МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ УКРАИНЫ

ХАРЬКОВСКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ ЭКОНОМИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ СЕМЕНА КУЗНЕЦА

Задания и методические рекомендации к их выполнению по учебной дисциплине "ВЫСШАЯ И ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА"

**для иностранных студентов отраслей знаний
0306 "Менеджмент и администрирование",
1401 "Сфера обслуживания"
заочной формы обучения**

Харьков. Изд. ХНЭУ им. С. Кузнеца, 2014

Утверждено на заседании кафедры высшей математики и экономико-математических методов.

Протокол № 5 от 11.12.2013 г.

Составители: Шевченко А. К.
Костенко А. В.

З-15 Задания и методические рекомендации к их выполнению по учебной дисциплине "Высшая и прикладная математика" для иностранных студентов отраслей знаний 0306 "Менеджмент и администрирование", 1401 "Сфера обслуживания" заочной формы обучения / сост. А. К. Шевченко, А. В. Костенко. – Х. : Изд. ХНЭУ им. С. Кузнеца, 2014. – 28 с. (Рус. яз.)

Приведены задания для контрольных работ по данной учебной дисциплине, выполнение которых расширит знания студентов по высшей математике, теории вероятностей, математическому программированию и исследованию операций, а также методические рекомендации к их выполнению.

Рекомендовано для иностранных студентов отраслей знаний 0306 "Менеджмент и администрирование", 1401 "Сфера обслуживания" заочной формы обучения.

Введение

В соответствии с рабочей программой учебную дисциплину "Высшая и прикладная математика" студенты отраслей знаний 0306 "Менеджмент и администрирование", 1401 "Сфера обслуживания" заочной формы обучения изучают на первом курсе. Студенты должны получить знания по высшей математике, теории вероятностей, математическому программированию и исследованию операций. В результате обучения студенты должны получить следующие компетентности: уметь решать системы алгебраических уравнений, уметь решать задачи по аналитической геометрии, уметь дифференцировать и интегрировать, уметь решать задачи на теоремы сложения и умножения вероятностей, на формулу полной вероятности и формулу Байеса, уметь вычислять числовые характеристики дискретных случайных величин по выборке, уметь решать задачи оптимизации графическим методом, уметь решать транспортную задачу.

Прежде чем приступить к выполнению контрольной работы требуется освоить теоретический материал и разобрать образец выполнения задания.

Номер варианта в каждом задании студент выбирает в соответствии с номером, под которым его фамилия записана в списке группы (или номер в списке минус двадцать).

Экзамен могут сдавать только те студенты, которые выполнили контрольную работу в полном объёме.

Контрольная работа

Тема 1. Линейная алгебра, векторная алгебра, аналитическая геометрия

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера и методом Жордана–Гаусса.

1.1. $\begin{cases} x_1+3x_2-3x_3=10; \\ 2x_1+x_2-x_3=5; \\ 3x_1+2x_2+2x_3=5. \end{cases}$

Ответ: $(1,2,-1)$.

1.2. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6; \\ 2x_1+3x_2-7x_3=16; \\ 5x_1+2x_2+x_3=16. \end{cases}$

Ответ: $(3,1,-1)$.

1.3. $\begin{cases} 2x_1+x_2+4x_3=20; \\ 2x_1-x_2-3x_3=3; \\ 3x_1+4x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

Ответ: $(5,-2,3)$.

1.4. $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3=6; \\ 2x_1+3x_2-4x_3=16; \\ 3x_1-2x_2-5x_3=12. \end{cases}$

Ответ: $(7,2,1)$.

1.5. $\begin{cases} x_1+5x_2-x_3=7; \\ 2x_1-x_2-x_3=4; \\ 3x_1-2x_2+4x_3=11. \end{cases}$

Ответ: $(3,1,1)$.

1.6. $\begin{cases} 7x_1+5x_2+2x_3=18; \\ x_1-x_2-x_3=3; \\ x_1+x_2+2x_3=-2. \end{cases}$

Ответ: $(2,2,-3)$.

1.7. $\begin{cases} 5x_1+8x_2-x_3=-1; \\ x_1+2x_2+3x_3=9; \\ 2x_1-3x_2+2x_3=13. \end{cases}$

Ответ: $(2,-1,3)$.

1.8. $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=4; \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1; \\ 2x_1+7x_2-x_3=8. \end{cases}$

Ответ: $(1,1,1)$.

1.9. $\begin{cases} 3x_1+3x_2+x_3=5; \\ 2x_1+3x_2+x_3=1; \\ 2x_1+x_2+3x_3=11. \end{cases}$

Ответ: $(2,-2,3)$.

1.10. $\begin{cases} x_1+x_2-2x_3=6; \\ 3x_1+2x_2-7x_3=16; \\ 2x_1+5x_2+x_3=16. \end{cases}$

Ответ: $(1,3,-1)$.

1.11. $\begin{cases} x_1+2x_2+4x_3=20; \\ -x_1+2x_2-3x_3=3; \\ 4x_1+3x_2-5x_3=-8. \end{cases}$

Ответ: $(-2,5,3)$.

1.12. $\begin{cases} 3x_1+x_2-2x_3=6; \\ -4x_1+2x_2+3x_3=16; \\ -5x_1+3x_2-2x_3=12. \end{cases}$

Ответ: $(1,7,2)$.

1.13. $\begin{cases} 5x_1+x_2-x_3=7; \\ -x_1+2x_2-x_3=4; \\ -2x_1+3x_2+4x_3=11. \end{cases}$

Ответ: $(1,3,1)$.

1.14. $\begin{cases} 2x_1+x_2+x_3=-2; \\ -x_1-x_2+x_3=3; \\ 2x_1+5x_2+7x_3=18. \end{cases}$

Ответ: $(-3,2,2)$.

1.15. $\begin{cases} 2x_1+x_2+3x_3=9; \\ 5x_1+x_2-x_3=11; \\ x_1+x_2+x_3=5. \end{cases}$

Ответ: $(2,2,1)$.

1.16. $\begin{cases} 2x_1+7x_2-x_3=8; \\ 3x_1-5x_2+3x_3=1; \\ x_1+2x_2+x_3=4. \end{cases}$

Ответ: $(1,1,1)$.

1.17. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=0; \\ 2x_1-x_2-5x_3=-18; \\ 3x_1+x_2+2x_3=-1. \end{cases}$

Ответ: $(-2,-1,3)$.

1.18. $\begin{cases} 2x_1+5x_2-x_3=-14; \\ x_1+2x_2+2x_3=2; \\ x_1+4x_2+3x_3=-1. \end{cases}$

Ответ: $(2,-3,3)$.

1.19. $\begin{cases} 7x_1-x_2-x_3=9; \\ x_1+x_2+x_3=7; \\ 2x_1-x_2-3x_3=-3. \end{cases}$

Ответ: $(2,4,1)$.

1.20. $\begin{cases} 5x_1+2x_2-3x_3=8; \\ 3x_1+x_2-x_3=7; \\ x_1-2x_2-3x_3=-8. \end{cases}$

Ответ: $(3,1,3)$.

Задание 2. Даны координаты точек A, B, C и D. Проверить, является ли четырёхугольник $ABCD$ трапецией и перпендикулярны ли его диагонали. Найти длины диагоналей.

2.1. $A(5,4,2)$, $B(7,7,3)$, $C(7,10,-1)$, $D(11,16,1)$.

2.2. $A(-1,2,2)$, $B(1,4,0)$, $C(-4,1,1)$, $D(-5,-5,3)$.

2.3. $A(3,-1,2)$, $B(-1,3,0)$, $C(1,0,-2)$, $D(5,-4,0)$.

2.4. $A(7,-8,4)$, $B(7,4,-2)$, $C(-5,10,-2)$, $D(-5,-2,-4)$.

2.5. $A(2,1,0)$, $B(0,4,-3)$, $C(-2,3,-5)$, $D(2,-3,1)$.

2.6. $A(1,1,-1)$, $B(-1,2,3)$, $C(2,-1,5)$, $D(3,6,3)$.

2.7. $A(3,2,-3)$, $B(2,4,6)$, $C(8,3,4)$, $D(9,1,-5)$.

2.8. $A(-3,-5,-1)$, $B(2,-20,9)$, $C(-6,1,2)$, $D(-8,10,-7)$.

2.9. $A(-1,-5,-2)$, $B(-4,0,-2)$, $C(-7,-4,-2)$, $D(-10,1,-2)$.

