$$\sum_{j=1}^n a_{1j} \times x_j \leq b, \quad (5)$$

$$c_1 \geq c_2 \geq \dots \geq c_n; \quad a_{ij} > 0; \quad c_j > 0 \quad j = (\overline{1, n}) \quad (6)$$

Поставимо у відповідність задачі (4–6) граф G (рис. 1), що зображує бінарне дерево усіх рішень, число яких дорівнює 2^n [6–10].

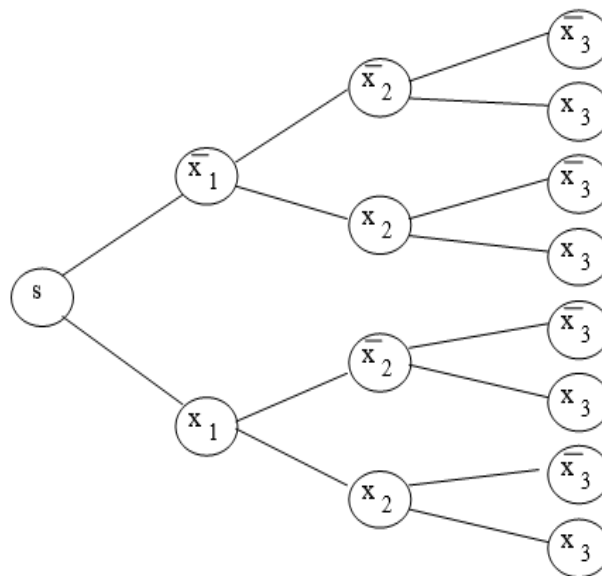


Рисунок 1
Граф G

Множина $X = \{x_j\}$ усіх векторів розмірності n , усі компоненти яких $x_j \in \{0, 1\}$ становлять множину можливих значень.

Деяка його підмножина V , усі вектори якої задовольняють обмеженням (5 – 6), утворюють множину припустимих рішень.

Множина $H \subset V$ є множиною оптимальних рішень вихідної задачі, якщо для будь-яких векторів $x \in H$ функціонал (4) досягає свого екстремального значення.

Усю множину можливих рішень можна розбити на групи векторів, що містять: один компонент $x_j = 1$, $j = (\overline{1, n})$ і всі

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

інші рівні 0; два компоненти $x_j = 1$ і всі можливі їхні сполучення по 2, а інші, рівні 0; три компоненти $x_j = 1$ і всі можливі їхні сполучення й т. д. n – компонент $x_j = 1$. Якщо позначити підмножини векторів цих груп через m^r $r = \overline{(1, n)}$, тоді множину усіх можливих рішень можна записати як об'єднання підмножин m^r :

$$X = \bigcup_{j=1}^n m^r. \quad (7)$$

Як показано в роботі [6–9], згідно з графом G можна побудувати граф G' (рис. 2), у якому множина шляхів рангу r (ранг шляху – число ребер, що утворюють шлях) відповідає групам підмножин, які описуються співвідношенням (7).

Для цього вершину s з'єднуємо спрямованими ребрами з вершинами $1, 2, \dots, n$ і т. д.; вершину i з'єднуємо з вершинами $i+1, \dots, n$. В останню вершину n входять ребра, спрямовані із усіх вершин, і жодне ребро із цієї вершини не виходить.

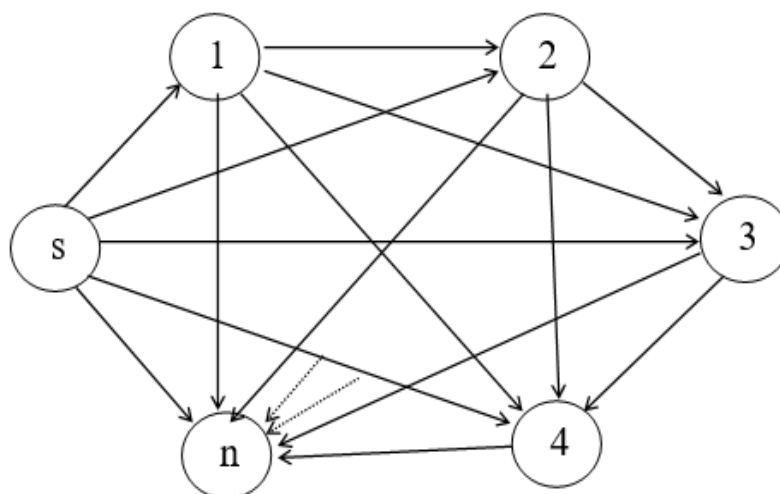


Рисунок 2
Граф G'

Дерево шляхів $D\Delta$ графа G' з вершини s будується таким чином: на нульовому ярусі ($r = 0$) розташуємо вершину s . На першому ярусі розмістимо всі вершини графа G' , що мають

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

зв'язок з вершиною s і з'єднаємо їх з s (при цьому утворилася підмножина шляхів рангу $r=1$). У другому ярусі розмістяться всі вершини, що мають зв'язок з вершинами першого ярусу, без вершини з номером 1 і з'єднаємо їх з вершинами першого ярусу (утворені всі шляхи рангу $r = 2$) і так далі доти, поки в останньому не залишиться одна вершина n . На рис. 3.3 наведено приклад, коли $n = 4$.

Геометрично вершина k графа $D\Delta$ рангу r – це множина векторів \vec{X} ($x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n$), у яких $x_k = 1$, а на позиціях від 1 до k перебуває r одиниць (рис. 4). Ребру, що входить у вершину k графа $D\Delta$, відповідає одиничний вектор \vec{e}_k ($0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0$) n -мірного одиничного куба V^n з одиницею в k -тій

позиції. Тоді, шляху μ_{sj}^r рангу r у графі $D\Delta$ відповідає вектор \vec{X} , який дорівнює сумі одиничних векторів ребер, через які він досяг вершину j рангу r , починаючи з вершини s .

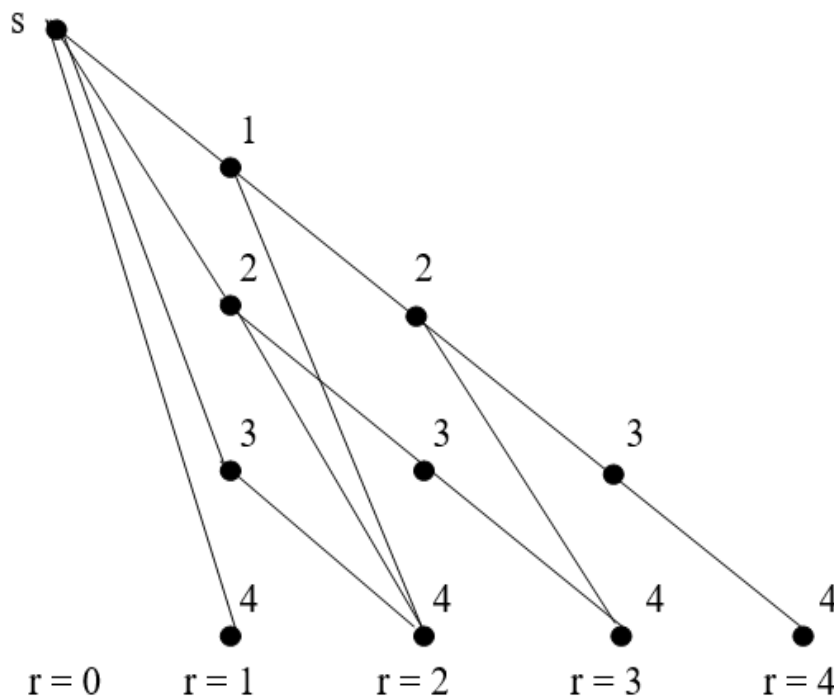


Рисунок 3
Граф $D\Delta$

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

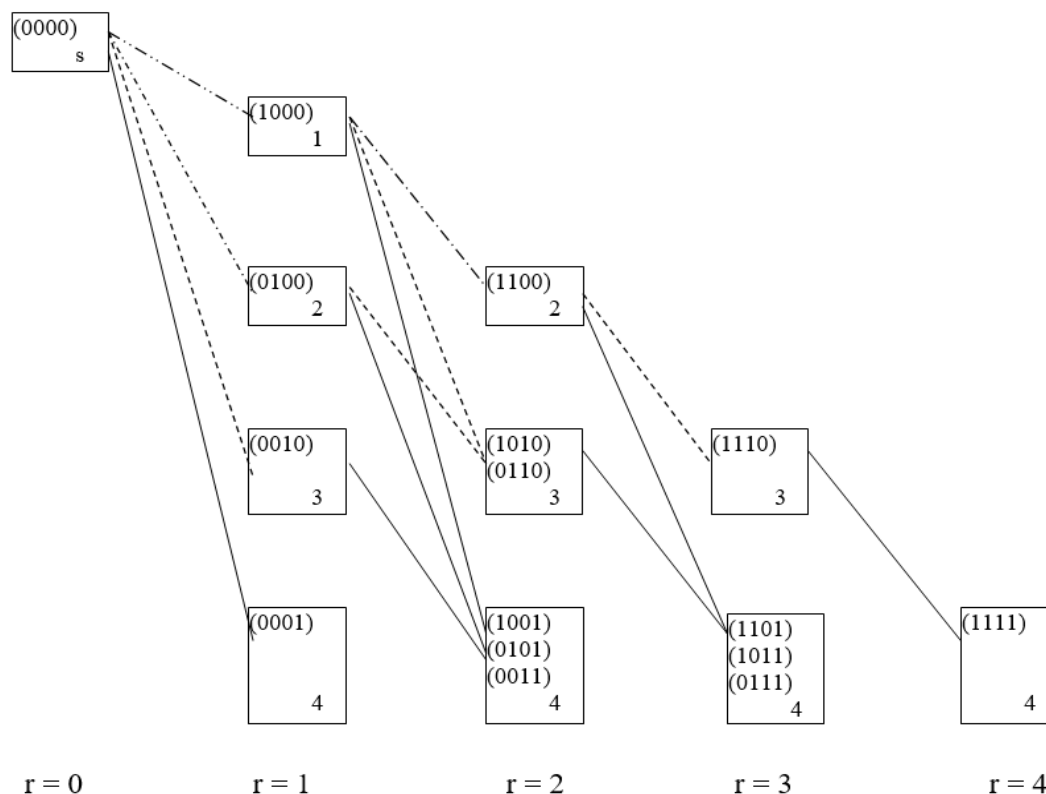


Рисунок 4

Геометрична інтерпретація графа $D\Delta$

Наприклад, шляху $\mu_{s24}^{r=2}$ відповідає вектор $\overrightarrow{x_{s24}}$, що утвориться сумою нульового вектора $\vec{0}$ {0000} і одиничних векторів $\vec{e}_2 = \{0100\}$, $\vec{e}_4 = \{0001\}$, тобто:

$$\overrightarrow{x_{s24}} = \vec{0} \{0000\} + \vec{e}_2 \{0100\} + \vec{e}_4 \{0001\} = \{0101\}$$

Нехай у графі $D\Delta$ кожному ребру, що входить у вершину j , $j = (\overline{1, n})$ відповідає дві ваги: вага c_j , якій дорівнює коефіцієнт при x_j у функціоналі (3.4), і вага a_{1j} , якій дорівнює коефіцієнту при x_j в обмеженні (5). Тоді, шлях μ_{sj}^r у графі $D\Delta$ з вершини s у вершину j характеризується двома довжинами: $d_c(\mu_{sj}^r)$ – довжиною за вагою функціонала й $d_a(\mu_{sj}^r)$ – довжиною за

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

вагою обмежень.

Множину шляхів $m_s^r(j)$ у графі $D\Delta$ до вершин j , розташовану на ярусах $r = \overline{(1, n)}$ від вершини s , можна зобразити у вигляді

$$m_s^r(j) = m_{sj}^{r=1} \cup m_{sj}^{r=2} \cup \dots \cup m_{sj}^{r=n}, \quad j = \overline{(1, n)}, \quad (8)$$

де m_{sj}^r – множина шляхів у графі $D\Delta$ від вершини s до вершин j , розташованих на r -х ярусах графа $D\Delta$ (ранг шляху $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$ визначається числом ребер, що утворюють цей шлях). Варто мати на увазі, що множині шляхів $m_{sj}^{r=k}$ у графі $D\Delta$ відповідає множина векторів $\{\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_v\}$, що містять k одиниць. Отже, $|m_{sj}^r| = C_n^{r=k}$, тобто кожному шляху в множині $m_{sj}^{r=k}$ відповідає деякий вектор (x_1, x_2, \dots, x_n) . З множини (8) слідує, що:

$$|m_s^r(j)| = C_n^{r=1} + C_n^{r=2} + \dots + C_n^{r=n} = 2^n - 1. \quad (9)$$

Таким чином, граф $D\Delta$ являє собою впорядкований за рангами еквівалент n -мірного одиничного куба V^n , у якому шляхи $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$ відповідають вершинам V^n . Довжина кожного шляху за вагою функціонала визначає значення функціонала (4) у вершинах одиничного куба V^n . Довжина за вагою обмежень визначає, чи відповідає дана вершина V^n обмеженням (5), тобто належить вершина n -мірного одиничного куба V^n гіперплощини (5). Якщо $d_a(\mu_{sj}^r)_1 \leq b$, то вершина належить гіперплощині (5), і будемо говорити, що шлях μ_{sj}^r задовольняє властивості v . Якщо $d_a(\mu_{sj}^r)_1 > b$, то вершина n -мірного куба, що відповідає шляхам μ_{sj}^r , не належить гіперплощині (5), а шлях μ_{sj}^r вважаємо таким, який

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

не задовольняє властивості v .

Оптимальному рішенню задачі (4 – 6) в $D\Delta$ відповідає самий довгий шлях за вагою функціонала, що задовольняє властивості v .