2.10. $A(6,5,3)$, $B(8,8,4)$, $C(8,11,0)$, $D(12,17,2)$.

2.11. $A(1,4,4)$, $B(3,6,2)$, $C(-2,3,3)$, $D(-3,-3,5)$.

2.12. $A(4,0,3)$, $B(0,4,1)$, $C(2,1,-1)$, $D(6,-3,1)$.

2.13. $A(5,-10,2)$, $B(5,2,-4)$, $C(-7,8,-4)$, $D(-7,-4,-6)$.

2.14. $A(3,2,1)$, $B(1,5,-2)$, $C(-1,4,-4)$, $D(3,-2,2)$.

2.15. $A(3,3,1)$, $B(1,4,5)$, $C(4,1,7)$, $D(5,8,5)$.

2.16. $A(4,3,-2)$, $B(3,5,7)$, $C(9,4,5)$, $D(10,2,-4)$.

2.17. $A(0,-2,2)$, $B(5,-17,12)$, $C(-3,4,5)$, $D(-5,13,-4)$.

2.18. $A(0,-4,-1)$, $B(-3,1,-1)$, $C(-6,-3,-1)$, $D(-9,2,-1)$.

2.19. $A(1,0,-2)$, $B(3,3,-1)$, $C(3,6,-5)$, $D(7,12,-3)$.

2.20. $A(2,5,5)$, $B(4,7,3)$, $C(-1,4,4)$, $D(-2,-2,6)$.

Задание 3. Даны координаты точек A, B и C. Составить:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнения высоты и медианы, проведённых через вершину A;

в) уравнение прямой, проходящей через вершину B и параллельной стороне AC.

Построить треугольник ABC и указанные прямые.

3.1. $A(3,1)$, $B(-1,3)$, $C(0,-2)$.

3.2. $A(1,2)$, $B(-1,3)$, $C(0,-2)$.

3.3. $A(2,2)$, $B(0,4)$, $C(-3,1)$.

3.4. $A(-5,1)$, $B(-2,3)$, $C(1,-1)$.

3.5. $A(7,6)$, $B(1,-3)$, $C(0,2)$.

3.6. $A(3,2)$, $B(0,0)$, $C(1,5)$.

3.7. $A(-2,3)$, $B(-1,-2)$, $C(3,4)$.

3.8. $A(0,4)$, $B(1,1)$, $C(-1,0)$.

3.9. $A(3,3)$, $B(-3,0)$, $C(1,-2)$.

3.10. $A(7,5)$, $B(1,2)$, $C(4,-1)$.

3.11. $A(1,1)$, $B(-1,2)$, $C(0,5)$.

3.12. $A(2,4)$, $B(0,1)$, $C(3,-3)$.

3.13. $A(-5,1)$, $B(1,1)$, $C(0,-4)$.

3.14. $A(4,3)$, $B(0,0)$, $C(1,-2)$.

3.15. $A(2,0)$, $B(-1,1)$, $C(1,-2)$.

3.16. $A(3,4)$, $B(1,1)$, $C(2,-1)$.

3.17. $A(5,0)$, $B(0,3)$, $C(-1,-1)$.

3.18. $A(2,3)$, $B(1,7)$, $C(-1,3)$.

3.19. $A(-1,-2)$, $B(0,4)$, $C(3,-2)$.

3.20. $A(1,1)$, $B(-2,-1)$, $C(3,-3)$.

Задание 4. Составить уравнения эллипса и гиперболы, если их полуоси равны a и b. Построить эти кривые.

4.1. $a=4$, $b=3$.

4.2. $a=5$, $b=4$.

4.3. $a=7$, $b=4$.

4.4. $a=6$, $b=2$.

4.5. $a=3$, $b=2$.

4.6. $a=7$, $b=5$.

4.7. $a=10$, $b=6$.

4.8. $a=10$, $b=5$.

4.9. $a=8$, $b=3$.

4.10. $a=8$, $b=4$.

4.11. $a=11$, $b=7$.

4.12. $a=9$, $b=4$.

4.13. $a=6$, $b=4$.

4.14. $a=6$, $b=3$.

4.15. $a=5$, $b=2$.

4.16. $a=5$, $b=3$.

4.17. $a=4$, $b=2$.

4.18. $a=7$, $b=3$.

4.19. $a=11$, $b=3$.

4.20. $a=11$, $b=4$.

Тема 2. Математический анализ

Задание 5. Найти пределы функций.

5.1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{5x^2-x-3}$, $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)\sqrt{x+3}}{x^2-4}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$.

5.2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+2x+3}{8x^3+x-1}$, $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-3x+2}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2-\sqrt{x^2+4}}{3x^2}$.

5.3. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+x+1}{5x^3-2x+3}$, $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{x+12}-4}{x^2-16}$, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{5x}$.

5.4. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^3+x+2}{8x^3+3x^2+x}$, $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x-5)\sqrt{4x+5}}{x^2-25}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{5x}$.

5.5. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+4x-9}{x^4-2x^3+3}$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\sqrt{x+9}}{x^2+5x}$.

5.6. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^3+7x+3}{2x^2+4x-5}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x-1)\sqrt{x+8}}{x^2-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{4x}$.

5.7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x-3}{8x^2+2x-1}$, $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)\sqrt{x+5}}{x^2-16}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+3x}-2}{6x}$.

5.8. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^2+2x-15}{3x^2-x-1}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x^2-4)\sqrt{x+7}}{x-2}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{7x}$.

5.9. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{6x^2+2x-3}{7x^3-x-1}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)\sqrt{x+8}}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{8x}$.

5.10. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{11x^2+2x-3}{6x^2-x+3}$, $\lim\limits_{x\to7}\dfrac{(x-7)\sqrt{x+2}}{x^2-49}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{6x}$.

5.11. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+2x-4}{5x^3+x^2+3x}$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)\sqrt{x+6}}{x^2-9}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{7x}$.

5.12. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+4x-1}{6x^2+2x-3}$, $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x-4}{(x^2-16)\sqrt{x+5}}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{10x}$.

5.13. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^4+2x-1}{7x^4+x^3+2}$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)(x+1)}{x^2-9}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2+x}{\sqrt{1+x}-1}$.

5.14. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-2x-7x^2}{3x^2+x+7}$, $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x+2)(x-4)}{x^2-16}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{x^2+2x}$.

5.15. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^4+x}{7x^4+x^3+2}$, $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{(x+5)(x-2)}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x^2}-1}$.

5.16. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^2+4x-2}{9x^2-2x-3}$, $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{(x-3)\sqrt{1+x}}{x^2-9}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{4+x}-2}{11x}$.

5.17. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1-x-5x^2}{2+x+x^2}$, $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{(x^2-1)(x+5)}{x-1}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2x}{\sqrt{1+x}-1}$.

5.18. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{8x^2+5x+3}{7x^2+8x+1}$, $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{(x+2)(x-5)}{x^2-25}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{8x}$.

5.19. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+x+3}{5x^3+4x^2+x}$, $\lim\limits_{x\to6}\dfrac{(x-6)\sqrt{3+x}}{x^2-36}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{2x}$.

5.20. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{7x^4+2x^2+1}{2x^3+3x+2}$, $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{(x-4)\sqrt{x+5}}{x^2-16}$, $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+7x}-1}{5x}$.

Задание 6. Найти производные функций.

6.1. $y=5x^2+x+3$, $y=\dfrac{3x}{\sin x}$, $y=x^2\cos x$, $y=\sin x^2$.

6.2. $y=7x^3+2x^2+3x$, $y=\dfrac{2x}{\cos x}$, $y=x^3\sin x$, $y=\cos x^3$.

6.3. $y=5x^4+2x^3+7x$, $y=\dfrac{3x}{\ln x}$, $y=x^2 tgx$, $y=2^{x^2}$.

6.4. $y=8x^3+2x^2+1$, $y=\dfrac{2x}{tgx}$, $y=x\cdot 3^x$, $y=\sin 5x^3$.

6.5. $y=9x^5+4x^3+3x$, $y=\dfrac{4x}{3^x}$, $y=xtgx$, $y=\cos x^3$.

6.6. $y=7x^3+4x^2+5$, $y=\dfrac{2x}{\sin x}$, $y=x\cdot 5^x$, $y=x^2 ctgx$.

6.7. $y=3x^2+7x+4$, $y=\dfrac{5x}{2^x}$, $y=xctgx$, $y=3^{x^4}$.