У випадку m -мірної задачі (1 – 3) ребрам, що входять до вершин графа $D\Delta$, крім ваги c_j функціонала, відповідає m ваг

a_{ij} обмежень, а шлях μ_{sj}^r характеризується довжинами: $d_c(\mu_{sj}^r)$ – довжиною за вагою функціонала й $d_a(\mu_{sj}^r)_i$, $i = \overline{(1, m)}$ – довжинами за вагою m обмежень.

На основі математичної моделі рангового підходу для побудови алгоритмів рішення завдань ЦЛП із ВЗ покладений принцип оптимізації у напрямку в дискретному просторі станів, заданому графом $D\Delta$ [1]. Подання n -мірного одиничного куба у вигляді графа $D\Delta$ дозволяє розбити множину усіх шляхів графа

$D\Delta$ з нульової вершини s на Ω локальних областей, де $|\Omega|$ не перевищує величину $\frac{n^2}{2}$, оскільки число вершин у графі $D\Delta$ визначається сумою чисел натурального ряду

$$\Omega = n + (n-1) + \dots + 1 = \frac{n \cdot (n+1)}{2} \approx \frac{n^2}{2}, \quad (10)$$

причому Ω -області в графі $D\Delta$ упорядковані за рангами і шляхи наступного рангу можуть бути отримані на основі шляхів попереднього рангу за рахунок приєднання до них ребра (j, p) у графі $D\Delta$:

$$m_{sp}^{r=r+1} = \{(\forall (\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r)) \cup (j, p)\}$$

Нехай задані деякі правила відсікання $\{L_w\}$ шляхів μ_{sj}^r у множинах m_{sj}^r . Тоді, якщо в множинах утримуються шляхи, що задовольняють властивості v і правилам $\{L_w\}$, то під оптимізацією за напрямком у графі $D\Delta$ до вершини p будемо

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

розуміти формування множин $m_{sp}^{r=r+1}$ наступного рангу, які виходять за рахунок виділення в m_{sj}^r шляхів, приєднання до яких ребрам (j, p) дозволить у множині $m_{sp}^{r=r+1}$ одержати шляхи, що задовольняють правилам $\{L_w\}$ на основі наступного рекурентного співвідношення

$$\forall (\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r) \left\{ \mu_{sp}^{r=r+1} = L_w \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \} \right\} \quad p = \overline{(r+1, n)}; \quad j = \overline{(r, n)}, \quad (11)$$

де $\mu_{sj}^r \cup (j, p)$ – шлях з вершини s графа DA у вершину p , що проходить через проміжну вершину j і який задовольняє правилам $\{L_w\}$, тобто який одержуємо за рахунок приєднання до шляху μ_{sj}^r ребра (j, p) , якщо таке з'єднання не суперечить правилам відсікання неперспективних варіантів рішень $\{L_w\}$.

Уведемо узагальнену процедуру A_0 , що дозволяє на основі обраного правила відсікання $\{L_w\}$ вирішувати задачу (1–3).

Узагальнена процедура A_0

КРОК 1. З вершини s будуються множини шляхів $m_{sj}^{r=1}$, $j = \overline{(1, n)}$,

що задовольняють властивості v . Виділяються шляхи $\mu_{sj}^{r=1}$, що визначають локальні екстремуми областей Ω_j .

КРОК 2. Формуються множини шляхів $m_{sp}^{r=r+1}$ $p = \overline{(r+1, n)}$ наступного рангу, що задовольняють властивості v , на базі

множини шляхів m_{sj}^r попереднього рангу відповідно до рекурентного співвідношення (11). В утворених множинах $m_{sp}^{r=r+1}$ здійснюється відсікання шляхів відповідно до обраного правила

відсікання $\{L_w\}$ і виділяються шляхи $\mu_{sp}^{r=r+1}$, що визначають локальні екстремуми областей Ω_p .

КРОК 3. Перевіряємо, чи всі множини $m_{sp}^{r=r+1}$ наступного рангу порожні. Якщо це так, то переходимо до кроку 4, якщо ні, то

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

перевіряємо $r = (n - 1)$. У випадку виконання рівності переходимо до кроку 4, інакше збільшуємо r на 1 і виконуємо крок 2.

КРОК 4. Виділяємо серед множин локальних екстремумів Ω_j , $j = \overline{1, n^2/2}$ глобальний і процедура A_0 закінчує роботу.

Узагальнена процедура A_0 дозволяє визначити локальні екстремуми в Ω -областях графа $D\Delta$ щораз на кроці 2 і потім на кроці 4 виділити глобальний екстремум з $n^2/2$ локальних, які отримуються на основі принципу оптимізації за напрямком (11) з використанням правил відсікання, що вводять, $\{L_w\}$ шляхів у m_{sj}^r множинах.

3. Метод відсікання безперспективних варіантів для задач цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними з використанням рангового підходу

В основу методу відсікання безперспективних варіантів для задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними з використанням рангового підходу покладемо множину стратегій $\{L_w\}$, застосування яких до узагальненої процедури A_0 приведе до розробки алгоритмів рішення цієї задачі цілочисельного лінійного програмування (ЦЛП) з булевими змінними (БЗ) [6–10].

Найбільш простою стратегією відсікання L_1 при формуванні $r=r + 1$ шляхів наступного рангу в множинах $m_{sp}^{r=r+1}$, на основі процедури A_0 , є виділення в m_{sj}^r шляхів максимальної довжини за вагою функціонала c_j , довжини яких за вагою обмежень не перевищують величини b_i , тобто $d_a(\mu_{sj}^r)_i \leq b_i$. У цьому випадку шляхами, що задовольняють властивості v , будемо називати шляхи μ_{sj}^r , довжини яких за вагою обмежень не перевищують величину b_i . Тоді, рекурентне співвідношення (11), що відповідає стратегії L_1 , приймає вигляд:

$$\mu_{sp}^{r=r+1} = \max_{c_j} \left\{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \right\}, \quad p = \overline{(r+1, n)}; \quad j = \overline{(r, n)}, \quad (12)$$

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

Використання стратегії L_1 не завжди дає оптимальне рішення задачі. Виникнення ситуації відсівання шляхів за співвідношенням (12), що відповідають оптимальному рішенню задачі обумовлене тим, що шляхи з більшим значенням щодо функціонала можуть набирати й більшу довжину за вагою обмежень. Отже, на деякому ранзі виникає ситуація, коли через обмеження шляхи наступних рангів у графі DA побудувати неможливо, а шляхи з меншим значенням довжини за вагою функціонала, що мають і меншу довжину за вагою обмежень, відкинуті по стратегії L_1 . На їхній основі могли б бути отримані шляхи більшого рангу, а за рахунок цього – й більшої величини за вагою функціонала.

Позначимо через $\mu_{sj=\gamma}^{**r=q}$ шлях рангу $r = q$ з найбільшою довжиною $d_c(\mu_{sj}^{**r})$ серед шляхів $\left\{ \mu_{sj}^{*r<q} \right\}$ рангу $r < q$, що відповідають локальним екстремумам, обумовленим процедурою A_0 з використанням стратегії L_1 . Тоді сформулюємо правило відсівання L_2 для одномірної задачі, на основі наступної теореми.

Теорема 1. У графі DA не існує шляху, що задовольняє властивості v , рангу $r < q$, для якого виконується нерівність

$$d_c(\mu_{sj}^{*r<q}) < d_c(\mu_{sj=\gamma}^{**r=q}).$$

Доказ. На кожному етапі формування множини шляхів $m_{sp}^{r=r+1}$ $p = (\overline{r}, n)$ процедурою A_0 , що використовує правило L_1 , у цих

множинах будуються шляхи $\mu_{sp}^{r=r+1}$, задовольняючі властивості v , відповідно до співвідношення (12). Припустимо, що в DA існує

шлях $\mu_{sj=k}^{-r<q}$, довжина якого $d_c(\mu_{sj=k}^{-r<q}) < d_c(\mu_{sj=\gamma}^{**r=q})$ й він задовольняє властивості v . Існування такого шляху можливо, якщо існують

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

шляхи $\left\{ \begin{matrix} - \\ r < q \end{matrix} \right\} \mu_{sj}$, що задовольняють властивості v , довжини яких $d_c \left(\begin{matrix} - \\ r < q \end{matrix} \right) \mu_{sj}$ перевищують довжини шляхів $d_c \left(\begin{matrix} * \\ r < q \end{matrix} \right) \mu_{sj}$ відповідних локальним екстремумам, виділеним процедурою A_0 з використанням стратегії L_1 . Покажемо, що дане припущення невірне. Для цього доведемо наступне твердження.

Твердження 1. Процедура A_0 з використанням стратегії L_1 дозволяє визначати в графі $D\Delta$ шляхи рангу $r < q$ максимальної довжини за вагою функціонала, що задовольняють властивості v , від вершини s до усіх інших вершин графа $D\Delta$.

Якщо вірно твердження 1, то значить не існує шляхів $\begin{matrix} - \\ r < q \end{matrix} \mu_{sj}$, що задовольняють нерівності $d_c \left(\begin{matrix} - \\ r < q \end{matrix} \right) \mu_{sj} > d_c \left(\begin{matrix} * \\ r < q \end{matrix} \right) \mu_{sj}$, й, отже,

припущення про існування шляху $\begin{matrix} r < q \\ \mu_{sj=k} \end{matrix}$, для якого виконується нерівність $d_c \left(\begin{matrix} r < q \\ \mu_{sj=k} \end{matrix} \right) > d_c \left(\begin{matrix} ** \\ r=q \end{matrix} \right) \mu_{sj}$, теж невірна й тоді теорема доведена.

Правомірність твердження 1 для множин $m_{sj}^{r=1}$, $m_{sj}^{r=2}$ очевидна, оскільки множини $m_{sj}^{r=1}$ містять по одному шляху рангу $r = 1$, а в множинах $m_{sj}^{r=2}$ утримуються всі шляхи $\mu_{sj}^{r=2}$ рангу $r = 2$ графа $D\Delta$. Нехай на основі множин $m_{sj}^{r=2}$ і $j = (\overline{r, n})$ процедурою A_0 з використанням стратегії L_1 сформовані множини $m_{sj}^{r=3}$. Виділимо в $m_{sj}^{r=3}$ шляхи $\begin{matrix} * \\ r=3 \\ \mu_{sj} \end{matrix}$ максимальної довжини за вагою функціонала.

Припустимо, що в графі $D\Delta$ існує шлях $\begin{matrix} ** \\ r=3 \\ \mu_{sj} \end{matrix}$, який задовольняє

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

властивості v , але більш довгий, ніж $\mu_{sj}^{*r=3}$. Відповідно до рекурентного співвідношення (12) останнє можливо, якщо в множинах $m_{sj}^{r=2}$ є шляхи $\mu_{sj}^{*r=2}$ більш довгі, ніж шляхи $\mu_{sj}^{*r=2}$. Але це суперечить раніше встановленому факту, що шляхи $\mu_{sj}^{*r=2}$ самі довгі шляхи рангу $r = 2$ у графі $D\Delta$. Отже, припущення про існування шляху $\mu_{sj}^{**r=3}$ невірне, а значить твердження 1 справедливо й для множин $m_{sj}^{r=3}$.

Припустимо, що воно виконується й для $m_{sj}^{r=k+q}$, і доведемо, що воно вірно й для множин $m_{sj}^{r=k+1}$. Нехай на базі множини шляхів $m_{sj}^{r=k}$ процедура A_0 , яка використовує стратегію L_1 , побудувала множини шляхів $m_{sj}^{r=k+1}$. Виділимо в множинах $m_{sj}^{r=k+1}$ шляхи максимальної довжини $\mu_{sj}^{*r=k+1}$ та, припустимо, що в графі $D\Delta$ існує шлях $\mu_{sj}^{**r=k+1}$, який задовольняє властивості v , але довший $\mu_{sj}^{*r=k+1}$. Останнє можливо, якщо існує шлях $\mu_{sj}^{**r=k}$ більш довгий, ніж $\mu_{sj}^{*r=k}$, але який задовольняє властивості v . Однак це суперечить первісному припущенню про те, що шляхи $\mu_{sj}^{*r=k}$ самі довгі шляхи рангу $r = k$ у графі $D\Delta$, і, отже, допущення про існування шляху $\mu_{sj}^{**r=k+1}$ в $D\Delta$ $r = k + 1$ невірне, тобто твердження 1 справедливо й для множин $m_{sj}^{r=k+1}$.

Отже, ми показали, що твердження 1 вірно для множин $m_{sj}^{r=1}$, $m_{sj}^{r=2}$ і довели, що воно виконується для $m_{sj}^{r=3}$. Далі було припущено, що воно поширюється й на множини $m_{sj}^{r=k}$ й доведено,

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

що у випадку правильності припущення, твердження 1 справедливо й для множин рангу $r = k + 1$.

Таким чином, на основі принципу повної математичної індукції твердження 1 справедливо й для довільних множин $m_{sj}^{r < q}$, тому що при $r > q$ множина шляхів $m_{sj}^{r < q}$ порожня й, виходить, теорема 1 вірна.

З доведеної теореми 1 слідує стратегія відсікання L_2 , що дозволяє значення функціонала шляху $\mu_{sj}^{r=q}$ використовувати як верхню оцінку для відсікання шляхів у множинах $m_{sj}^{r < q}$ графа $D\Delta$. Стратегія L_2 використовується при побудові багатоступінчатих алгоритмів.

Не порушуючи стратегій L_1 і L_2 , можна ввести додаткове відсікання в множинах шляхів m_{sj}^r , що зображує стратегію L_3 , яка заснована на властивості графа $D\Delta$ і полягає в наступному. Зі структури графа $D\Delta$ видно, що для кожної його вершини j , яка відповідає області Ω_j , вага γ_j дорівнює сумі коефіцієнтів c_j у функціоналі (4), обумовлена за правилом:

$$\gamma_j = c_{j+1} + c_{j+2} + \dots + c_n, \quad \gamma_n = 0; \quad j = (\overline{1, n-1}), \quad (13)$$

представляє верхню оцінку збільшення величини значення локального екстремума в області Ω_j на усіх наступних рангах. Скорочення числа формованих шляхів μ_{sj}^r у множинах m_{sj}^r може бути досягнуто, якщо виконуються умови, обумовлені наступним досить очевидним твердженням 2.