6.8. $y=5x^3+8x^2+4x$, $y=\dfrac{x}{ctgx}$, $y=x\cdot 2^x$, $y=\sqrt{x}ctgx$.

6.9. $y=-6x^2+3x+4$, $y=\dfrac{3x}{2^x}$, $y=x^2\cos x$, $y=\sin\sqrt{x}$.

6.10. $y=-7x^4+5x^2+2$, $y=\dfrac{3x}{\ln x}$, $y=x^2\ln x$, $y=2^{-x^2}$.

6.11. $y=-6x^3+2x^2+3x$, $y=\dfrac{5x}{\cos x}$, $y=x^3\cdot 4^x$, $y=5^{-\sqrt{x}}$.

6.12. $y=3x^3+2x+3$, $y=\dfrac{x}{tgx}$, $y=x^2\cdot 5^x$, $y=tgx^2$.

6.13. $y=7x^4+3x^3+2$, $y=\dfrac{2x}{\sin x}$, $y=x\cdot e^x$, $y=x^3 ctgx$.

6.14. $y=8x^3-4x^2+3x$, $y=xtgx$, $y=\dfrac{4x^2}{\sin x}$, $y=3\sin(2x+1)$.

6.15. $y=9x^2+2x-3$, $y=5\cos(3x^2+1)$, $y=x^3\cos x$, $y=\dfrac{x}{3\sin x}$.

6.16. $y=10x^3-8x^2+5$, $y=\dfrac{6x}{tgx}$, $y=x^3 ctgx$, $y=7\sin(-x^2)$.

6.17. $y=-7x^2-3x+2$, $y=x^3\cos x$, $y=\dfrac{2x}{ctgx}$, $y=5\sin^2 x$.

6.18. $y=9x^3+5x^2-3x$, $y=\dfrac{2x}{ctgx}$, $y=x^4\sin x$, $y=2^{-x^3}$.

6.19. $y=7x^4+2x^2+3x$, $y=x^3e^x$, $y=\dfrac{x^2}{\sin x}$, $y=\cos^3 x$.

6.20. $y=11x^3-8x^2+2$, $y=\dfrac{x^4}{\cos x}$, $y=x^3tgx$, $y=2^{x^4}$.

Задание 7. Вычислить неопределённые интегралы.

7.1. $\int\left(x^2+3x+5\right)dx$, $\int xe^x dx$, $\int\dfrac{tg^3x}{\cos^2 x}dx$.

7.2. $\int\left(2x^3+5x^2+3\right)dx$, $\int x\sin xdx$, $\int e^x\sin e^x dx$.

7.3. $\int\left(5x^4+7x^3+2x\right)dx$, $\int x\cos xdx$, $\int\sin^2 x\cos xdx$.

7.4. $\int\left(6x^3-7x^2-3\right)dx$, $\int\ln xdx$, $\int\sin^3 x\cos xdx$.

7.5. $\int\left(8x^2+5x+4\right)dx$, $\int x2^x dx$, $\int\dfrac{tg^2x}{\cos^2 x}dx$.

7.6. $\int\left(7x^3-6x^2+2\right)dx$, $\int x3^x dx$, $\int xe^{x^2}dx$.

7.7. $\int\left(9x^2-7x+5\right)dx$, $\int x\sin xdx$, $\int x\sin x^2dx$.

7.8. $\int\left(-3x^2+2x+1\right)dx$, $\int x5^x dx$, $\int x\cos x^2dx$.

7.9. $\int\left(-2x^3-6x^2+5\right)dx$, $\int x4^x dx$, $\int\cos^2 x\sin xdx$.

7.10. $\int\left(8x^3-2x^2+4x\right)dx$, $\int x\cos xdx$, $\int\sin^4 x\cos xdx$.

7.11. $\int\left(2x^3+3\sin x+2\right)dx$, $\int x7^x dx$, $\int\dfrac{tgx}{\cos^2 x}dx$.

7.12. $\int\left(2x^4-x^2+1\right)dx$, $\int xe^{-x}dx$, $\int\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx$.

7.13. $\int\dfrac{x+x^2e^x}{x^2}dx$, $\int\arcsin xdx$, $\int x\sqrt{1+x^2}dx$.

7.14. $\int\left(2x^2+\sin x+\cos x\right)dx$, $\int x\ln xdx$, $\int\dfrac{\sqrt{1+3tg^2x}}{\cos^2 x}dx$.

7.15. $\int\left(x^3+5x^2+e^x\right)dx$, $\int arctgxdx$, $\int\dfrac{3x^2+2}{x^3+2x+4}dx$.

7.16. $\int\left(5x^2+2x-\sin x\right)dx$, $\int\ln\left(1+x\right)dx$, $\int x\sin x^2dx$.

7.17. $\int\left(7x^3+2x^2+\cos x\right)dx$, $\int x6^x\,dx$, $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$.

7.18. $\int\left(x^3-x^2+x+1\right)dx$, $\int \arccos x\,dx$, $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+3}\,dx$.

7.19. $\int\left(7x^5+x^4+2\right)dx$, $\int x8^x\,dx$, $\int \frac{dx}{x\ln x}$.

7.20. $\int\left(8x^2+3x+5\right)dx$, $\int \ln(2+x)\,dx$, $\int \sin x\left(1+\cos x\right)dx$.

Тема 3. Теория вероятностей и математическая статистика

Задание 8. Вероятность сдачи экзамена для первого студента p_1, для второго – p_2, для третьего – p_3. Какова вероятность того, что:

а) все три студента сдадут экзамен;

б) только один студент сдаст экзамен;

в) хотя бы один студент сдаст экзамен.

8.1. $p_1=0{,}9$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}2$.

8.2. $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}7$.

8.3. $p_1=0{,}7$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}1$.

8.4. $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}9$, $p_3=0{,}8$.

8.5. $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}9$, $p_3=0{,}5$.

8.6. $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}4$.

8.7. $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}7$.

8.8. $p_1=0{,}2$, $p_2=0{,}7$, $p_3=0{,}8$.

8.9. $p_1=0{,}6$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}1$.

8.10. $p_1=0{,}9$, $p_2=0{,}2$, $p_3=0{,}7$.

8.11. $p_1=0{,}5$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}7$.

8.12. $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}1$, $p_3=0{,}3$.

8.13. $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}9$, $p_3=0{,}1$.

8.14. $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}8$, $p_3=0{,}2$.

8.15. $p_1=0{,}1$, $p_2=0{,}4$, $p_3=0{,}2$.

8.16. $p_1=0{,}8$, $p_2=0{,}3$, $p_3=0{,}9$.

8.17. $p_1=0{,}5$, $p_2=0{,}9$, $p_3=0{,}1$.

8.18. $p_1=0{,}7$, $p_2=0{,}8$, $p_3=0{,}4$.

8.19. $p_1=0{,}4$, $p_2=0{,}5$, $p_3=0{,}1$.

8.20. $p_1=0{,}3$, $p_2=0{,}9$, $p_3=0{,}7$.

Задание 9. Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма n, $n=20$. Найти выборочное среднее – $\bar{x}$, исправленную выборочную дисперсию – S_x^2, исправленное среднеквадратическое отклонение – S_x.

9.1.

x_i	0	2	4	6	8	10
m_i	1	3	7	5	2	2

9.2.

x_i	2	5	7	10
m_i	6	2	8	4

9.3.

x_i	1	3	6	7
m_i	3	7	8	2

9.4.

x_i	–2	1	1	3	4
m_i	5	3	9	2	1

9.5.

x_i	3	5	7	10
m_i	3	4	10	3

9.6.

x_i	4	7	8	10	11
m_i	3	2	6	5	4

9.7.

x_i	–1	0	2	5
m_i	3	7	8	2

9.8.

x_i	10	20	30	40	50
m_i	3	4	9	3	1

9.9.

x_i	–3	–2	1	4
m_i	5	3	7	5

9.10.

x_i	2	7	10	12	15
m_i	3	5	7	4	1

9.11.

x_i	5	10	15	20
m_i	3	8	7	2

9.12.

x_i	–3	–2	–1	2	3
m_i	2	4	6	5	3

9.13.

x_i	1	3	5	7
m_i	3	7	6	4

9.14.

x_i	–10	12	14	16	20
m_i	1	7	8	3	1

9.15.

x_i	10	14	16	20
m_i	5	7	5	3

9.16.

x_i	11	15	20	25	30
m_i	3	5	7	3	2

9.17.

x_i	5	10	15	20
m_i	2	8	9	1

9.18.

x_i	–2	–1	0	1	2
m_i	5	7	5	2	1

9.19.

x_i	1	2	3	4
m_i	3	5	8	4

9.20.

x_i	4	10	14	18	20
m_i	3	8	4	3	2

Тема 4. Математическое программирование. Исследование операций

Задание 10. Решить задачу линейного программирования графическим методом. Функция цели и система ограничений заданы.