Твердження 2. Якщо сума довжини шляху $d_c(\mu_{sj}^r)$ з підмножини r m_{sj}^r у вершину w і вага γ_w цієї вершини менша за вже отриману максимальну довжину $d_c(\mu_{sj=p}^r)$, то шляхи наступного рангу, побудовані на основі μ_{sj}^r , не можуть визначати оптимальне рішення задачі.

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

Справедливість твердження 2 слідує з того, що процедура A_0 зі стратегією L_1 вибирає глобальний екстремум із усіх локальних, а найбільша довжина за рахунок продовження шляху μ_{sj}^r вже менша одного з локальних екстремумів. Таким чином, перевірка умови:

$$d_c(\mu_{sp}^r) + \gamma_p < \max_{\{c_j\}} \left\{ d_c(\mu_{sp}^{*r}) \right\}, \quad (14)$$

де $d_c(\mu_{sp}^r)$ – довжина шляху μ_{sp}^r до вершини p рангу r за вагою c_j ; дозволяє виключити цей шлях з подальшого аналізу, як безперспективний, якщо умова виконана. На цій перевірці заснована стратегія L_3 .

Відмінною рисою від прикладу 2 є наявність порожніх множин m_{sj}^r . Це обумовлено застосуванням відсікання за умови (3.14).

Як показано в [4], спільне застосування стратегій L_1 і L_3 дозволяє в 3 рази зменшити число векторів, що будуються в множинах m_{sj}^r , у порівнянні із застосуванням однієї стратегії L_1 .

У результаті роботи процедури A_0 зі стратегіями L_1 , L_3 залишаються множини m_{sj}^r , для яких $r > q$, а для ефективної фільтрації безперспективних шляхів необхідно мати оцінки значення функціонала в областях Ω_j , $j = \overline{1, n^2/2}$ при $r > q$. Для цього введемо стратегію вибору шляхів з множини L_4 , що ґрунтується на процедурі, яка дозволяє одержати шляхи максимально можливого рангу r у графі $D\Delta$. Її можна реалізувати, якщо в $D\Delta$ визначати найкоротші шляхи за вагою обмежень на основі процедури A_0 між вершиною s і всіма іншими вершинами графа $D\Delta$, при цьому рекурентне співвідношення (11) для одномірної задачі (4 – 6) прийме наступний вигляд.

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

$$\mu_{sp}^{r=r+1} = \min_{a_{ij}} \{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \}; \quad p = \overline{(r+1, n)}; \quad j = \overline{(r, n)}, \quad i = 1. \quad (15)$$

Неважно побачити, що при цій стратегії формування шляхів у множинах m_{sj}^r залишається справедливим твердження 2 і для відсікання шляхів у множинах m_{sj}^r можна використовувати умову (3.14).

Реалізація процедури A_0 з урахуванням стратегій L_3, L_4 дозволяє сформулювати додаткову стратегію L_5 відсікання безперспективних шляхів у множинах m_{sj}^r , обумовлену наступною теоремою 2.

Теорема 2. Якщо з множини $m_{sj}^r, j = \overline{(r_{\max}, n)}$, максимального рангу r_{\max} , побудованого процедурою A_0 зі стратегіями L_3, L_4 , вибрати шлях μ_{sw}^r з найбільшим значенням за вагою функціонала c_j , то у випадку повторного рішення вихідного завдання досить формувати шляхи першого рангу $r = 1$ у множині $m_{sp}^r, p = \overline{(1, k)}$, де:

$$k = w - r_{\max} + 1, \quad (16)$$

а w -номер множини m_{sw}^r зі шляхом максимальної довжини за вагою функціонала, обумовлений при першому рішенні завдання.

Доказ. Припустимо, що існує шлях μ_{sp}^{*r} ($p > k$), який досягає значення максимального рангу r_{\max} . Оскільки $p > k$, то шлях μ_{sp}^{*r} у графі $D\Delta$ буде проходити по нижніх вершинах (рис. 3). Але ваги c_j , згідно з обмеженням (6), відсортовані в порядку убуття й, вершинам, що перебувають на більш низьких горизонтальних лінійках, в $D\Delta$ відповідають і менші ваги за функціоналом.

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

Тому на кожному ранзі шлях μ_{sp}^{*r} зможе набрати не більш, ніж шлях μ_{sw}^r , а, отже, він і в сумі набере за вагою $\{c_j\}$ довжину не більшу, ніж μ_{sw}^r . Що було потрібно довести.

Найбільш важливою стратегією L_6 є стратегія, заснована на понятті виділення коридору в множині m_{sj}^r , що дозволить будувати точні алгоритми рішення завдання (4 – 6). Оскільки нумерація змінних і вершин у графі ДА відповідає порядку убунання коефіцієнтів c_j у функціоналі, а процедура A_0 на кожному етапі формує множини m_{sj}^r , починаючи з індексів $j = (\overline{r, n})$, то шляхи $\mu_{sj}^r \in m_{sj}^r$ виявляться завжди відсортованими в порядку убунання довжин за вагою функціонала.

У вигляді теореми 3 сформулюємо правило, що дозволяє в множині m_{sj}^r виділити шлях $\bar{\mu}_{sj}^r$ з довжиною $d_c(\bar{\mu}_{sj}^r)$, стосовно якої всі шляхи з меншим значенням довжини за вагою функціонала можуть бути виключені з аналізу як неперспективні.

Теорема 3. Якщо відсортувати в множині $m_{sj}^r, j = (\overline{r, n})$ рангу r вектора в порядку убунання за вагою функціонала c_j , то шляхи,

в яких довжина $d_c(\mu_{sj}^r)$ менше довжини $d_c\left(\begin{matrix} \min \mu_{sj}^r \\ a_{ij} \end{matrix}\right)$, не можуть визначати оптимальне рішення задачі.

Доказ. Припустимо, що на основі шляху μ_{sj}^{*r} з множини m_{sj}^r ,

в якого довжина $d_c\left(\begin{matrix} \mu_{sj}^{*r} \\ a_{ij} \end{matrix}\right)$ менше, ніж довжина $d_c\left(\begin{matrix} \min \mu_{sj}^r \\ a_{ij} \end{matrix}\right)$, вдалося побудувати оптимальне рішення завдання (8–11). Тоді в множині

$m_{sp}^{r=r+1}, p = (\overline{r, n})$ наступного рангу повинен потрапити шлях і мінімальний за вагою обмежень, адже він тим більше буде задовольняти властивості v . Однак, довжина за вагою

функціонала в такого шляху буде більша, ніж в μ_{sj}^{*r} і, отже,

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

припущення про існування μ_{sj}^{*r} невірне, а цей шлях виключити з подальшого аналізу, що й було потрібно довести.

Застосування стратегій L_3 і L_6 дозволяє точно рішення дану (і будь-яку іншу) задачу.

Теорема 3 визначає поняття коридору.

Визначення. Під одномірним коридором з множини m_{sj}^r в множині $m_{sp}^{r=r+1}$ будемо розуміти сукупність шляхів μ_{sj}^r , які перебувають між верхньою границею множини m_{sj}^r і його нижньою границею, що задовольняють властивості v у множині $m_{sp}^{r=r+1}$. Верхня границя визначається шляхом з максимальною $d_c(\mu_{sj}^r)$, а нижня – теоремою 3.

Виходячи з поняття коридору, можна запропонувати наступну стратегію L_7 , яка являє собою ще одну стратегію вибору шляхів, що r полягає в тому, щоб з множини m_{sj}^r рангу r у множині $m_{sp}^{r=r+1}$, $p = (\overline{r, n})$, наступного рангу вибирати шляхи, що задовольняють властивості v і є максимальними за вагою функціонала c_j і мінімальним за вагою обмежень a_{1j} , що відповідає рекурентним співвідношенням (12), (15).

Твердження 3. Якщо в коридорі існують два шляхи – $\mu_{sj}^{*r} \in m_{sj}^r$ й $\mu_{sj}^{**r} \in m_{sj}^r$ – для яких

$$d_c(\mu_{sj}^{*r}) > d_c(\mu_{sj}^{**r}) \text{ т } d_a(\mu_{sj}^{*r}) \leq d_a(\mu_{sj}^{**r}),$$

то вектор

\vec{X} , що відповідає шляху μ_{sj}^{*r} не може належати оптимальному рішенню задачі (4–6). Покажемо справедливість твердження 3.

Для цього припустимо, що на основі шляху μ_{sj}^{**r} можна побудувати оптимальне рішення. Останнє означає, що на наступних рангах шлях μ_{sj}^{**r} набере більше значення за вагою функціонала, ніж шлях

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

μ_{sj}^{*r} , тобто $d_c(\mu_{sj}^{*r}) < d_c(\mu_{sj}^{**r})$. Але шлях μ_{sj}^{*r} може бути побудований у ту ж множину m_{sj}^r , що й шлях μ_{sj}^{**r} , який задовольняє властивості

v , але має довжину $d_a(\mu_{sj}^{*r}) \leq d_a(\mu_{sj}^{**r})$. При цьому за вагою функціонала до цього моменту шлях μ_{sj}^{*r} має довжину більшу, ніж

шлях μ_{sj}^{**r} . Отже, кожний з них набере ту саму величину за вагою s_j , але на початку $d_c(\mu_{sj}^{*r}) > d_c(\mu_{sj}^{**r})$. Виходить, що припущення про

те, що на основі шляху μ_{sj}^{**r} можна побудувати оптимальне рішення – не вірно, а твердження 3 – справедливо.

Далі розглянемо стратегію L_9 фільтрації рішень у коридорі на основі каліброваних векторів. Для цього введемо поняття каліброваного вектора $\bar{y}_j, j = (\overline{1, n})$ для кожної вершини j графа $D\Delta$.

Множина $\{\bar{y}_j\}$ утворить калібровану шкалу, яка дає верхню оцінку r_e , для будь-якого вектора \bar{X} , котрий відповідає шляху μ_{sj}^r , і що дозволяє визначити, на скільки рангів можна ще продовжити шлях μ_{sj}^r , що задовольняє властивості v .

Побудова каліброваних векторів \bar{y}_j почнемо з першої вершини графа $D\Delta$, спочатку відсортувавши коефіцієнти $\{a_{1j}\}$ у порядку зростання. Утвориться вектор $\bar{a}'_{1q}, q = (\overline{1, n})$, в якого $a'_{11} \leq a'_{12} \leq \dots \leq a'_{1n}$. У цьому векторі \bar{a}'_{1q} викреслюємо $a'_{1q} = a_{11}$, після чого формуємо компоненти каліброваного вектора \bar{y}_1 за

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

правилом:

$$y_{1k} = a_{1k} + y_{1(k-1)}; \quad k = (\overline{1, n-1}); \quad y_{10} = 0. \quad (17)$$

Далі у \vec{a}'_{1q} викреслюємо $a'_{1q} = a_{12}$, після чого аналогічно правилу (17) продовжуємо формувати компоненти вектора \vec{Y}_2, \vec{Y}_3 і т. д. На j -му кроці викреслюємо в \vec{a}'_{1q} елемент $a'_{1q} = a_{1j}$, тоді:

$$y_{jk} = a_{jk} + y_{j(k-1)}; \quad k = (\overline{1, n-j}); \quad y_{j0} = 0; \quad y_{n0} = b_1; \quad j = (\overline{1, n-1}). \quad (18)$$

Сформулюємо правила, за яких за допомогою каліброваного вектора \vec{Y}_j для вершин $j = (\overline{1, n})$ можна визначити шляхи μ_{sj}^r в графі $D\Delta$ та верхню оцінку \hat{r}_e максимального значення рангу, що продовжує r шлях μ_{sj}^r у графі $D\Delta$ (тобто яке число одиниць може додатися у вектор \vec{X}).

Правило K_1

- обчислюємо для шляху μ_{sj}^r величину $\Delta d = b_1 - d_a(\mu_{sj}^r)$;
- у каліброваному векторі \vec{Y}_j для вершини j знаходимо номер $k, k = (\overline{0, n-j})$ елемента y_{jk} , починаючи з якого $y_{jk} > \Delta d$ (якщо $\forall y_{jk} < \Delta d$, то $k = n - j + 1$);
- визначаємо значення \hat{r}_e для шляху μ_{sj}^r в графі $D\Delta$: $\hat{r}_e = k - 1$.

Справедливість застосування правила K_1 для визначення \hat{r}_e підтверджується теоремою 4.

Теорема 4. Якщо шлях μ_{sj}^r у вершину j рангу r у графі $D\Delta$ має довжину за вагою обмежень $d_a(\mu_{sj}^r) = d$, то верхня оцінка \hat{r}_e , побудована за правилом K_1 , визначає максимальне число рангів r , на яке може бути продовжений шлях μ_{sj}^r у графі $D\Delta$.

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

Доказ. Припустимо, що для шляху μ_{sj}^r з вершини j нашлося таке його продовження $\mu_{sj}^{r'}$, ранг якого $r' > r_B + 1$. Але, відповідно до пункту а) правила K_1 $\Delta d'$ для $\mu_{sj}^{r'}$ буде більше Δd для шляху $\mu_{sj}^{r+\hat{r}_e}$, що не можливо, тому що b_1 фіксовано й обидва шляхи є продовженням шляху μ_{sj}^r з довжиною $d_a(\mu_{sj}^r) = d$.

Отже, $d' = \Delta d$ і припущення про існування $\mu_{sj}^{r'}$ не вірно. Теорема доведена.

До цього ми не враховували величину коефіцієнтів c_j при функціоналі, а прогноз здійснювали тільки на основі коефіцієнтів a_{ij} . Поставимо у відповідність кожному вектору \vec{y}_j вектор \vec{z}_j , елементи якого є верхніми оцінками \hat{z}_e довжини шляху μ_{sj}^r за вагою функціонала c_j . Компоненти вектора \vec{z}_j для вершини j формуються відповідно до правила K_2 .

Правило K_2 .