10.1. $z=-2x_1+x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1+x_2\ge 1; \\ -x_1+x_2\ge -2; \\ -2x_1+x_2\le 2; \\ -x_1+3\ge 0; \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

10.2. $z=x_1+x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\ge 4; \\ x_1+2x_2\ge 4; \\ -x_1+x_2\ge -4; \\ x_1+x_2\le 6; \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

10.3. $z=2x_1+x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1+x_2\ge 1; \\ x_1-2x_2\le 2; \\ x_1+x_2\le 4; \\ x_1\le 3; \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

10.4. $z=-3x_1+x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} 2x_1+x_2\le 2; \\ 2x_1+x_2\ge 3; \\ 2x_1+x_2\le 6; \\ -x_1+x_2\ge 0; \\ x_1,x_2\ge 0. \end{cases}$$

10.5. $z = 2x_1 + x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_1 - 2x_2 \le 2; \\ x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.6. $z = x_1 + x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 \le 5; \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ 2x_1 - x_2 \ge 2; \\ x_1 - x_2 \ge -1; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.7. $z = x_1 + x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ -x_1 + x_2 \ge 0; \\ 2x_1 - x_2 \le 4; \\ x_2 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.8. $z = x_1 + x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 - x_2 \le 5; \\ -x_1 + 3x_2 \ge -3; \\ x_1 + 2x_2 \le 14; \\ x_2 \le 5; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.9. $z = 3x_1 + x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ -x_1 + x_2 \ge -4; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_2 \le 4; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.10. $z = -x_1 + x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6; \\ -2x_1 + x_2 \le 0; \\ -x_1 + x_2 \le 1; \\ 1 \le x_2 \le 3; \\ x_1 \ge 0. \end{cases}$$

10.11. $z = x_1 - 2x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_1 - x_2 \ge -2; \\ -x_1 + 2x_2 \ge -2; \\ x_1 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.12. $z = x_1 + x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4; \\ 2x_1 + x_2 \ge 4; \\ x_1 - x_2 \ge -4; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.13. $z = x_1 + 2x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ -2x_1 + x_2 \le 2; \\ x_1 + x_2 \le 4; \\ x_1 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.14. $z = x_1 - 3x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \le 2; \\ x_1 + 2x_2 \ge 3; \\ x_1 + 2x_2 \le 6; \\ x_1 - x_2 \ge 0; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.15. $z = 2x_1 + x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 1; \\ x_1 - x_2 \le 3; \\ x_1 + x_2 \le 8; \\ x_2 \le 4; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.16. $z = x_1 + x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} -x_1 + 2x_2 \le 5; \\ 2x_1 - x_2 \ge 2; \\ -x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ x_1 - x_2 \le 1; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.17. $z = x_1 + x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \ge 1; \\ x_1 - x_2 \ge 0; \\ -x_1 + 2x_2 \le 4; \\ x_1 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.18. $z = x_1 + x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \le 5; \\ 3x_1 - x_2 \ge -3; \\ 2x_1 + x_2 \le 14; \\ x_1 \le 5; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.19. $z = x_1 + 3x_2 \ (\max)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \ge 4; \\ 2x_1 + x_2 \ge 2; \\ x_1 - x_2 \ge -4; \\ x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 \le 4; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

10.20. $z = x_1 - x_2 \ (\min)$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \le 6; \\ x_1 - 2x_2 \le 0; \\ x_1 - x_2 \le 1; \\ x_1 \le 3; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Задание 11. Имеется три поставщика: A_1, A_2 и A_3, у которых сосредоточены грузы: a_1, a_2, a_3 соответственно и четыре потребителя: B_1, B_2, B_3, B_4, которым требуются эти грузы в количестве: b_1, b_2, b_3, b_4. Составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителям с минимальными затратами. Матрица C – стоимости перевозок единицы груза.

11.1. $a = (100, 150, 50)$,

$b = (127, 70, 63, 40)$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.2. $a = (20, 45, 65)$,

$b = (55, 32, 23, 20)$,

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 1 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}.$$

11.3. $a=(19,10,16)$,
$b=(5,7,11,22)$,
$$C=\begin{pmatrix}5&1&4&3\\2&6&3&1\\1&4&5&6\end{pmatrix}.$$

11.4. $a=(14,28,12)$,
$b=(23,10,11,10)$,
$$C=\begin{pmatrix}3&4&5&1\\2&4&1&3\\1&1&2&2\end{pmatrix}.$$

11.5. $a=(100,200,100)$,
$b=(77,83,123,117)$,
$$C=\begin{pmatrix}1&5&2&3\\2&4&5&3\\4&2&3&1\end{pmatrix}.$$

11.6. $a=(20,30,50)$,
$b=(17,25,28,30)$,
$$C=\begin{pmatrix}7&8&3&9\\10&2&4&5\\3&7&6&3\end{pmatrix}.$$

11.7. $a=(35,25,40)$,
$b=(29,11,32,28)$,
$$C=\begin{pmatrix}10&8&7&2\\3&4&5&10\\2&5&3&4\end{pmatrix}.$$

11.8. $a=(35,25,40)$,
$b=(27,28,14,31)$,
$$C=\begin{pmatrix}2&3&1&4\\5&2&3&2\\1&3&5&6\end{pmatrix}.$$

11.9. $a=(50,60,40)$,
$b=(37,27,44,42)$,
$$C=\begin{pmatrix}5&6&4&3\\2&1&5&7\\3&2&3&1\end{pmatrix}.$$

11.10. $a=(19,11,10)$,
$b=(7,13,11,9)$,
$$C=\begin{pmatrix}3&4&2&5\\1&7&3&2\\6&2&1&3\end{pmatrix}.$$

11.11. $a=(50,60,40)$,
$b=(53,22,34,41)$,
$$C=\begin{pmatrix}2&1&3&4\\5&2&3&1\\6&3&4&5\end{pmatrix}.$$

11.12. $a=(20,30,50)$,
$b=(19,18,32,31)$,
$$C=\begin{pmatrix}2&1&4&5\\3&2&3&6\\4&5&2&1\end{pmatrix}.$$

11.13. $a=(45,25,30)$,
$b=(23,17,35,25)$,
$$C=\begin{pmatrix}3&2&1&4\\5&3&3&5\\7&5&6&2\end{pmatrix}.$$

11.14. $a=(100,200,200)$,
$b=(102,156,111,131)$,
$$C=\begin{pmatrix}3&4&2&1\\1&5&3&2\\6&1&4&5\end{pmatrix}.$$

11.15. $a=(23,15,12)$,
$b=(11,13,12,14)$,
$$C=\begin{pmatrix}5&7&8&2\\4&3&2&5\\3&4&1&6\end{pmatrix}.$$

11.16. $a=(20,30,50)$,
$b=(27,23,17,33)$,
$$C=\begin{pmatrix}2&4&6&1\\7&3&2&6\\5&2&3&2\end{pmatrix}.$$

11.17. $a=(20,50,100)$,
$b=(73,27,33,37)$,
$$C=\begin{pmatrix}4&5&2&3\\3&1&6&4\\5&2&1&1\end{pmatrix}.$$

11.18. $a=(30,40,30)$,
$b=(27,15,36,22)$,
$$C=\begin{pmatrix}3&3&2&1\\4&1&5&5\\5&6&1&2\end{pmatrix}.$$

11.19. $a=(50,70,30)$,
$b=(47,23,37,43)$,
$$C=\begin{pmatrix}4&5&2&1\\3&1&2&3\\6&4&3&2\end{pmatrix}.$$

11.20. $a=(100,40,60)$,
$b=(37,42,60,61)$,
$$C=\begin{pmatrix}3&4&5&2\\1&3&2&4\\3&5&1&6\end{pmatrix}.$$

Методические рекомендации

Образец выполнения задания

Задание 1. Решить систему линейных алгебраических уравнений методом Крамера и методом Жордана–Гаусса.