Нехай перший компонент вектора \vec{z}_j вершини j дорівнює $\hat{z}_{j1}^e = c_{j+1}$, другий – $\hat{z}_{j2}^e = c_{j+2} + \hat{z}_{j1}^e$; третій $\hat{z}_{j2}^e = c_{j+3} + \hat{z}_{j2}^e$; й т. д., де k -й компонент

$$\hat{z}_{jk}^e = c_{j+k} + \hat{z}_{j(k-1)}^e; k = (\overline{1, n-j}); \hat{z}_{j0}^e = 0; \hat{z}_{n0}^e = 0; j = (\overline{1, n-1}). \quad (3.21)$$

Як слідує з (14), на основі рангового підходу можна більш точно визначати верхню оцінку $\hat{z}_e = f(\hat{r}_e)$ за рахунок того, що шлях μ_{sj}^r не завжди може бути продовжений на всі ранги, що не задовольняє властивості v . Інакше кажучи, на підставі рівності

$$\gamma_j = \hat{z}_{j\hat{r}_e}^e(\mu_{sj}^r) \quad (3.22)$$

можна збільшити ефективність фільтрації безперспективних

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

шляхів, замінюючи в умові (14) γ_p на γ_j згідно з формулою (22), що дає стратегія L_9 на основі наступної нерівності:

$$d_c(\mu_{sp}^r) + \hat{z}_{p_i^e}^e(\mu_{sp}^r) < \max_{c_j} \left\{ d_c \left(\mu_{sp}^{*r} \right) \right\}. \quad (23)$$

Перевірка нерівності (23) дозволить відсікати шлях μ_{sp}^r з подальшого аналізу як не перспективний, тому що ми заздалегідь знаємо, що більш ніж на r_B рангів шлях μ_{sp}^r не може бути продовжений.

До цього часу була розглянута множина $\{L_w\}$ стратегій відсікання для одомірної задачі ЦЛП із БЗ. Сформулюємо стратегії відсікання для m -мірних задач.

У випадку рішення m -мірних задач найбільш простою стратегією вибору є стратегія L_{10} , заснована на рекурентному співвідношенні (12). Принцип формування шляхів у множинах ідентичний стратегії L_1 , за винятком необхідності виконувати m раз перевірку (2).

Сполучення стратегії L_7 зі стратегією L_3 для випадку m -мірної задачі утворять правило вибору L_{11} , яке полягає в тому, щоб з множини m_{sj}^r в множину $m_{sp}^{r=r+1}$, $p = (\overline{r, n})$, наступного рангу вибирати шляхи, які задовольняють властивості v_i є максимальними за вагою функціонала c_j і мінімальні за кожною i -ою вагою обмежень $a_{ij}, i = (\overline{1, m})$.

Перше відповідає рекурентному співвідношенню (12), а друге описується наступним співвідношенням, заснованому на співвідношенні (15).

$$\mu_{sp}^{r=r+1} = \min_{a_{ij}} \left\{ \mu_{sj}^r \cup (j, p) \right\}; \quad j = (\overline{r, n}); \quad p = (\overline{j+1, n}); \quad i = (\overline{1, m}). \quad (24)$$

Збільшення числа обмежень приводить до невизначеності в оцінці верхньої границі за вагою функціонала $\hat{z}_{j_i^e}^e$, яку може

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

набрати шлях μ_{sj}^r і верхній оцінці кількості рангів \hat{r}_e , на яку може бути продовжений цей шлях. Щоб уникнути такої невизначеності для кожної вершини $j = (\overline{1, n})$ будемо будувати не один, а m каліброваних векторів $\bar{y}_j^i, i = (\overline{1, m})$ за правилом:

$$y_{jk}^i = a_{jk}^i + y_{j(k-1)}^i; \quad k = (\overline{1, n-j}); \quad y_{j0}^i = 0; \quad y_{n0}^i = b_i; \quad j = (\overline{1, n-1}). \quad (25)$$

У зв'язку із цим, правило K_1 визначення \hat{r}_e для шляху μ_{sj}^r в багатомірній задачі змінюється на правило K_3 .

Правило K_3 .

а) нехай $i = 1$;

б) при поточному значенні i обчислюємо для шляху μ_{sj}^r

величину $\Delta d = b_i - d_a(\mu_{sj}^r)_i$;

в) у каліброваному векторі \bar{y}_j^i вершини j знаходимо номер k -го $k = (\overline{0, n-j})$ елемента y_{jk}^i вектора \bar{y}_j^i , починаючи з якого $y_{jk}^i > \Delta d$ (якщо $\forall y_{jk}^i < \Delta d$, то $k = n - j + 1$);

г) для шляху μ_{sj}^r по i -му обмеженню в графі $D\Delta$: $\hat{r}_e^i = k - 1$;

д) збільшуємо значення i на 1 і переходимо до пункту б) цього правила у випадку $i \leq m$ або до наступного пункту у випадку $i > m$;

е) серед усіх $\hat{r}_e^i, j = (\overline{1, m})$ вибираємо найменший.

Таким чином, відповідно до правила K_3 верхня оцінка Γ_B для шляху μ_{sj}^r в j -й вершині графа $D\Delta$ при m обмеженнях буде:

$$\hat{r}_e = \min_i \{ \hat{r}_e^i \}, \quad i = (\overline{1, m}). \quad (26)$$

Неважко показати, що при реалізації правила K_3

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

справедливість теореми 4 не порушується. Так, якщо по одному з обмежень ми зможемо пройти на r_1 рангів, а по іншому – на r_2 ранги й при цьому $r_1 > r_2$, то на ранг більший, ніж r_2 неможливо побудувати шлях, який задовольняє властивості v , оскільки r_2 – верхня оцінка по даному обмеженню.

Правило K_2 для визначення верхньої оцінки за вагою функціонала в m -мірних завданнях не змінюється.

Уведемо за аналогією з поняттям одномірного коридору поняття m -мірного коридору в множині $c \ g(n) \leq f(n) \leq c' \times g(n)$.

Позначимо підмножину векторів, що повинна залишитися в множині m_{sp}^r після фільтрації через m_{sp}^{rk} . Нагадаємо, що формування множини шляхів у m_{sp}^r здійснюється завжди таким чином, що довжина за вагою функціонала першого з них більше довжини за вагою функціонала другого й т. д., тобто $d_c(\mu_k) \geq d_c(\mu_k) \geq \dots \geq d_c(\mu_k)$.

Визначення. Під виділенням m -мірного коридору будемо розуміти процес відсівання k -го шляху μ_k у множині m_{sp}^r , якому відповідає m -мірний вектор $(d_a(\mu_k)_1, d_a(\mu_k)_2, \dots, d_a(\mu_k)_m)$ за правилом K_4 .

Правило K_4 .

Якщо $(\forall i \in (\overline{1, m})) d_a(\mu_v)_i \leq d_a(\mu_k)_i$ при цьому $v = (\overline{1, k-1})$, то вектор $(d_a(\mu_k)_1, d_a(\mu_k)_2, \dots, d_a(\mu_k)_m)$ і відповідний йому шлях μ_k можна видалити з подальшого аналізу, інакше $\mu_k \in m_{sp}^{r+r+1}$.

Справедливість відсівання за правилом K_4 слідує з наступного досить очевидного твердження 4.

Твердження 4. Шляхи $\mu_{sp}^r \in m_{sp}^r$, що не потрапили в m_{sp}^{rk} не можуть визначати оптимальне рішення задачі (3.1 – 3.3).

Доказ. Нехай деякий шлях $\mu_{sp}^r \notin m_{sp}^r$ є оптимальним рішенням задачі. Тоді відповідно до правила K_4 в m_{sp}^{rk} існує шлях μ_{sp}^{rk} більший за вагою функціонала й менший за всіма вагами

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

обмежень. Отже, шлях μ_{sp}^{**r} набере на наступних рангах і більше значення за вагою функціонала, при задоволенні властивості v ,

$$d_c(\mu_k^{**r}) > d_c(\mu_k^{*r}).$$

тобто Ми прийшли до протиріччя, а значить наше припущення не вірно, і твердження 4 справедливо.

Позначимо потужність множини $|m_{sj}^r|$ через Ξ . До початку відсікання $|m_{sj}^{rk}| = \emptyset$. Тоді процедуру формування m -мірного коридору можна зобразити у вигляді послідовної перевірки векторів $(1, \Xi)$

з множини m_{sj}^r на можливість відсікання за правилом K_4 . Вектори, які залишились, утворять підмножину m_{sj}^{rk} . Цю процедуру будемо називати стратегією L_{12} , що полягає у виділенні m -мірного коридору усередині кожної множини m_{sj}^r рангу r , коли в нього побудовані всі шляхи з вищестоящих вершин графа $D\Delta$.

Однак, більш ефективною є стратегія відсікання L_{13} , при якій виділення m -мірного коридору здійснюється на всьому ярусі r , після того, як на ньому сформується всі шляхи, які задовольняють у кожній вершині властивості v . Тоді здійснюється перевірка: чи є для довільного шляху $\mu_{sp}^r \in m_{sp}^r$ рангу r шлях μ_{sj}^r , що належить одному з вищестоящих множин графа $D\Delta$ над m_{sp}^r , який має більшу довжину за вагою функціонала й не меншу довжину за вагою усіх m обмежень. Якщо такий шлях μ_{sj}^r є, то відповідно до твердження 4, шлях μ_{sp}^r можна видалити з розгляду як безперспективний.

Таким чином, процедуру A_0 зі стратегіями $\{L_w\}$ і правилами K_w можна покласти в основу побудови наближених і точних алгоритмів рішення задачі про рюкзак, тобто одержати різні модифікації процедури A_0 залежно від комбінацій використовуваних правил відсікання $\{L_w\}$ безперспективних шляхів у множинах μ_{sj}^r на основі застосування принципу оптимізації за напрямком.

INFORMATION AND WEB TECHNOLOGIES

References:

- [1] Коломійцев, О., Третяк, В., Голубничий, Д., Осієвський, С., Калачова, В., Балакірева, С., Філіппенков, О., Жирна, О., Куруч, О., Кривчун, В., Рибальченко, А., & Любченко, О. (2023). Спосіб оптимізації розміщення фрагментів розподіленої бази даних у вузлах мережі хмарної структури за критерієм максимуму сумарної цінності реплік фрагментів на основі рангового підходу до рішення задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними Scientific Collection «InterConf», (172), 230–235.
- [2] Коломійцев, О., Голубничий, Г. Д., Рибальченко, А., Третяк, В., Осієвський, С., Возний, О., Воронін, В., Комаров, В., Пустоваров, В., Філіппенков, О., Кривчун, В., & Любченко, О. (2023). Використання точних та наближених алгоритмів на основі рангового підходу до рішення задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними для оптимізації розподілення фрагментів бази даних в хмарній мережі для зменшення середнього об'єму передаваних даних Scientific Collection «InterConf», (174), 200–206.
- [3] Голубничий, Д., Коломійцев, О., Рибальченко, А., Третяк, В., Осієвський, С., Воронін, В., Крук, В., Плугова, О., Комаров, В., Пустоваров, В., Філіппенков, О., & Любченко, О. (2023). Спосіб оптимізації розміщення фрагментів розподіленої бази даних у вузлах мережі хмарної структури за критерієм мінімуму ціни трафіку на основі рангового підходу до рішення задачі цілочисельного лінійного програмування з булевими змінними. Scientific Collection «InterConf», (173), 165–172.
- [4] Рибальченко А.О. (2023). Алгоритми рішення задачі оптимального розміщення даних в білінгових OLTP-системах на основі реалізації рангового підходу. Системи управління, навігації та зв'язку. Збірник наукових праць, 2(72), 135–141.
- [5] Viacheslav, Tretiak, et al. "Parallel Computation Method for Fragmentation of Distributed Database Data Based on Rank-Based Approach." 2019 3rd International Conference on Advanced Information and Communications Technologies (AICT). IEEE, 2019.
- [6] Listrovoy S.V., Golubnichiy D.Yu., Listrovaya E.S. Solution method on the basis of rank approach for integer linear problems with boolean variables /Engineering Simulation. – 1999. – vol.16. – P. 707–725.
- [7] Listrovoy S.V., Tretjak V.F., Listrovaya A.S. Parallel algorithms of calculation process optimization for the boolean programming problems // Engineering Simulation. – 1999. – vol.16. – P. 569–579.
- [8] Пономаренко В.С., Голубничий Д.Ю. & Третяк В.Ф. (2005). Цілочисельне програмування в економіці. – Х.: Вид. ХНУ.
- [9] Коломійцев, О., Третяк, В., Калачова, В., Закіров, З., Полтавський, Е., Кудряшов, В., ... & Любченко, О. (2023). Інформаційна технологія використання гарантованих прогнозів під час рішення задач комбінаторної оптимізації. Grail of Science, (24), 302–312.
- [10] Hladyshev D. Technical and agricultural sciences in modern realities: problems, prospects and solutions: collective monograph / D. Hladyshev, M. Brodskyi, L. Lisnykh [etc.] // International Science Group – Boston, 2023

SCIENTIFIC EDITION

SCIENTIFIC COLLECTION «INTERCONF»

№ 41(185) | January, 2024

The issue contains:

Proceedings of the 5th International
Scientific and Practical Conference

**CONCEPTS FOR THE DEVELOPMENT
OF SOCIETY'S SCIENTIFIC POTENTIAL**

Prague, Czech Republic
19–20.01.2024

All materials are reviewed.

The editorial office did not always agree with the position of authors.

Journal's frequency: monthly

Signed for online publication: January 20, 2024.

Printed: February 19, 2024. Circulation: 200 copies. Format 60×84/8.

Batang & Courier New typefaces. Offset paper 100gsm. Digital color printing.

Contacts of the editorial office:

LLC Scientific Publishing Center «InterConf»

✉ info@interconf.center

🌐 <https://www.interconf.center>

✔ Certificate on the entry of publishing business subject in the State Register of Publishers,
Manufacturers and Distributors of Publishing Products of Ukraine: ДК № 7882 of 10.07.2023.