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=13;\\2x_1+3x_2-4x_3=-5;\\x_1+x_2+x_3=6.\end{cases}$$ Ответ: $(2,1,3)$.

Решение

Метод Крамера.

Составим определитель системы Δ из коэффициентов при неизвестных и определители Δx_1, Δx_2 и Δx_3, в которых столбец коэффициентов при соответствующем неизвестном заменён столбцом свободных членов.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1&2&3\\2&3&-4\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&3\\0&-1&-10\\0&-1&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow[1]\cdot(-2)+[2]\\ \leftarrow[1]\cdot(-1)+[3]\end{matrix}==1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-1&-10\\-1&-2\end{vmatrix}=2-10=-8.$$

$$\Delta x_1=\begin{vmatrix}13&2&3\\-5&3&-4\\6&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-5&-1&0\\19&7&0\\6&1&1\end{vmatrix}\begin{matrix}\leftarrow[3]\cdot(-3)+[1]\\ \leftarrow[3]\cdot4+[2]\\ \\ \end{matrix}=$$

$$=1\cdot(-1)^{3+3}\begin{vmatrix}-5&-1\\19&7\end{vmatrix}=-35+19=-16.$$

$$\Delta x_2=\begin{vmatrix}1&13&3\\2&-5&-4\\1&6&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&13&3\\0&-31&-10\\0&-7&-2\end{vmatrix}\begin{matrix}\\ \leftarrow[1]\cdot(-2)+[2]=\\ \leftarrow[1]\cdot(-1)+[3]\end{matrix}$$

$$=1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}-31&-10\\-7&-2\end{vmatrix}=62-70=-8.$$

$$\Delta x_3 = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 2 & 3 & -5 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 13 \\ 0 & -1 & -31 \\ 0 & -1 & -7 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \leftarrow [1]\cdot(-2)+[2] \\ \leftarrow [1]\cdot(-1)+[3] \end{matrix} = = 1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & -31 \\ -1 & -7 \end{vmatrix} = 7-31 = -24.$$

$$x_1 = \frac{\Delta x_1}{\Delta} = \frac{-16}{-8} = 2,\ x_2 = \frac{\Delta x_2}{\Delta} = \frac{-8}{-8} = 1,\ x_3 = \frac{\Delta x_3}{\Delta} = \frac{-24}{-8} = 3.$$

Таблица 1

Метод Жордана–Гаусса

№ п п	x_1	x_2	x_3	b	Σ	Примечания
1	1	2	3	13	19	На каждой итерации сравниваем сумму чисел строки $x_1+x_2+x_3+b$ с числом в столбце Σ. Если равны, то посчитано верно
2	2	3	–4	–5	–4	
3	1	1	1	6	9	
4	1	2	3	13	19	$[1]$
5	0	–1	–10	–31	–42	$[1]\cdot(-2)+[2]$
6	0	–1	–2	–7	–10	$[1]\cdot(-1)+[3]$
7	1	0	–17	–49	–65	$[5]\cdot 2+[4]$
8	0	1	10	31	42	$[2]\cdot(-1)$
9	0	0	8	24	32	$[8]+[6]$
10	1	0	0	2	3	$[12]\cdot 17+[7]$
11	0	1	0	1	2	$[12]\cdot(-10)+[8]$
12	0	0	1	3	4	$[9]:8$

В столбцах x_1, x_2, x_3 и b стоят коэффициенты при неизвестных, в столбце Σ – сумма элементов строки. Выбираем ведущий или разрешающий элемент в строке и выполняем исключение по схеме Жордана–Гаусса, то есть в столбце получаем единицу с нулями. В столбце примечаний в квадратных скобках стоит номер строки. После полного исключения получим на месте матрицы A, то есть матрицы из коэффициентов при неизвестных, единичную матрицу. Тогда в столбце b будет стоять ответ. Так, $x_1=2$, $x_2=1$, $x_3=3$.

Задание 2. Даны координаты точек $A(2,5,5)$, $B(4,7,3)$, $C(-1,4,4)$ и $D(4,7,1)$. Проверить, является ли четырёхугольник $ABCD$ трапецией и перпендикулярны ли его диагонали. Найти длины диагоналей.

Решение

Найдём векторы: $\overrightarrow{AB}(4-2,7-5,3-5)$, то есть $\overrightarrow{AB}(2,2,-2)$, $\overrightarrow{BC}(-1-4,4-7,4-3)$, то есть $\overrightarrow{BC}(-5,-3,1)$, $\overrightarrow{CD}(-2+1,-2-4,6-4)$, то есть $\overrightarrow{CD}(3,3,-3)$, $\overrightarrow{AD}(4-2,7-5,1-5)$, то есть $\overrightarrow{AD}(2,2,-4)$.

$\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ параллельны, так как $\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{3}=\dfrac{-2}{-3}$, а $\overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{AD}$ не параллельны, так как $\dfrac{-5}{2}\neq\dfrac{-3}{2}\neq\dfrac{1}{-4}$, то есть, это трапеция. Диагонали AC и BD. Найдём $\overrightarrow{AC}(-1-2,4-5,4-5)$, то есть $\overrightarrow{AC}(-3,-1,-1)$, $\overrightarrow{BD}(-1-4,7\ -7,1\ \ 3\ )$, то есть $\overrightarrow{BD}(-5,0,-2)$. Если $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ перпендикулярны, то скалярное произведение $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$ равно нулю.

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=-3\cdot(-5)+(-1)\cdot 0+(-1)\cdot(-2)=15+2=17\neq 0,$$

то есть $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ не перпендикулярны. Их длины:

- $\left|\overrightarrow{AC}\right|=\sqrt{(-3)^2+(-1)^2+(-1)^2}=\sqrt{11}$,
- $\left|\overrightarrow{BD}\right|=\sqrt{(-5)^2+0^2+(-2)^2}=\sqrt{29}$.

Задание 3. Даны координаты точек $A(2,1)$, $B(5,-3)$ и $C(3,4)$.

Составить:

а) уравнение стороны AB;

б) уравнения высоты и медианы, проведённых через вершину A;

в) уравнение прямой, проходящей через вершину B и параллельной стороне AC.

Построить треугольник ABC и указанные прямые.

Решение

Уравнение стороны AB – это уравнение прямой, проходящей через две заданные точки A и B.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

$$\frac{x-2}{5-2}=\frac{y-1}{-3-1},\quad \frac{x-2}{3}=\frac{y-1}{-4},$$

$$-4x-3y+11=0,\quad 4x+3y-11=0.$$

Уравнение AB: $4x+3y-11=0$.

Уравнение высоты AF, проведённой из вершины A. Нормальный вектор высоты – это $\vec{n}=\overrightarrow{BC}=(3-2,4+3)$, то есть $\vec{n}(1,7)$. Уравнение прямой, проходящей через заданную точку $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$. $\vec{n}(A,B)$, точка (x_0,y_0) – это точка $A(2,1)$.

$$1\cdot(x-2)+7(y-1)=0.$$

Уравнение высоты: $x+7y-9=0$.

Уравнение медианы: найдём середину отрезка BC, точку K.

$$x_K=\frac{x_B+x_C}{2},\ y_K=\frac{y_B+y_C}{2},$$

$$x_K=\frac{5+3}{2}=4,\ y_K=\frac{-3+4}{2}=\frac{1}{2}.$$

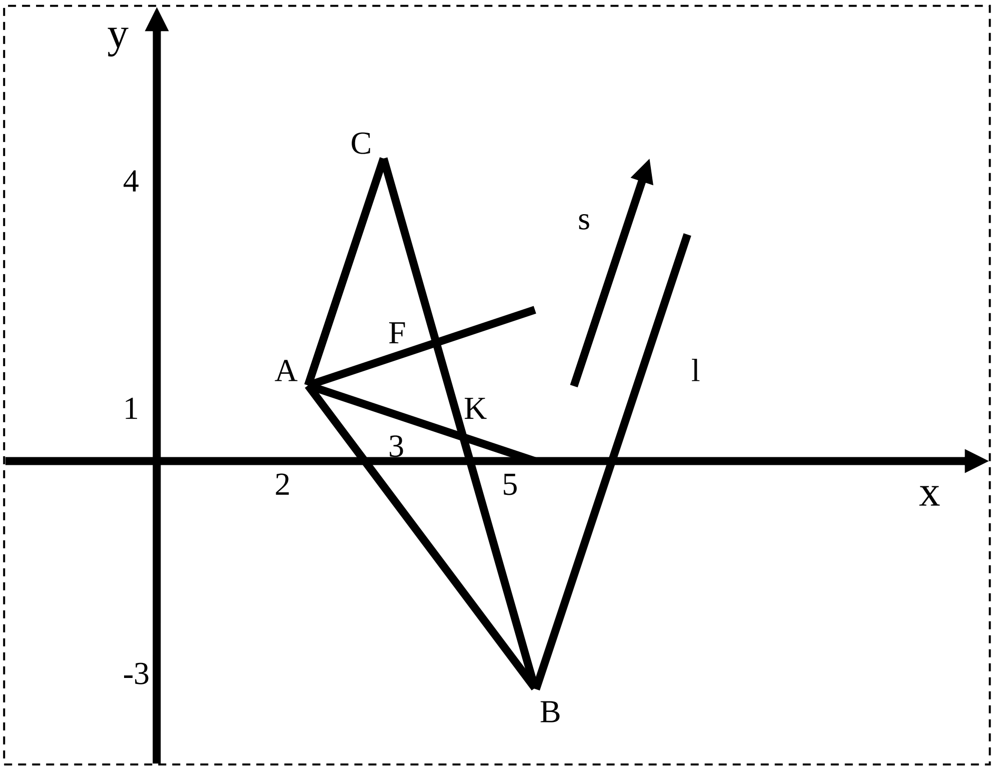

Рис. 1. **Геометрическая иллюстрация решения**

AK – прямая, проходящая через две точки: $A(2,1)$ и $K\left(4,\frac{1}{2}\right)$.

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1},$$

$$\frac{x-2}{4-2}=\frac{y-1}{\frac{1}{2}-1},\ \frac{x-2}{2}=\frac{y-1}{-\frac{1}{2}},$$

$$x-2=-4(y-1),\ x-2=-4y+4$$

и, окончательно, $x+4y-6=0$ – уравнение медианы.

Составим уравнение прямой, проходящей через точку $B(5,-3)$, параллельно стороне AC. $\overrightarrow{AC}(3-2,4-1)=\overrightarrow{AC}(1,3)=\vec{s}(m,n)$. Используем каноническое уравнение прямой:

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}, \quad \frac{x-5}{1}=\frac{y+3}{3}.$$

Уравнение прямой l: $3x-y-18=0$.

Задание 4. Составить уравнения эллипса (рис. 2) и гиперболы (рис. 3), если их полуоси равны $a=7$ и $b=4$. Построить эти кривые.

Решение.

Уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, то есть $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{16}=1$.

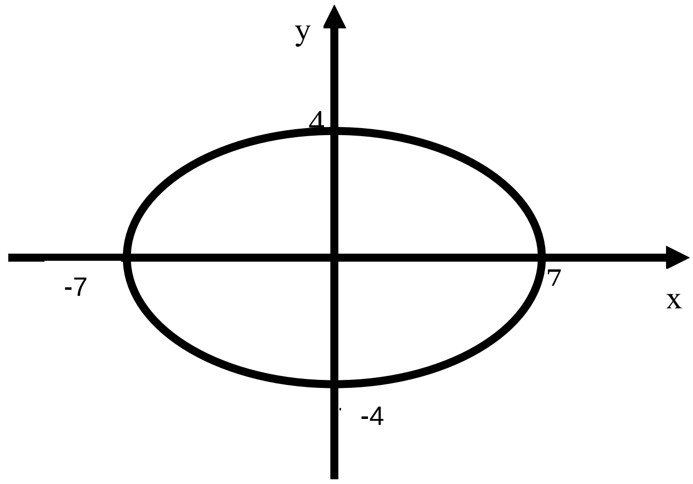

Рис. 2. **Эллипс**

Уравнение гиперболы: $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$, то есть $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{16}=1$.

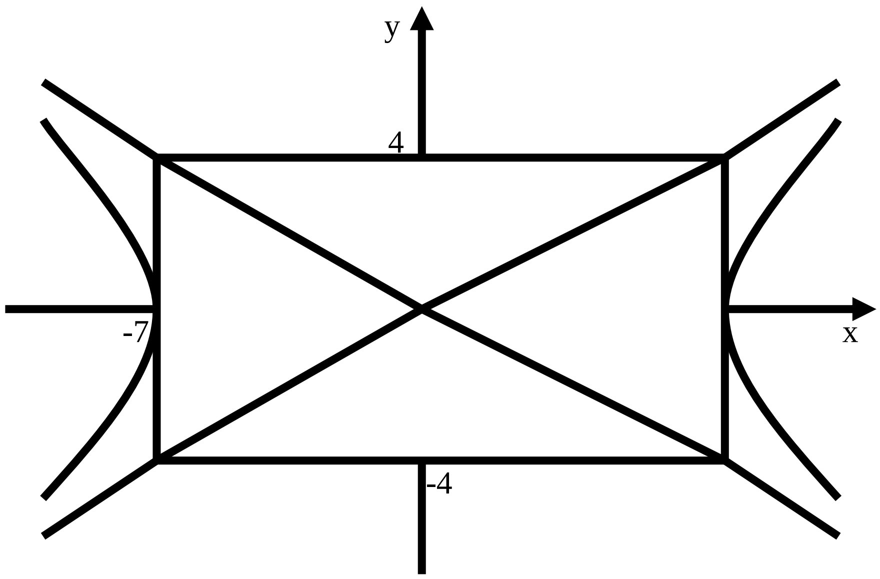

Рис. 3. **Гипербола**

Задание 5. Найти пределы функций.

Решение

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{5x^2+3x-2}{7x^2+x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2\left(5+\dfrac{3}{x}-\dfrac{2}{x^2}\right)}{x^2\left(7+\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x^2}\right)}=\dfrac{5}{7}$;

б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\sqrt{x+4}}{x^2-25}=\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{(x-5)\sqrt{x+4}}{(x-5)(x+5)}=\dfrac{3}{10}=0{,}3$;

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+5x}-1}{8x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(\sqrt{1+5x}-1\right)\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}{8x\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+5x-1}{8x\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x}{8x\left(\sqrt{1+5x}+1\right)}=\dfrac{5}{8\cdot 2}=\dfrac{5}{16}$.

Задание 6. Найти производные функций.

Решение

а) $y=7x^3+5x^2+3x-2$, $y'=7\cdot 3x^2+5\cdot 2x+3=21x^2+10x+3$;

б) $y=\dfrac{5x}{tgx}$, $y'=\dfrac{(5x)'\cdot tgx-5x\cdot(tgx)'}{tg^2x}=\dfrac{5\cdot tgx-\dfrac{5x}{\cos^2 x}}{tg^2x}=$

$=\dfrac{5\cdot tgx\cos^2 x-5x}{tg^2x\cos^2 x}=\dfrac{5\cdot\sin x\cos x-5x}{\sin^2 x}=5\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin 2x-x}{\sin^2 x}=$

$=5\cdot\dfrac{\dfrac{1}{2}\sin 2x-x}{\sin^2 x}=\dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{\sin 2x-2x}{\sin^2 x}$;

в) $y=x\cdot 7^x$, $y'=(x)'\cdot 7^x+x\cdot\left(7^x\right)'=7^x+x\cdot 7^x\ln 7=7^x\left(1+x\cdot\ln 7\right)$;

г) $y=2^{-x^5}$, $y'=2^{-x^5}\cdot\ln 2\cdot\left(-5x^4\right)$.

Задание 7. Вычислить неопределённые интегралы.

Решение

а) $\int\left(x^2+2x-5\right)dx=\dfrac{x^3}{3}+2\cdot\dfrac{x^2}{2}-5x+C=\dfrac{1}{3}x^3+x^2-5x+C$;

б) $\int x^2\ln x dx=\begin{vmatrix}\ln x=u & x^2dx=dv\\ du=\dfrac{1}{x}dx & v=\dfrac{x^3}{3}\end{vmatrix}=$

Формула интегрирования по частям: $\int udv = uv - \int vdu$. Так как $\ln x$ – трансцендентная функция сама по себе не интегрируется, её обозначаем через u, а $x^2dx = dv$. $= \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^3\cdot\ln x}{3} - \frac{1}{3}\int x^2dx = = \frac{x^3\cdot\ln x}{3} - \frac{1}{3}\cdot\frac{x^3}{3} + C$;

в) $\int tg^4x\frac{dx}{\cos^2 x} = \left|\begin{matrix}\frac{1}{\cos^2 x} = (tgx)' \\ tgx = t\end{matrix}\right| = \int t^4dt = \frac{t^5}{5} + C = \frac{(tgx)^5}{5} + C$.

Задание 8. Вероятность сдачи экзамена для первого студента $p_1 = 0,7$, для второго – $p_2 = 0,4$, для третьего – $p_3 = 0,2$. Какова вероятность того, что:

а) все три студента сдадут экзамен;

б) только один студент сдаст экзамен;

в) хотя бы один студент сдаст экзамен.

Решение

Построим событие A:

а) $A = A_1A_2A_3$, $p(A_1) = p_1\cdot p_2\cdot p_3 = 0,7\cdot 0,4\cdot 0,2 = 0,056$;

б) $A = A_1\overline{A_2}\,\overline{A_3} + \overline{A_1}A_2\overline{A_3} + \overline{A_1}\,\overline{A_2}A_3$, где $\overline{A_i}$ – противоположное событие, $p(\overline{A_i}) = q_i = 1 - p_i$. $p(A_1) = p_1\cdot q_2\cdot q_3 + q_1\cdot p_2\cdot q_3 + q_1\cdot q_2\cdot p_3 = 0,7\cdot 0,6\cdot 0,8 + +0,3\cdot 0,4\cdot 0,8 + 0,3\cdot 0,6\cdot 0,2 = 0,336 + 0,096 + 0,036 = 0,468$;

в) Построим противоположное событие: ни один студент не сдаст экзамен $\overline{A} = \overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$, $p(\overline{A}) = q_1\cdot q_2\cdot q_3 = 0,3\cdot 0,6\cdot 0,8 = 0,144$, тогда $p(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - 0,144 = 0,856$, то есть с надежностью $85,6$ % можно утверждать, что хотя бы один студент сдаст экзамен.

Задание 9. Из генеральной совокупности извлечена выборка объёма $n = 20$. Найти $\overline{x}$ (выборочную среднюю), S_x^2 – исправленную выборочную дисперсию, S_x – исправленное среднеквадратическое отклонение.

x_i	0	2	4	6	8
m_i	3	5	7	3	2

Решение

Выборочная средняя:

$$\overline{x} = \frac{\sum_i x_im_i}{\sum_i m_i} = \frac{0\cdot 3 + 2\cdot 5 + 4\cdot 7 + 6\cdot 3 + 8\cdot 2}{20} = \frac{72}{20} = 3,6.$$

$$\sigma_x^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2,$$

$$\overline{x^2} = \frac{0^2 \cdot 3 + 2^2 \cdot 5 + 4^2 \cdot 7 + 6^2 \cdot 3 + 8^2 \cdot 2}{20} = \frac{20 + 112 + 108 + 128}{20} =$$

$$= \frac{368}{20} = 18,4,$$

$$\sigma_x^2 = 18,4 - \left(3,6\right)^2 = 5,44,$$

исправленная выборочная дисперсия:

$$S_x^2 = \frac{n}{n-1}\sigma_x^2 = \frac{20}{19} \cdot 5,44 = 5,73,$$

исправленное среднеквадратическое отклонение:

$$S_x = \sqrt{5,73} = 2,4.$$

Задание 10. Задана функция цели и система ограничений. Решить задачу линейного программирования графическим методом.

$$z = 2x_1 + x_2 \ \left(\min\right) \ \left(\max\right),$$

$$\begin{cases} l_1: \ x_1 + 2x_2 \ge 2; \\ l_2: \ x_1 - x_2 \le 4; \\ l_3: \ 2x_1 + x_2 \ge 4; \\ l_4: \ x_1 + x_2 \le 6; \\ l_5: \ x_2 \le 4; \\ x_1, x_2 \ge 0. \end{cases}$$

Решение

Найдём точки пересечения линий с осями координат:

l_1: $x_1 + 2x_2 = 2$,
a) $x_1 = 0$, $x_2 = 1$;
b) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

l_2: $x_1 - x_2 = 4$,
a) $x_1 = 0$, $x_2 = -4$;
b) $x_1 = 4$, $x_2 = 0$.

l_3: $2x_1 + x_2 = 4$,
a) $x_1 = 0$, $x_2 = 4$;
b) $x_1 = 2$, $x_2 = 0$.

l_4: $x_1 + x_2 = 6$,
a) $x_1 = 0$, $x_2 = 6$;
b) $x_1 = 6$, $x_2 = 0$.

l_5: $x_2 = 4$ – прямая, параллельная оси Ox_1

Построим область планов. Подставим в неравенства точку $\left(0,0\right)$ и определим, в какую сторону от каждой прямой будет область планов:

a) l_1: $0 + 2 \cdot 0 > 2$ – неравенство ложное, то есть область планов направлена в ту сторону, где нет точки $\left(0,0\right)$;

b) l_2: $0 - 0 < 4$ – неравенство истинное, то есть область планов направлена в ту сторону, где находится точка $\left(0,0\right)$;

c) l_3: $2 \cdot 0 + 0 > 4$ – неравенство ложное, то есть область планов направлена в ту сторону, где нет точки $(0,0)$;

d) l_4: $0 + 0 < 6$ – неравенство истинное, то есть область планов направлена в ту сторону, где есть точка $(0,0)$;

e) l_5: $0 < 4$ – неравенство истинное, то есть область планов направлена в ту сторону, где есть точка $(0,0)$;

Заштрихуем область планов. Построим вектор $\overrightarrow{N} = grad\ z = \frac{\partial z}{\partial x_1} \cdot \vec{i} + \frac{\partial z}{\partial x_2} \cdot \vec{j} = 2\vec{i} + \vec{j}$. Перпендикулярно вектору $\overrightarrow{N}$ проводим линию уровня l и перемещаем её вдоль вектора $\overrightarrow{N}$ параллельно себе пока она станет опорной к многоугольнику планов, точка входа в область – точка минимума, точка выхода из области – точка максимума (рис. 4).

$$x_{\min}(0,4),\ z_{\min} = 2 \cdot 0 + 4 = 4.$$

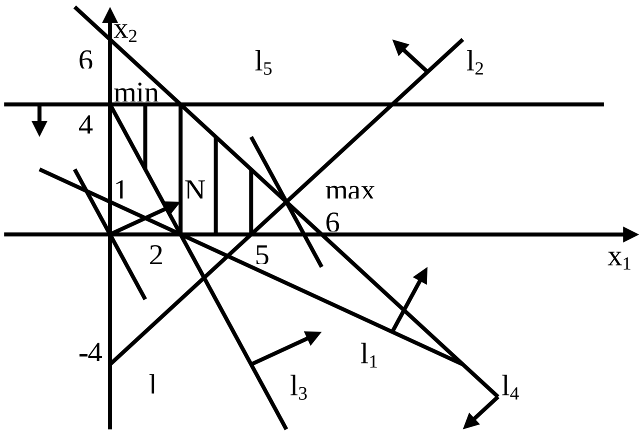

Рис. 4. **Область планов**

Чтобы найти точку максимума, решим систему уравнений (l_2, l_4):

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = 4; \\ x_1 + x_2 = 6; \end{cases} \begin{cases} x_1 = 5; \\ x_2 = 1. \end{cases}$$

Итак, $x_{\max}(5,1)$, $z_{\max} = 2 \cdot 5 + 1 = 11$.

Задание 11. Имеется три поставщика: A_1, A_2 и A_3, у которых сосредоточены грузы: $a_1 = 70$, $a_2 = 40$, $a_3 = 40$ соответственно и четыре потребителя: B_1, B_2, B_3, B_4, которым требуются эти грузы в количестве: $b_1 = 35$,

$b_2 = 25$, $b_3 = 43$, $b_4 = 47$. Составить план перевозки грузов от поставщиков к потребителям с минимальными затратами. Матрица C – стоимости перевозок единицы груза.

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 4 & 2 \\ 1 & 6 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение

Таблица 2

Исходный опорный план

потр. пост.	B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
A_1	$0\ \lfloor 3$	$23\ \lfloor 5$	$0\ \lfloor 4$	$47\ \lfloor 2$	70
A_2	$35\ \lfloor 1$	$2\ \lfloor 6$	$3\ \lfloor 3$	$0\ \lfloor 4$	40
A_3	$0\ \lfloor 3$	$0\ \lfloor 3$	$40\ \lfloor 1$	$0\ \lfloor 5$	40
b_j	35	25	43	47	$150 \backslash 150$

Составим исходный опорный план по методу минимальной стоимости (табл. 2).

$$\sum_{i=1}^{3} a_i = 70 + 40 + 40 = 150, \qquad \sum_{j=1}^{4} b_j = 35 + 25 + 43 + 47 = 150. \qquad \sum_{i=1}^{3} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j,$$

значит модель закрытая, можно строить исходный опорный план.

Клетки заполняем в такой последовательности: $(A_2B_1, A_3B_3, A_1B_4, A_2B_3, A_1B_2, A_2B_2)$, груз 35 единиц послали в клетку A_2B_1, в строке A_2 остаток 5, столбец B_1 закрыт, ставим нули в пустые клетки, груз 40 единиц послали в клетку A_3B_3, в столбце B_3 остаток 3, строка A_3 закрыта, груз 47 единиц посылаем в клетку A_1B_4, в строке A_1 остаток 23, столбец B_4 закрыт, груз 3 единицы посылаем в клетку A_2B_3, в строке A_2 остаток 2, столбец B_3 закрыт, груз 23 единицы посылаем в клетку A_1B_2, в столбце B_2 остаток 2, строка A_1 закрыта и наконец груз 2 единицы посылаем в клетку A_2B_2. Все остатки распределены. Функция цели: $z = 23 \cdot 5 + 47 \cdot 2 + 35 \cdot 1 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 3 + 40 \cdot 1 = 305$ (грн).

Проверим, вырожденная модель или нет. Найдём $rang$ матрицы системы ограничений:

$$rang = m + n - 1 = 3 + 4 - 1 = 6,$$

(m – число поставщиков, n – число потребителей).

Число занятых клеток (ЧЗК) равно 6, то есть $rang = ЧЗК = 6$ – модель невырожденная.

Проверим план на оптимальность. Составим систему потенциалов (табл. 3): u_i – потенциалы поставщика, v_j – потенциалы потребителя.

Таблица 3

Система потенциалов

$u_i \setminus v_j$	$v_1 = 0$	$v_2 = 5$	$v_3 = 2$	$v_4 = 2$
$u_1 = 0$	$0/3$	5	$2/4$	2
$u_2 = 1$	1	6	3	$3/4$
$u_3 = -1$	$-1/3$	$4/3$	1	$1/5$

Критерий оптимальности:

- $u_i + v_j = c_{ij}$, для занятых клеток ($x_{ij} \neq 0$),
- $u_i + v_j \le c_{ij}$, для пустых клеток ($x_{ij} = 0$) или $\Delta_{ij} = (u_i + v_j) - c_{ij} \le 0$, ($c_{ij}$ элемент матрицы C).

По занятым клеткам составляем систему потенциалов, проще это делать в таблице. Задаём $u_1 = 0$.

Так как $u_1 + v_2 = 5$, то $v_2 = 5$, так как $u_1 + v_4 = 2$, то $v_4 = 2$. Так как $u_2 + v_2 = 6$, то $u_2 = 1$; $u_2 + v_1 = 1$, то $v_1 = 0$; $u_2 + v_3 = 3$, $v_3 = 2$; $u_3 + v_3 = 1$, то $u_3 = -1$.

В пустых клетках в знаменатель поставим стоимости, в числитель – сумму потенциалов. Проверим критерий оптимальности: $\Delta_{11} = 0 - 3 < 0$, $\Delta_{13} = 2 - 4 < 0$, $\Delta_{24} = 3 - 4 < 0$, $\Delta_{31} = -1 - 3 < 0$, $\Delta_{34} = 1 - 5 < 0$, $\Delta_{32} = 4 - 3 = 1 > 0$.

В клетке A_3B_2 нарушен критерий оптимальности. Это значит, что в эту клетку надо поставить груз (θ) и провести его по замкнутому циклу, по занятым клеткам (табл. 4). $\theta = \min(2, 40)$, ($\min$ из чисел, из которых груз отнимаем), $\theta = 2$. Перевезём груз (табл. 5) и проверим план на оптимальность.

Таблица 4

Схема перевозок

потр. пост.	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	23	0	47
A_2	35	$2-\theta \lfloor 6$	$3+\theta \lfloor 3$	0
A_3	0	$0+\theta \lfloor 3$	$40-\theta \lfloor 1$	0

Построим новый опорный план (табл. 5).

Таблица 5

Новый опорный план

потр. пост.	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	0	23	0	47
A_2	35	0	5	0
A_3	0	2	38	0

Составим систему потенциалов (табл. 6).

Таблица 6

Новая система потенциалов

$u_i \setminus v_j$	$v_1=0$	$v_2=4$	$v_3=2$	$v_4=1$
$u_1=1$	$1/3$	5	$3/4$	2
$u_2=1$	1	$5/6$	3	$2/4$
$u_3=-1$	$-1/3$	3	1	$0/5$

Все $\Delta_{ij} \leq 0$ – план оптимальный.

$$z_{нов} = z_{исх} - \left|\theta\Delta_{ij}\right|.$$

$$z_{\min} = 305 - 2 \cdot 1 = 303 \text{ (грн).}$$

Минимальные затраты на перевозку груза 303 (грн).

Рекомендованная литература

Основная литература

1. Афанасьева Л. М. Высшая и прикладная математика: учебн. пособ. для иностранных студентов. Ч. 1 / Л. М. Афанасьева, Л. А. Норик. – Х: Изд. ХНЭУ, 2012. – 412 с.

2. Малярец Л. М. Экономико–математические методы и модели: учебн. пособ. для иностранных студентов. / Л. М. Малярец. – Х: Изд. ХНЭУ, 2013. – 288 с.

3. Шевченко А. К. Высшая и прикладная математика. Теория вероятностей и математическая статистика: конспект лекций для иностранных студентов / А. К. Шевченко, Л. А. Норик. – Х. : Изд. ХНЭУ, 2011. – 192 с.

4. Шевченко А. К. Высшая и прикладная математика. Учеб. пособ. для студентов–иностранцев отрасли знаний 0306 "Менеджмент и администрирование". Ч. 2 / А. К. Шевченко, Л. А. Норик. – Х. : Изд. ХНЭУ, 2013. – 404 с.

Дополнительная литература

5. Высшая математика для экономистов: учебн. пособ. для вузов / под ред. проф. Н. Кремера. – М. : Банки и биржи; ЮНИТИ. 1997. – 440 с.

6. Гмурман В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике / В. Е. Гмурман. – М: Высш. шк., 2001. – 576 с.

7. Гмурман В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учебн. пособ. для вузов. – 6-е изд. – М. : Высш. шк., 1998. – 480 с.

8. Исследование операций в экономике: учебн. пособ. / под ред. Н. Ш. Кремера. – М. : Банки и биржи; ЮНИТИ. 1999. – 407 с.

9. Кремер Н. Ш. Теория вероятности и математическая статистика / Н. Ш. Кремер. – М: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 544 с.

НАВЧАЛЬНЕ ВИДАННЯ

Завдання і методичні рекомендації до їх виконання з навчальної дисципліни "ВИЩА І ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА" для іноземних студентів галузей знань 0306 "Менеджмент і адміністрування", 1401 "Сфера обслуговування" заочної форми навчання

(рос. мовою)

Укладачі: **Шевченко** Олександра Кирилівна
Костенко Олексій Володимирович

Відповідальний за випуск **Малярець Л. М.**

Редактор **Лященко О. Г.**

Коректор **Бриль В. О.**

Наведено завдання для контрольних робіт з даної навчальної дисципліни, виконання яких розширить знання студентів з вищої математики, теорії ймовірностей, математичного програмування і дослідження операцій, а також методичні рекомендації до їх виконання.

Рекомендовано для іноземних студентів галузей знань 0306 "Менеджмент та адміністрування", 1401 "Сфера обслуговування" заочної форми навчання.

План 2014 р. Поз. № 244.
Підп. до друку Формат 60 x 90 1/16. Папір MultiCopy. Друк Riso.
Ум.-друк. арк. 1,75. Обл.-вид. арк. 2,19. Тираж прим. Зам. №

Видавець і виготівник – видавництво ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 61166, м. Харків, пр. Леніна, 9а

Свідоцтво про внесення до Державного реєстру суб'єктів видавничої справи
Дк № 481 від 13.06.2001 р.